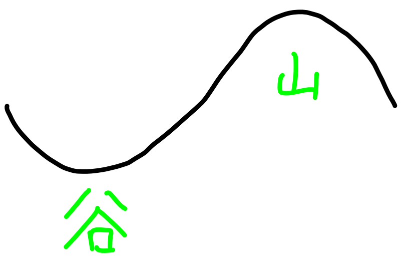
Pairs of knot invariants

谷山 公規 (早稲田大学 教育学部)



2023年12月25日　研究集会「結び目の数理 VI」

The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots

Colin C. Adams： *Williams College, Williamstown, MA*

Exercise 3.3 Find an inequality that relates u(K) and the minimum crossing number c(K) of the knot.

結び目の数学

結び目理論への初等的入門　原書改訂版

原書名	The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots
著者名	金信　泰造 訳
発行元	丸善出版
発行年月日	2021年01月

練習問題３．３　結び目 Ｋ の結び目解消数 ｕ（Ｋ） と最小交点数 ｃ（Ｋ） に関する不等式を求めよ．

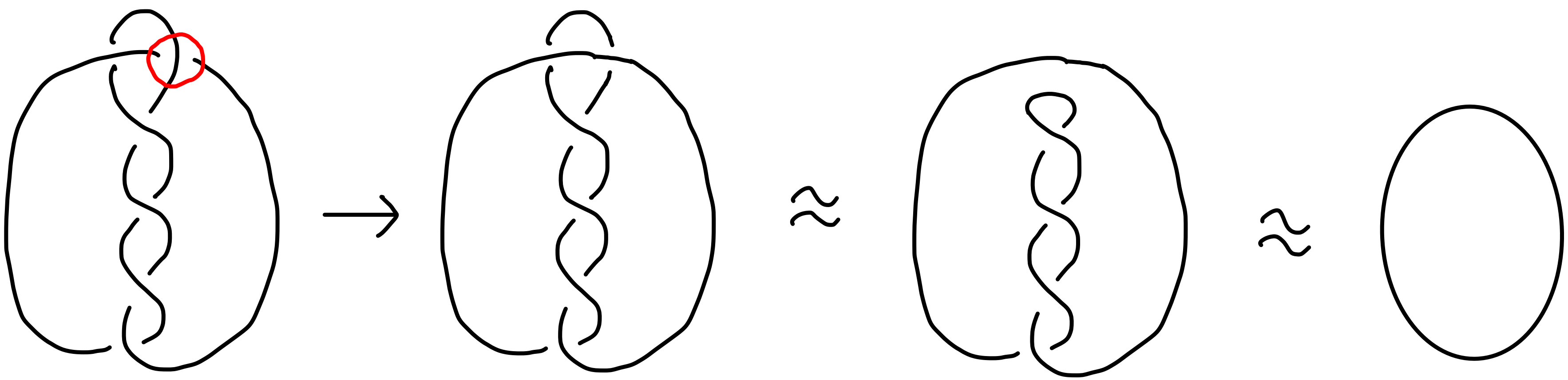
命題 (Folklore) K : 非自明結び目

$\Rightarrow \quad u(K) \leqq \frac{1}{2}\left(c(K)-1\right)$

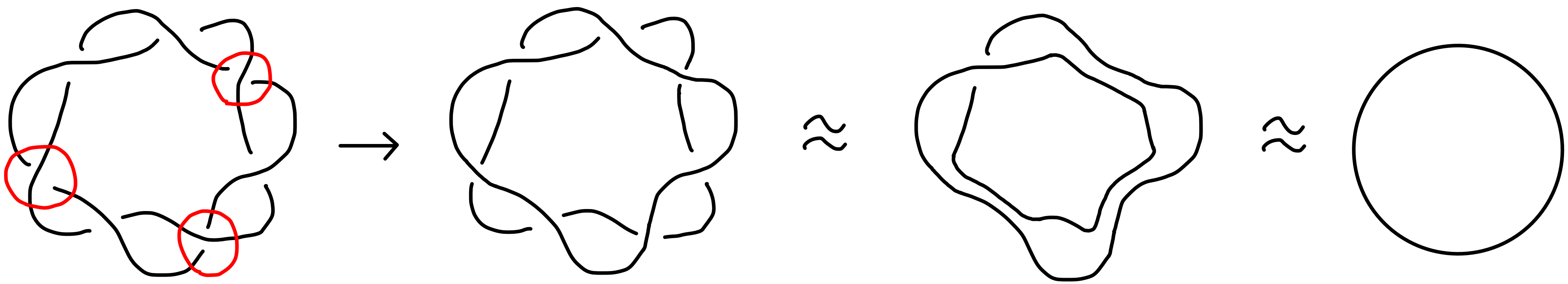
$u(K)$: unknotting number of K

$c(K)$: crossing number of K

例



$c = 6$, $u = 1$



$c=7,\ u=3$

- 自明結び目では不成立。
- 他に不等式は存在しないのか？
- crossing number と unknotting number に関するすべての関係を求めよ！

命題 K：結び目

$\Rightarrow u(K) \geqq \min\{1, c(K)\}$

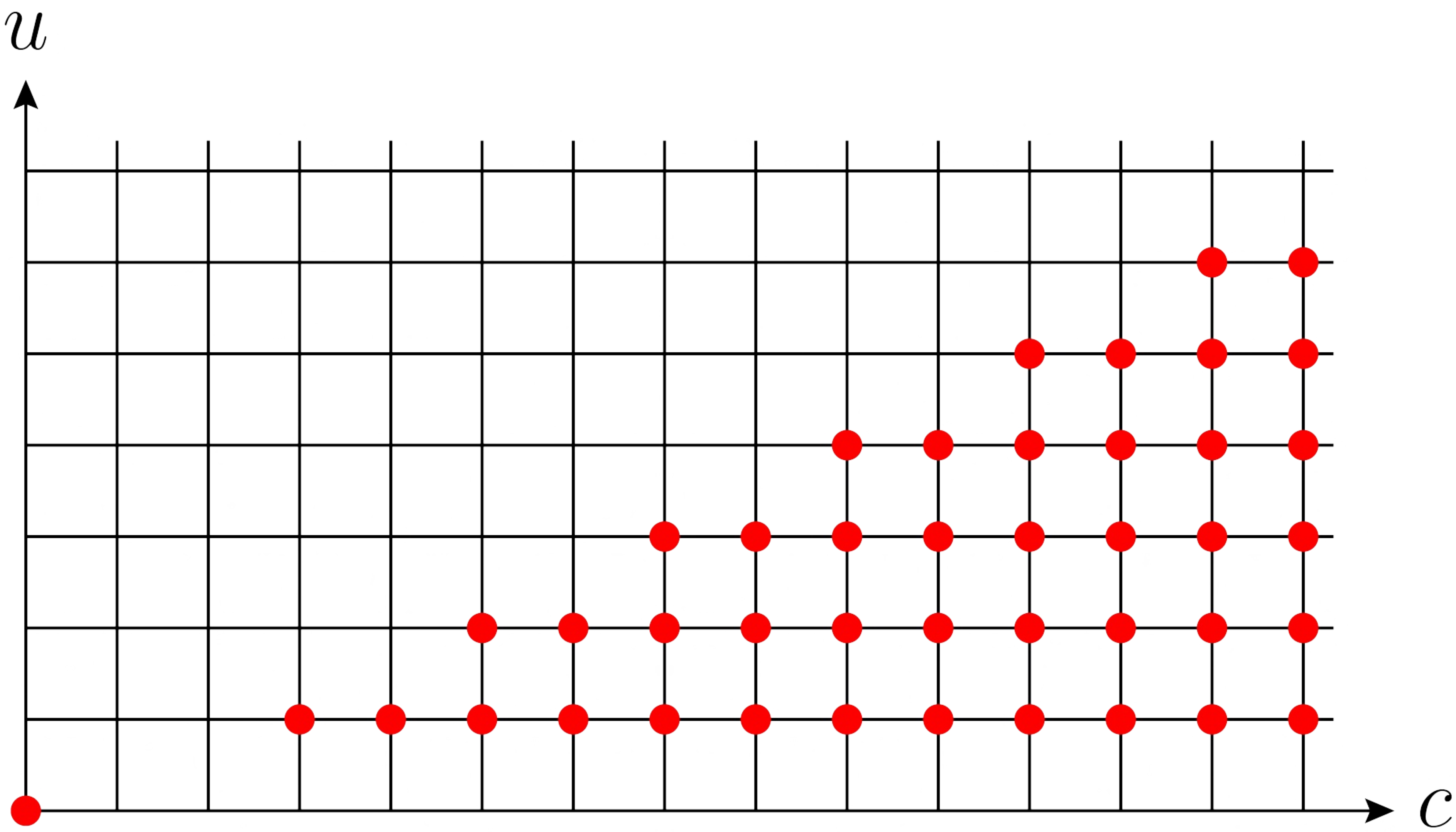
（$u(K)$の$c(K)$による下からの評価）

命題 K：結び目

$\Rightarrow u(K) \leqq \frac{1}{2}\left(c(K) - \min\{1, c(K)\}\right)$

（$u(K)$の$c(K)$による上からの評価）

The relation of the crossing numbers and unknotting numbers



転送されたメッセージ:

差出人: Kouki Taniyama <taniyama@waseda.jp>
日時: 2008年6月24日 10:10:06 JST
宛先: knot@freeml.com
件名: [knot:1240] Re: サクラの質問その他
返信先: knot@freeml.com

早稲田大学の谷山です。
私は２００３年３月に「サクラの質問その他」をこの結び目メーリングリストに投稿しました。
このメールに対してはどなたからも返信はなかったと記憶しています。
そのメールで「その他」として、

質問２
Kをnontrivial knotとし、$c(K)$をKの最小交点数、$u(K)$をKの結び目解消数 とすれば、不等式
$u(K)\leq \frac{c(K)-1}{2}$
が一般に成立しますが、ここで等号が成立するknotは$(2,p)$-torus knots以外にあ るのでしょうか？
あるとしたらそれらの特徴付けはなされているのでしょうか？

という質問をしました。
このたびきっかけがありましてこの問題を再度考えてみましたところ、
そのような結び目は(2,p)-トーラス結び目しかないことが証明出来ましたのでご報告します。
また、絡み目の場合には一般に不等式
$u(L)\leq \frac{c(L)}{2}$
が成立しますが、ここで等号が成立する絡み目の特徴付けも出来ました。
（(2,q)-トーラス絡み目以外にもあります。）
これらの結果と証明は
Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded
という論文（の改訂版）の中に書いておきました。この論文はarXiv
http://arxiv.org/abs/0805.3174
に載せてあります。

以上、ご報告まで。

（本文はここまでです。以下は余談です。）

谷山はこの３月から来年３月まで桜の名所、ワシントンＤＣにあるジョージ・ワシントン大学に滞在しています。
みなさまの多くはすでにご存知かと思いますが、先日日本数学会のホームページ
http://mathsoc.jp/
で桜をデザインした日本数学会のロゴが出来たことを知りました。
どなたがデザインされたのか存じませんが、シンプルで美しく、日本らしさがひときわ心に沁みて感銘を受けました。
それで、この桜、(2,5)-トーラス結び目になっていることに気付き、５年前の「サクラの質問」も満更でもなかったなと自画自賛しているところです。

１９９８年に開設された結び目メーリングリストもうすぐ１０周年、開設以来運営を続けておられる小沢誠先生に感謝するとともに、今後のますますの発展を祈念します。

谷山公規

At 8:45 PM +0800 03.3.18, Kouki Taniyama wrote:
谷山です。最近質問が少ないようですからサクラの質問をします。

質問１
今年の桜の開花はいつ頃でしょうか？

以上サクラの質問でした。解答無用に願います。

ついでにもう一つ質問です。

質問２
Kをnontrivial knotとし、$c(K)$をKの最小交点数、$u(K)$をKの結び目解消数 とすれば、不等式
$u(K)\leq \frac{c(K)-1}{2}$
が一般に成立しますが、ここで等号が成立するknotは$(2,p)$-torus knots以外にあ るのでしょうか？あるとしたらそれらの特徴付けはなされているのでしょうか？

谷山公規

$\mathcal{T}$：位相空間の同相類の集合，

X，Y：集合，$f:\mathcal{T}\to X$，$g:\mathcal{T}\to Y$：写像

$(f,g):\mathcal{T}\to X\times Y$; $(f,g)(T):=(f(T),g(T))$

像 $(f,g)(\mathcal{T})\subseteq X\times Y$ を f と g の関係と呼ぶ。

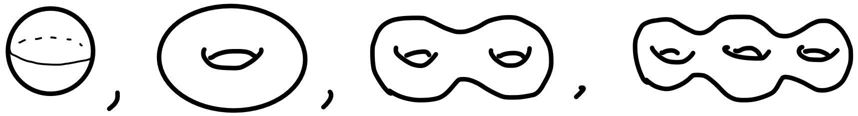
$\mathcal{K}$：結び目型全体の集合，X，Y：集合，

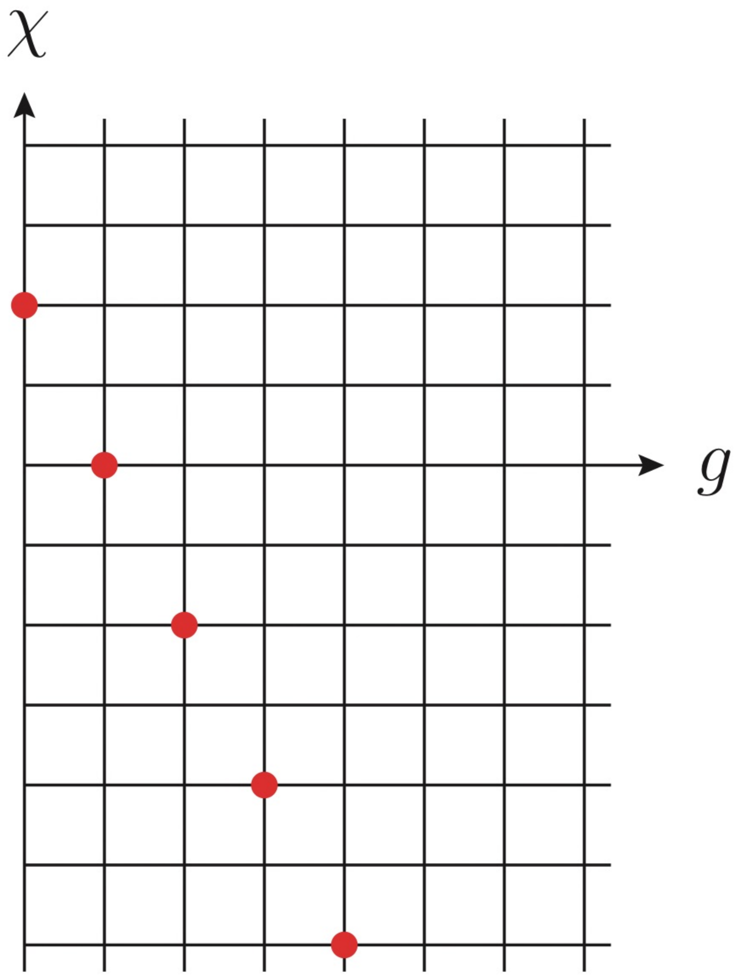
$f:\mathcal{K}\to X$，$g:\mathcal{K}\to Y$：写像

$(f,g):\mathcal{K}\to X\times Y$; $(f,g)(K):=(f(K),g(K))$

像 $(f,g)(\mathcal{K})\subseteq X\times Y$ を f と g の関係と呼ぶ。

例　$\mathscr{S}$: 向き付け可能連結閉曲面の同相類全体

$\mathscr{S} = \{$  $, \cdots \}$



$$
\begin{array}{ccccl}
g : & \mathscr{S} & \to & \mathbb{Z}_{\geqq 0} & \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
& S & \mapsto & g(S) & : S \text{の種数}
\end{array}
$$

(genus)

$$
\begin{array}{ccccl}
\chi : & \mathscr{S} & \to & \mathbb{Z} & \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
& S & \mapsto & \chi(S) & : S \text{の Euler 標数}
\end{array}
$$

$$\boxed{\chi(S) = 2 - 2g(S)}$$

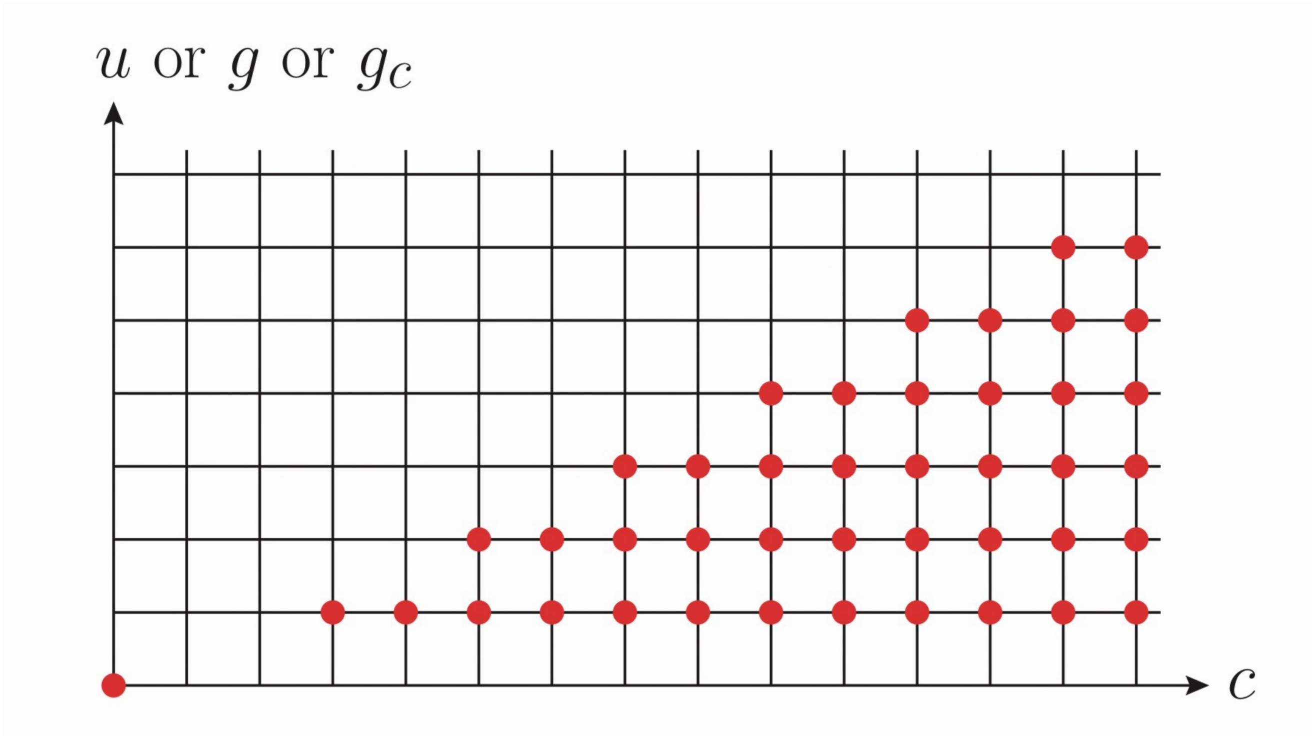
$c : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, crossing number

$u : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, unknotting number

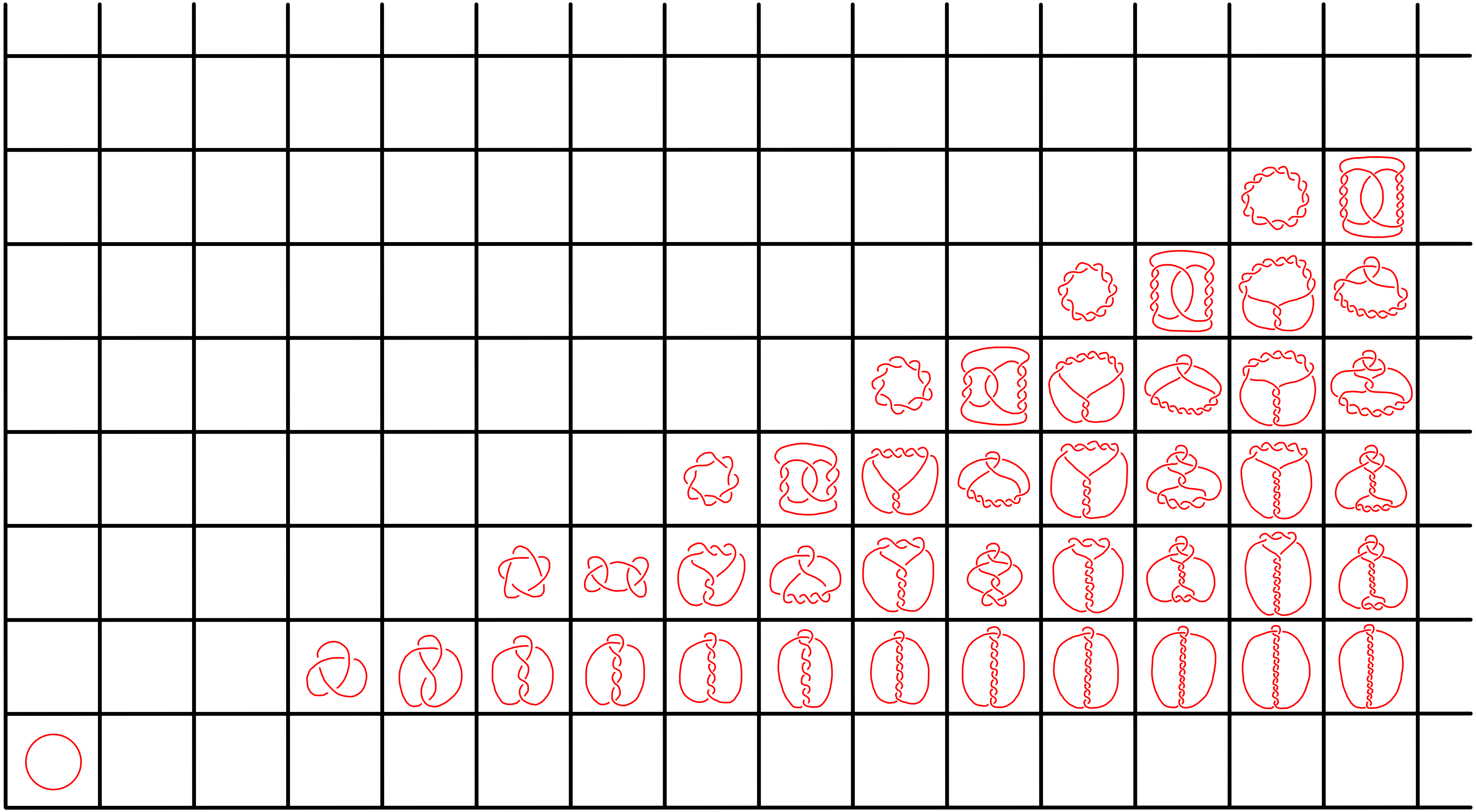
$g : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, genus

$g_c : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, canonial genus

Theorem. $(c,u)(\mathcal{K}) = (c,g)(\mathcal{K}) = (c,g_c)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq \frac{1}{2}(x-1)\}.$

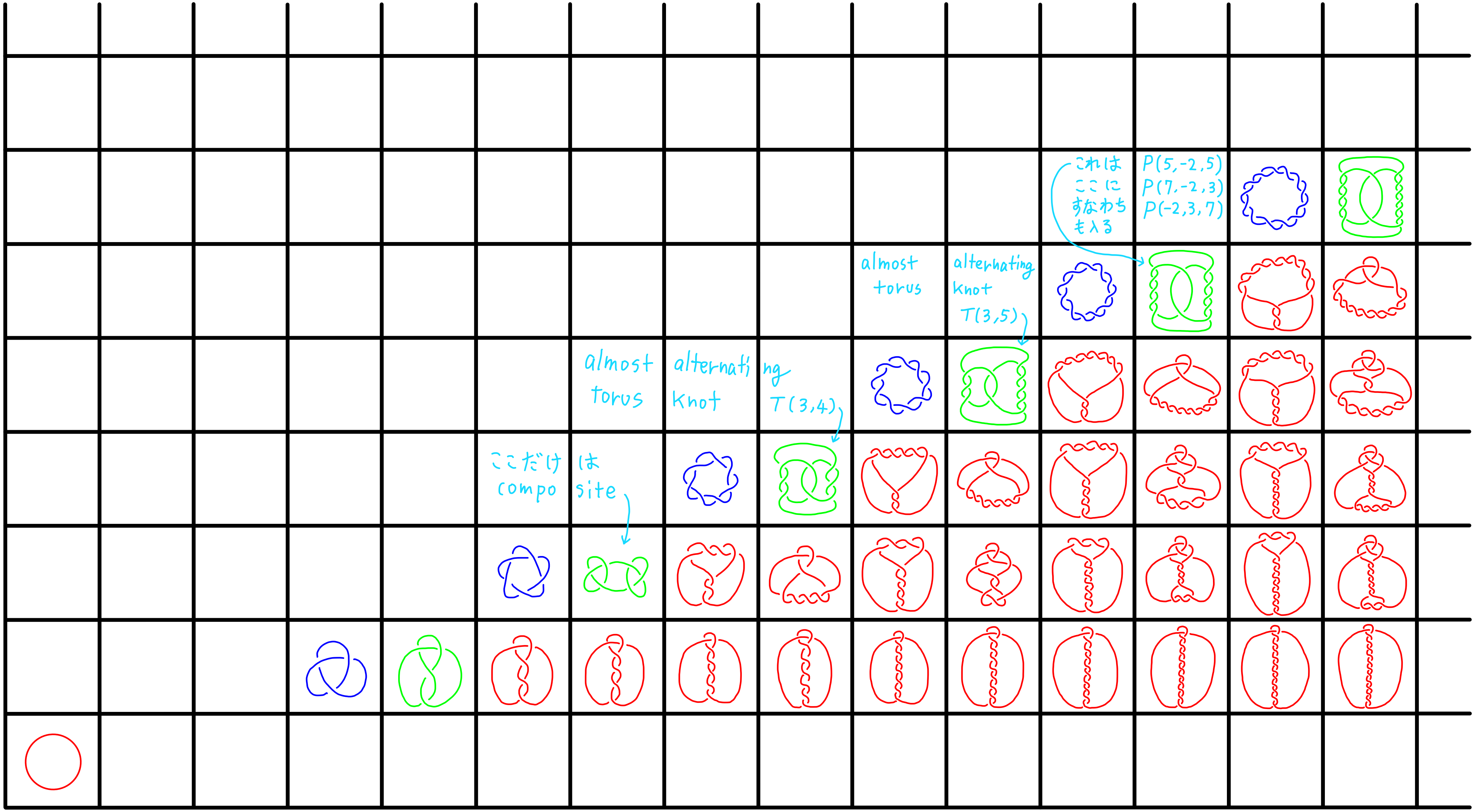


$\circ \quad (c, u)(\mathcal{K}) \subseteq \left(\mathbb{Z}_{\geqq 0}\right)^2$

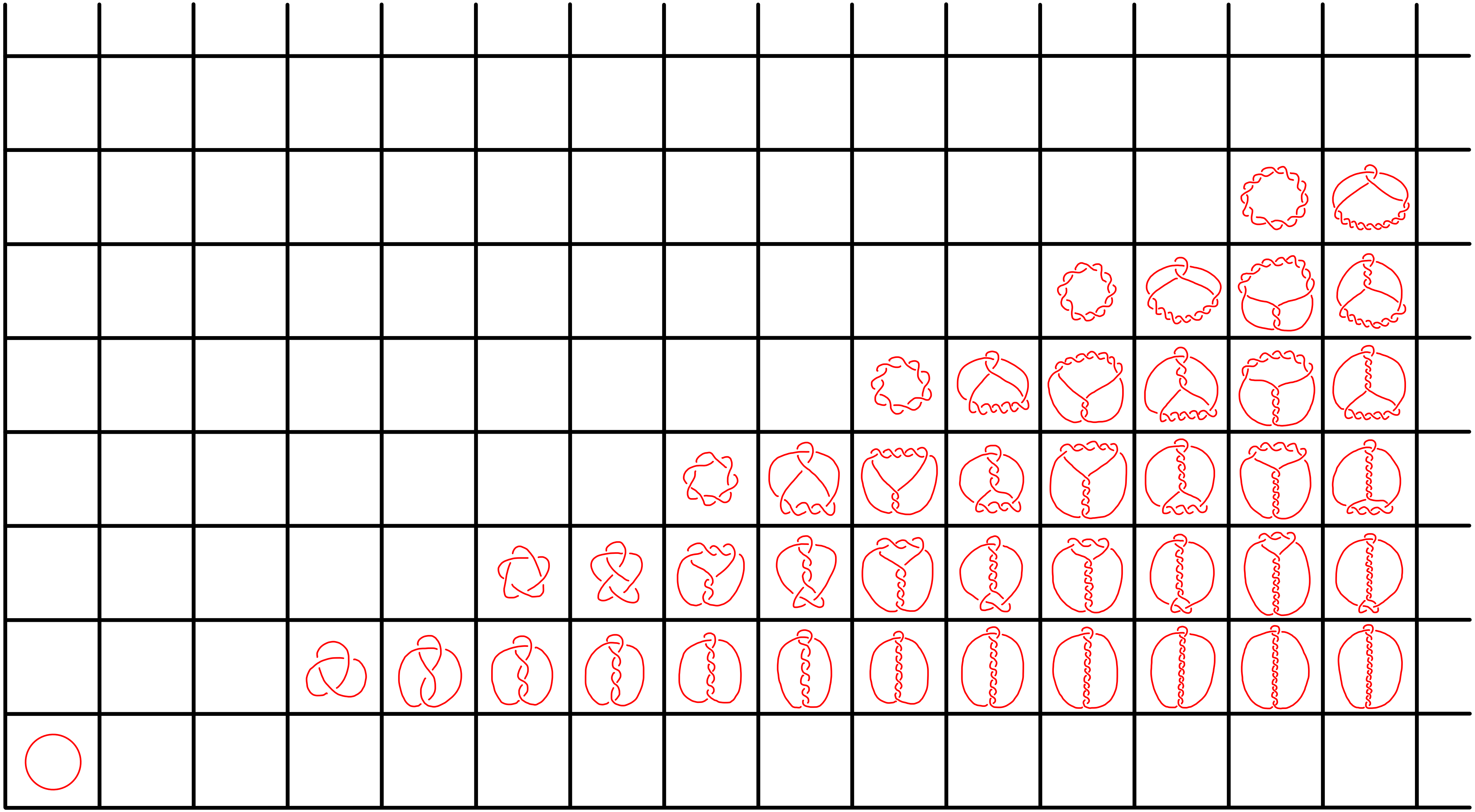


$u(K)=\frac{1}{2}(c(K)-1) \Leftrightarrow K$: (2, p)-トーラス結び目 [Taniyama 2009]

$u(K)=\frac{1}{2}(c(K)-2) \Rightarrow K$: closed 3-braid [Abe-Hanaki-Higa]



- $(c, g)(\mathcal{K}) = (c, g_c)(\mathcal{K}) \subseteq (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$

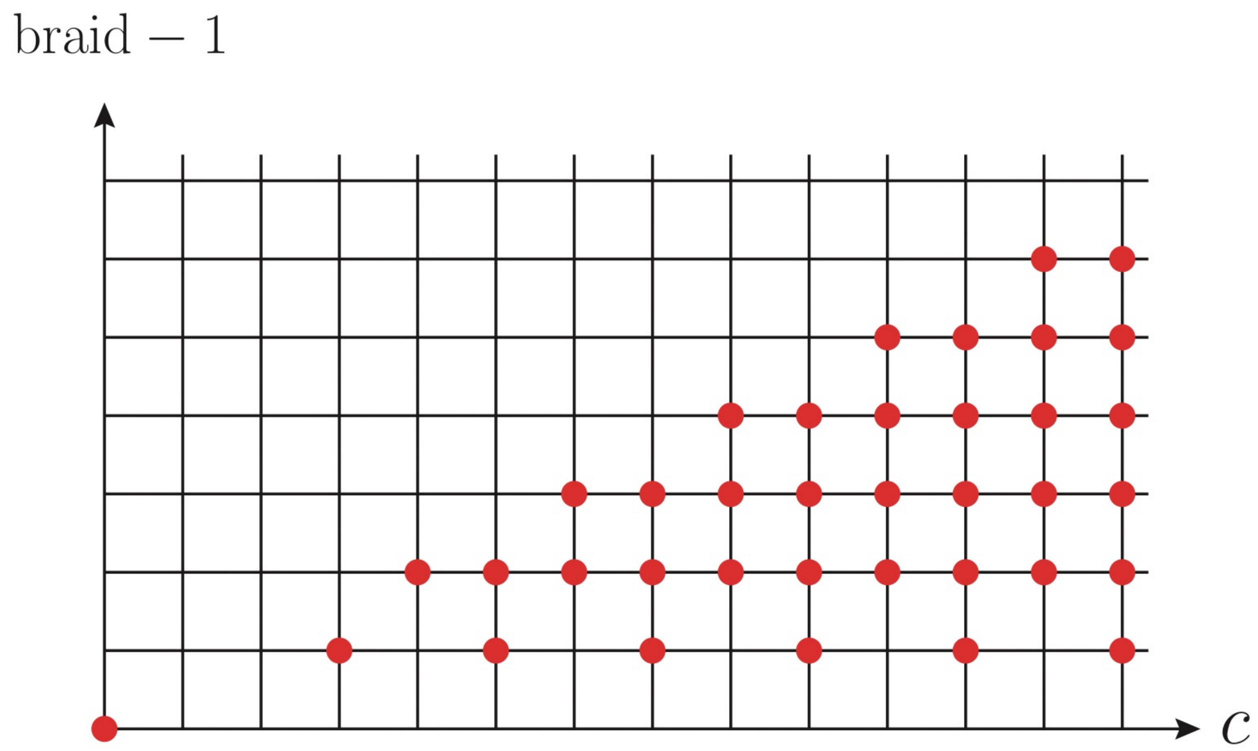


○ $\text{braid}-1 : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}_{\geqq 0}$

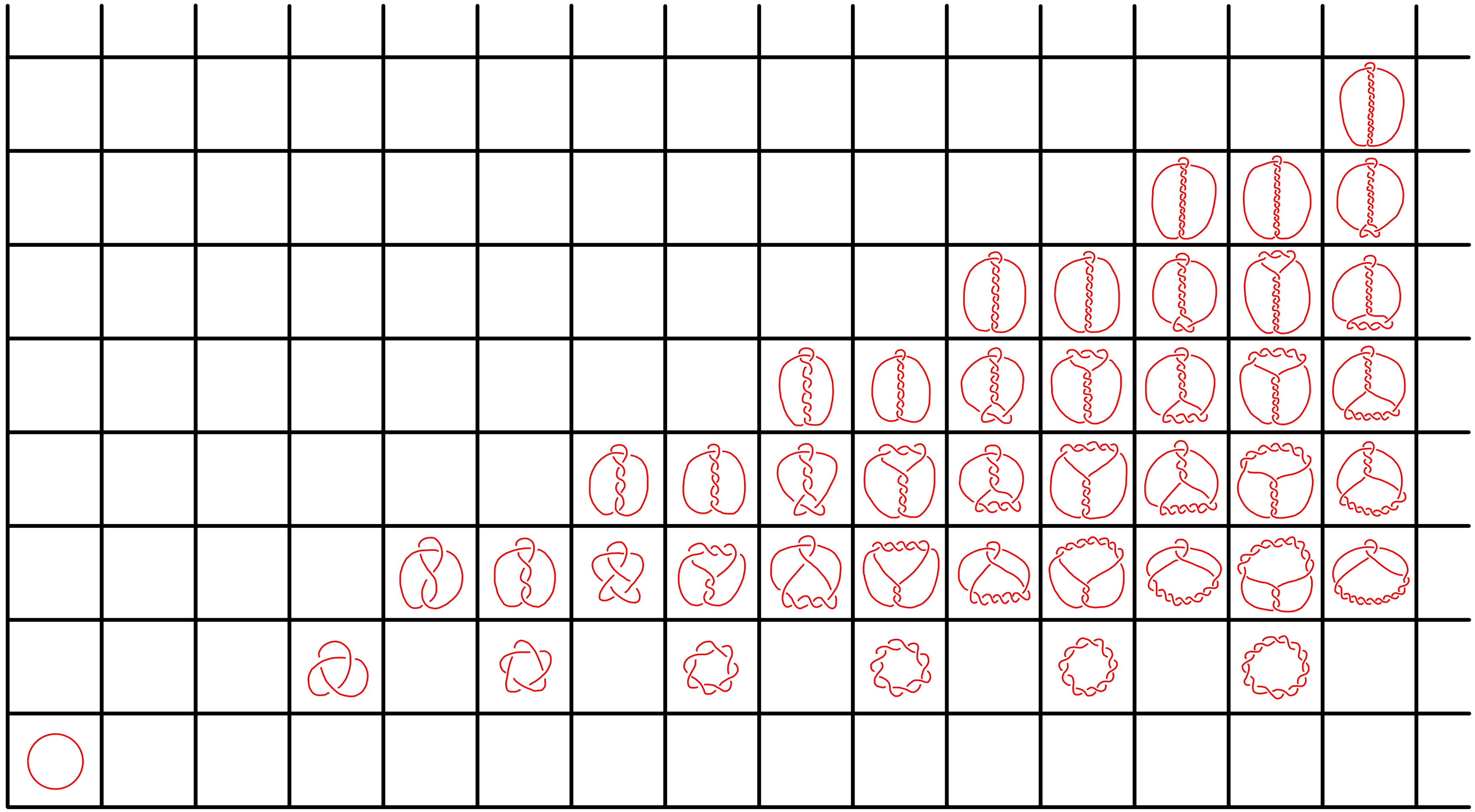
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \to & \mathbb{Z}_{\geqq 0} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ K & \mapsto & \text{braid}(K)-1 \end{array}$$

Theorem. $(c, \text{braid}-1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup \{(2n+1, 1) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{\geq 2})^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x\}.$

(大山さんの定理)



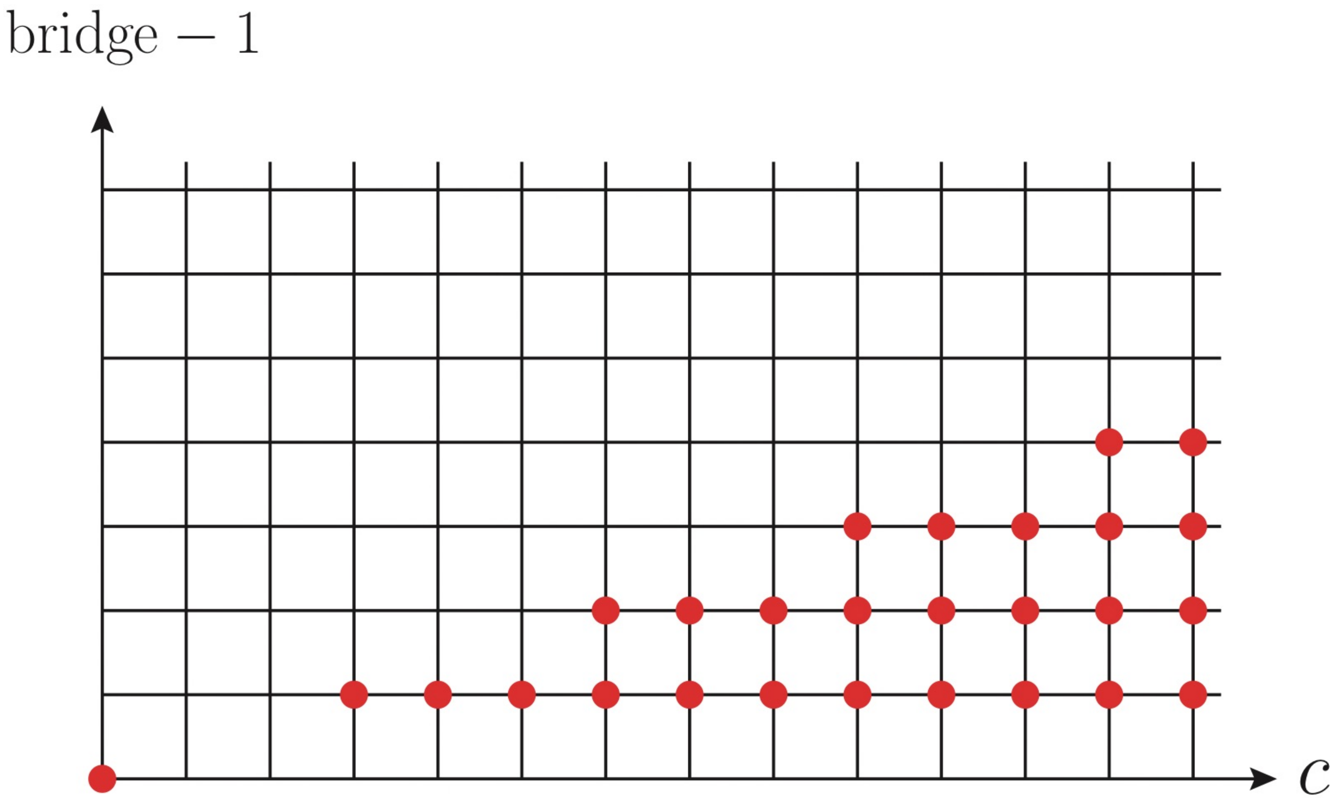
$\circ \ (c, \text{braid-1})(\mathcal{K}) \subseteqq (\mathbb{Z}_{\geqq 0})^2$



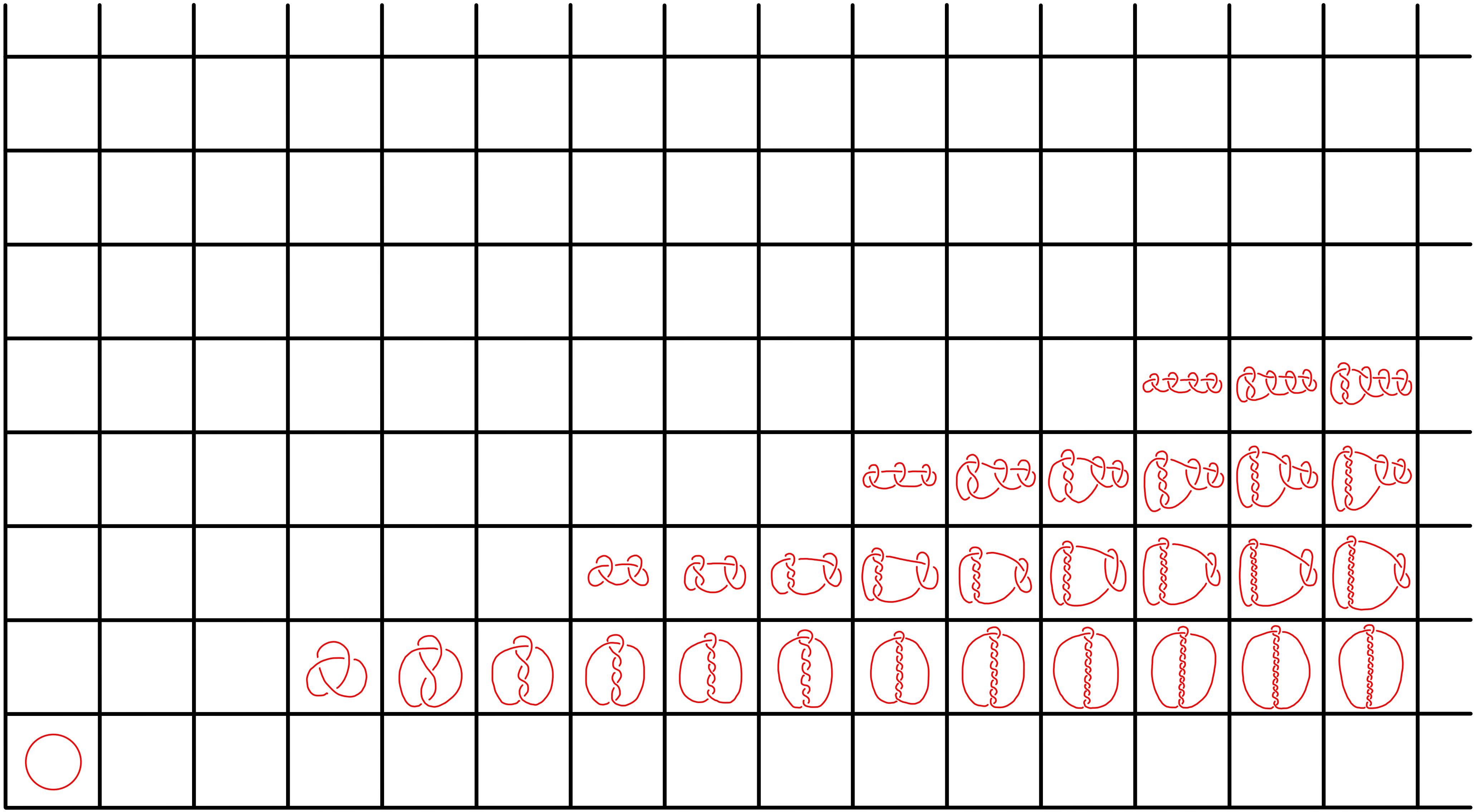
$$
\begin{array}{rccc}
\circ\ \mathrm{bridge}-1 : & \mathcal{K} & \to & \mathbb{Z}_{\geqq 0} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& K & \mapsto & \mathrm{bridge}(K)-1
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Conjecture.}\ (c, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq \frac{1}{3}x\}.}$

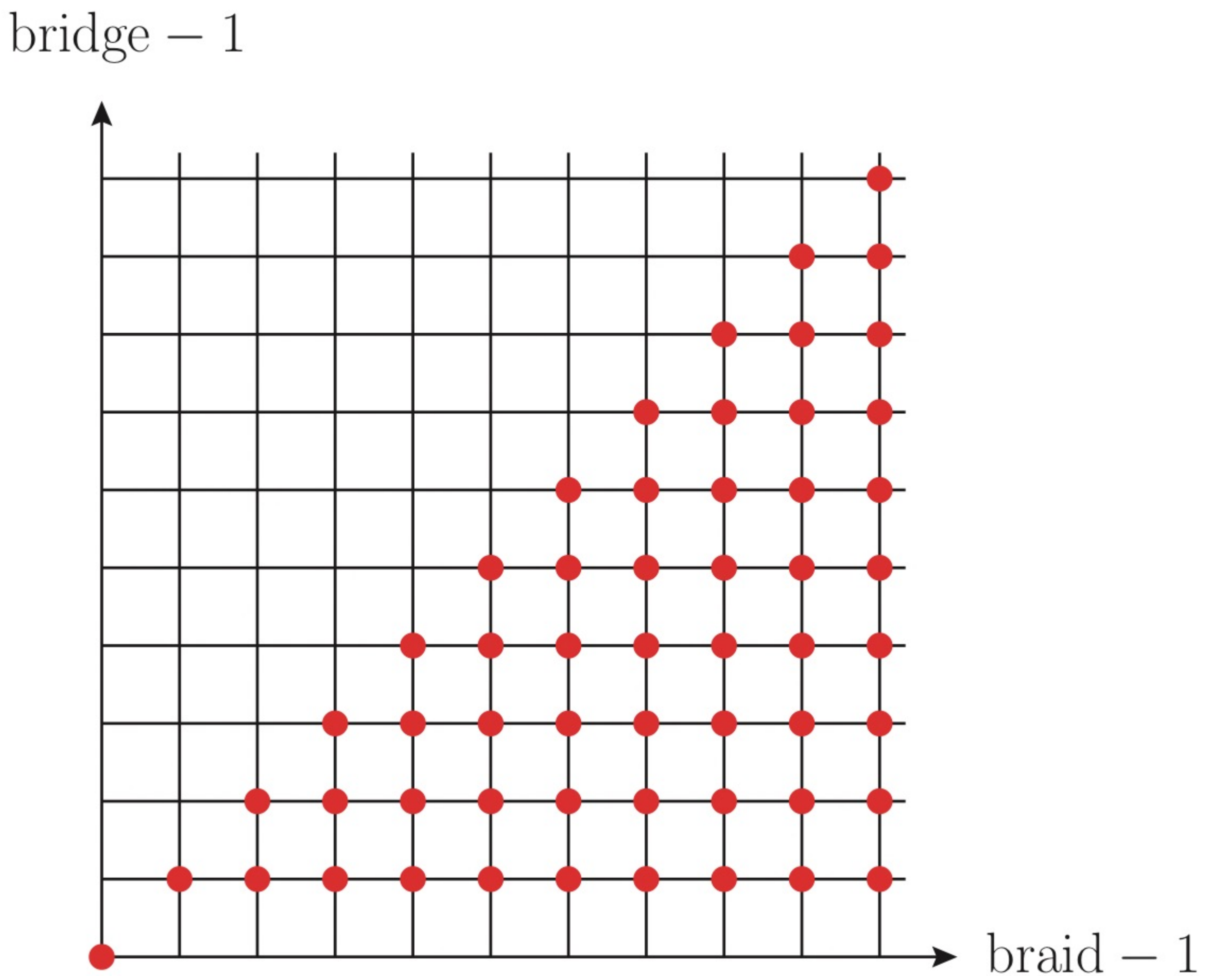
(Fox 予想)



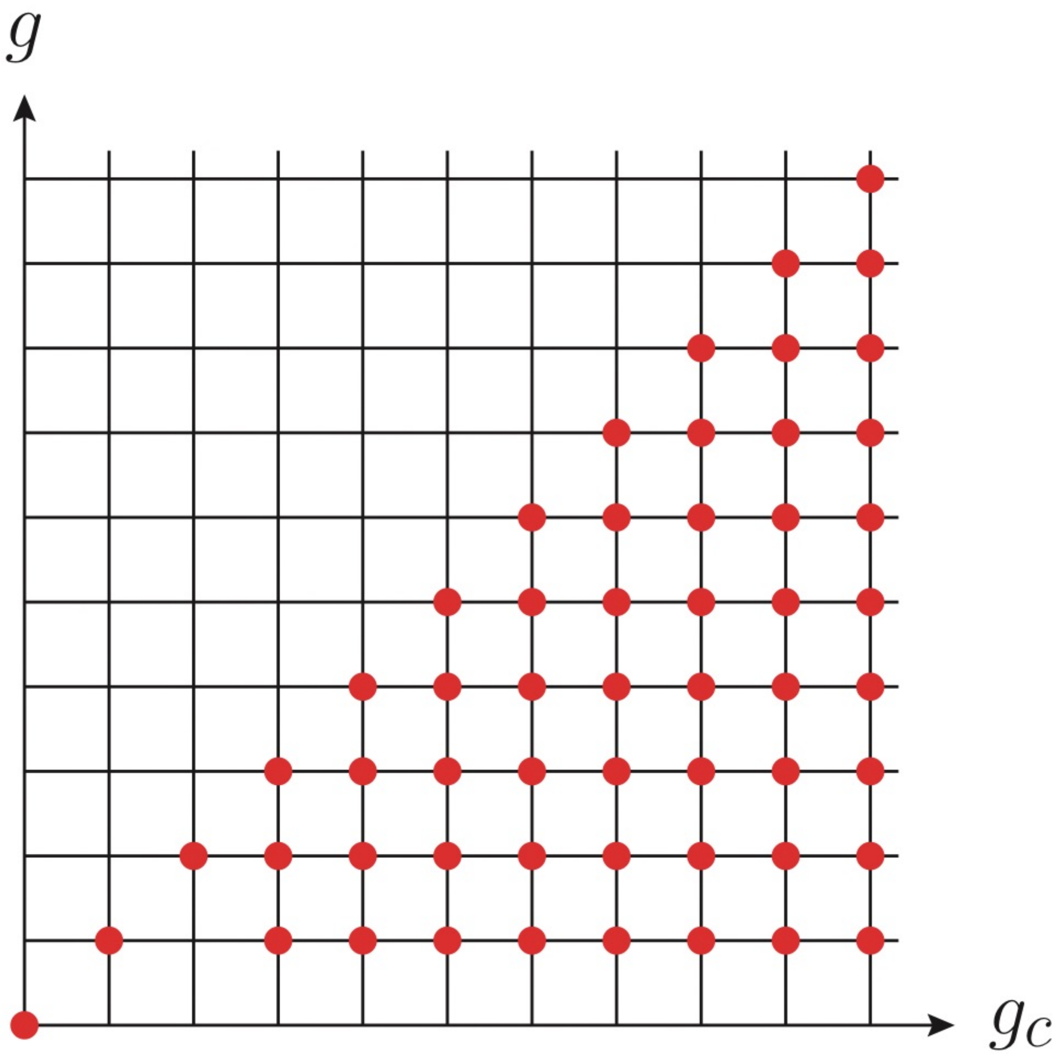
○ $(C,\ \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) \subseteqq (\mathbb{Z}_{\geqq 0})^2$ (Fox予想を仮定)



Theorem. $(\text{braid} - 1, \text{bridge} - 1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq x\}.$



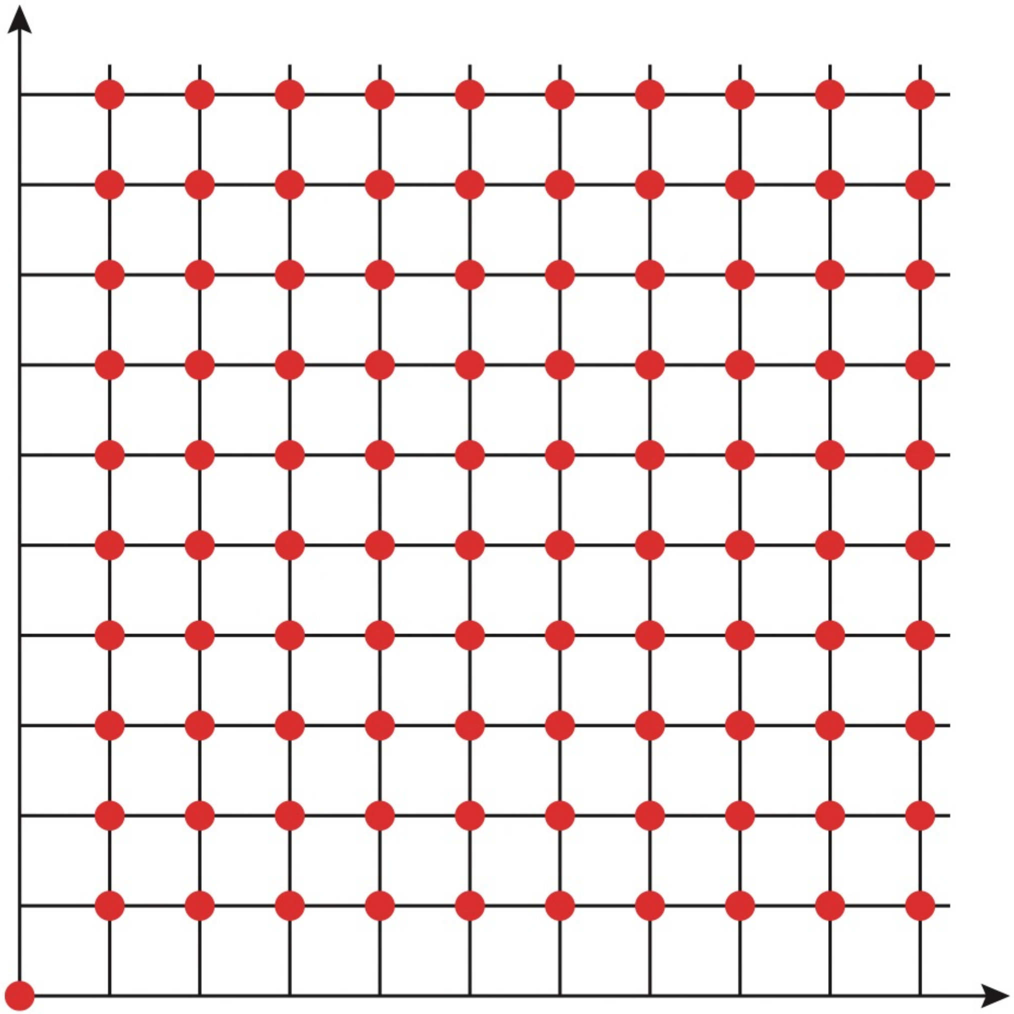
Theorem. $(g_c, g)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup (\{(x,y) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid y \leq x\} \setminus \{(2,1)\})$.



Theorem. [Stoimenov]

No knot has $g = 1$ and $g_c = 2$.

Theorem . $$(u, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (u, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = (g, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g_c, \mathrm{braid}-1)(\mathcal{K}) = (g, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K}) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{Z}_{>0})^2.$$



$(u, \mathrm{bridge}-1)(\mathcal{K})$

by [Schultens],

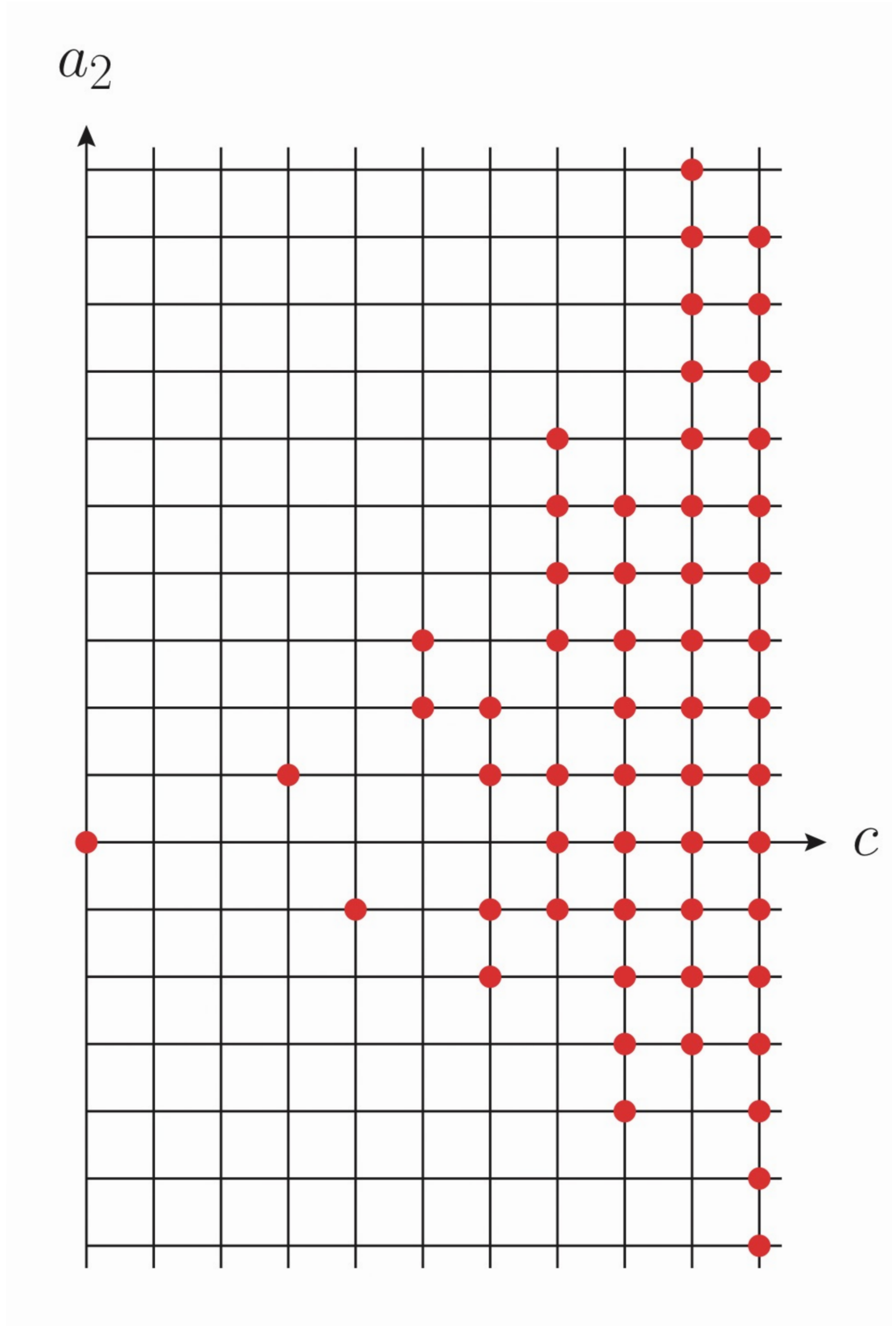
and signature

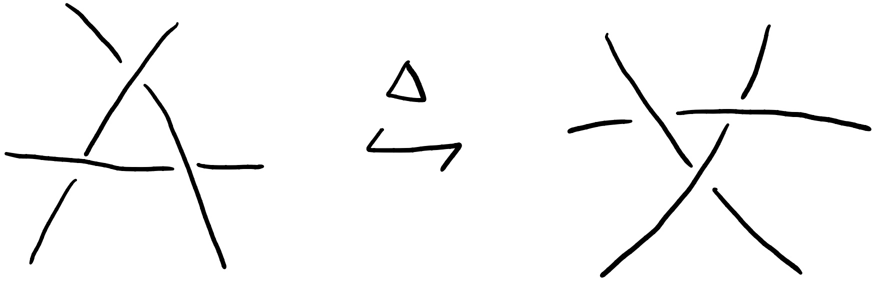
$\exists ?\ K \in \mathcal{K}$ with $g(K) = 1$ and $u(K) \geqq 4$

	c	u	g	g_c	bridge-1	braid-1
c		○	○	○	△	○
u	○		?	?	○	○
g	○	?		○	○	○
g_c	○	?	○		?	○
bridge-1	△	○	○	?		○
braid-1	○	○	○	○	○	

Other knot invariants

- $a_2 : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}$
  $$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \to & \mathbb{Z} \\ \uplus & & \uplus \\ K & \longmapsto & a_2(K) \end{array}$$

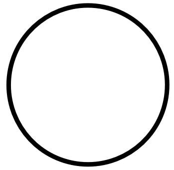




delta move

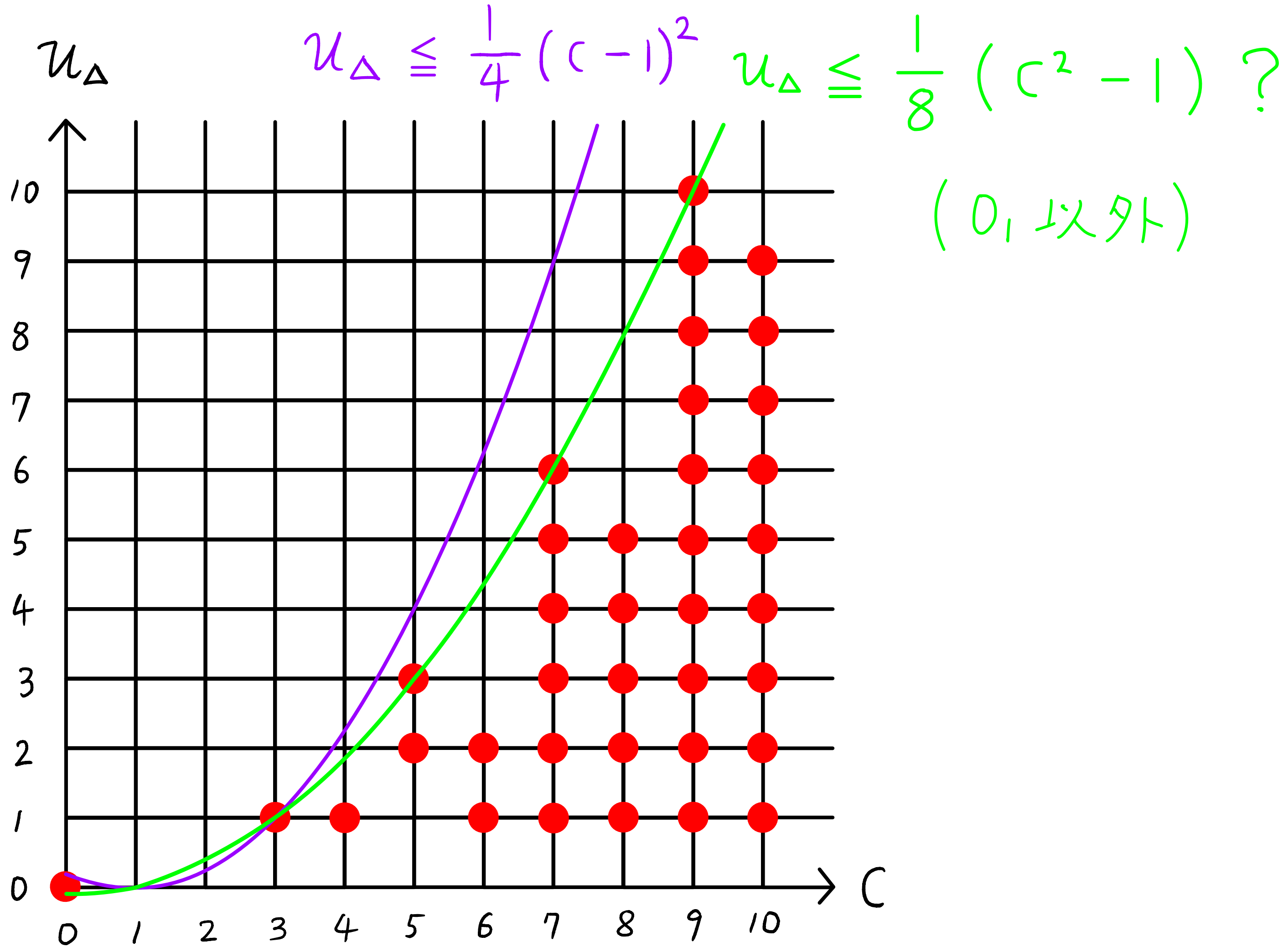
$$d_\Delta(K, J) := \min\{m \mid {}^\exists K = K_0 \overset{\Delta}{\leftrightarrows} K_1 \overset{\Delta}{\leftrightarrows} \cdots \overset{\Delta}{\leftrightarrows} K_m = J\}$$

$$u_\Delta(K) := d_\Delta(K, O_1)$$

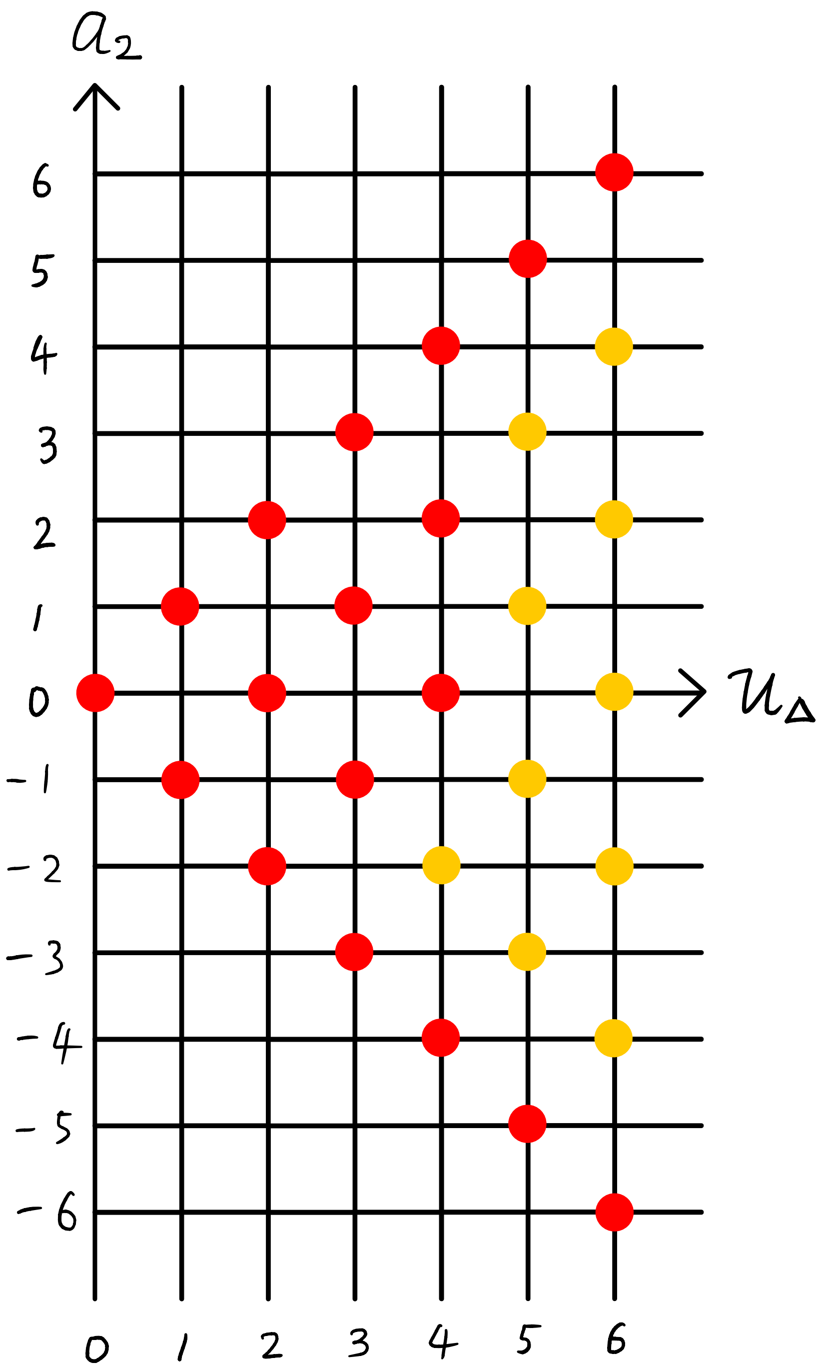
( O_1 (trivial knot))

$$\circ\ \begin{array}{rccl} u_\Delta : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\geqq 0} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & K & \longmapsto & u_\Delta(K) : \text{delta unknotting number of } K \end{array}$$

$$\underline{\text{Thm}} \quad {}^\forall K \in \mathcal{K}, \quad u_\Delta(K) \leqq \frac{1}{4}\left(c(K)-1\right)^2$$



$$(u_\Delta, a_2)(K) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqq 0} \times \mathbb{Z}$$



● 存在未確認

@ triple or more

triple は pairs に帰着出来ない情報を持っている。

例

$$
\begin{cases}
(c, u)({}^{\exists}5_1) = (5, 2) \\
(c, \text{braid}-1)({}^{\exists}5_2) = (5, 2) \\
(u, \text{braid}-1)({}^{\exists}3_1 \# 3_1) = (2, 2)
\end{cases}
$$

$$
(c, u, \text{braid}-1)({}^{\forall}K) \neq (5, 2, 2)
$$

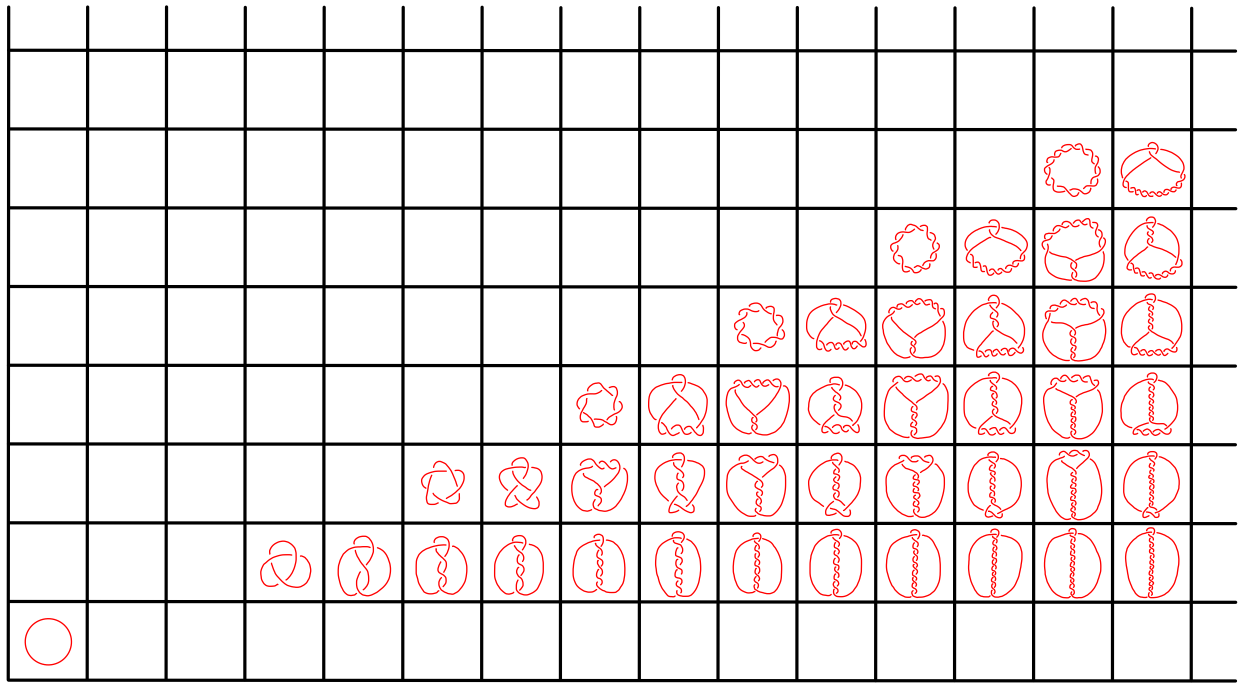
3つの knot invariants の間の関係の例

命題 [Diao ($g_c \to g$)]

$$c(K) \geq 2g_c(K) + (\mathrm{braid}-1)(K)$$

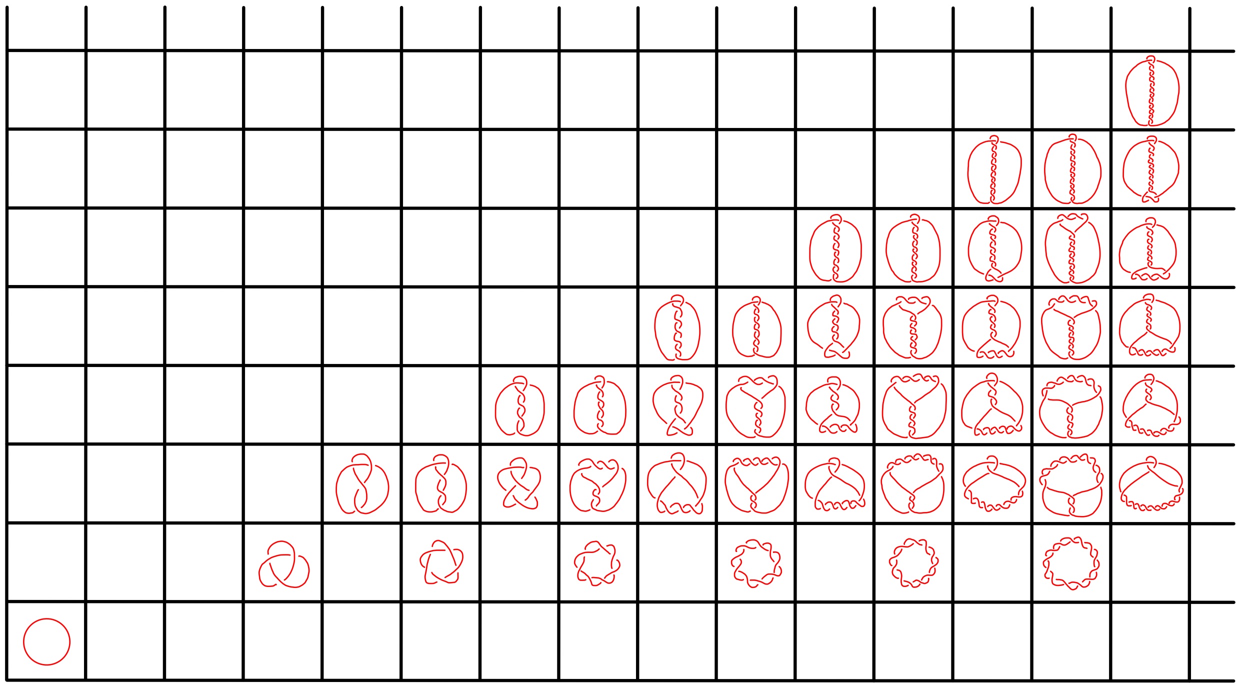
予想 [Diao-Ernst]

$$c(K) \leqq 2g(K) + 2(\mathrm{braid}-1)(K) + 4$$



$(c, g)(K)$

列ごとに上下逆



$(c, \mathrm{braid}-1)(K)$

◎ dimensions of knot invariants

例 $\dim(c, \text{braid}-1, \text{bridge}-1) = 3$

$$
\because \left.\begin{aligned}
(c, \text{braid}-1, \text{bridge}-1)(3_1) &= (3, 1, 1) \\
(c, \text{braid}-1, \text{bridge}-1)(4_1) &= (4, 2, 1) \\
(c, \text{braid}-1, \text{bridge}-1)(5_1) &= (5, 1, 1)
\end{aligned}\right\} \text{線形独立}
$$

$$
\begin{aligned}
&(c, \text{braid}-1, \text{bridge}-1)(p \cdot 3_1 \# q \cdot 4_1 \# r \cdot 5_1) \\
&= p(3, 1, 1) + q(4, 2, 1) + r(5, 1, 1)
\end{aligned}
$$

参考文献

T. Abe, R. Hanaki and R. Higa,
The unknotting number and band-unknotting number of a knot,
Osaka J. Math., 49 (2012), 523-550.

Y. Diao,
The additivity of crossing numbers,
J. Knot Theory Ramifications, 13 (2004), 857-866.

Y. Diao and C. Ernst,
Braid Index, Genus and Crossing Number of Links,
preprint.

R.H. Fox,
On the total curvature of some tame knots,
Ann. of Math.(2), 52 (1950), 258-260.

Y. Ohyama,
On the minimal crossing number and the braid index of links,
Canad. J. Math. 45 (1993), 117-131.

J. Schultens,
Additivity of bridge numbers of knots,
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 135 (2003), 539-544.

A. Stoimenow,
Minimal genus and fibering of canonical surfaces via disk decomposition,
LMS J. Comput. Math., 17 (2014), 77-108.

K. Taniyama,
Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded,
J. Knot Theory Ramifications, 18 (2009), 1049-1063.

ご 清聴 ありがとう

ございました

Merry Christmas!