数楽 から 数学へ

早稲田大学 教育学部 数学科

谷山公規

2024年12月16日 早稲田摂陵高等学校

13:20 ~ 14:10

14:20 ~ 15:10

13:20 ~ 14:10

§1 142857の秘密

@不動点を視る（グラス・パターン）

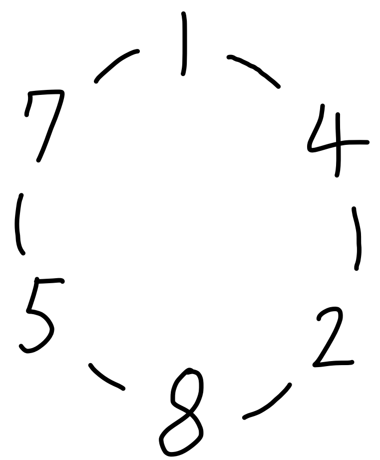
14:20 ~ 15:10

§2 知恵の輪のトポロジー

@微分幾何体操

§1 142857の秘密

142857	$\times$	1	=	142857
〃	$\times$	2	=	285714
〃	$\times$	3	=	428571
〃	$\times$	4	=	571428
〃	$\times$	5	=	714285
〃	$\times$	6	=	857142
〃	$\times$	7	=	999999



ダイヤル数

巡回数

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.142857142857142857\cdots$$

$$\begin{array}{r} 0.142857 \\ 7\,\overline{)\,1} \\ 0 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r} 0.285714 \\ 7\,\overline{)\,2} \\ 0 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\underbrace{142857}_{\times 2}\underbrace{142857}_{\times 2}\underbrace{142857}_{\times 2}\cdots$$

$$\downarrow \times 2$$

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = 0.\overbrace{285714}\overbrace{285714}\overbrace{285714}\cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\underbrace{142857}_{\times 7}\underbrace{142857}_{\times 7}\underbrace{142857}_{\times 7}\cdots$$

$$\downarrow \times 7$$

$$1 = \frac{7}{7} = 0.\dot{9} = 0.\overbrace{999999}\overbrace{999999}\overbrace{999999}\cdots$$

注 $1 \overset{?}{=} 0.\dot{9} = 0.999999999999999999\cdots$

$a_1 = 0.9, \quad a_2 = 0.99, \quad a_3 = 0.999, \cdots$

i.e. $\begin{cases} a_1 = 0.9 \\ a_{n+1} = a_1 + \dfrac{1}{10} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

としたとき $0.\dot{9} = \lim_{n \to \infty} a_n$ と考えれば, $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$ より

$1 = 0.\dot{9} = 0.999999999999999999\cdots$

は正しい式である。

$142857 \times 1 = 142857$

〃 $\times 3 = 428571$

〃 $\times 2 = 285714$

〃 $\times 6 = 857142$

〃 $\times 4 = 571428$

〃 $\times 5 = 714285$

$$
\begin{array}{r}
0.076923 \\
13\,\overline{)\,1} \\
\underline{0} \\
10 \\
\underline{0} \\
100 \\
\underline{91} \\
90 \\
\underline{78} \\
120 \\
\underline{117} \\
30 \\
\underline{26} \\
40 \\
\underline{39} \\
1
\end{array}
$$

$$\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$$

$$
\begin{array}{lcl}
076923 \times 1 & = & 076923 \\
\text{〃} \times 10 & = & 769230 \\
\text{〃} \times 9 & = & 692307 \\
\text{〃} \times 12 & = & 923076 \\
\text{〃} \times 3 & = & 230769 \\
\text{〃} \times 4 & = & 307692
\end{array}
$$

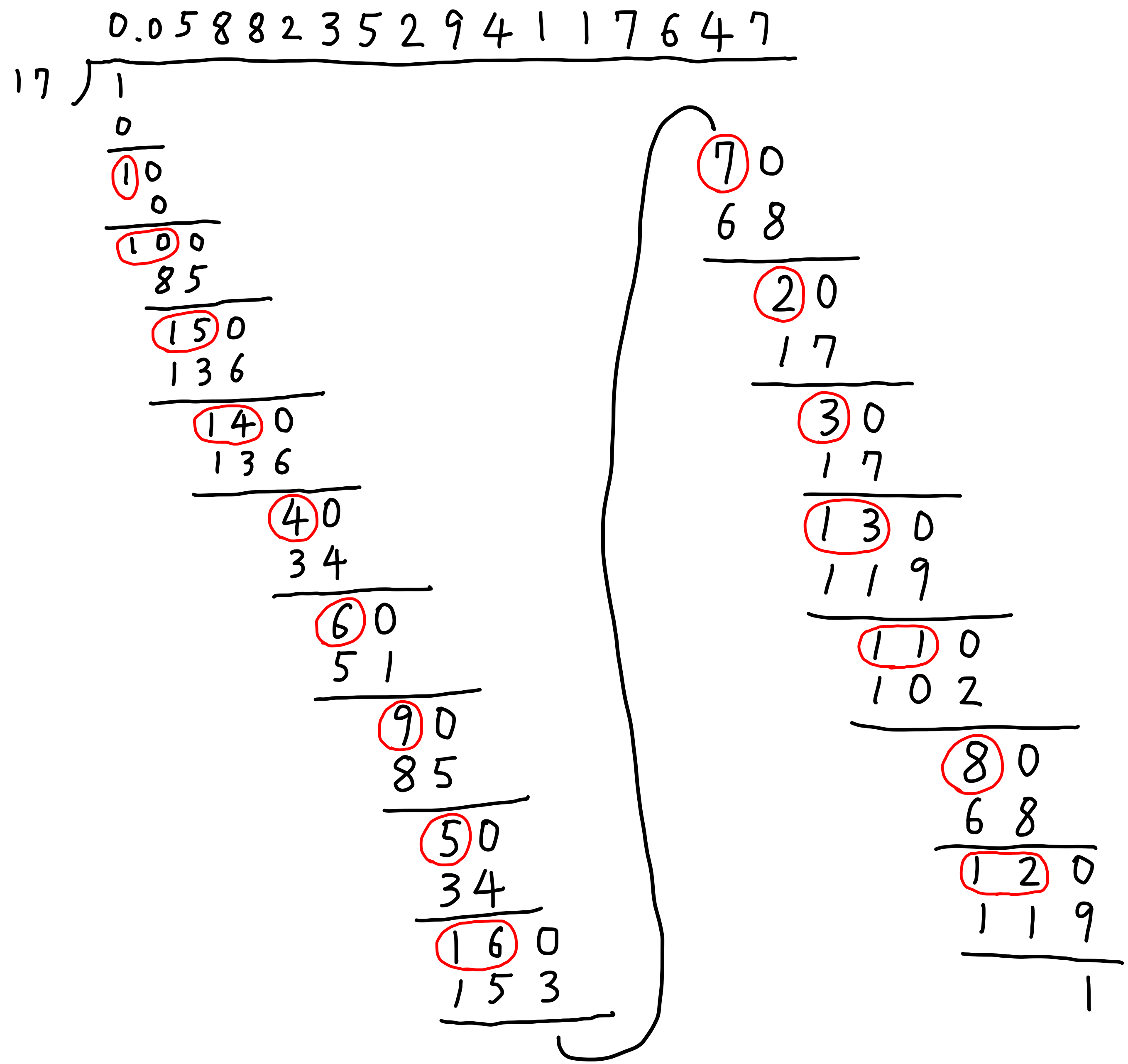
$$
\begin{array}{r}
0.153846 \\
13\,\overline{)\,2} \\
0 \\
\hline
20 \\
13 \\
\hline
70 \\
65 \\
\hline
50 \\
39 \\
\hline
110 \\
104 \\
\hline
60 \\
52 \\
\hline
80 \\
78 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$$\frac{2}{13} = 0.\dot{1}5384\dot{6}$$

$$
\begin{array}{lcl}
76923 \times 2 & = & 153846 \\
\text{〃} \times 7 & = & 538461 \\
\text{〃} \times 5 & = & 384615 \\
\text{〃} \times 11 & = & 846153 \\
\text{〃} \times 6 & = & 461538 \\
\text{〃} \times 8 & = & 615384
\end{array}
$$

$$76923 \times 13 = 999999$$

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$$



$$
\begin{array}{rr}
0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7 \times & 1 = 0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 10 = 5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 15 = 8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 14 = 8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 4 = 2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 6 = 3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 9 = 5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 5 = 2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 16 = 9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 7 = 4\,1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 2 = 1\,1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 3 = 1\,7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 13 = 7\,6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 11 = 6\,4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 8 = 4\,7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 12 = 7\,0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4 \\
\text{''} \qquad\qquad & \times 17 = 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9
\end{array}
$$

$$\frac{1}{7} = 0.\underbrace{\dot{1}4285\dot{7}}_{6=7-1} \qquad \frac{1}{13} = 0.\underbrace{\dot{0}7692\dot{3}}_{6=(13-1)/2}$$

$$\frac{1}{17} = 0.\underbrace{\dot{0}58823529411764\dot{7}}_{16=17-1}$$

@ 一般に素数 $P \neq 2, 5$ について $\frac{1}{P}$ の循環節の長さを考える。

$$\frac{1}{2} = 0.5 \ , \ \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{3} = 0.\underbrace{\dot{3}}_{1=(3-1)/2} \qquad \frac{1}{11} = 0.\underbrace{\dot{0}\dot{9}}_{2=(11-1)/5}$$

$$\frac{1}{19} = 0.\underbrace{\dot{0}5263157894736842\dot{1}}_{18=19-1}$$

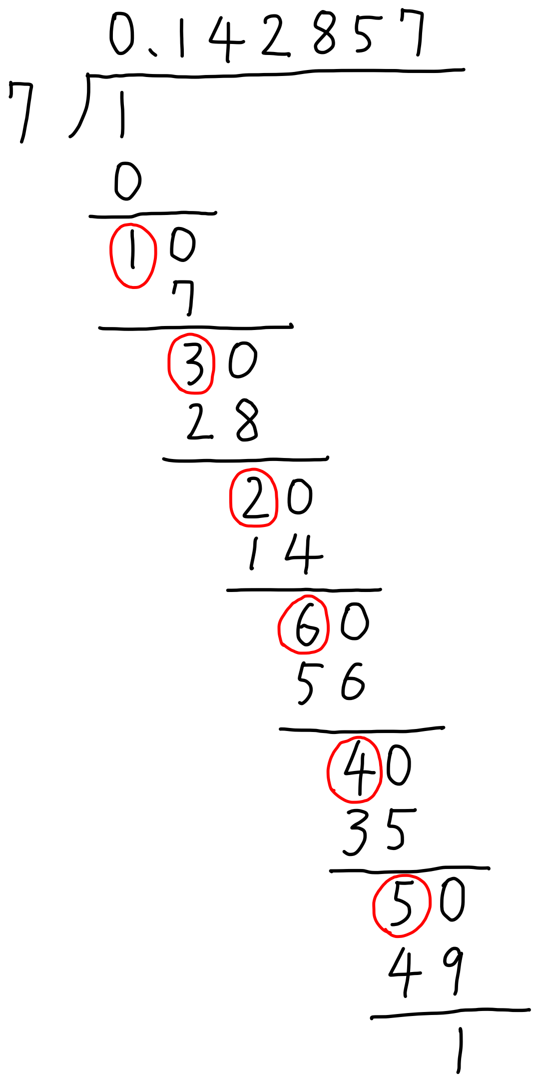
定理 p：素数，$p \neq 2, 5$

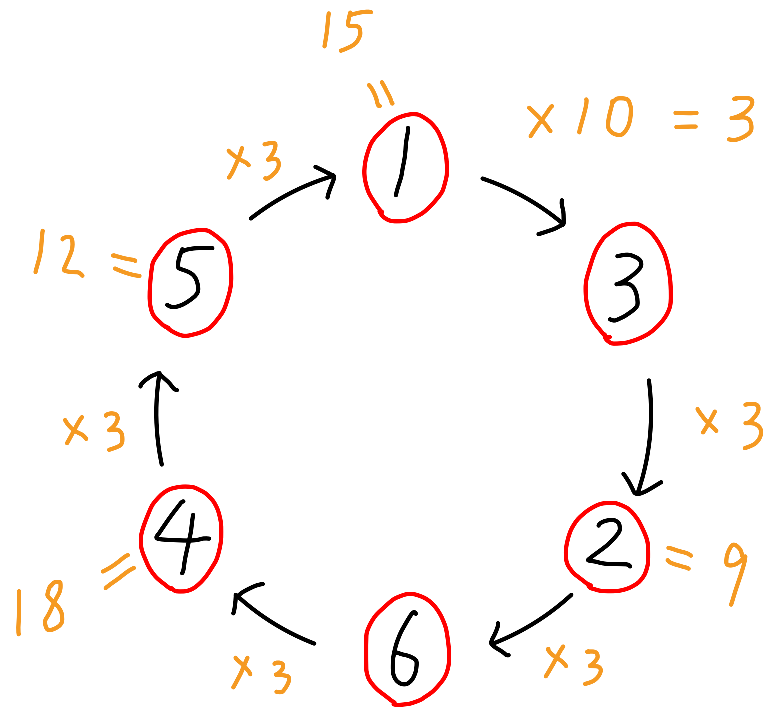
$\frac{1}{p}$ を循環小数で表したときの循環節の長さは

$p-1$ の約数である。

未解決問題 循環節の長さが $p-1$ となる

素数 p は無限個あるか？



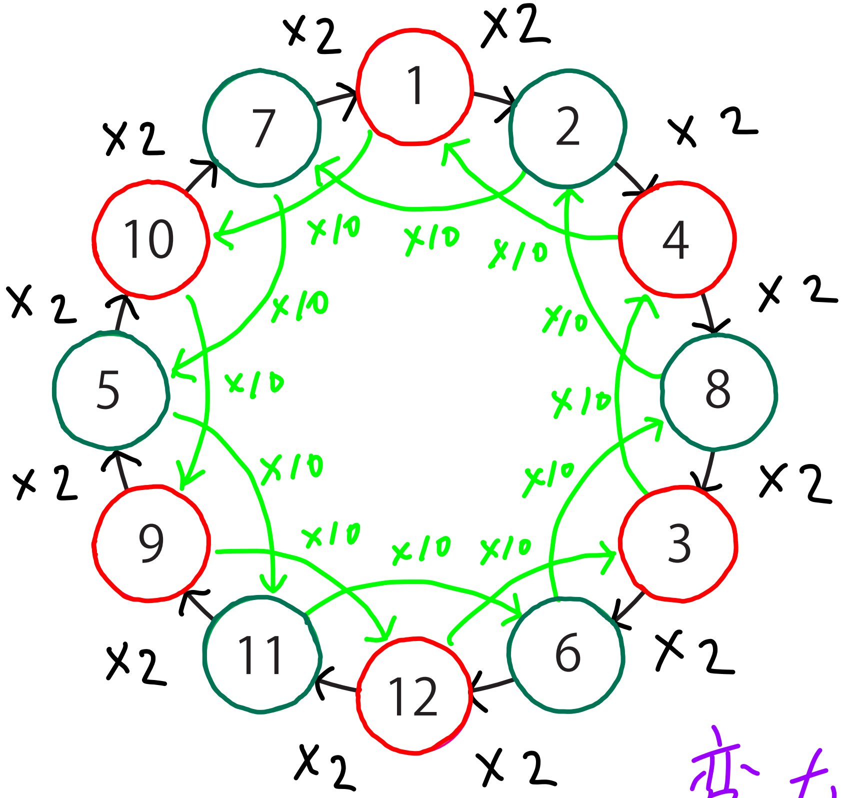


$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$

$\boxed{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \text{における } 10 = 3 \text{ の位数は } 6\text{。}}$

$$
\begin{array}{r}
0.076923 \\
13\,\overline{)\,1} \\
0 \\
\hline
10 \\
0 \\
\hline
100 \\
91 \\
\hline
90 \\
78 \\
\hline
120 \\
117 \\
\hline
30 \\
26 \\
\hline
40 \\
39 \\
\hline
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0.153846 \\
13\,\overline{)\,2} \\
0 \\
\hline
20 \\
13 \\
\hline
70 \\
65 \\
\hline
50 \\
39 \\
\hline
110 \\
104 \\
\hline
60 \\
52 \\
\hline
80 \\
78 \\
\hline
2
\end{array}
$$

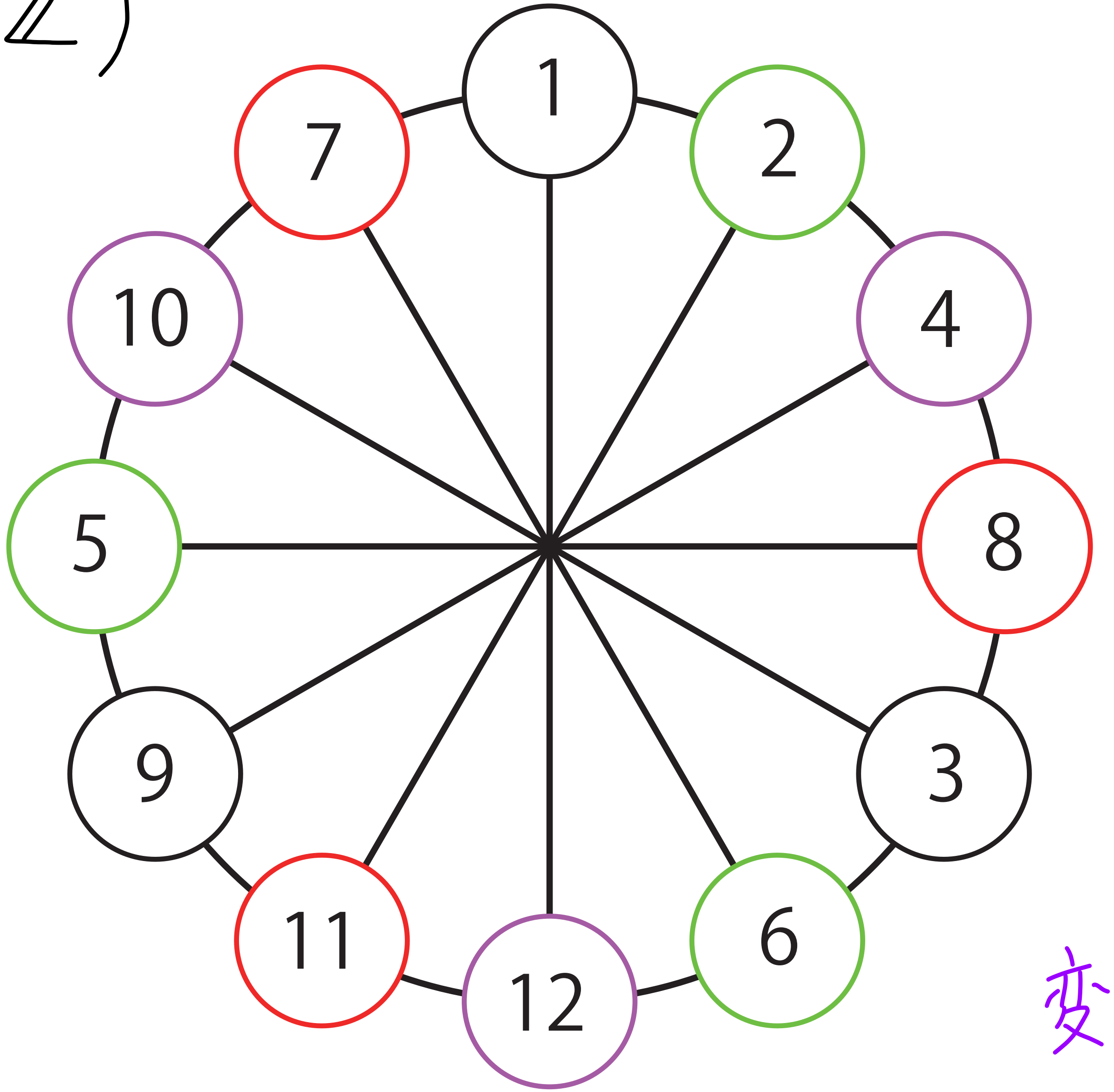
$(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$



変な時計

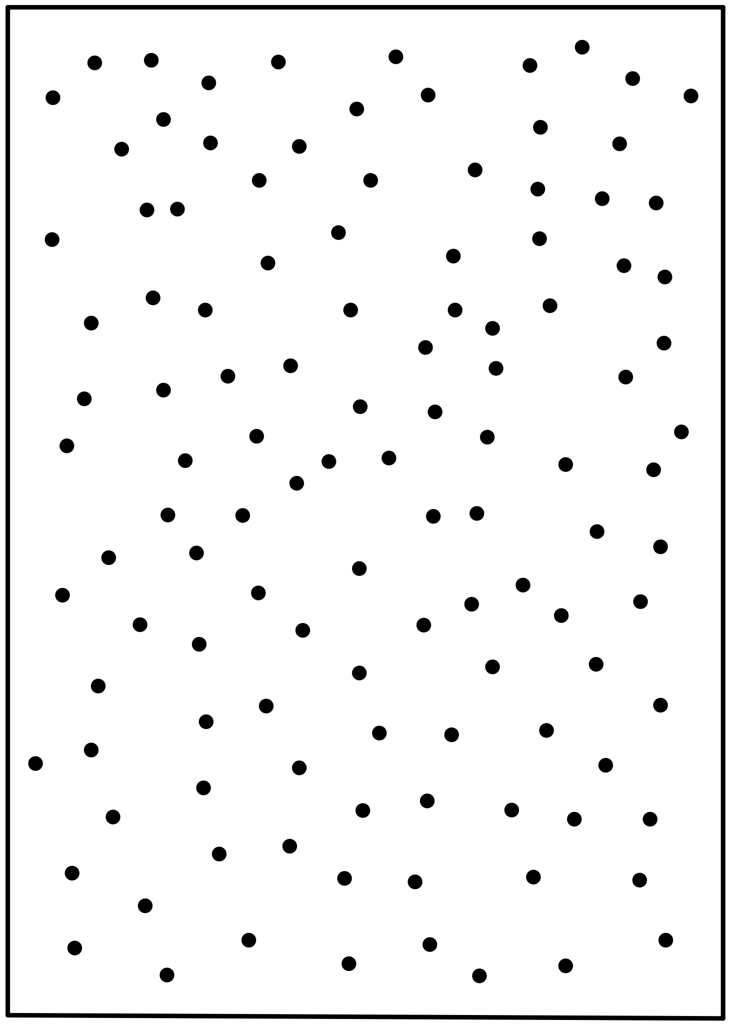
$\boxed{(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \text{における } 10 \text{ の位数は } 6}$

$$(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$$

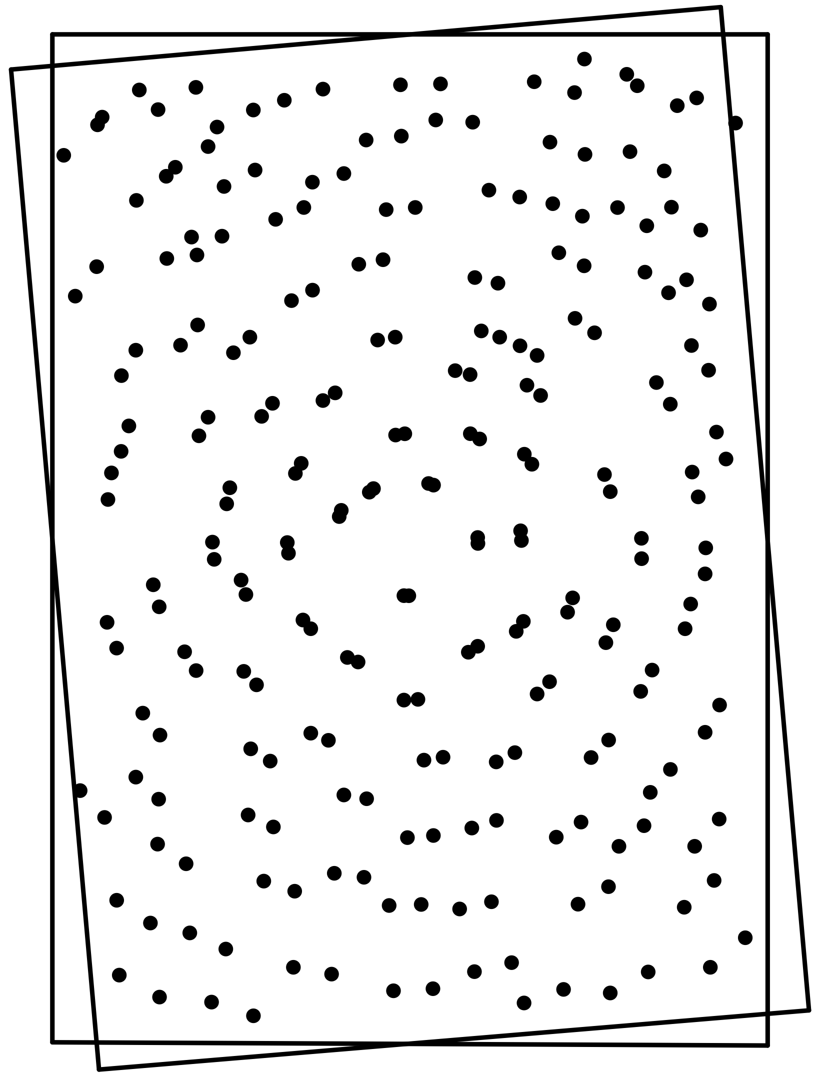


変な時計

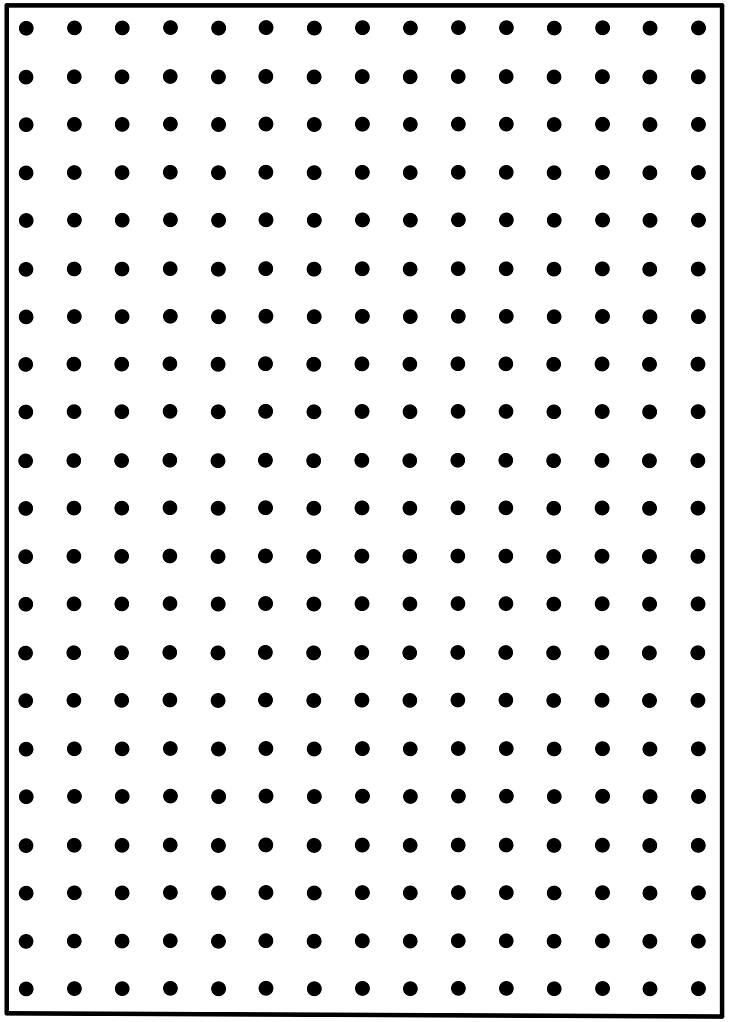
@不動点を視る（グラス・パターン）



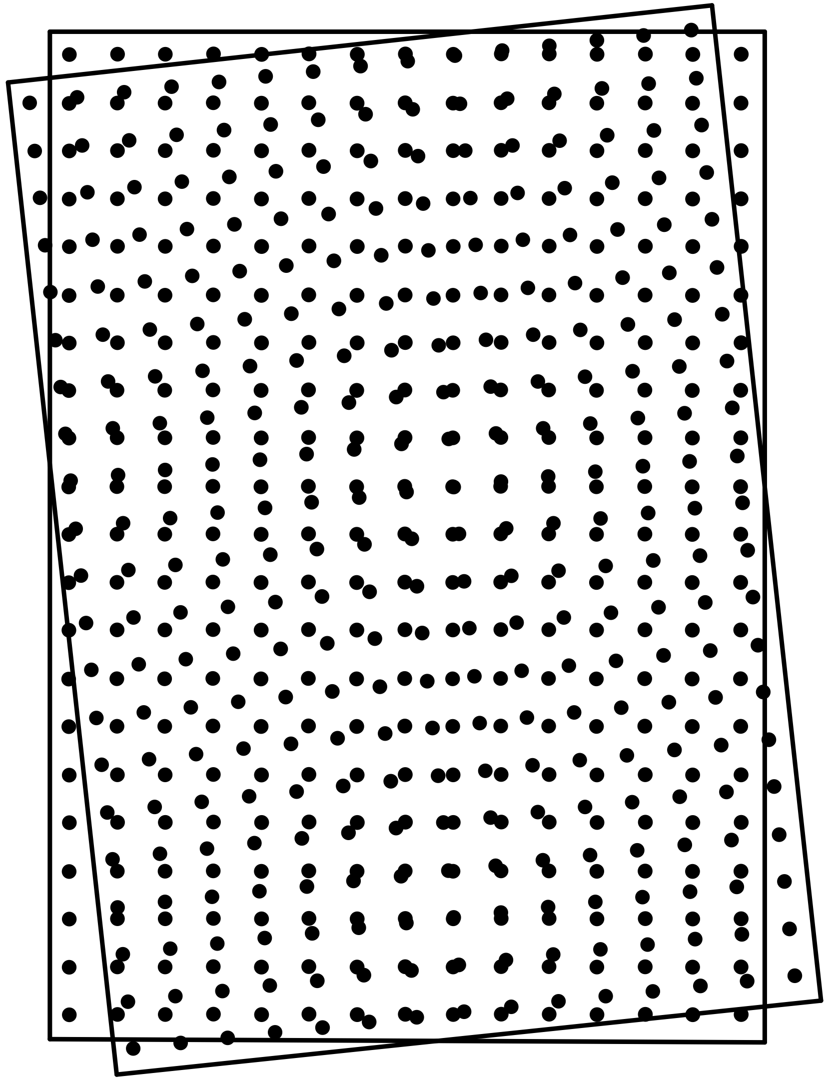
ランダムドットパターン



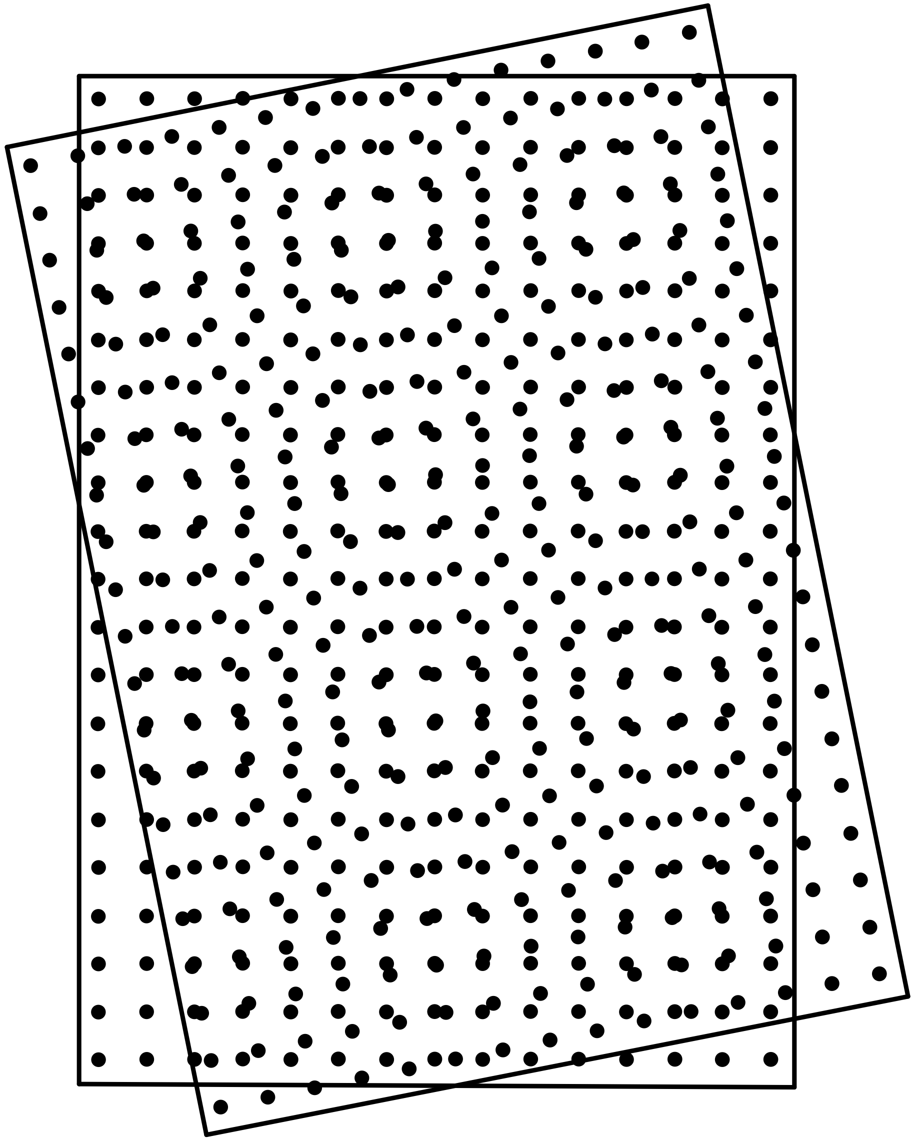
回転の中心＝不動点



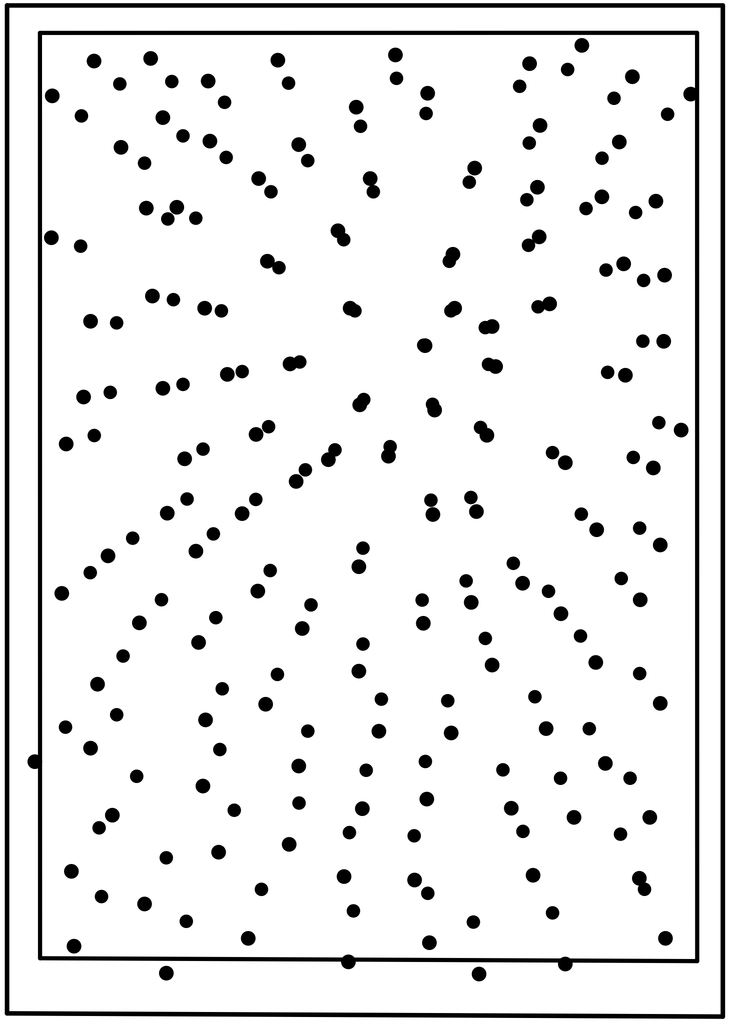
レギュラードットパターン



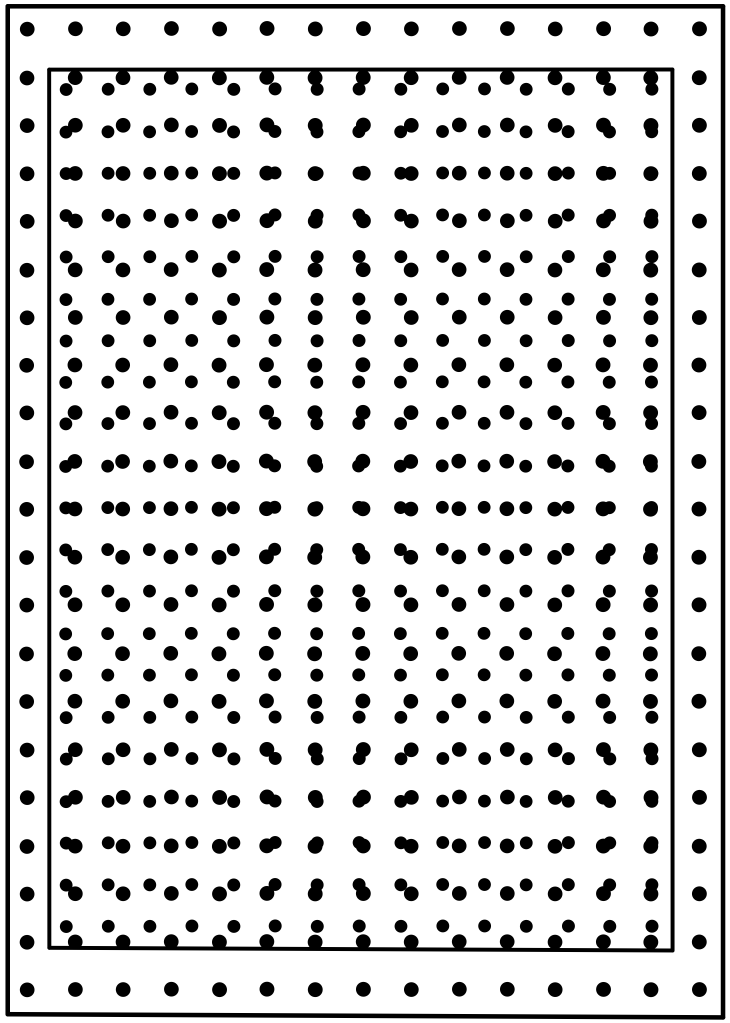
回転の中心＝不動点 と
見かけ上の回転の中心



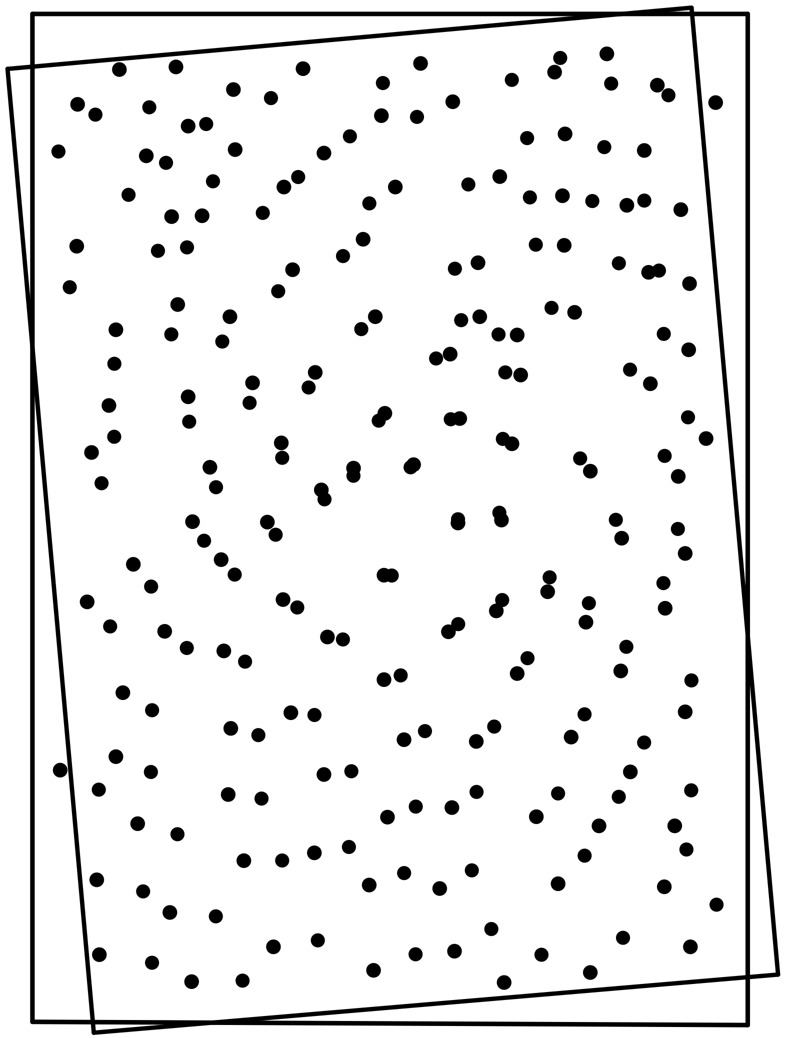
回転の中心＝不動点 と
見かけ上の回転の中心



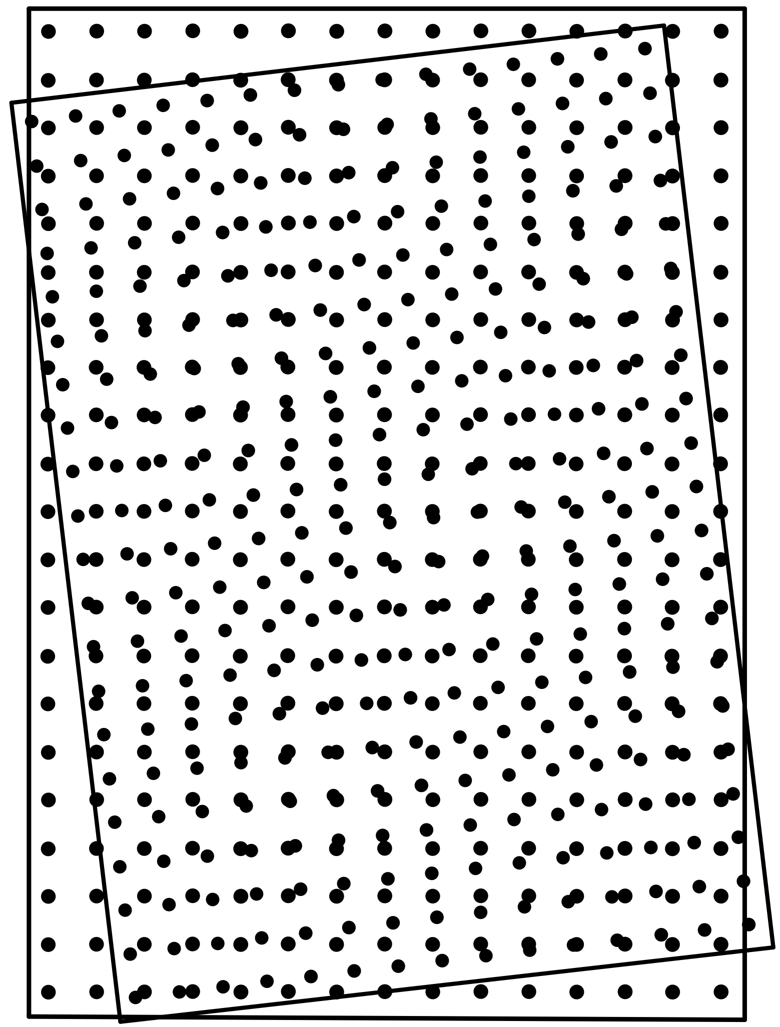
縮小の中心＝不動点



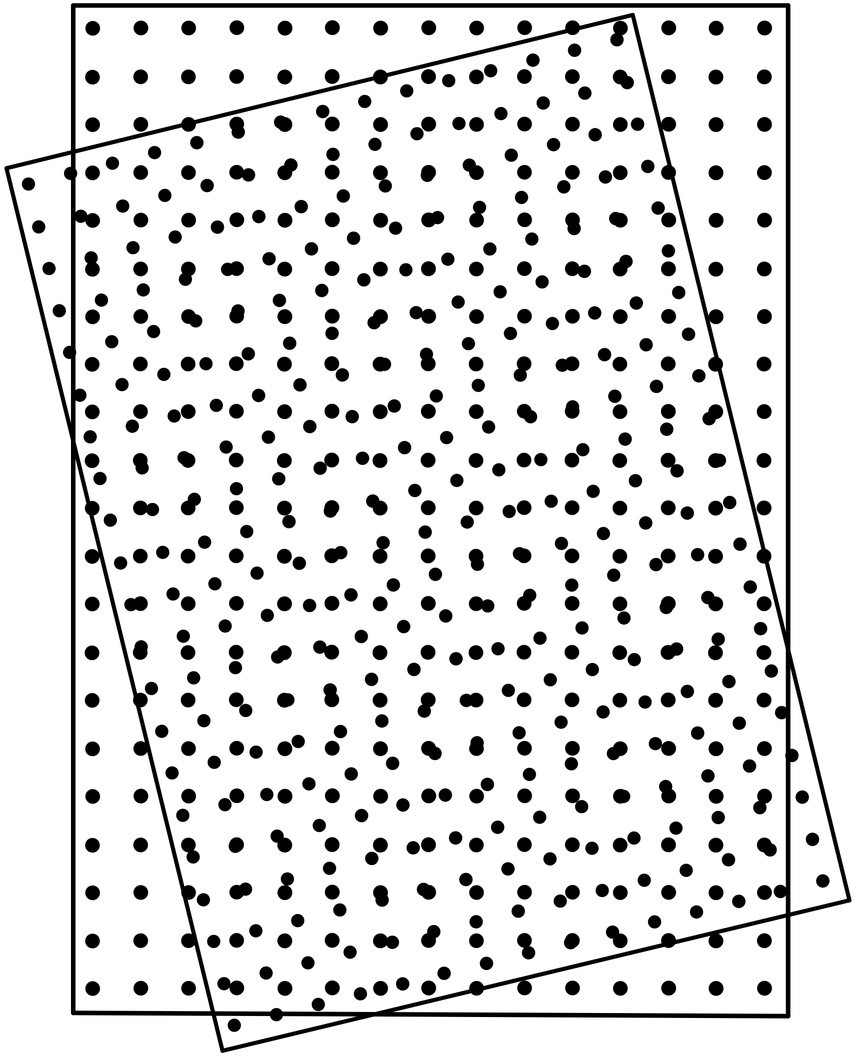
縮小の中心＝不動点
と見かけ上の縮小の中心



縮小回転の中心＝不動点

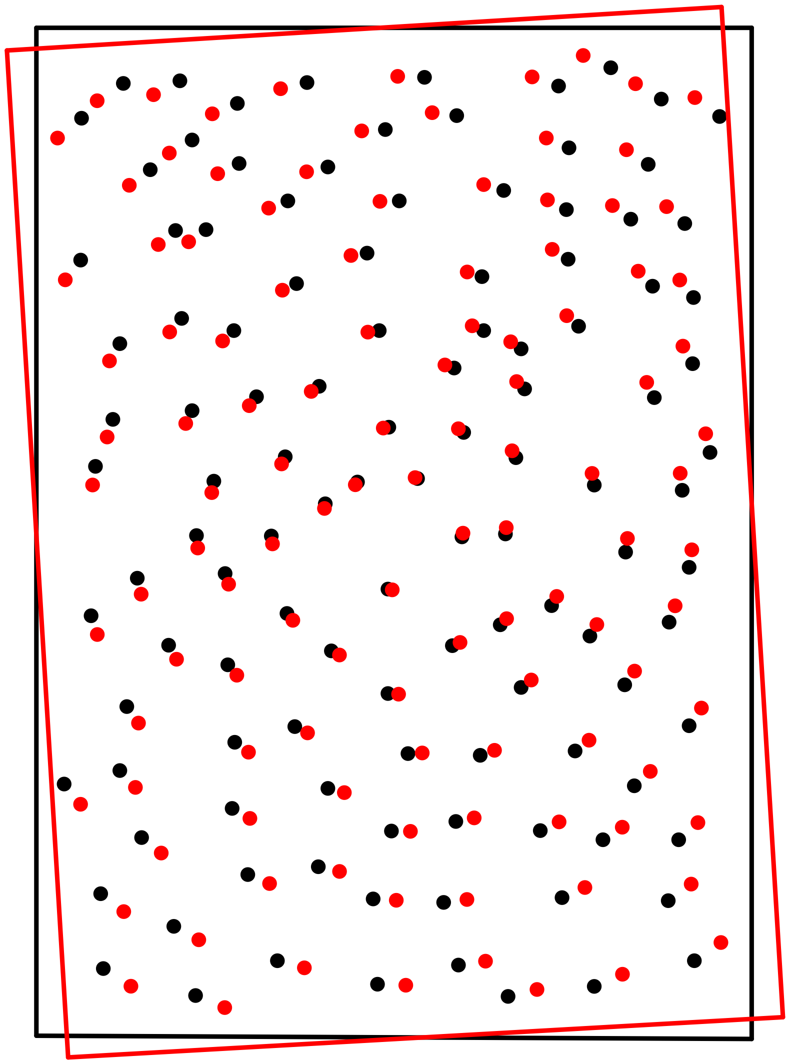


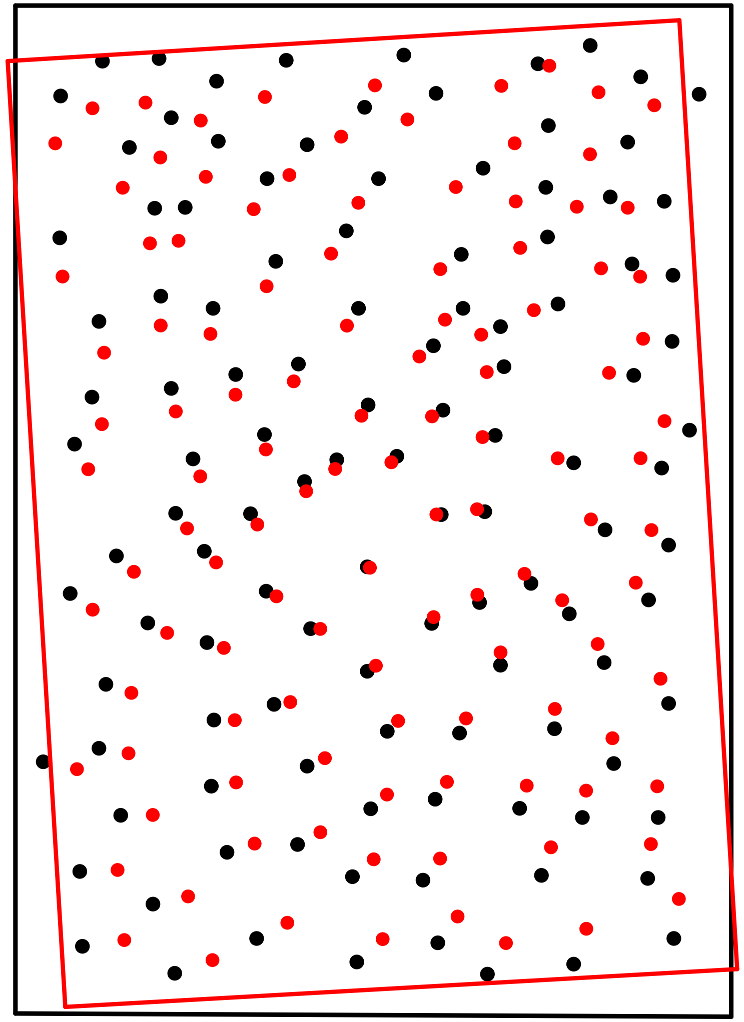
縮小回転の中心＝不動点、と
見かけ上の縮小回転の中心



縮小回転の中心＝不動点、と
見かけ上の縮小回転の中心

同心円や螺旋が見える訳。

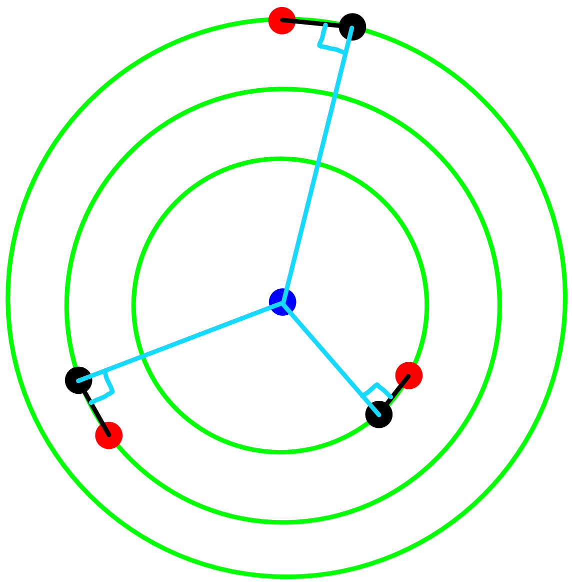




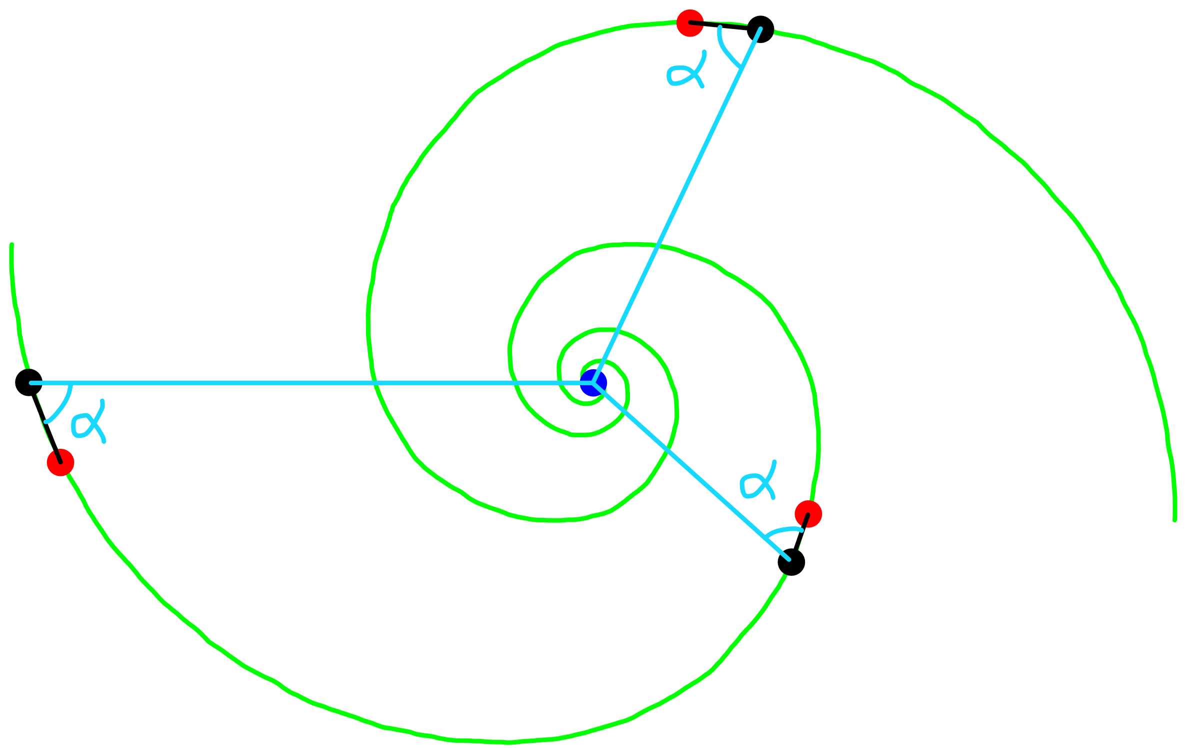
 を  と認識

ベクトル

◎定点(不動点)に直交する平面ベクトル場の積分曲線は円。

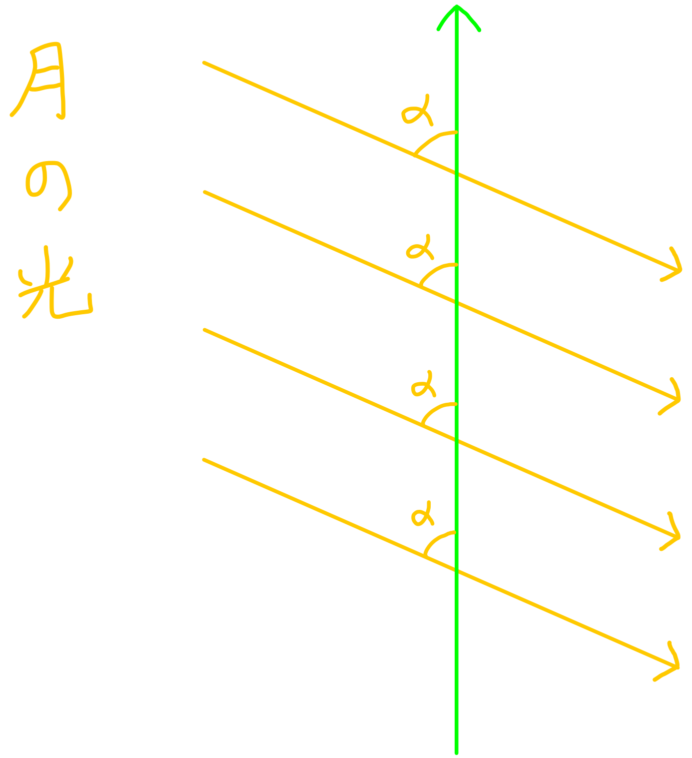


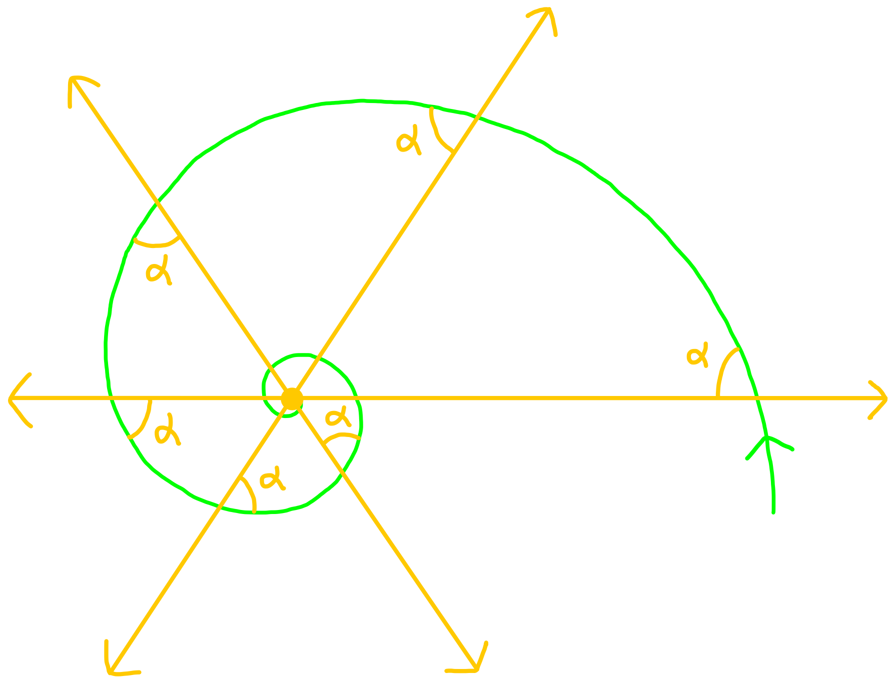
定点(不動点)に一定角度を保つ平面ベクトル場の積分曲線は対数螺旋。



@虫が電灯に集まる理由

虫はまっすぐに飛ぶために，月の光（平行光線）に対して一定角度で飛ぶ習性がある。電灯の光を月の光と誤認して一定角度で飛ぶため，意図に反して曲がり，電灯に近づいてしまう。





参考サイト

グラス・パターンについて

http://www.scholarpedia.org/article/Glass_patterns

西山豊先生の記事

http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math2010j/fixed_j.pdf

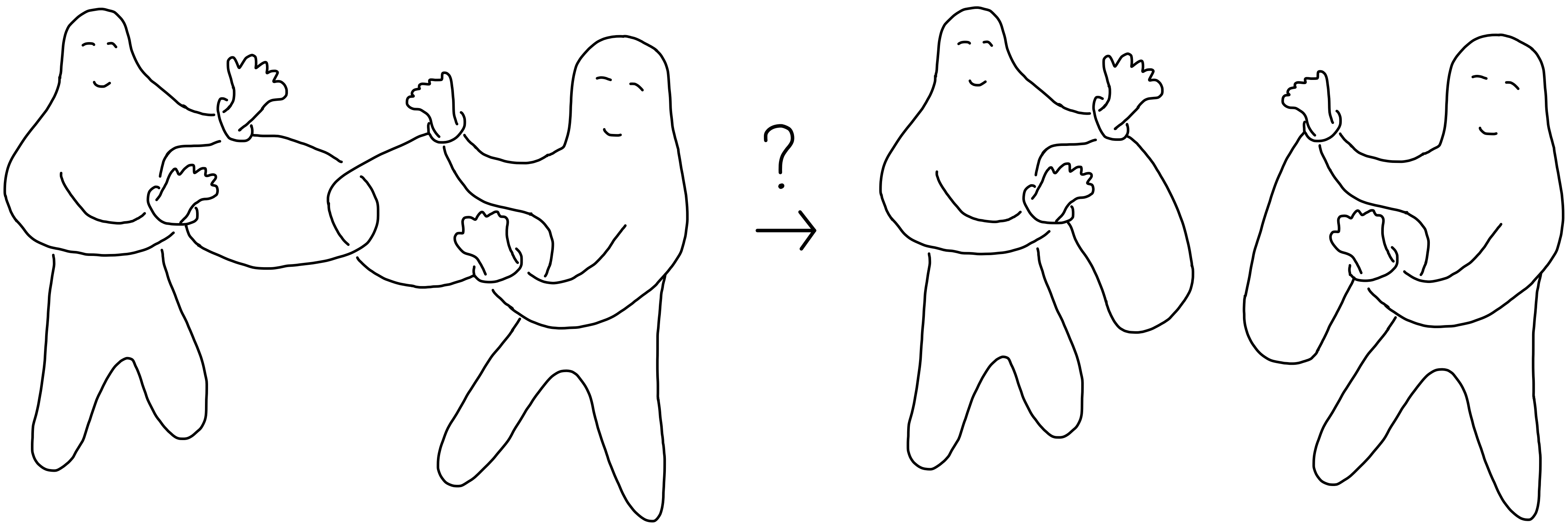
新井仁之先生の記事

https://www.itmedia.co.jp/news/articles/1802/02/news010.html

§2 知恵の輪のトポロジー

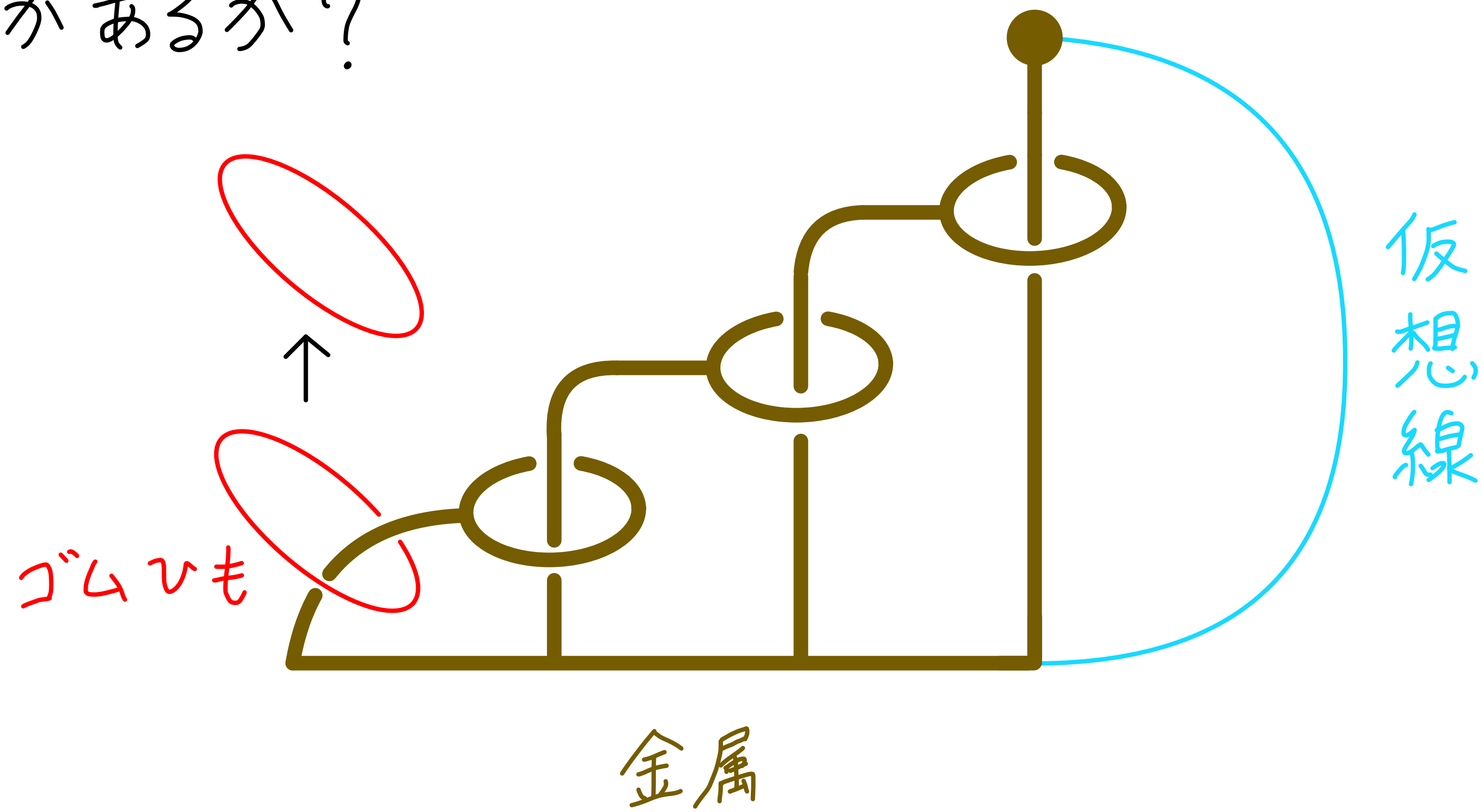
問題1 手錠のなわ抜け

図のようにはずせるか？ 手錠は手からはずれないとする。

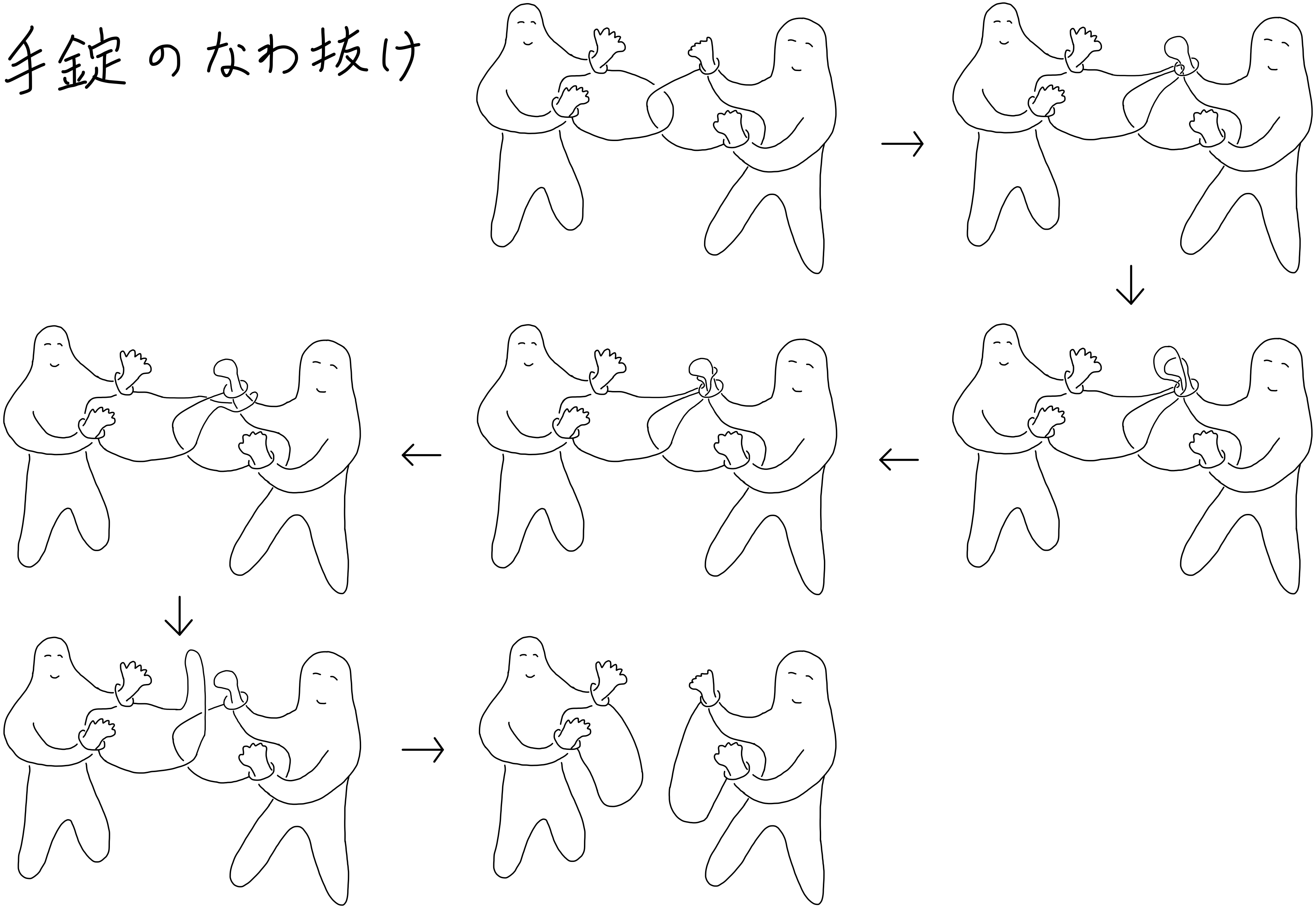


問題2　知恵の輪はずし

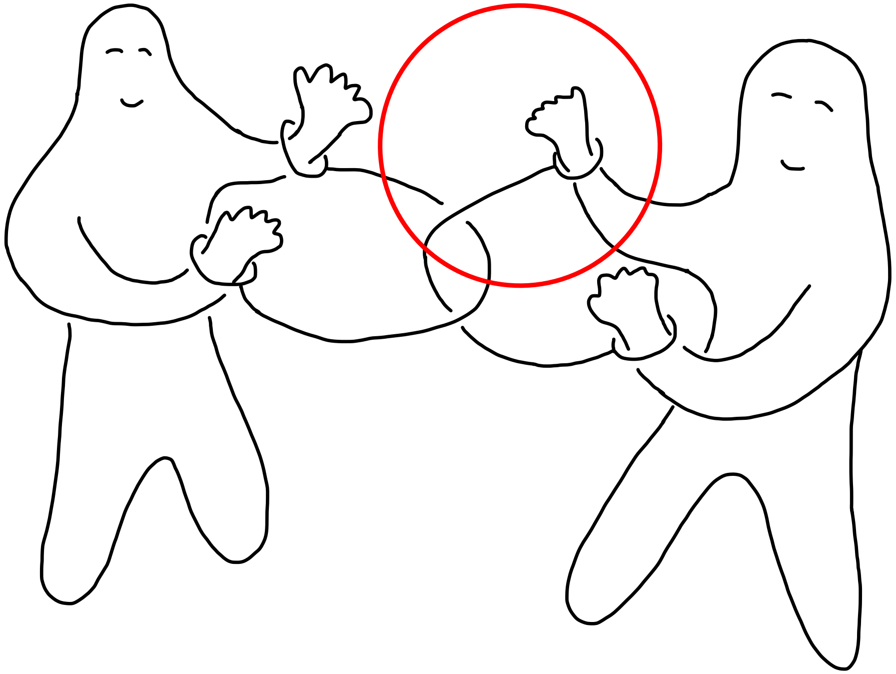
- ゴムひもを図のようにはずせ！
- はずすまでにゴムひもは仮想線を何回横切る必要があるか？



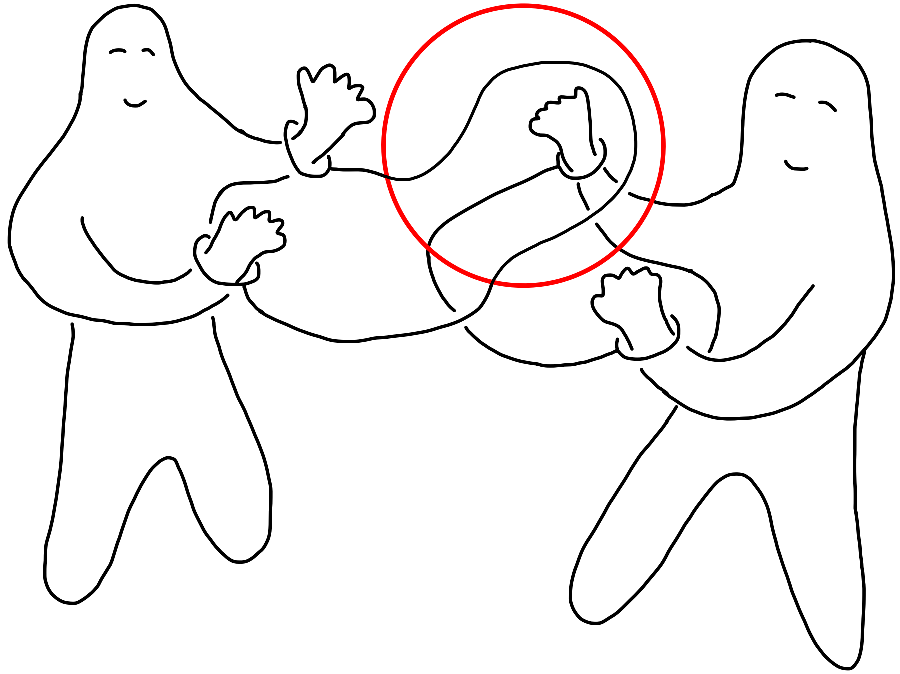
◎ 手錠のなわ抜け



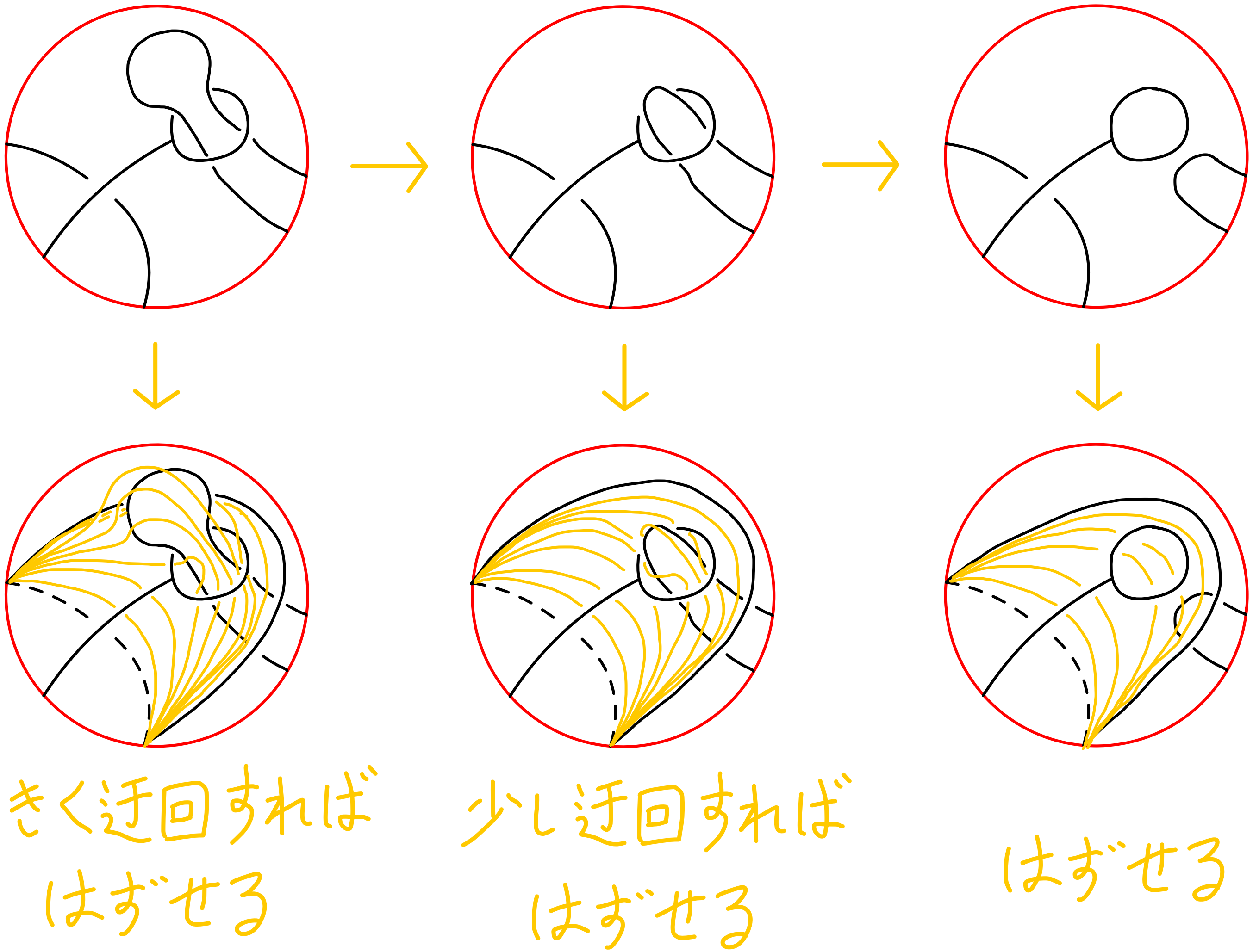
ここに注目



こうなればよい

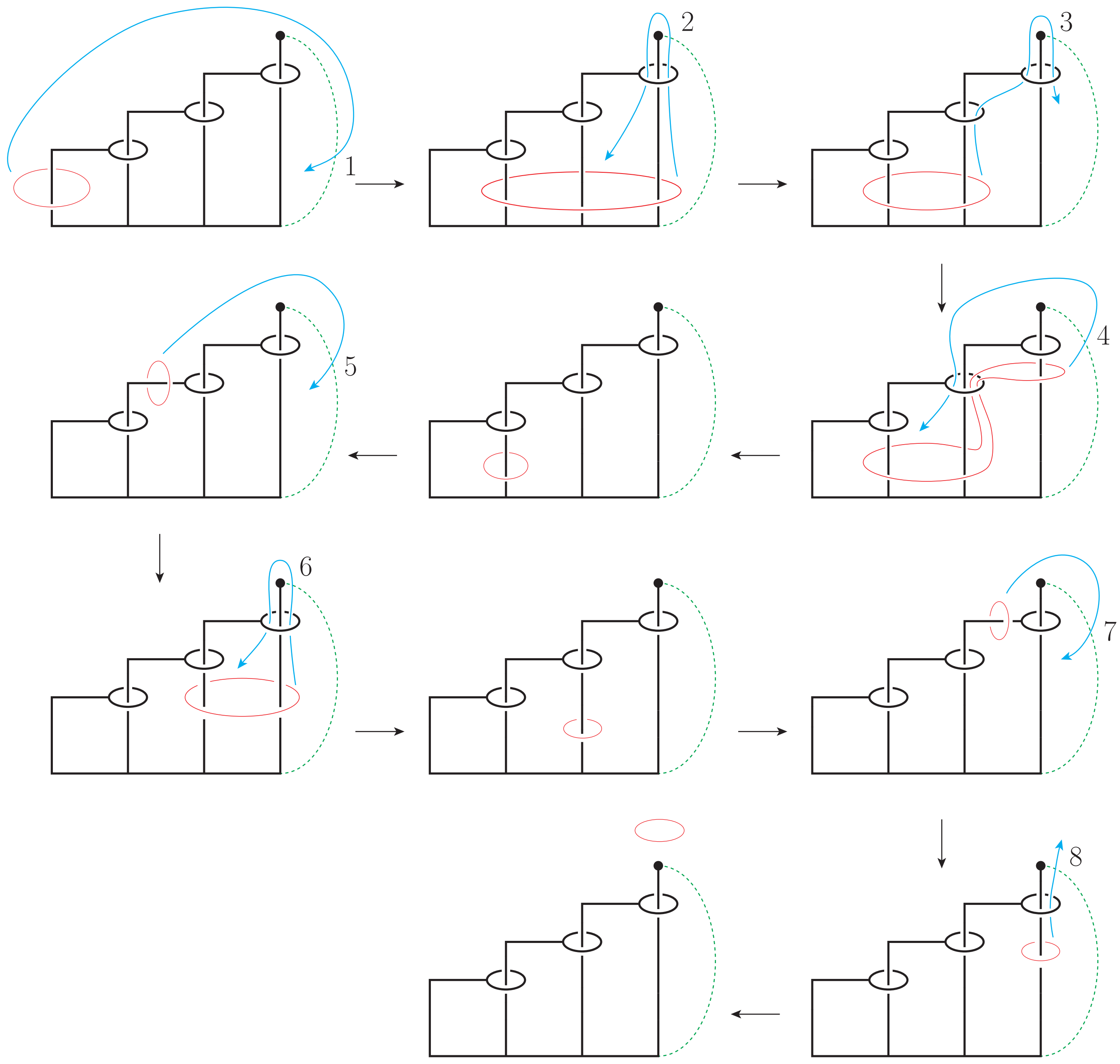


手が縮むと仮想する（手を連続変形する）



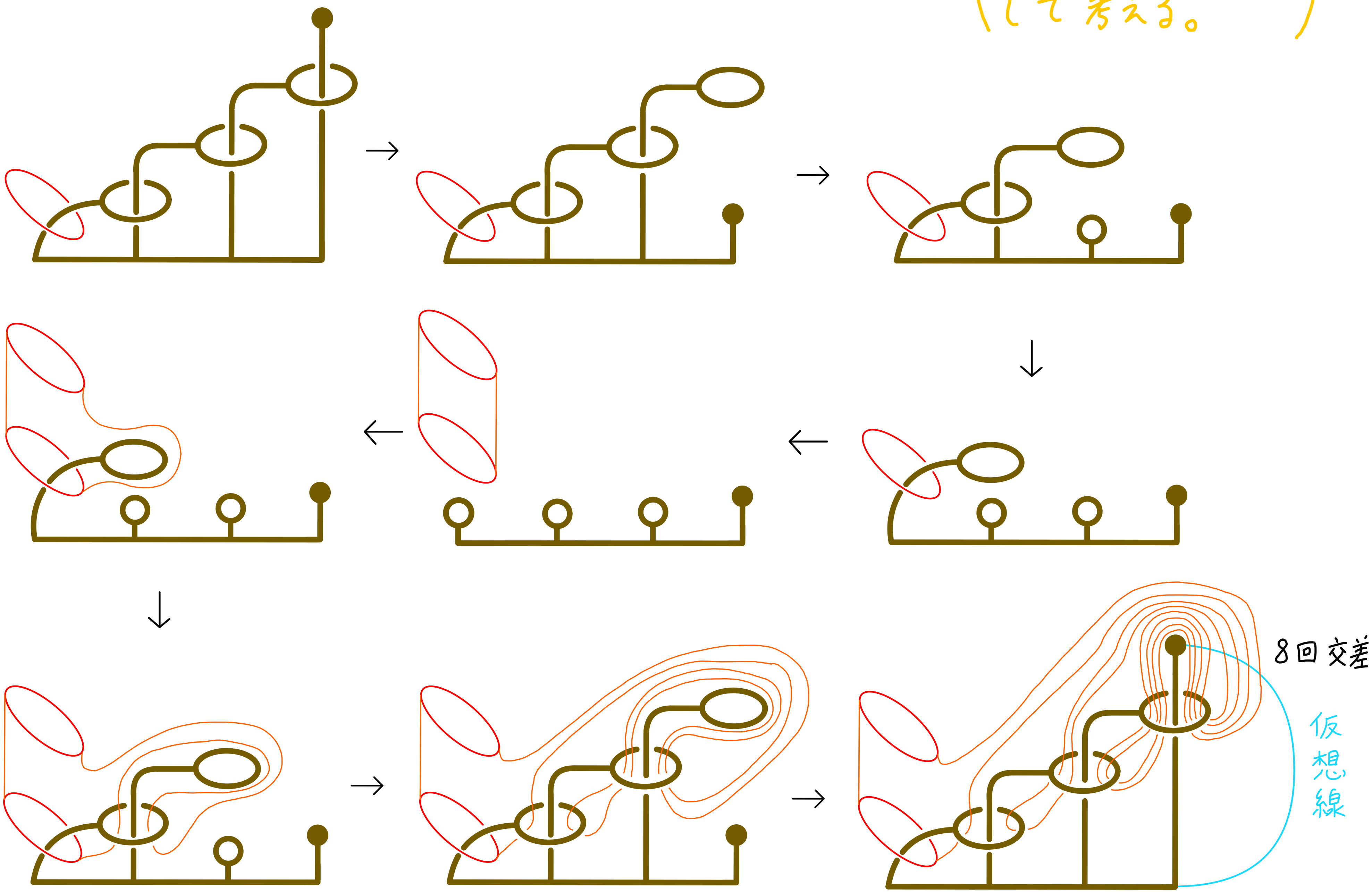
はずせるという性質は連続変形によって不変。よってはずせる。

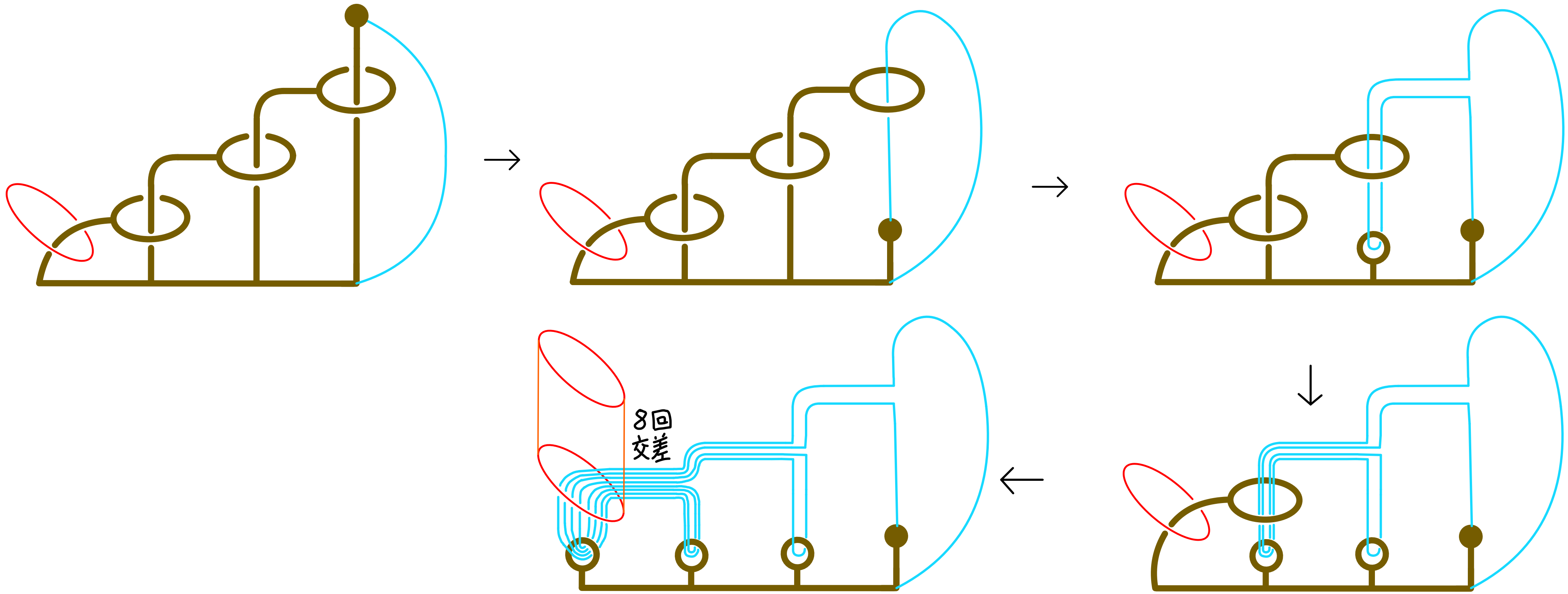
◎ 知恵の輪はずし　8回ではずせる。

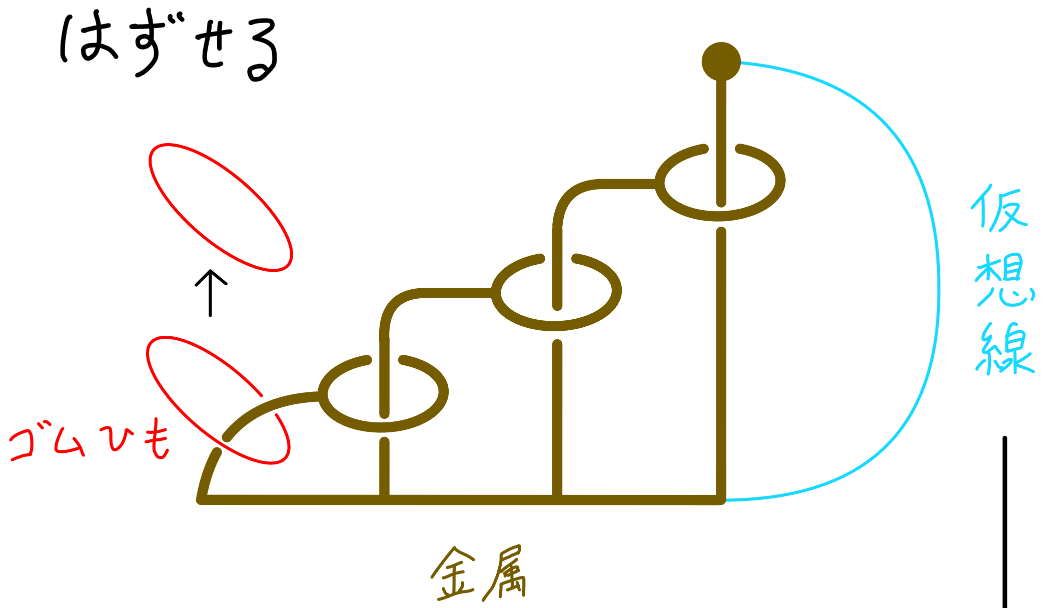


◎ゴムひもをはずせることは自明である。

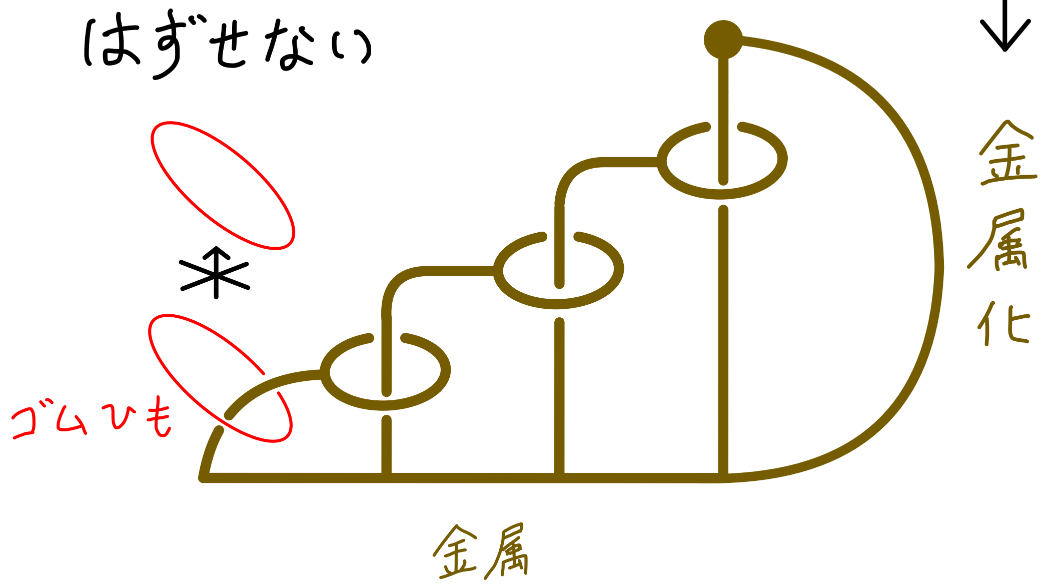
(金属を連続変形して考える。)




8回
交差



上図では仮想線を
ゴムひもが横切らないと
はずせない。



つまり下図のように
仮想線の部分も
金属だとはずせない。

これは 結び目理論(knot theory)

によって証明されている。

数学 — 代数学 — 代数幾何学

数学 — 幾何学 — 代数幾何学

幾何学 — トポロジー(位相幾何学)

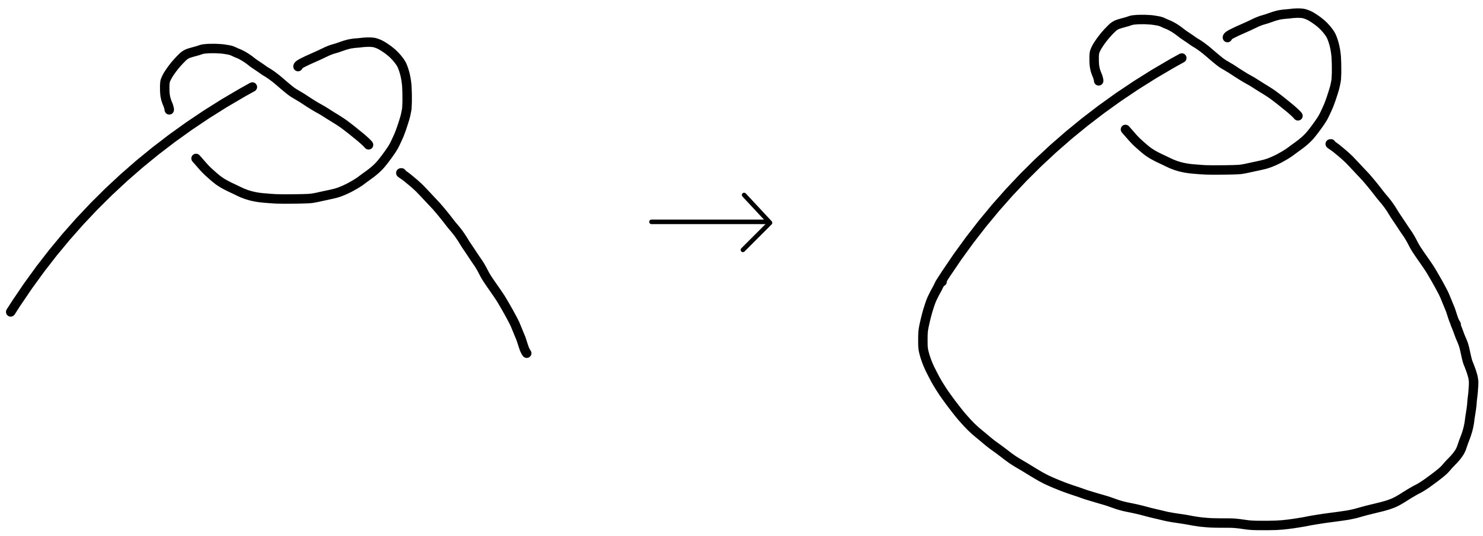
幾何学 — 微分幾何学

数学 — 解析学 — 微分幾何学

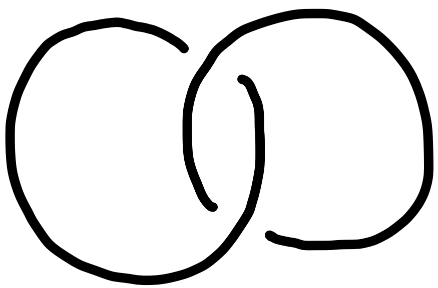
数学 — 応用数学

トポロジー — 結び目理論 — 空間グラフ理論

結び目理論



ほどけない



はずせない

・７回以下でははずれないことは以下で証明されている。

J. Przytycki and A. Sikora
Topological insights from the Chinese rings
Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 3, 893-902.
https://www.ams.org/journals/proc/2002-130-03/S0002-9939-01-06093-2/S0002-9939-01-06093-2.pdf

K. Taniyama
Site-specific Gordian distances of spatial graphs
J. Knot Theory Ramifications 30 (2021), no. 14, 2141016 (15 pages)
https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216521410169?journalCode=jktr
https://arxiv.org/pdf/1703.09440.pdf

関連する参考文献・サイト

フジテレビ「たけしのコマ大数学科「結び目理論」」

http://www.f.waseda.jp/taniyama/komadai.html

日本数学会市民講演会「知恵の輪のトポロジー」の記録

http://mathsoc.jp/publication/tushin/1804/1804taniyama.pdf

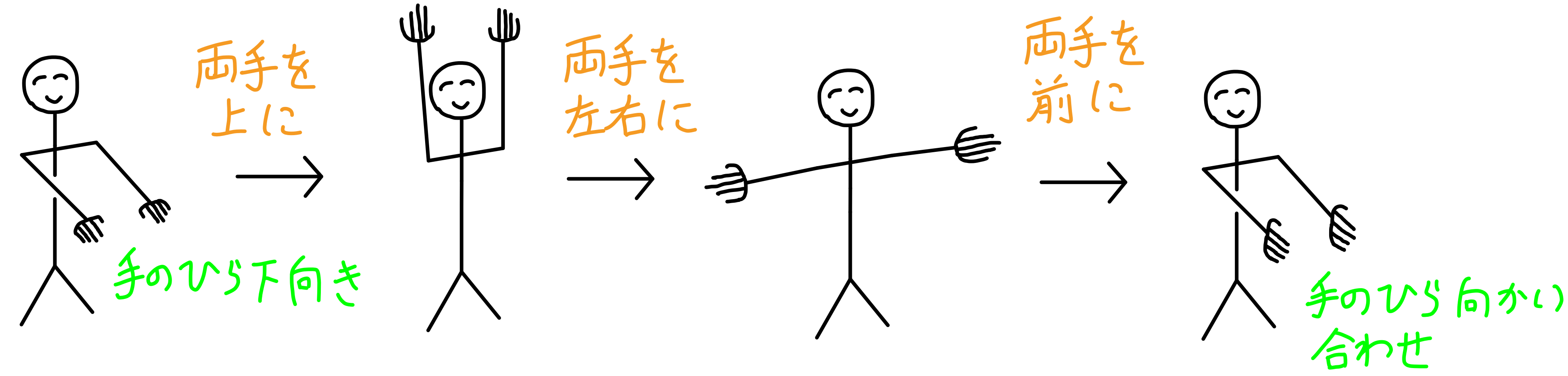
Asia Pacific Mathematics Newsletterの記事（上記の英語版）

http://www.asiapacific-mathnews.com/05/0501/0006_0008.pdf

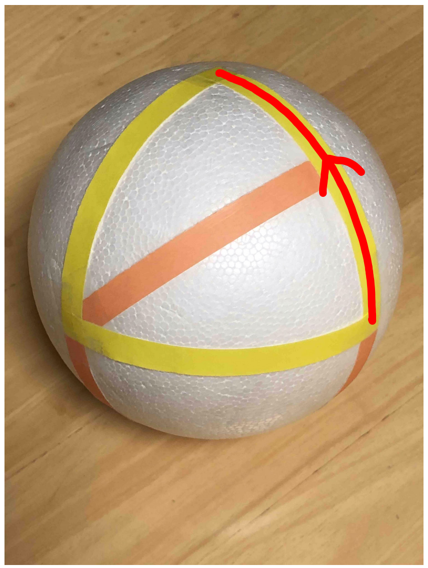
韓国での講演原稿

http://www.f.waseda.jp/taniyama/site-specific-KAIST.pdf

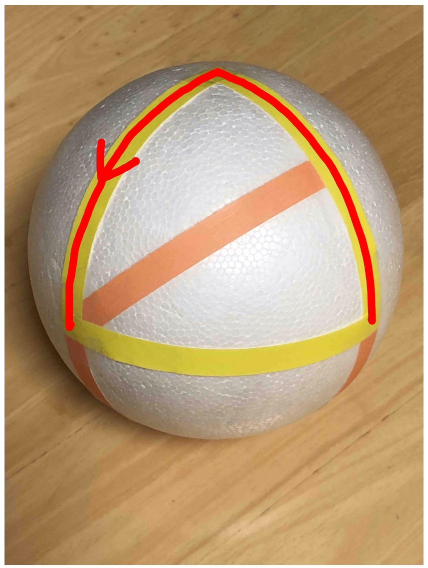
◎微分幾何体操



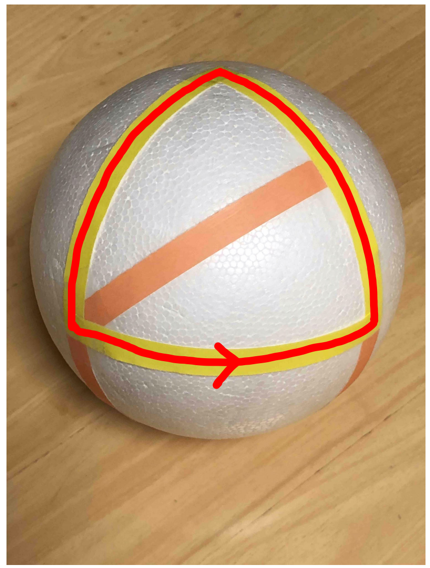
右手の
動きに
注目する



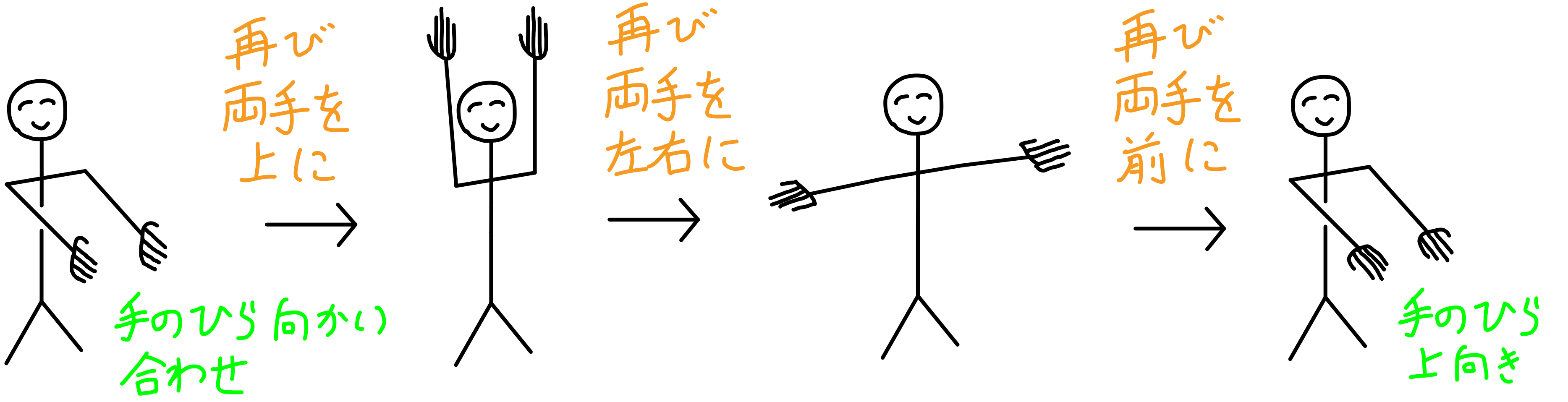
手の甲の向きと
手の進行方向が
一致

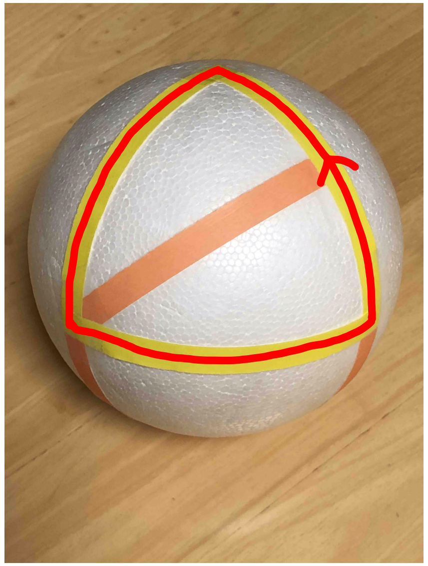


手の甲の向きと
手の進行方向が
90°をなす



手の甲の向きと
手の進行方向が
180°をなす





手の甲の向きと
手の進行方向が
270°をなす

よって手の甲は
スタートから
360°−270°=90°
回転している。

一般に手の描く
測地多角形の
面積と手のねじれる
角度が比例する。

ご清聴ありがとうございました。