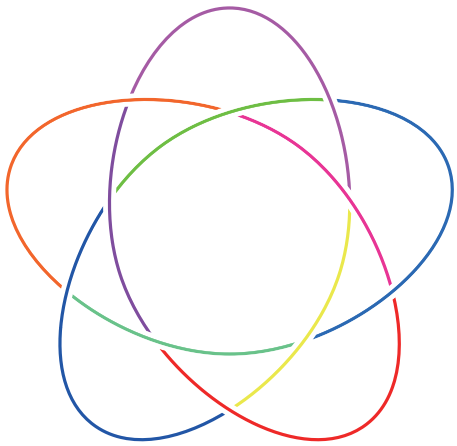
研究集会

「結び目の数理 VII 」

報告集



２０２５年２月

この報告集は２０２４年１２月２４日から２７日まで早稲田大学で開催された研究集会「結び目の数理 VII 」における講演要旨を収録したものです。

この研究集会は、トポロジー連絡会議の支援するトポロジープロジェクトの一環として、

２０２４年度科学研究費（補助金）　基盤研究（A）
「３次元双曲多様体上の量子トポロジー」研究代表者：大槻知忠（課題番号：21H04428）

２０２４年度科学研究費（基金）　基盤研究（B）
「結び目のトポロジーとその高分子科学への応用の研究」研究代表者：下川航也（課題番号： 23K20791）

の援助を受けて開催されました。

研究集会の開催に際して、多くの方々のご協力を賜わりました。
ここに厚く御礼申し上げます。

２０２５年2月

谷山 公規（早稲田大学教育学部）
安原 晃　（早稲田大学商学部）
山口 祥司（早稲田大学商学部）
丹下 稜斗（早稲田大学教育学部）

目次

Emergent version of Drinfeld's associator equations

久野 雄介　(津田塾大学)*

本報告の内容は, Dror Bar-Natan 氏 (Toronto 大学) との共同研究 [9] に基づく. 我々は, Drinfeld 結合子の定義方程式を, その値域を部分商に取り換えることで弱めたものを考える. なお, 同様の設定での別の考察が [8, 5, 14] でなされている.

以下, 簡単のため, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で考える. (基本的には, 標数 0 の体なら何でも良い.)

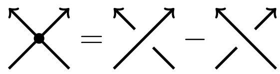
1 はじめに

Σ を有向曲面とする. シリンダー $\Sigma \times [0,1]$ 内の (有向) 結び目のアイソトピー類のなす集合を $\mathcal{K}_\Sigma$, 曲面 Σ 上の (自由) ループのホモトピー類のなす集合を $\hat{\pi}(\Sigma)$ とする. このとき, 射影をとることで自然な写像

$$\mathcal{K}_\Sigma \longrightarrow \hat{\pi}(\Sigma)$$

が定まる. 逆に, 曲面上のループに対し, その自己交差を解消することで $\Sigma \times [0,1]$ 内の結び目が得られる. 当然ながら, 各自己交差の解消のさせかたには正負の二通りがあるので, この「持ち上げ」は $\mathcal{K}_\Sigma$ の元としては well-defined ではない. しかし, 曲面上のループに対して定まる重要な構造として Goldman 括弧積や Turaev 余括弧積と呼ばれる演算があり, その背後にはこの「持ち上げ」が現れている [15, 13].

$\mathcal{K}_\Sigma$ と $\hat{\pi}(\Sigma)$ の間を自然に補間するのは Vassiliev フィルトレーションである. $\mathcal{K}_\Sigma$ の元の形式的な $\mathbb{Q}$-線型結合のなすベクトル空間を $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ とする. $i \geq 0$ に対して, $V_i \subset \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ を i 個の特異点を持つ $\Sigma \times [0,1]$ 内の特異結び目の張る部分空間とする. ここで,



の様に特異点を解消することで, 特異結び目を $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ の元とみなしている. 線型写像の列

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2 \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_1$$

において, 最後の空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_1$ は $\mathbb{Q}(\mathcal{K}_\Sigma/\text{ホモトピー}) = \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ と同一視される. 上に述べた持ち上げの観点からみたとき, 一つ前の空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2$ は, 曲面上のループがシリンダー内の結び目になりつつある段階の対象と見做せる. そうした気持ちを込めて, 我々は $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2$ の元を「emergent な結び目」と呼ぶ.

2 Drinfeld 結合子と柏原-Vergne 問題

Alekseev と Torossian [2] は Drinfeld 結合子から柏原-Vergne 方程式の解が得られることを示した. 本研究の動機はこの構成のトポロジカルな側面の理解にある. そのために

*e-mail: kunotti@tsuda.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:23K03121, 24K00520) の助成を受けたものである.

我々は emergent な結び目の考え方を用いてアプローチする．以下, 現れる数学的対象を簡単に説明する．

2.1 Drinfeld-河野 リー代数

整数 $n \geq 1$ に対して, dk_n を次の表示を持つリー代数とする:

生成元 $t_{ij} = t_{ji}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$

$$\textbf{関係式}\quad \begin{cases} \text{可換関係式: } [t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad (\sharp\{i,j,k,l\} = 4 \text{ のとき}) \\ 4\text{ 項関係式: } [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 \quad (\sharp\{i,j,k\} = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

t_{ij} の次数を 1 として, dk_n は次数付きリー代数になる．dk_n の次数完備化を $\widehat{\mathsf{dk}}_n$ とかく．

2.2 Drinfeld 結合子

$\mathsf{lie}_2 = \mathsf{lie}(x, y)$ を変数 x, y に関する自由リー代数, $\widehat{\mathsf{lie}}_2$ をその次数完備化とする．(カップリング定数 1 の)Drinfeld 結合子とは, x, y に関する非可換ベキ級数 $\Phi = \Phi(x, y)$ であって次の条件をみたすものである:

- Φ は group-like である, つまり $\Phi \in \exp(\widehat{\mathsf{lie}}_2)$ である．
- Φ は $\Phi = \exp(\frac{1}{24}[x, y] + \text{高次の項})$ という形をしている．
- Φ は五角方程式と (二種類の) 六角方程式をみたす．

ここで, 五角方程式とは $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_4)$ における次の等式である:

$$\Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{1(23)}, t_{(23)4})\Phi(t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{(12)3}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

ただし $t_{1(23)} = t_{12} + t_{13}$, etc., である．また, 六角方程式は $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_3)$ における等式である．古庄 [11] により, 六角方程式は実は五角方程式の帰結であることが知られている．

Drinfeld 結合子は存在する．Drinfeld 結合子全体の集合を Assoc_1 とかくと, これは次の様な bi-torsor の構造を持っている:

$$\mathsf{GT}_1 \curvearrowright \mathsf{Assoc}_1 \curvearrowleft \mathsf{GRT}_1$$

ここで, GT_1 と GRT_1 は Grothendieck-Teichmüller 群と呼ばれる群である．bi-torsor というのは, 二つの群作用は可換であり, ともに自由かつ推移的であることを言っている．

Bar-Natan [6] は, Drinfeld 結合子は括弧付き組ひもの圏 **PaB** の “expansion” であることを示した．これは, いわば Drinfeld 結合子の 3 次元トポロジーにおける解釈といえる．

2.3 柏原-Vergne 予想/問題/定理

もともと, 柏原-Vergne 予想 [12] は任意の有限次元リー代数に対して定式化された, リー理論における予想であった．Alekseev と Torossian [2] によって, 自由リー代数における問題として普遍的な形に再定式化された．ここではこれについて述べる．完備自由リー代数 $\widehat{\mathsf{lie}}_2$ の自己同型 F が tangential であるとは, $F(x) = \exp(\mathrm{ad}_u)(x)$, $F(y) = \exp(\mathrm{ad}_v)(y)$

(ただし $u, v \in \widehat{\mathsf{lie}}_2$) という形であることをいう．$\widehat{\mathsf{lie}}_2$ の tangential な自己同型の全体のなす群を tAut_2 とかく．$F \in \mathsf{tAut}_2$ に対する次の方程式を柏原-Vergne 方程式という:

(KV1)　$F(x+y) = \log(e^x e^y)$.
(KV2)　ある 1 変数ベキ級数 $f(s)$ が存在して $j(F) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ をみたす.

ここで, (KV2) において, j は群 tAut_2 上の x, y に関する巡回語の空間に値を持つある捩れ係数 1-コサイクルである.

柏原-Vergne 方程式の解は存在する．その全体を SolKV とかくと, これは次の様な bi-torsor の構造を持っている:

$$\mathsf{KV}_2 \curvearrowright \mathsf{SolKV} \curvearrowleft \mathsf{KRV}_2$$

驚くべきことに, Alekseev と Torossian [2] は, Drinfeld 結合子から柏原-Vergne 方程式の解が構成できることを示した．すなわち, 以下の単射が存在することを示した:

$$\mathsf{Assoc}_1 \hookrightarrow \mathsf{SolKV}.$$

Alekseev, Enriquez, Torossian [1] により, 明示的な公式も与えられている．bi-torsor 構造と適合する群の単射準同型 $\mathsf{GT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KV}_2$ および $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}_2$ も構成されている.

近年, 柏原-Vergne 方程式の解のトポロジカルな解釈が与えられている:

- 4 次元トポロジーにおいて: welded foam と呼ばれる $\mathbb{R}^4$ 内のある種の特異曲面のなすサーキット代数の “expansion” として (Bar-Natan-Dancso [7]).
- 2 次元トポロジーにおいて: 2 点穴あき円板 $D^2 \setminus \{2 \text{ 点}\}$ の Goldman-Turaev リー双代数の “expansion” として (Alekseev-河澄-久野-Naef [3]).

問. 写像 $\mathsf{Assoc}_1 \hookrightarrow \mathsf{SolKV}$ をトポロジーの立場から理解せよ．また, Drinfeld 結合子の 3 次元的解釈, 柏原-Vergne 方程式の 4 次元的あるいは 2 次元的解釈たちの関係を理解せよ.

grt_1 と krv_2 をそれぞれ群 GRT_1 と KRV_2 のリー代数とする．どちらも無限次元の次数付きリー代数である．ものとしては, grt_1 は lie_2 の部分空間, krv_2 は $\mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ の部分空間になっている．Alekseev-Torossian [2] は $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}_2$ の微分にあたる埋め込み

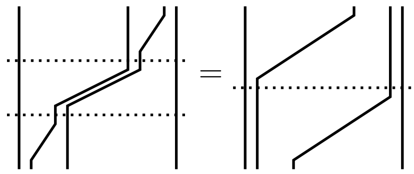
$$\nu : \mathsf{grt}_1 \hookrightarrow \mathsf{krv}_2, \quad \psi(x,y) \mapsto (\psi(-x-y, x), \psi(-x-y, y)) \tag{1}$$

も与えている．これらのリー代数は次の様に構造が予想されている.

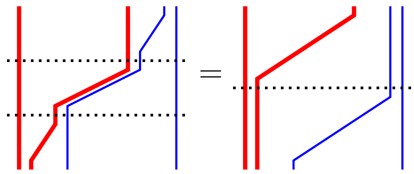
予想.　(1) (Deligne-Drinfeld) $\mathsf{grt}_1 \cong \mathsf{lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \ldots)$.
(2) (Alekseev-Torossian) $\mathsf{krv}_2 \cong \mathbb{Q}t \oplus \nu(\mathsf{grt}_1)$. ここで t は次数 1 のある元.

3 emergent 版の Drinfeld-河野 リー代数，五角関係式

Φ を Drinfeld 結合子とする．五角方程式は次の括弧付き組ひもの等式に対応している:



4 項関係式より，$\Phi(t_{12}, t_{23}) = \Phi(-t_{13} - t_{23}, t_{23})$ となる．そこで，五角方程式の両辺は t_{12} を含まない形に書くことができる．すなわち，$\mathsf{dk}_{2,2}$ を $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$ の生成する dk_4 の部分 Lie 代数とするとき，五角方程式は $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_{2,2})$ における等式とみなせる．(以下の図との対応が見やすいよう，あえて添字に色を付けた．) 次の様にひもに色を付けてみると，



これは $D^2 \setminus \{2$ 点 $\}$ における 2 本の括弧付き組ひもの等式として解釈できる．さらに，emergent 条件を $\mathsf{dk}_{2,2}$ において考えると「t_{34} が二つ以上現れたら 0」ということになる．

定義. c を t_{34} の生成する $\mathsf{dk}_{2,2}$ のリーイデアルとし，次の様におく:

$$\mathsf{edk}_{2,2} := \mathsf{dk}_{2,2}/[\mathsf{c}, \mathsf{c}].$$

同様に，$m, n \geq 0$ に対してリー代数 $\mathsf{edk}_{m,n}$ が定義される．

補題. 次数付き線形空間として，$\mathsf{edk}_{2,2} \cong \mathsf{lie}_2 \oplus \mathsf{lie}_2 \oplus \mathsf{ass}_2[-1]$.

ここで，$\mathsf{ass}_2 = \mathsf{ass}(x, y)$ は変数 x, y に関する自由結合代数である．

五角方程式を $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_{2,2})$ の商 $\exp(\widehat{\mathsf{edk}}_{2,2})$ において考えたものを，emergent 版の五角方程式と呼ぶ．その線形化は，$\varphi \in \mathsf{lie}_2$ に対する次の方程式になる:

$$\begin{cases} \varphi(y, 0) - \varphi(x + y, 0) = 0, \\ (\partial_y \varphi)(x, y) + (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0) - R(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

ここで，記号の説明は以下の通り．

- "偏微分作用素" $\partial_x, \partial_y : \mathsf{lie}_2 \to \mathsf{ass}_2$ が次の等式で定まる: 任意の $a \in \mathsf{lie}_2$ に対して

$$a = (\partial_x a)x + (\partial_y a)y.$$

  ここで，自然に $\mathsf{lie}_2 \subset \mathsf{ass}_2$ とみなせることに注意．

- $R : \mathsf{lie}_2 \to \mathsf{ass}_2$ は次をみたす一意的な写像である: $R(x) = R(y) = 0$ かつ任意の $a, b \in \mathsf{lie}_2$ に対して

$$\begin{aligned} R([a,b]) =& [R(a), b] + [a, R(b)] \\ &+ (\partial_x b)x\,\iota(\partial_x a) - (\partial_x a)x\,\iota(\partial_x b) + (\partial_y b)y\,\iota(\partial_y a) - (\partial_y a)y\,\iota(\partial_y b). \end{aligned}$$

  ここで, ι は $\iota(x) = -x$, $\iota(y) = -y$ によって定まる ass_2 の代数反準同型である.

構成から, $\psi = \psi(x, y) \in \mathsf{grt}_1$ のとき, $\varphi(x, y) = \psi(-x-y, y)$ は方程式 (2) をみたす. さらに, Drinfeld [10] により, $\psi \in \mathsf{grt}_1$ のとき, 次が成り立つことが示されている:

$$[x, \psi(-x-y, x)] + [y, \psi(-x-y, y)] = 0 \tag{3}$$

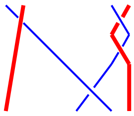
定義. 次数付き線形空間 $\mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ を, (2) および次の条件をみたす $\varphi \in \mathsf{lie}_2$ の全体とする:

$$[x, \varphi(y, x)] + [y, \varphi(x, y)] = 0. \tag{4}$$

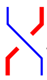
注. 次数 17 以下で, 方程式 (2) の解空間は grt_1 と一致し, 特に (2) の解は (4) をみたす.

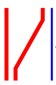
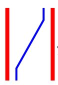
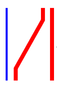
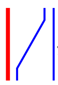
定義から, $\mathsf{grt}_1 \hookrightarrow \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}, \psi(x, y) \mapsto \psi(-x-y, y)$ となる.

以上の emergent 版の方程式のトポロジカルな意味づけは, 圏 **PaB** の二色版の商である括弧付き emergent 組ひもの圏 **PaEB** においてなされる. 非常に大雑把に述べると, **PaEB** の射は次の様な括弧付き組ひもたちのしかるべき線型結合である:



射の空間には, Vassiliev フィルトレーションの 2 番目 V_2 による関係式を入れる. ここで注意として, 赤いひもたちの入れ替えやそれらの括弧付けを変える射は考えない. 例えば,

$\sigma_{\mathrm{pp}} =$ , $\sigma_{\mathrm{ps}}^{+} =$ , $\sigma_{\mathrm{ps}}^{-} =$ ,

$\alpha_{\mathrm{ppp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{pps}} =$ , $\alpha_{\mathrm{psp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{spp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{pss}} =$ , $\ldots$

のうち, 各行の先頭の組ひも σ_{pp} や α_{ppp} は **PaEB** の射ではない. (他のものはそう.)

4 主結果

柏原-Vergne リー代数の定義を述べる. 巡回語の空間を $\mathsf{tr}_2 = \mathsf{ass}_2/[\mathsf{ass}_2, \mathsf{ass}_2]$ とおく.

定義 (Alekseev-Torossian [2])**.** 次をみたす $(a, b) \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ の全体の集合を krv_2 とする.

(LKV1) $[x, a] + [y, b] = 0.$

(LKV2) ある 1 変数ベキ級数 f が存在して, tr_2 の元として次の等式が成り立つ:

$$(\partial_x a)x + (\partial_y b)y = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

krv_2 のリー代数の構造は次の様に与えられる．$\tilde{u} = (a,b) \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ に対して lie_2 の導分 $u = \rho(\tilde{u})$ を $x \mapsto [x,a]$, $y \mapsto [y,b]$ によって定める．このとき, krv_2 の二つの元 $\tilde{u}_1 = (a_1,b_1)$ と $\tilde{u}_2 = (a_2,b_2)$ の括弧積は次の式で与えられる:

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] = \big(u_1(a_2) - u_2(a_1) + [a_1,a_2], u_1(b_2) - u_2(b_1) + [b_1,b_2]\big).$$

次が主結果であり, Alekseev-Torossian の埋め込み (1) の分解を与える．

定理 ([9])**.** (i) $\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ に対し $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) := (\varphi(y,x), \varphi(x,y)) \in \mathsf{krv}_2$ となる．

(ii) 単射線形写像 $\nu^{\mathrm{em}} : \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \to \mathsf{krv}_2$ の像は krv_2 の対称部分 $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} = \{(a,b) \in \mathsf{krv}_2 \mid b(y,x) = a(x,y)\}$ の次数 2 以上の部分に一致する: $\mathrm{Im}(\nu^{\mathrm{em}}) = (\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}})_{\geq 2}$.

なお, $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}}$ と krv_2 が一致するかどうかは知られていない (次数 17 までは一致).

以下, 主張 (i) の証明の概略, 特に emergent 五角方程式 (2) の使用箇所を説明する．

$\Sigma = D^2 \setminus \{2$ 点 $\}$ とおく．Σ 上のループの張る空間 $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ は, ループの交差や自己交差から定まる演算である Goldman 括弧積 $[\cdot,\cdot] : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ や (フレイミング版)Turaev 余括弧積 $\delta^f : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \to \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)^{\otimes 2}$ を備えている．境界に基点をとり, $\pi = \pi_1(\Sigma)$ とおく．$[\cdot,\cdot]$ の基点付き版 $\eta : \mathbb{Q}\pi^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}\pi$ と δ^f の基点付き版 $\mu^f : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}\pi$ が定義される．これらのループ演算の随伴次数商として, 次の演算が定まる:

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{gr}} : \mathsf{tr}_2^{\otimes 2} \to \mathsf{tr}_2, \quad \eta_{\mathrm{gr}} : \mathsf{ass}_2^{\otimes 2} \to \mathsf{ass}_2, \quad \delta^f_{\mathrm{gr}} : \mathsf{tr}_2 \to \mathsf{tr}_2^{\otimes 2}, \quad \mu^f_{\mathrm{gr}} : \mathsf{ass}_2 \to \mathsf{ass}_2.$$

(これらの演算には明示的な計算式がある．[4, §3] を参照.)

証明の鍵となるのは次の四つの事実である:

(あ) $\tilde{u} \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ は (LKV1) をみたす $\iff$ $u = \rho(\tilde{u})$ は η_{gr} と可換.

(い) $\tilde{u} \in \mathsf{krv}_2 \iff u$ は η_{gr}, δ^f_{gr} と可換 [4].

(う) $\mu^f_{\mathrm{gr}}|_{\mathsf{lie}_2} = R$. すなわち写像 R は曲面上の曲線の自己交差を測る演算と関係する．

(え) $\tilde{u}$ は (LKV1) をみたし, さらにある $c \in \mathsf{ass}_2$ が存在して次が成り立つと仮定する:

$$\mu^f_{\mathrm{gr}}(u(x)) = [x,c] \quad \text{かつ} \quad \mu^f_{\mathrm{gr}}(u(y)) = [y,c].$$

このとき, u は δ^f_{gr} と可換となる．

定理 (i) の証明 $\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ のとき, 条件 (4) から $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)$ は (LKV1) をみたす．$\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) \in \mathsf{krv}_2$ を示すには, それが (え) の条件をみたすことを確認すれば良い．次の様な計算をする:

$$\begin{aligned}
&\mu^f_{\mathrm{gr}}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)y) = R([y,\varphi(x,y)]) = [y, R(\varphi)] + (\partial_y\varphi)y - y\,\iota(\partial_y\varphi) \\
&= [y, R(\varphi) - \partial_y\varphi] \underset{\pentagon}{=} [y, (\partial_y\varphi)(y,0) - (\partial_y\varphi)(x+y,0)] = [y, -(\partial_y\varphi)(x+y,0)].
\end{aligned}$$

ここで, $\pentagon$ において emergent 五角方程式を用いた．同様の計算で, $\mu^f_{\mathrm{gr}}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)(x)) = [x, -(\partial_y\varphi)(y+x,0)]$ がわかる．$c := -(\partial_y\varphi)(x+y,0)$ とおけば良い． $\square$

もし, 2 節の終わりに紹介した予想が正しければ, $\mathsf{grt}_1 = \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ かつ $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} = \mathsf{krv}_2$ となる. 今後の課題として次が挙げられる.

問. (i) 現状の $\mathsf{grt}^{\mathrm{em}}$ の定義から (4) を省けるか? つまり, 条件 (2) は (4) を導くか?

(ii) $\nu^{\mathrm{em}} : \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \to \mathsf{krv}_2$ の "大域版" を与えよ. つまり, emergent 版 Drinfeld 結合子の定義を与え, その全体の集合 $\mathsf{Assoc}_1^{\mathrm{em}}$ から SolKV への写像を構成せよ. (そのためには, 圏 **PaEB** の "有限表示"(圏 **PaB** が持つ様な) の考察が必要になる.)

参考文献

[1] A. Alekseev, B. Enriquez, and C. Torossian, Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations, Publications Mathématiques de L'IHÉS, **112** (2010) 143–189.

[2] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, *Ann. of Math.* (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Adv. Math.* **326** (2018), 1–53.

[4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv:1804.09566v3 (2023)

[5] A. Alekseev, F. Naef and M. Ren, Poisson brackets and coaction maps of regularized holonomies of the KZ equation, preprint, arXiv:2409.08894

[6] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmuller group, I, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 2, 183–212.

[7] D. Bar-Natan and Z. Dancso, Finite type invariants of w-knotted objects II: tangles, foams and the Kashiwara-Vergne problem, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1517–1586.

[8] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, J. Liu, and N. Scherich, Goldman-Turaev formality from the Kontsevich integral, in preparation. See also talks `http://drorbn.net/ld22` and `http://drorbn.net/ge24`

[9] D. Bar-Natan and Y. Kuno, Emergent version of Drinfeld's associator equations, in preparation.

[10] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991) no. 4, 829–860.

[11] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations, *Ann. of Math.* (2) **171** (2010), no. 1, 545–556.

[12] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff Formula and Invariant Hyperfunctions, *Invent. Math.* **47** (1978), no. 3, 249–272.

[13] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev's loop operations, *Quantum Topol.* **9** (2018), no. 1, 39–117.

[14] R. Navarro Betancourt and F. Naef, A functorial approach to the Kashiwara-Vergne problem, in preparation.

[15] V. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **24** (1991), no. 6, 635–704.

負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開と量子モジュラー性

九州大学大学院数理学研究院 PD 村上友哉

1 序

3 次元多様体の量子不変量の発散の様子を求める問題は, 量子トポロジーにおける最重要課題の一つである. 本稿ではこの問題を部分的に解決できたことを報告する.

主役を務めるのは 3 次元多様体に対して定まる **Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量**と呼ばれる複素数列に値を取る位相不変量である. この複素数列の発散の様子が Chern–Simons 不変量で記述されるだろうというのが Witten や Andersen らによる**漸近展開予想**である. 本稿の主結果は, 3 次元多様体を負定値鉛管多様体というクラスから取るときに, WRT 不変量の漸近展開を決定したというものである. 証明にあたり,「モジュラー級数」と命名した新しい枠組みを用いて漸近展開や量子モジュラー性を与える一般論を構築した. この枠組みは近年量子トポロジーや数理物理において重要視されている resurgence 理論のうち Borel–Laplace 変換の内容を多変数化するものにもなっており, また「多重 Eisenstein 級数」と呼ばれる数論的対象に関する 19 年来の最重要問題の一つを解決するという応用もある.

少しだけ個人的な話をさせて頂きたい. 私は元々整数論のモジュラー形式という対象を専門に研究していたが, 2021 年に東北大学の寺嶋郁二先生の元で当時博士学生をしていた同級生の森祥仁氏から「量子不変量の計算にモジュラー形式というものが現れるみたいだがこれは何なのか」というような相談をもらったことがきっかけで, 量子トポロジーという分野に足を踏み入ることとなった. 量子不変量の研究をし始めてからひしひしと感じるのは, 量子不変量は量子トポロジーという肥沃な土壌に咲いた大輪の花のような麗しく実り豊かな対象だという実感である. 当初は「数論側から量子トポロジーに貢献できればいいな」というような意識だったが, 今では「量子不変量を育てよう, 必ず数論の美果が実るから」という気持ちでいる. 本稿で紹介する「モジュラー級数」の枠組みは, 量子不変量の研究を通して収穫できた一つの数論的成果と言える.

本稿の構成を述べる. 2 節では先行研究と主結果を述べる. 3 節では証明の方針を概説する. 4 節では証明の核心部を担う「モジュラー級数」という枠組みを紹介する. 証明の詳細は述べず, トイモデルやアイデアの要点の解説を中心に紹介することにする.

2 主結果

2.1 漸近展開予想

有向閉 3 次元多様体 M と正整数 k に対し, M のレベル k の SU(2) WRT 不変量を $Z_k(M) \in \mathbb{C}$ と書くことにする. これは Witten [Wit89] により経路積分を用いて物理の立場から定義された後, Reshetikhin–Turaev [RT91, Theorem 3.3.2] によって数学的に構成された位相不変量である. Reshetikhin–Turaev の構成法を非常に大雑把に説明すると, ます Dehn 手術の結果が M になるような絡み目と手術係数を取り, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ とするときに量子群 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の表現を絡み目の組み紐表示に乗せて勘定した後, 3 次元多様体の位相不変量となるよう補正するというものである. 詳細は [Tur16, Chapter II, Section 2] を参照頂きたい.

WRT 不変量の研究における最重要課題の一つが Witten [Wit89] や Andersen [And13, Conjecture 1.1] らによる**漸近展開予想 (asymptotic expansion conjecture)** である. これは $k \to \infty$ としたときに WRT 不

変量 $Z_k(M)$ の発散の様子や, より精密な情報である漸近展開の主要項に Chern–Simons 不変量が現れるというものである. ここで Chern–Simons 不変量とは, Chern–Simons 作用

$$\begin{array}{ccccc} R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) & \underset{1:1}{\longleftrightarrow} & \dfrac{\{M \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ の平坦接続}\}}{\text{ゲージ変換}} & \longrightarrow & \mathbb{C}/\mathbb{Z} \\ & & [A] & \longmapsto & \dfrac{1}{8\pi^2}\displaystyle\int_M \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right) \bmod \mathbb{Z} \end{array}$$

による像のことである. ただし $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) \coloneqq \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/$共役 は指標多様体と呼ばれ, 複素代数多様体の構造を持つことが知られている. また上の写像 $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ は $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M)$ の各連結成分ごとに定数関数になることが知られている. そのため, M に対する Chern–Simons 不変量の集合を $\mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ と書くと, これは有限集合である. 以上の準備の下で漸近展開予想は以下のように述べられる.

予想 2.1 (漸近展開予想, [AHJ$^+$17, Conjecture 1.1])**.** 各 Chern–Simons 不変量 $\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ に対しある Puiseux 級数 $Z_\theta(x) \in \mathbb{C}[x^{1/p} \mid p \in \mathbb{Z}_{>0}][[x^{-1}]]$ が存在して漸近展開

$$Z_k(M) \sim \sum_{\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) \quad \text{as } k \to \infty \tag{2.1}$$

が成り立つ.

ここで式 (2.1) は Poincaré による漸近展開の記法であり, 各 θ に対し $Z_\theta(x) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{\theta,m} x^{-m/P}$ と書くとき, 任意の正整数 M に対してある $C > 0$ が存在して

$$\left| Z_k(M) - \sum_{\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} \sum_{m=m_0}^{M} a_{\theta,m} k^{-m/P} \right| \le C k^{-(M+1)/P} \quad \text{as } k \to \infty$$

が成り立つことを意味する.

2.2 負定値鉛管多様体

本稿で扱う 3 次元多様体のクラスである**負定値鉛管多様体**は以下のように定義される.

定義 2.2. (i) **鉛管グラフ (plumbed graph)** とは, 各頂点を整数で重み付けられた木（すなわち連結有限無向グラフで閉路を持たないもの）のことである.

(ii) 鉛管グラフ Γ に対し, 各頂点を自明な結び目に, 各辺を自明な結び目を絡ませることに, 頂点の重みを手術係数に対応させることで手術係数付き絡み目を得る（図 1, 2 参照）. この絡み目に沿った Dehn 手術で得られる 3 次元多様体を $M(\Gamma)$ と書き, このようにして得られる 3 次元多様体を**鉛管多様体**と呼ぶ.

(iii) 鉛管多様体 $M(\Gamma)$ が**負定値**であるとは, それを定める鉛管グラフ Γ の隣接行列が負定値であることを言う. ただし隣接行列の対角成分には頂点の重さを割り当てることとする.

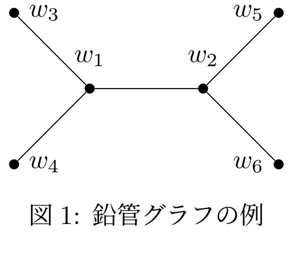


図 1: 鉛管グラフの例

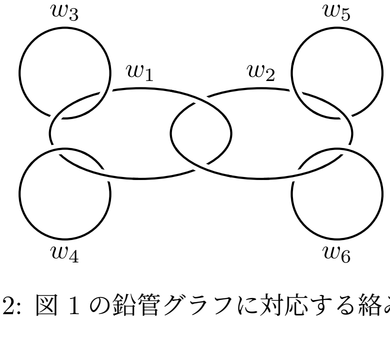


図 2: 図 1 の鉛管グラフに対応する絡み目

注意 2.3. 負定値鉛管多様体は他の多様体のクラスと以下の包含関係にある.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{有理ホモロジー球面} & \supset & \text{負定値鉛管多様体} & \supset & \text{Seifert ホモロジー球面} \\
 & & \cup & & \\
 & & \text{レンズ空間} & &
\end{array}
$$

このことは以下の事実から従う：

- 鉛管グラフ Γ の頂点集合を V, 隣接行列を $W \in \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}^V)$ とすると $H_1(M(\Gamma), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V)$ が成り立つ（[村 22, 補題 3.4]）ので, 負定値鉛管多様体は有理ホモロジー球面である.
- 次数 3 以上の頂点を唯一持ち $\det W = \pm 1$ を満たす鉛管グラフから定まる鉛管多様体は Seifert ホモロジー球面であり, 逆に全ての Seifert ホモロジー球面はそのような負定値鉛管グラフから得られる（[AM22, Subsection 4.1]）.
- 互いに素な正整数 $p > q$ を取り, レンズ空間 $L(p, q)$ を考える. $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を負の連分数展開

$$
\frac{p}{q} = k_1 - \cfrac{1}{k_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{k_r}}} \quad \text{で定めると,} \quad \overset{-k_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{-k_2}{\bullet}\!\!-\!\!-\, \cdots \,-\!\!-\!\!\overset{-k_{s-1}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{-k_s}{\bullet} \quad \text{という負定値鉛管グラフ}
$$

  から定まる負定値鉛管多様体が $L(p, q)$ である.

2.3 主結果

本稿の主結果は以下のように述べられる.

定理 2.4. 負定値鉛管多様体 $M = M(\Gamma)$ に対し, 明示的に記述される有限集合 $C(\Gamma) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ および各 $\theta \in C(\Gamma)$ に対する Puiseux 級数 $Z_\theta(x) \in \mathbb{C}((x^{-1/2}))$ が存在して漸近展開

$$
Z_k(M) \sim \sum_{\theta \in C(\Gamma)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) \quad \text{as } k \to \infty
$$

が成り立つ.

この結果によって負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開を完全に決定することができた. ここから更に歩を進めて漸近展開予想（予想 2.1）を解決するには集合 $C(\Gamma)$ と Chern–Simons 不変量との関係を調べる必要がある. これについては現在寺嶋郁二氏と共同研究を行っているところである.

注意 2.5. 定理 2.4 の集合 $C(\Gamma)$ は明示的に

$$
C(\Gamma) = \{0\} \cup \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V), \\ V' \subset V^{\veemidvert, (a)}}} \left\{ -{}^t a W^{-1} a + \frac{1}{4} {}^t n P_V^{-1} n + {}^t n U_{V'} P_{V'^c} m \bmod \mathbb{Z} \;\middle|\; n \in \prod_{v \in V'} \mathcal{P}_v^{(a)}, m \in \prod_{v \in V'^c} \frac{1}{P_v}(1 + 2\mathbb{Z}) \right\}
$$

と書ける. ただしここで以下の記号を用いた：

- V は M を定める鉛管グラフ Γ の頂点集合.
- 各頂点 $v \in V$ の次数を $\deg v := \#\{v \text{ から伸びる辺}\}$ で定める.
- $V^{\veemidvert} := \{v \in V \mid \deg v \geq 3\}$ とおく.[*1]

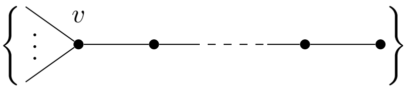
[*1] ここで $\veemidvert$ という記号は 3 本の辺が集まっている頂点をイメージしている. Unicode は U+2A5B で, TeX で入力する際は `stix` パッケージや `unicode-math` パッケージを用いて「\veemidvert」と入力することで出力できる.

- $V' \subset V^{\Psi}$ に対し $V'^{\mathsf{c}} := V^{\Psi} \setminus V'$ とおく.
- $a \in \mathbb{Z}^V$ に対し $V^{\Psi,(a)} := \left\{ v \in V^{\Psi} \mid (W^{-1}a)_v \in \mathbb{Z} \right\}$ とおく.
- W は Γ の隣接行列.
- P^{-1} は W^{-1} の $V^{\Psi} \times V^{\Psi}$ 部分行列.
- $V' \subset V^{\Psi}$ に対し P を $(V' \sqcup V'^{\mathsf{c}}) \times (V' \sqcup V'^{\mathsf{c}})$ ブロック行列と見たときの各成分を以下のように定める：

$$\begin{pmatrix} P_{V'} & U^{\Psi}_{V'} \\ {}^{t}U^{\Psi}_{V'} & P^{\Psi}_{V'^{\mathsf{c}}} \end{pmatrix} := P.$$

- 各 $v \in V^{\Psi}$ に対し

$$\overline{v} := \{v \text{ と次数 } 1 \text{ の頂点を結ぶ } \Gamma \text{ 内のパスで, 途中経路の頂点の次数は全て } 2\}$$

$= \Big\{$  $\Big\}.$

- 各 $v \in V^{\Psi}$ と $\beta \in \overline{v}$ に対し, パス β から頂点 v を除いたグラフの隣接行列を W_β とおき, その行列式を $p_\beta := \det W_\beta$ とおく.
- 各 $v \in V^{\Psi}$ に対し $P_v := \prod_{\beta \in \overline{v}} p_\beta$ とおく.
- $a \in \mathbb{Z}^V$ と $v \in V^{\Psi,(\alpha)}$ に対し

$$\mathcal{P}_v^{(a)} := \left\{ n_v \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \#\left\{ \beta \in \overline{v} \;\middle|\; (W^{-1}a)_{i_\beta} + \frac{n_v}{p_\beta} \in \mathbb{Z} \right\} \leq \deg v - 3 \right\}.$$

例 2.6. 上で述べた $C(\Gamma)$ の表示式はあまりにも煩雑なため, 例を挙げる. M が Seifert ホモロジー球面 $\Sigma(p_1, \ldots, p_n)$ のとき, 注意 2.3 で述べたように鉛管グラフ Γ として $V^{\Psi} = \{v_0\}$ となるものが取れる. このとき

$$\{p_\beta \mid \beta \in \overline{v}\} = \{p_1, \ldots, p_n\}, \quad P = p_1 \cdots p_n,$$

$$C(\Gamma) = \{0\} \cup \left\{ -\frac{m^2}{4P} \bmod \mathbb{Z} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ p_i \mid m \text{ となる } 1 \leq i \leq n \text{ は高々 } n-3 \text{ 個} \right\}$$

が成り立つ. これは Andersen–Mistegård [AM22, Corollary 9] によって求められた Seifert ホモロジー球面の Chern–Simons 不変量の集合 $\mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ の表示式に一致する. 従って Seifert ホモロジー球面の場合は $C(\Gamma) = \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ である.

3　証明の方針

3.1　証明の方針の概略

定理 2.4 の証明の方針は以下の図式にまとめることが出来る.

$$\begin{tikzcd}
Z_k(M) \arrow[d, dashed, "k\to\infty"', "??"] & & \widehat{Z}(q;M) \arrow[ll, "\tau\to 1/k", "(1)"'] \arrow[d, "(2)"', "\tau\mapsto -1/\tau"] \\
\displaystyle\sum_{\theta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) & & \widehat{Z}^*(q) + \displaystyle\int \widehat{Z}^{**}(\tau;x)dx \arrow[ll, "(3)", "\tau=-k,\,k\to\infty"']
\end{tikzcd}$$

左側の矢印が目標としている WRT 不変量の漸近展開である. これをコの字型, (1)(2)(3) の順に図式を迂回することで解決することを試みる. ここで右上の $\widehat{Z}(q;M)$ は M の **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量**と呼ばれる q 級数不変量であり, 上側の矢印は**円周極限予想 (radial limit conjecture)** と呼ばれる主張であり, 右側の矢印は**モジュラー変換公式**と呼ばれるタイプの等式である. ただしここで $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ と

する．$\tau \to 1/k$ という極限は q を 1 の冪根 $e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ に飛ばす極限と同じなので radial limit と呼ばれるが，ここでは「円周極限」という訳語を当てることにする[*2]．なお下側の矢印は特に名の付いた主張では無いが，本稿で新しく準備する「モジュラー級数」の枠組みと定常位相近似と呼ばれる手法を用いることで示される．これら証明の各ステップについては次項以降で詳しく説明する．

歴史的な経緯について述べておく．上の方針は Lawrence–Zagier [LZ99] に端を発するものである．彼らは初めて WRT 不変量が**偽テータ関数 (false theta function)** というある種の q 級数の円周極限で表されることを明らかにし，上の方針を取ることで Poincaré ホモロジー球面に対して漸近展開予想（予想 2.1）を解決した．その後，樋上 [Hik05, Hik06] はこの手法を発展させて Seifert ホモロジー球面の場合の漸近展開予想を解決した．これらの研究が示唆するのは「より一般の 3 次元多様体に対しても WRT 不変量を円周極限に持つ偽テータ関数が存在するのではないか？」という問いである．更にそのような偽テータ関数が多様体の位相不変量として実現できたら一層良い．これを実行したのが Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] である．彼らは負定値鉛管多様体に対して GPPV 不変量 $\widehat{Z}(q; M)$ と呼ばれる偽テータ関数を構成し，その円周極限が WRT 不変量になること，すなわち円周極限予想を定式化した．この研究はトポロジーのみならず数理物理，数論，表現論に対してもインパクトを与え，現在様々な側面に基づいた研究が数多く行われている [CCF$^+$19, CDGG23, CFS20, CGP23, EGG$^+$22, GHN$^+$21, GM21, Par20a, Par20b, Whe25]．筆者の研究もこの流れを汲むものである．

3.2 Gukov–Pei–Putrov–Vafa 不変量

それでは GPPV 不変量の定義を与えよう．

定義 3.1 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Subsection 3.4])**.** 負定値鉛管多様体 M とそのスピン c 構造 $b \in \mathrm{Spin}^c(M)$ に対し **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量**を

$$\widehat{Z}_b(q; M) \coloneqq q^{\Delta} \sum_{l \in b + 2W(\mathbb{Z}^V)} \widetilde{F}_l q^{-{}^t l W^{-1} l/4}.$$

によって定義する．ただし以下の記号を用いる：

- 注意 2.5 と同様に，M を定める鉛管グラフを Γ，その頂点集合を V，頂点 v の次数を $\deg v$，隣接行列を W とする．
- 標準的な同型 $\mathrm{Spin}^c(M) \cong \big((\deg v)_{v \in V} + 2\mathbb{Z}^V\big)/2W(\mathbb{Z}^V)$（[GM21, Subsection 4.1]）により b を右辺の元とみなす．
- $\Delta \coloneqq -(3|V| + \operatorname{tr} W)/4$.
- $v \in V$ に対し $F_v(z_v) \coloneqq (z_v - z_v^{-1})^{2-\deg v}$.
- Cauchy の主値
$$\mathrm{v.p.} \coloneqq \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{|z|=1+\varepsilon} + \int_{|z|=1-\varepsilon} \right).$$
- $l = (l_v)_{v \in V} \in \mathbb{Z}^V$ に対し
$$\widetilde{F}_l \coloneqq \prod_{v \in V} \widetilde{F}_{v, l_v}, \quad \widetilde{F}_{v, l_v} \coloneqq \mathrm{v.p.} \int_{|\xi_v|=1} F_v(z_v) \frac{z_v^{l_v} d\xi_v}{2\pi\sqrt{-1} z_v}.$$

[*2] 「動径極限」と訳されることもあるようである．

注意 3.2. [AM22, p. 743] より

$$\widetilde{F}_{v,l_v} = \begin{cases} -l_v, & \text{if } \deg v = 1,\ l_v \in \{\pm 1\}, \\ 1, & \text{if } \deg v = 2,\ l_v = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dbinom{m+\deg v-3}{\deg v-3}, & \text{if } \deg v \geq 3,\ l_v = \deg v - 2 + 2m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \dfrac{(-1)^{\deg v}}{2}\dbinom{m+\deg v-3}{\deg v-3}, & \text{if } \deg v \geq 3,\ -l_v = \deg v - 2 + 2m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と書ける．特にこれは整数なので $\widehat{Z}_b(q;M) \in q^{\Delta}\mathbb{Z}[[q]]$ が成り立つ.

命題 3.3 (Gukov–Manolescu [GM21, Proposition 4.6])**.** GPPV 不変量は負定値鉛管多様体の位相不変量.

3.3 円周極限予想

円周極限予想は以下のように述べられる.

定理 3.4 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Equation (A.28), Conjeccture 2.1] により予想, 筆者 [Mur23, Theorem 1.2] により解決)**.** 負定値鉛管多様体 M に対し以下が成り立つ：

$$Z_k(M) = \frac{1}{2(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})\sqrt{|\det W|}} \lim_{\tau \to 1/k} \sum_{a \in H_1(M,\mathbb{Z})} e^{-2\pi\sqrt{-1}k\,{}^t a W^{-1} a} \sum_{b \in \mathrm{Spin}^c(M)} e^{-2\pi\sqrt{-1}\,{}^t a W^{-1} b}\widehat{Z}_b(q;M).$$

なお円周極限予想の動機や先行研究のより詳しい説明が [村 24, 3 節] にまとめてある.

3.4 モジュラー変換公式と下側の矢印

以上から, 本節冒頭の図式のうち上側の矢印は解決されており, 後は右側の矢印（モジュラー変換公式）と下側の矢印を解決すれば WRT 不変量の漸近展開を決定できることが分かった．本稿の技術的核心部である「モジュラー級数」の枠組みは, まさにこの二つを解決するために構築したものである．「モジュラー級数」の説明は次節に回し, ここではアイデアを説明する.

まずモジュラー変換公式に関する先行研究を振り返ろう．Lawrence–Zagier [LZ99] や樋上 [Hik05, Hik06] は偽テータ関数を直接扱わず, 非正則 Eichler 積分と呼ばれる別種の関数のモジュラー変換公式を考えることで対処している．数論側ではその後, 偽テータ関数のモジュラー変換公式を与える方法が Bringmann–Nazaroglu [BN19] によって整備され, 松坂–寺嶋 [MT21] によって Seifert ホモロジー球面の場合に, また Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] によって H グラフから定まる負定値鉛管ホモロジー球面の場合に GPPV 不変量のモジュラー変換公式が与えられるに至った．彼らの方法は誤差関数を用いて偽テータ関数のモジュラー補完（綺麗なモジュラー変換公式を持つように変形された関数）を与えるというもので, アイデアの源流は Ramanujan の擬テータ関数 (mock theta function) のモジュラー変換公式を与えた Zwegers [Zwe02] の研究に遡る．この手法は数論的には目覚ましいものであり, 擬テータ関数と調和 Maass 形式の関係が明らかになることや（[BFOR17] に詳しい）, 偽テータ関数を包括する「偽モジュラー形式」の枠組みを構築する試み（[BKMN21]）などの大きな進展を生んでいる．一方でトポロジーの立場からは不満も大きいと筆者には感じられる．この方法では GPPV 不変量の係数の表示式（注意 3.2）の二項係数を単項式の和に分解して各パーツごとに計算を実行するため, 漸近展開を導出する上での見通しが良いとは言い難いのである.

折角なら, 多様体の情報が詰まっている GPPV 不変量の係数をそのまま扱うような手法が望ましい. Andersen–Mistergård [AM22] の手法はまさにそのようなものである．彼らの方法は Écalle の**回生理論**[*3]

[*3] この訳は筆者による．素直な訳は「再生理論」だが, 再生核 (reproducing kernel) の理論や再生過程 (renewal process) の理論と訳語が衝突するためこの訳を提案したい.

(resurgence theory) に基づくもので, 多様体の情報がそのまま生きる計算になっている．また彼らの手法は Han–Li–Sauzin–Sun [HLSS21] によってトポロジーの文脈から独立した立場から整理されている．

回生理論は Borel–Laplace 総和法に基礎を置き, 発散級数の Borel–Laplace 変換の特異性を「エイリアン解析 (alien calculus) 」や「ブリッジ方程式 (bridge equation) 」によって研究する理論である．応用先は微分方程式解の Stokes 現象や Riemann–Hilbert 問題, ベクトル場の解析的同値問題の他, 近年では場の量子論の摂動論, 量子トポロジー, WKB 解析など多岐にわたる．より詳しく知りたい方は [Del16, LR16, MS16, Sau06, Sau09, 高 94, 藤 18] などの教科書や解説論文を参照頂きたい．中でも書籍 [MS16] 中の Sauzin の担当章（arXiv 版 [Sau14] もある）は大変丁寧に書かれており, 初学の身には大変重宝した．

[AM22, HLSS21] の手法を大雑把に解説しよう．彼らはまず GPPV 不変量あるいは偽テータ関数 $\widehat{Z}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) q^{n^2/4P}$ をある有理型関数 $\varphi(x)$（これは回生関数の例である）を用いて

$$\widehat{Z}(q) = \int_{\mathbb{R}+\varepsilon\sqrt{-1}} \varphi(x) \widetilde{q}^{2Px^2} dx, \quad ただし \widetilde{q} \coloneqq e^{2\pi\sqrt{-1}\cdot(-1/\tau)}$$

と書き, 更に $x^2 = u$ という変形により

$$\widehat{Z}(q) = \int_C \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{u}} \widetilde{q}^{2Pu} du, \quad ただし積分路 C は原点を中心に反時計回りに取った Hankel 積分路$$

という Laplace 変換表示を得た．この式に留数定理を適用することで GPPV 不変量や偽テータ関数のモジュラー変換公式が得られ, 更に Borel–Laplace 総和法の要である Watson の補題（[Won01, Page 22]）を適用することで本節冒頭の図式における下側の矢印に相当する漸近公式が得られるというのが [AM22, HLSS21] の証明のあらましである．この証明は実のところ, 回生理論の精髄であるエイリアン解析やブリッジ方程式は用いていない．証明の肝は Borel–Laplace 総和法と留数解析である．

一般の負定値鉛管多様体に対する GPPV 不変量のモジュラー変換公式を同様の方法で求めようとすると, $\widetilde{q}$ の肩に乗っている $2Px^2$ が一般の二次形式になるという問題がある．この場合, $x^2 = u$ という変形に相当するのは二次形式を標準形に直すことだが, これは自然な操作とは言い難い．そこで, 上の計算における Hankel 積分や回生理論における Laplace 変換 $\int_0^\infty \varphi(x) e^{-x/\tau}$ の代わりに, 一般の重積分 $\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(x) \widehat{\gamma}(\tau; x) dx$ に基づく漸近解析の枠組みを作るという方針が見えてくる．上の議論を見ると, 量子不変量や量子モジュラー形式を扱う上では, その方が Laplace 変換よりも自然なのでは無いかと筆者には思えてくる．これが次節で述べる「モジュラー級数」の枠組みの動機である．

4 「モジュラー級数」の枠組み

それでは残りの紙面で「モジュラー級数」の枠組みを説明しよう．GPPV 不変量の定義式 $q^\Delta \widehat{Z}_b(q; M) = \sum_{l \in b + 2W(\mathbb{Z}^V)} \widetilde{F}_l q^{-{}^t l W^{-1} l/4}$ を $\Phi[\widetilde{g}, \gamma](\tau) \coloneqq \sum_{l \in \mathbb{Z}^r} \widetilde{g}(l) \gamma(\tau; l)$ という式に一般化し, これを**偽モジュラー級数**と呼ぶことにする．ただしここで $r \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\widetilde{g}(y) \in \widetilde{\mathfrak{Q}}_r \coloneqq \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \operatorname{sgn}(y_1 - \lambda_1) \cdot \operatorname{sgn}(y_r - \lambda_r) \cdot \mathbb{Q}[y_i, \mathbf{1}_{a+k\mathbb{Z}}(y_i) \mid 1 \le i \le r, a, k \in \mathbb{Z}] \subset \{g \colon \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Q}\}$$

とし, $\gamma \colon \mathbb{H} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}$ は連続かつ $\tau \in \mathbb{H}$ について正則で, τ について一様に $y \in \mathbb{R}^r$ について指数減少なものとする．このとき次を示せる．

定理 4.1. (i)（係数 $\widetilde{F}_l$ と有理関数 $\prod_{v \in V} (z_v - z_v^{-1})^{2-\deg v}$ の対応の一般化）

$$\mathfrak{R}_r \coloneqq \mathbb{Q}\left[z_i^{\pm 1}, \frac{1}{1 - z_i^k} \ 1 \le i \le r, \, k \in \mathbb{Z}_{>0} \right]$$

とおき, $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\widetilde{\operatorname{coe}} \colon \mathfrak{R}_r \to \widetilde{\mathfrak{Q}}_r$ を $G(z) \in \mathfrak{R}_r$ に対し $\widetilde{\operatorname{coe}}[G](y) \in \mathfrak{Q}_r$ を

$$\widetilde{\operatorname{coe}}[G](l) \coloneqq \text{v.p.} \int_{|z_i|=1, \, 1 \le i \le r} G(z) \prod_{1 \le i \le r} \frac{z_i^{-l_i} dz_i}{2\pi\sqrt{-1} z_i}$$

とおくことで定めると, この写像 $\widetilde{\mathrm{coe}}$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の間の同型である.

(ii)（積分表示）

$$\Phi[\widetilde{g},\gamma](\tau) = \mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(x)\widehat{\gamma}(\tau;x)dx$$

が成り立つ. ただしここで $\varphi(x_1,\ldots,x_r) \coloneqq \widetilde{\mathrm{coe}}^{-1}[\widetilde{g}](e^{2\pi\sqrt{-1}x_1},\ldots,e^{2\pi\sqrt{-1}x_r})$ は実軸上に極を持つ有理型関数であり（各変数ごとの回生関数の積でもある）,

$$\widehat{\gamma}(\tau;x) = \int_{\mathbb{R}^r} \gamma(\tau;y)e^{-2\pi\sqrt{-1}{}^t xy}dy$$

は Fourier 変換である.

(iii)（モジュラー変換公式）

$$\Phi[\widetilde{g},\gamma](\tau) = \left(\prod_{1\le i\le r}\left(\sum_{m_i\in\mathbb{R}} \mathrm{sgn}(m_i)\operatorname*{Res}_{x_i=m_i} + \int_{C_+} dx_i\right)\right)\varphi(x)\widehat{\gamma}(\tau;x)$$

が成り立つ. ただし積分路 C_+ を図 3 で定める.

(iv)（漸近公式）$\gamma(\tau;x) = f(\tau^\kappa x)$（ただし $\kappa \in \mathbb{Q}_{>0}$）と書けるとき, 漸近展開

$$\Phi[\widetilde{g},\gamma](\tau) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^r} B_m \tau^{\kappa(m_1+\cdots+m_r)} \int_{e^{-\sqrt{-1}\arg(\tau)}\mathbb{R}^r} x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r}\widehat{f}(x)dx \quad \text{as } \tau\to 0$$

が成り立つ. ただしここで複素数列 $(B_m)_{m\in\mathbb{Z}^r}$ を

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^r} B_m x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r} \coloneqq \varphi(x)$$

で定める.

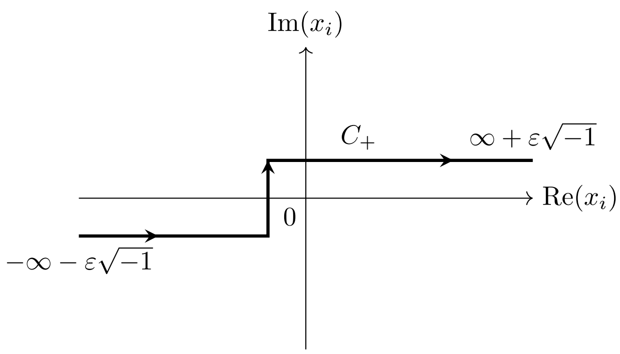


図 3: 積分路 C_+

これがモジュラー級数の枠組みである. 定理 2.4 は定理 4.1 を GPPV 不変量に適用し, 更に積分の漸近展開に関する追加の議論を行うことで示される. ただし実際には, GPPV 不変量の定義式をそのまま適用するのではなく,「次数 3 以上の頂点でまとめた表示式」を準備して適用する必要がある. これは Seifert ホモロジー球面の場合に GPPV 不変量を一変数の二次形式に関する偽テータ関数で表示し, 一変数の Laplace 変換で表示したことに対応している.

本稿冒頭で述べたように, モジュラー級数は「多重 Eisenstein 級数」という数論的な対象への応用もある. モジュラー級数は一般的な枠組みとなっているため, 多重 Eisenstein 級数を特別な例として含んでおり, 定理 4.1 の系としてそのモジュラー変換公式や漸近公式が得られるのである.

負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開はこれで得られたが, モジュラー級数という枠組みにはまだまだ拡張の余地があるように思われる. 今後の課題を列挙して本稿の締めくくりとしたいと思う.

- 他の 3 次元多様体の WRT 不変量や GPPV 不変量もモジュラー級数の枠組みで捉えられるか？
- Borel–Laplace 変換と微分方程式との関係をモジュラー級数に拡張できるか？
- 回生理論におけるエイリアン解析, ブリッジ方程式, 回生単項式 (resurgent monomial) をモジュラー級数に拡張できるか？
- モジュラー級数を「ベクトル値量子モジュラー形式」とみなす一般論を構築できるか？
- 概均質ベクトル空間に拡張できるか？

謝辞

本稿は 2024 年 12 月 24 日の研究集会「結び目の数理 VII」における筆者の同題の講演の解説記事です. 集会では大変実りある充実した時間を過ごすことが出来ました. 世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生と, 運営に携われた木村直記さんに深く感謝いたします. また私の講演に関して集会中に質問やコメントをくださった聴衆の方々に深く感謝いたします. また, 研究に際して様々な助言を下さった金子昌信先生（九州大学）, 山内卓也先生（東北大学）, 寺嶋郁二先生（東北大学）, 樋上和弘先生（九州大学）, 長谷川浩司先生（東北大学）, 松坂俊輝さん（九州大学）, William Mistegård さん（南デンマーク大学）に感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 23KJ1675 の助成を受けたものです.

参考文献

[AHJ+17] J. E. Andersen, B. Himpel, S. F. Jørgensen, J. Martens, and B. McLellan. The Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for links in finite order mapping tori I. *Adv. Math.*, 304:131–178, 2017.

[AM22] J. E. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. *Journal of the London Mathematical Society*, 105(2):709–764, 2022.

[And13] J. E. Andersen. The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I. *J. Reine Angew. Math.*, 681:1–38, 2013.

[BFOR17] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, and L. Rolen. *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, volume 64 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[BKMN21] K. Bringmann, J. Kaszian, A. Milas, and C. Nazaroglu. Higher depth false modular forms. *arXiv:2109.00394*, 2021.

[BMM20] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.

[BN19] K. Bringmann and C. Nazaroglu. A framework for modular properties of false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 30, 23, 2019.

[CCF+19] M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov, and S. M. Harrison. 3d modularity. *Journal of High Energy Physics*, 2019(10):1–95, 2019.

[CDGG23] O. Costin, G. V. Dunne, A. Gruen, and S. Gukov. Going to the other side via the resurgent bridge. *arXiv preprint arXiv:2310.12317*, 2023.

[CFS20] M. C. N. Cheng, F. Ferrari, and G. Sgroi. Three-manifold quantum invariants and mock theta functions. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378(2163):20180439, 2020.

[CGP23] F. Costantino, S. Gukov, and P. Putrov. Non-semisimple tqft's and bps q-series. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 19:010, 2023.

[Del16] E. Delabaere. *Divergent series, summability and resurgence. III*, volume 2155 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Resurgent methods and the first Painlevé equation, With prefaces by Jean-Pierre Ramis, Michèle Loday-Richaud, Claude Mitschi and David Sauzin.

[EGG+22] T. Ekholm, A. Gruen, S. Gukov, P. Kucharski, S. Park, and P. Sułkowski. $\widehat{Z}$ at large n: from curve counts to quantum modularity. *Communications in Mathematical Physics*, 396(1):143–186, 2022.

[GHN+21] S. Gukov, P.-S. Hsin, H. Nakajima, S. Park, D. Pei, and N. Sopenko. Rozansky–Witten geometry of Coulomb branches and logarithmic knot invariants. *Journal of Geometry and Physics*, 168:104311,

2021. arXiv:2005.05347.

[GM21] S. Gukov and C. Manolescu. A two-variable series for knot complements. *Quantum Topology*, 12(1), 2021. arXiv:1904.06057.

[GPPV20] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.

[Hik05] K. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6):661–685, 2005.

[Hik06] K. Hikami. On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 268(2):285–319, 2006.

[HLSS21] L. Han, Y. Li, D. Sauzin, and S. Sun. Resurgence and partial theta series. *arXiv:2112.15223*, 2021.

[LR16] M. Loday-Richaud. *Divergent series, summability and resurgence. II*, volume 2154 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Simple and multiple summability, With prefaces by Jean-Pierre Ramis, Éric Delabaere, Claude Mitschi and David Sauzin.

[LZ99] R. Lawrence and D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. *Asian J. Math.*, 3(1):93–107, 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.

[MS16] C. Mitschi and D. Sauzin. *Divergent series, summability and resurgence. I*, volume 2153 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Monodromy and resurgence, With a foreword by Jean-Pierre Ramis and a preface by Éric Delabaere, Michèle Loday-Richaud, Claude Mitschi and David Sauzin.

[MT21] T. Matsusaka and Y. Terashima. Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres. *arXiv:2112.06210*, 2021.

[Mur23] Y. Murakami. A proof of a conjecture of Gukov–Pei–Putrov–Vafa. *to appear in Communications in Mathematical Physics, arXiv:2302.13526*, 2023.

[Par20a] S. Park. Higher rank $\hat{Z}$ and f_k. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 16:044, 2020.

[Par20b] S. Park. Large color R-matrix for knot complements and strange identities. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(14):2050097, 32, 2020.

[RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.

[Sau06] D. Sauzin. Resurgent functions and splitting problems (new trends and applications of complex asymptotic analysis : around dynamical systems, summability, continued fractions). **数理解析研究所講究録**, 1493, 5 2006.

[Sau09] David Sauzin. Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 83–163. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[Sau14] David Sauzin. Introduction to 1-summability and resurgence. *arXiv preprint arXiv:1405.0356*, 2014.

[Tur16] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, third edition, 2016.

[Whe25] C. Wheeler. Quantum modularity for a closed hyperbolic 3-manifold. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 21:Paper No. 004, 2025.

[Wit89] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.

[Won01] R. Wong. *Asymptotic approximations of integrals*, volume 34 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001. Corrected reprint of the 1989 original.

[Zwe02] S. P. Zwegers. *Mock theta functions*. PhD thesis, Universiteit Utrecht, 2002.

[村 22] 村上友哉. 非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性. **数理解析研究所講究録**, (2230):126–142, 10 2022.

[村 24] 村上友哉. 量子不変量と偽テータ関数の冪根での極限値. **数理解析研究所講究録**, (2292), 2024.

[藤 18] 坂井典佑 藤森俊明, 三角樹弘. リサージェンス理論: 摂動論から非摂動効果を理解する. **日本物理学会誌**, 73(6):352–360, 2018.

[高 94] 高崎金久. 漸近解析入門: なぜ漸近級数は発散するか? (巾零幾何と解析). **数理解析研究所講究録**, 875:129–145, 1994.

3 つの軸方向の正射影がすべて木となる空間グラフの構成

小林 怜央　(早稲田大学大学院教育学研究科数学教育専攻修士 2 年)

概要

少なくとも 1 本の辺を持つ有限グラフの任意の空間埋め込みに対して, それと全同位な空間埋め込みで, 3 つの軸方向の正射影の像が全て木となるものが存在することを示す.

1　導入

1.1 用語の定義

定義 1.1.1　(空間グラフ)
3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の有限個の点と有限本の線分の和集合を**区分線形的空間グラフ**と呼ぶことにする. また, 区分線形的空間グラフと $\mathbb{R}^3$ において全同位であるものを**空間グラフ**と呼ぶことにする.

定義 1.1.2　(T-3 型)
$G \subseteq \mathbb{R}^3$ を空間グラフとする. G と全同位な空間グラフで, xy 平面, yz 平面, zx 平面それぞれへの正射影が全て木となるものが存在するとき, G **は T-3 型である**という.

1.2 先行研究

図 1 では分からないが, 図 2 より次が分かる.

定理 2.1
自明な結び目は T-3 型である.

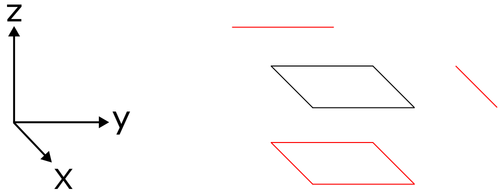


図 1：1 つの平面にサイクルができてしまう例

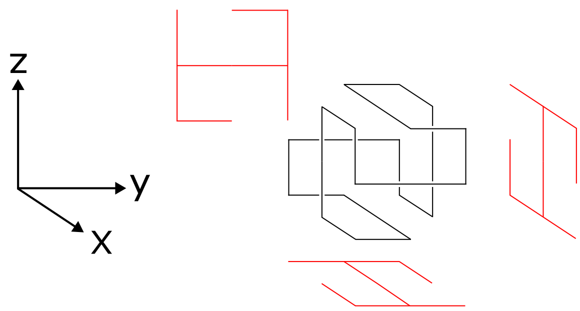


図 2：3 つの平面への正射影が木となる例
(**T-3 trivial A** と呼ぶ)

図 2 の例については, P. Winkler [2] を参照のこと.
さらに次が示されている.

定理 2.2 (川村 [1])
全ての整数 p に対して, $(2, p)$ 型トーラス結び目 (絡み目) は T-3 型である.

1.3 主定理

次の主定理を発見した.

主定理　G を空間グラフとする.

　G は T-3 型である.
$\Leftrightarrow$ G は, 2 個以上の孤立頂点のみから成る空間グラフではない.

2　主定理の証明

証明　次の 2.1〜2.6 と補足より主定理は証明される.

● 2.1：(空間グラフの射影図が非連結な場合のみ) 必要があれば空間グラフを全同位変形で変形して, 射影図が連結になるようにする.

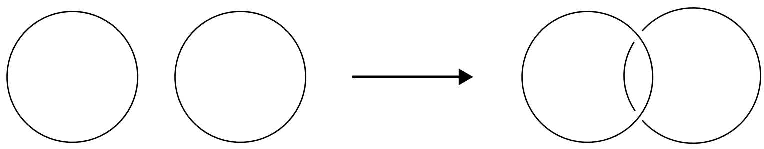


図 3

● 2.2：(射影図の有界領域の個数より孤立頂点の個数の方が多い場合のみ) ライデマイスター移動 1 をして射影図の有界領域の個数を孤立頂点の個数まで増やす.

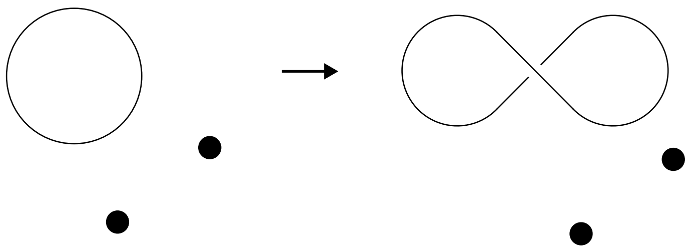


図 4

● 2.3：空間グラフの射影図の全ての交差点の上下をなくし頂点とすると，平面グラフになる．そして，その平面グラフを xy 平面上で全同位変形する．

◎交差点の上下をなくし頂点とする

例：8 の字結び目

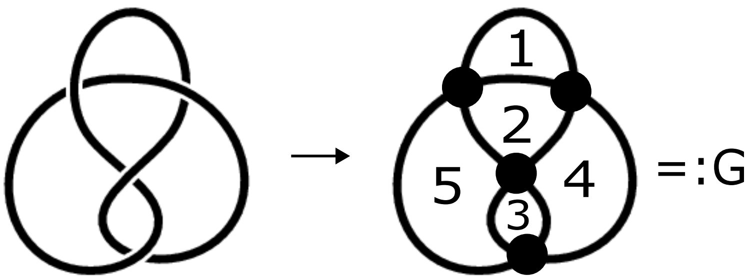


図 5

図 5 の右の G は平面グラフである．

図 5 では 8 の字結び目の場合を例に挙げたが, **一般の空間グラフ**の場合も, 射影図の全ての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフ (G' とする) になる.

◎図 5 の平面グラフ G を xy 平面上で全同位変形する

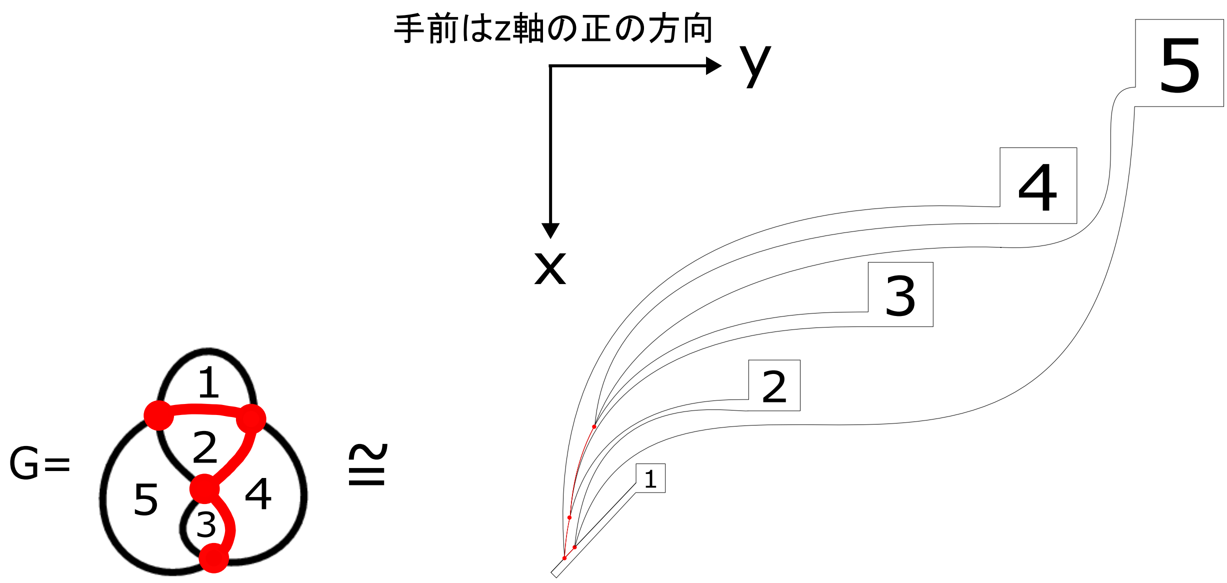


図 6

図 6 のように, 図 5 の平面グラフ G を xy 平面上で全同位変形する.

全同位変形のポイントとしては, **極大木 (図 6 では赤線) を描き, 次に極大木以外の辺 (図 6 では黒線) を描く**. その際の注意点は次の通り.

・左下から斜め右上へ「1 → 2 → 3 → 4 → 5」の順で □ の**大きさは 1 つずつ大きくして一直線上に**並べる.
・相異なる 2 つの頂点の y **の値は異なる**ようにする.
・1〜5 を囲んでいる全ての □ は任意の頂点より y **の値が大きい位置**に置く.

図 6 の G に限らず, **一般の平面グラフ** G' の場合も極大木を描き, 次に極大木以外の辺を描くことにより xy 平面上で全同位変形できる. 注意点も上と同じ.

● 2.4：2.3 の平面グラフは空間グラフとして, T-3 型であることを証明する.

図 6 の右の平面グラフ G (2.3 の平面グラフ) を空間的にする際のポイントを 2 つ述べる.

ポイント 1：番号を囲むサイクルを空間的にする方法

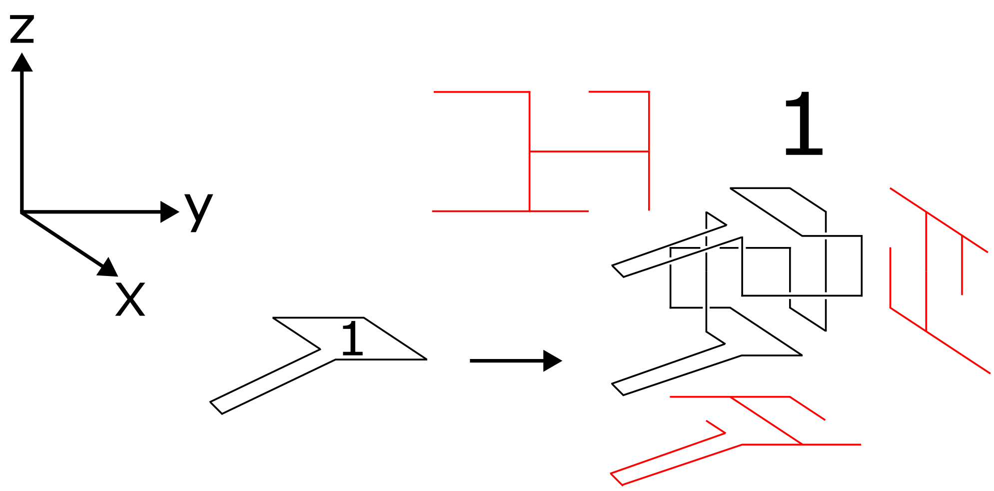


図 7

図 7 は「1」を囲んだサイクルを空間的にした場合だが, 残りの「2」〜「5」を囲んだサイクルも同じように空間的にする.

ポイント 2：図 8 の太い赤線 (実線) の出っ張らせ方

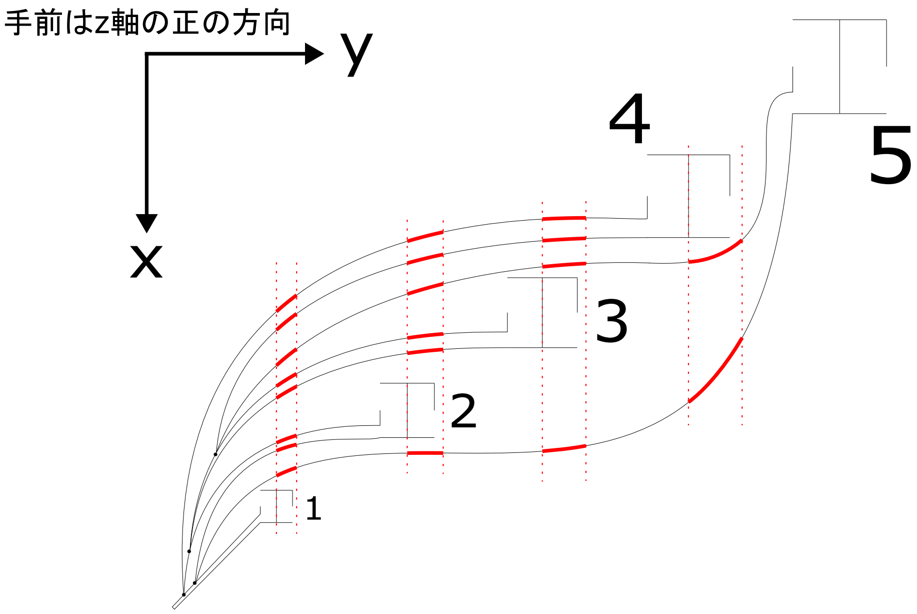


図 8

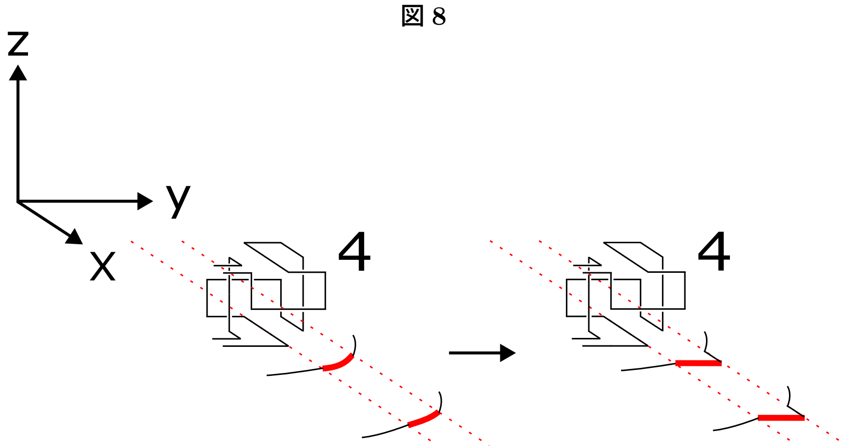


図 9

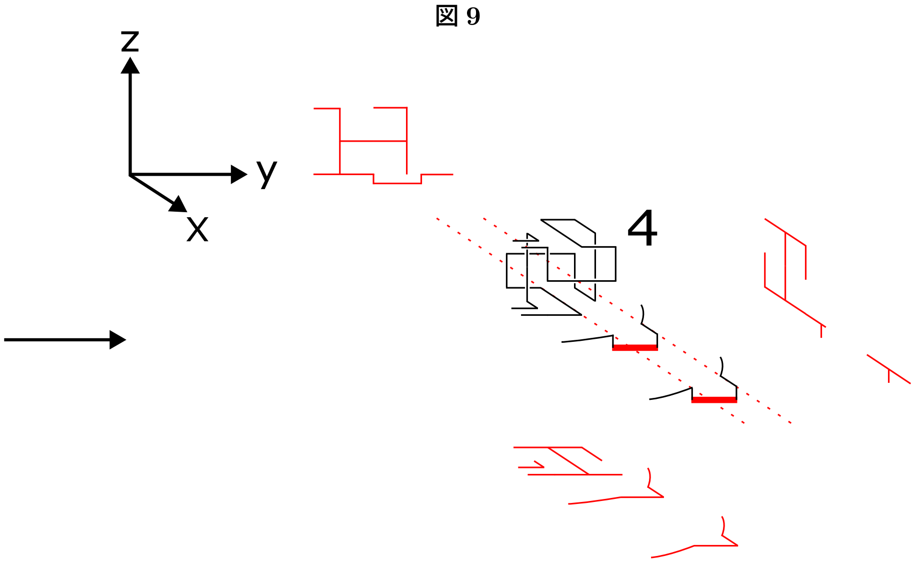


図 10

図 9 では, 太い赤線を y 軸に平行にした.

図 10 では, 太い赤線を z 軸の負の方向に**同じ長さで**出っ張らせた.

図 9, 10 は, 図 8 の一部の赤線を z 軸の負の方向に出っ張らせた場合だが, 図 8 の全ての赤線も同じように z 軸の負の方向に出っ張らせる.

以上のポイント 1, 2 をふまえて, 図 6 の右の平面グラフ G (2.3 の平面グラフ) を空間的にすると, 3 つの平面への正射影は次のようになる.

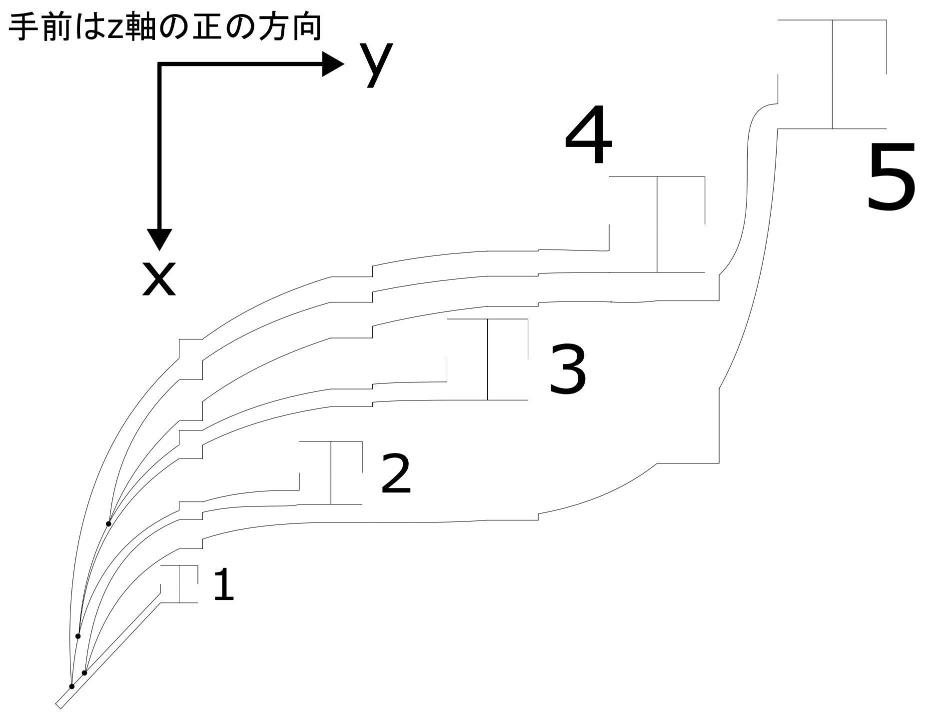


図 11：xy 平面への正射影は木

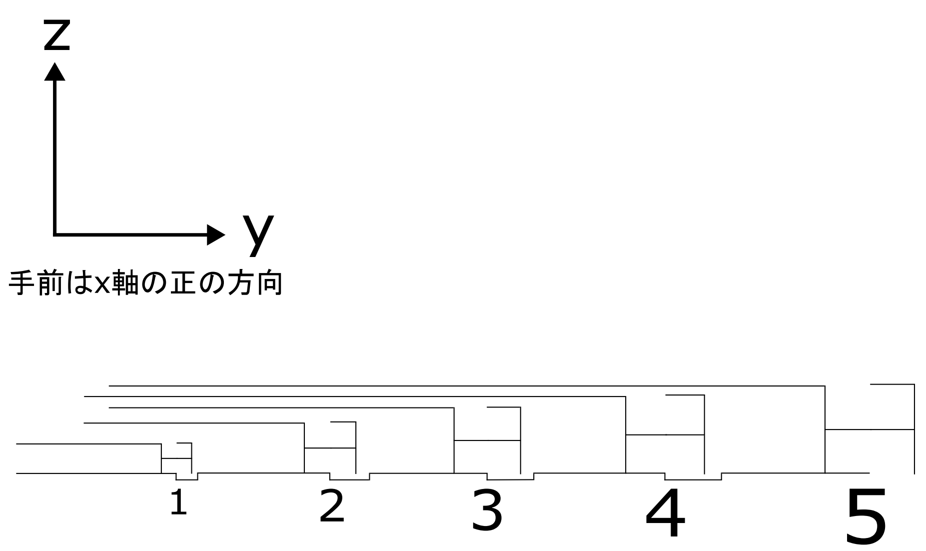


図 12：yz 平面への正射影は木

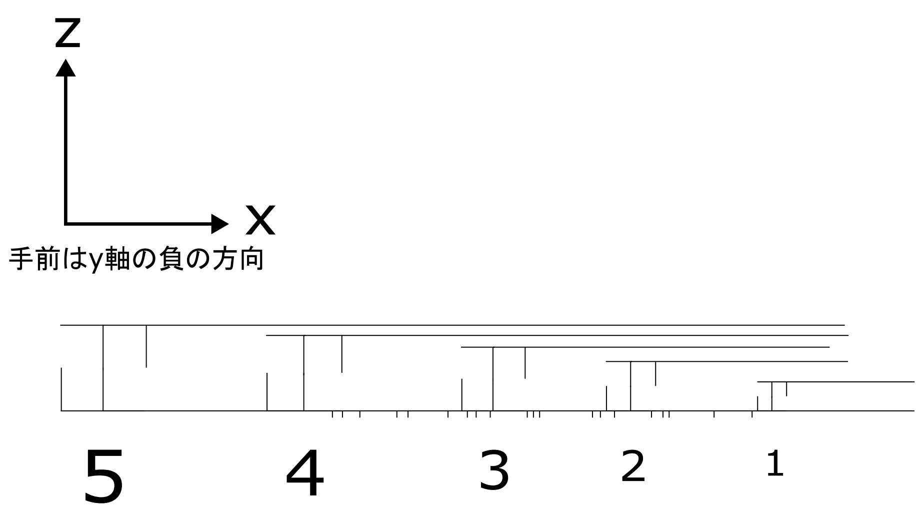


図 13：zx 平面への正射影は木

よって図 11, 12, 13 より, 3 つの平面への正射影は全て木となったので, 図 6 の右の平面グラフ G (2.3 の平面グラフ) は空間グラフとして, **T-3 型**.

ポイント 1, 2 をふまえて**一般の平面グラフ** G' を空間的にした場合も, 3 つの平面への正射影は全て木となるので **T-3 型**.

● 2.5：2.4 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型であることを証明する.

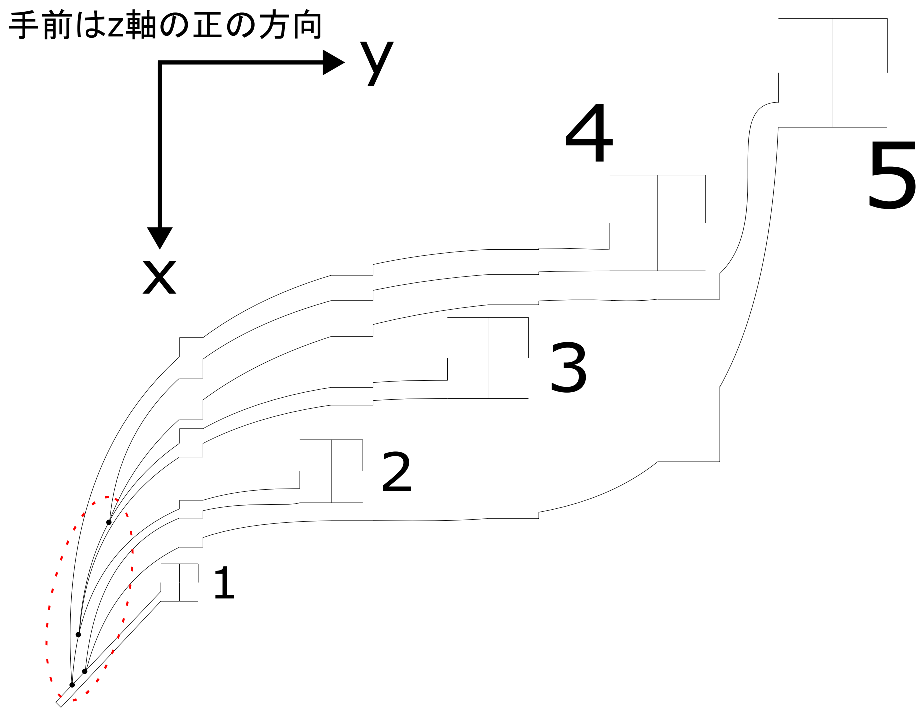


図 14：2.4 でできた空間グラフの xy 平面への正射影

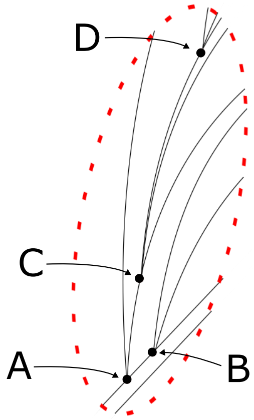


図 15：図 14 の赤い丸を拡大

◎頂点から交差点への戻し方

頂点 A を交差点に戻す場合を説明する.

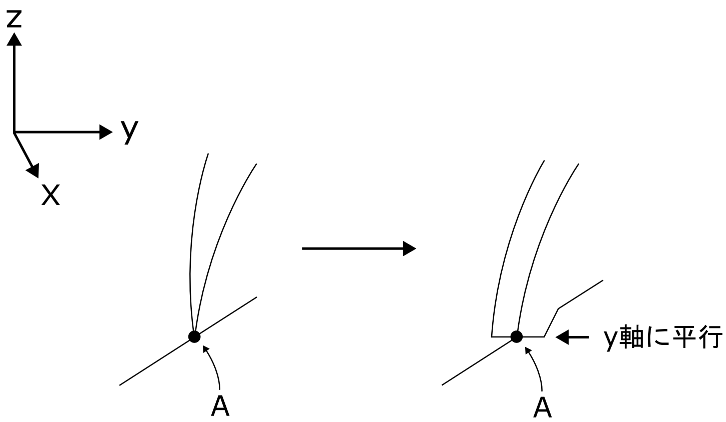


図 16

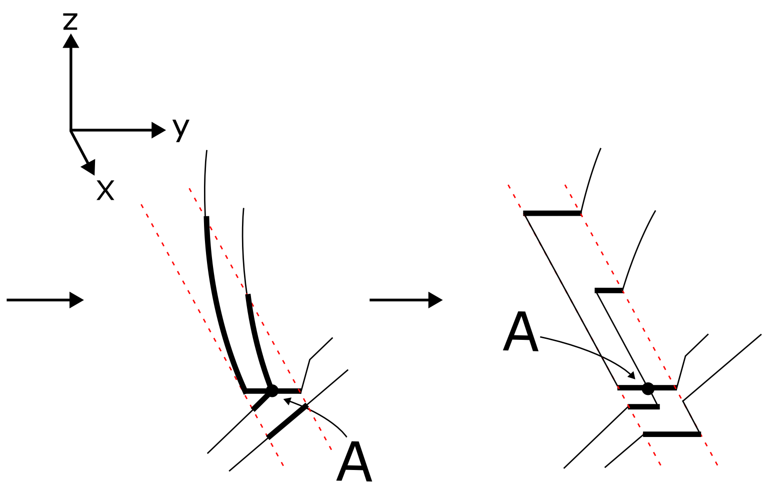


図 17

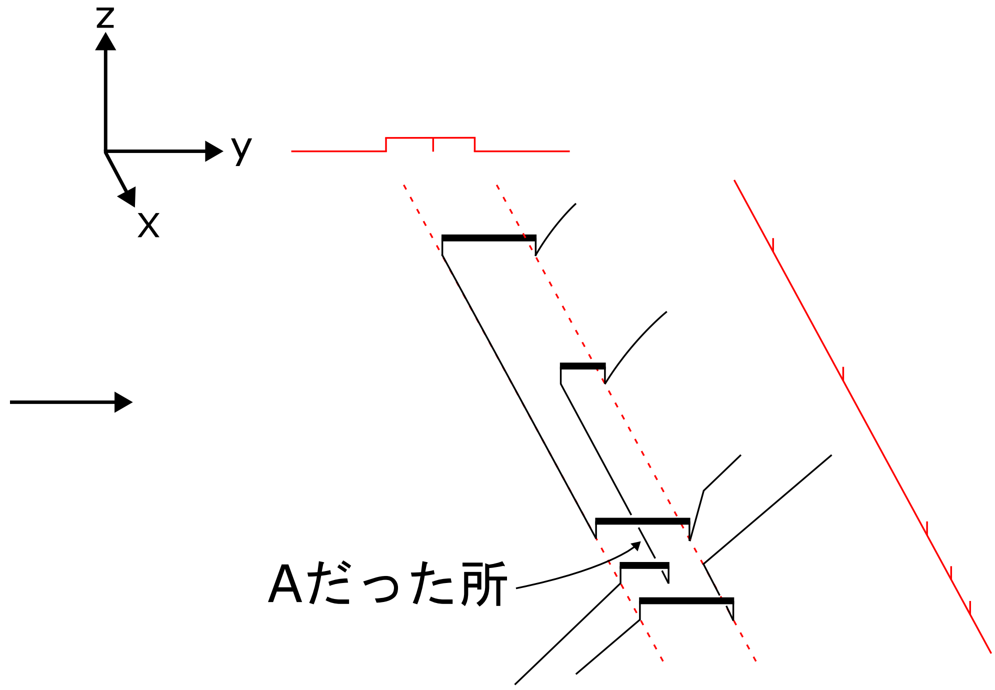


図 18

※図 16, 17 に描かれている頂点 A とその周辺の辺は**全て** xy **平面上にある**.
また, 図 17 では太線を y **軸に平行**にした.

頂点から交差点に戻す際の注意点は次の通り.

・図 18 において, 出っ張らす長さは全て同じ.
・頂点 B は太線を z 軸の正の方向に, 頂点 C と頂点 D は太線を z 軸の負の方向に出っ張らす.

4 つの頂点を交差点に戻した際の 3 つの平面への正射影は次のようになる.

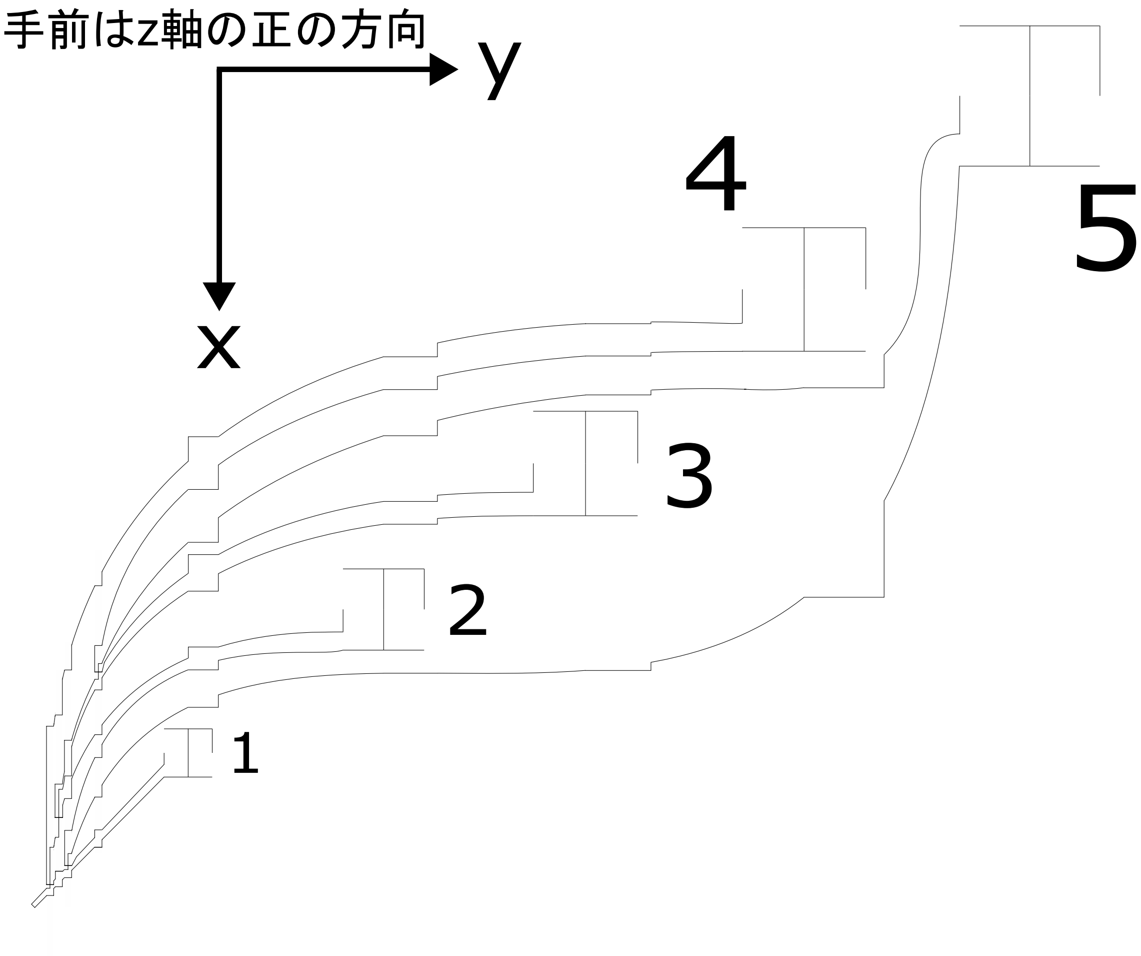


図 19：xy 平面への正射影は木

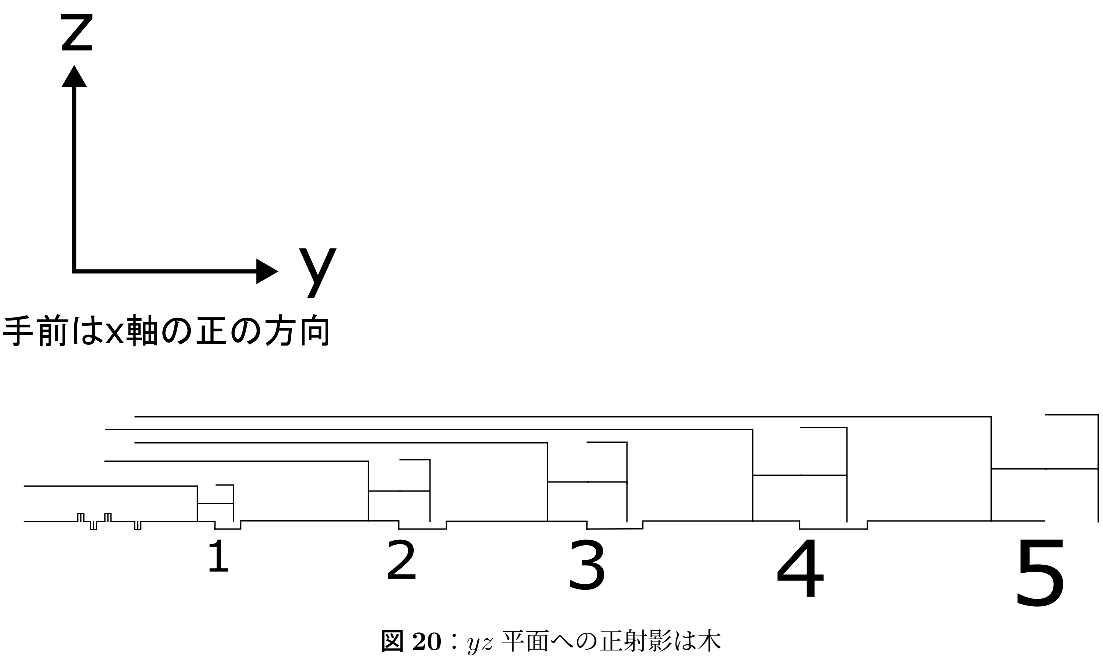


図 20：yz 平面への正射影は木

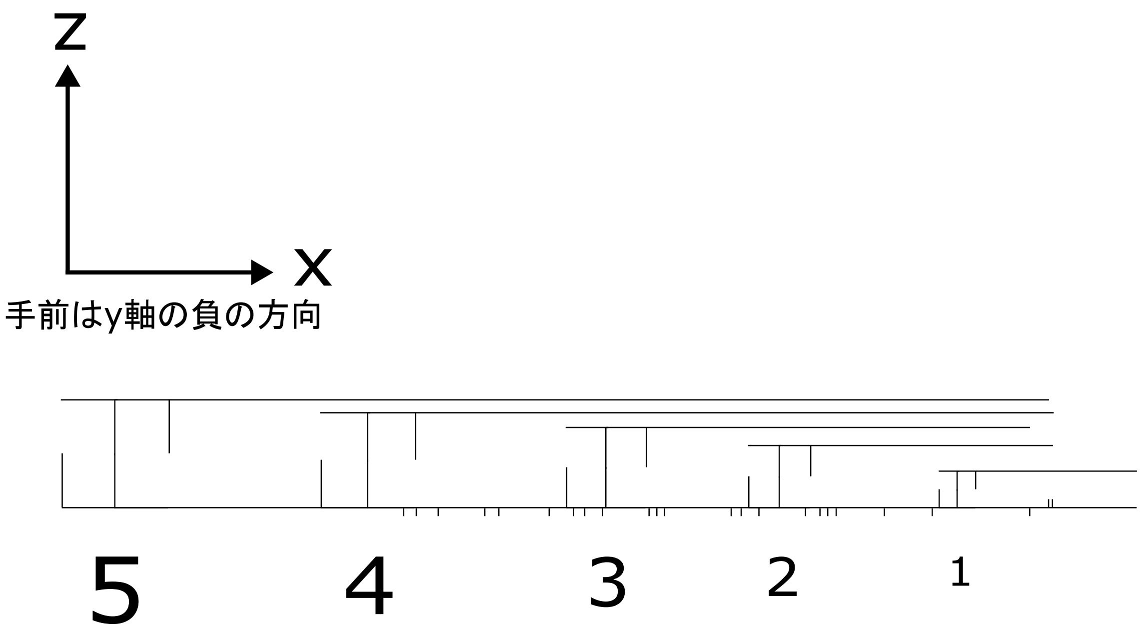


図 21：zx 平面への正射影は木

よって図 19, 20, 21 より, 3 つの平面への正射影は全て木となったので, 8 の字結び目は **T-3 型**.

2.4 のポイント 1, 2 をふまえて**一般の平面グラフ** G' を空間的にし, 頂点を交差点に戻した場合も, 3 つの平面への正射影は全て木となるので **T-3 型**.

● 2.6：(空間グラフに孤立頂点が存在する場合のみ) T-3 trivial A の真ん中に孤立頂点を置く.

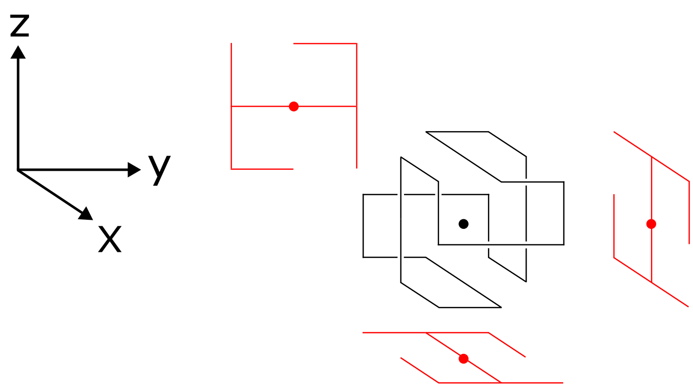


図 22

図 22 のように, T-3 trivial A の真ん中に孤立頂点を置くと, 3 つの平面への正射影は全て木となる.

注意点として, **1 個の T-3 trivial A の中に置くことができる孤立頂点は 1 個まで**. 1 個の T-3 trivial A の中に複数個の孤立頂点を置くと, 少なくとも 1 つの平面への正射影は連結成分数が 2 以上となり木ではなくなってしまうためである. このことから 2.2 では, 射影図の有界領域の個数より孤立頂点の個数の方が多い場合のみライデマイスター移動 1 をして有界領域の個数を増やした.

●補足：孤立頂点のみから成る空間グラフの場合

図 23 より, 1 個の孤立頂点のみで構成されたグラフは, どのように空間埋め込みをしても 3 つの軸方向の正射影は全て木になる.

また図 24 より, 2 個以上の孤立頂点のみで構成されたグラフは, どのように空間埋め込みをしても 3 つの軸方向の正射影が全て木になることはない.

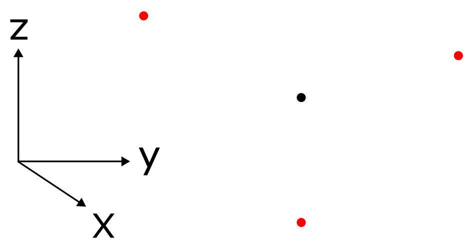


図 23：T-3 型である

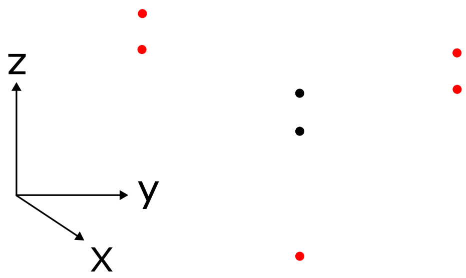


図 24：T-3 型ではない

以上の 2.1〜2.6 と補足より主定理を証明できた. ■

3　今後の課題

今回の研究により, 全ての空間グラフに対し, T-3 型であるものとそうでないものとに分類できた. 今後は, 射影の方向を増やせるか考えたい.

4　謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

5　参考文献

[1] K. Kawamura, CONSTRUCTION OF A LATTICE KNOT WHOSE THREE SHADOWS ARE ALL TREES, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 20, No. 5 (2011) 775–785.

[2] P. Winkler, Mathematical Mind-Benders (A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2007).

Virtualized n-gon moves for virtual knots

守田　夏希　(奈良女子大学)*

概　要

Nakamura-Nakanishi-Satoh-Wada [2] introduced a local deformation called virtualized Δ-move for virtual links, and proved that it is an unknotting operation for virtual knots. In this paper, we introduce virtualized n-gon move as a generalization of virtualized Δ-move. We show that virtualized n-gon move is an unknotting operation for virtual knots when $n \geq 3$, and give a lower bound for the unknotting number, which we call the $v[n]$-unknotting number, in terms of *odd writhes*. This is a joint work with Yeonhee Jang (Nara Women's University).

1. Introduction

Definition 1.1. A *virtualized Δ-move* (or a *$v\Delta$-move*) is a local deformation on a virtual link diagram as shown in Figure 1. We denote it by $v\Delta$ in figures.

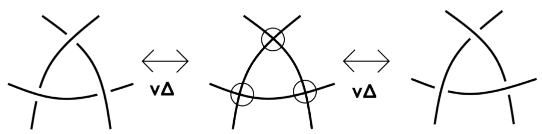


Figure 1:

Two virtual links L and L' are *$v\Delta$-equivalent* to each other if their diagrams are related by a finite sequence of $v\Delta$-moves and generalized Reidemeister moves.

Theorem 1.2. *[2, Theorem 1.3] Any two virtual knots are $v\Delta$-equivalent to each other. In particular, the $v\Delta$-move is an unknotting operation for virtual knots.*

Definition 1.3. Let $n \geq 2$ be an integer. A *virtualized n-gon move* (or a *$v[n]$-move*) is a local deformation on a virtual link diagram as shown in Figure 2. We denote it by $v[n]$ in figures.

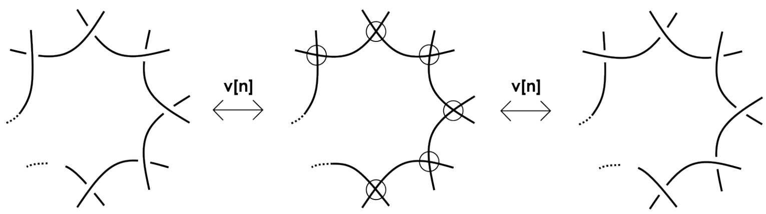


Figure 2:

2025 年 2 月 4 日 図に不備があったため修正いたしました。

*e-mail: `xan_morita@cc.nara-wu.ac.jp`

Two virtual links L and L' are $v[n]$-*equivalent* to each other if their diagrams are related by a finite sequence of $v[n]$-moves and generalized Reidemeister moves.

Proposition 1.4. *Any two virtual knots are $v[n]$-equivalent to each other. In particular, the $v[n]$-move is an unknotting operation for virtual knots.*

Let $u_{v[n]}(K)$ be the minimal number of $v[n]$-moves which is needed to deform a virtual knot K into the trivial knot.

Theorem 1.5. *For any integers $n \geq 3$ and $m \geq 1$, there exists an infinite family $\{K_s\}$ of virtual knots such that $u_{v[n]}(K_s) = m$.*

2. $v[n]$-unknotting number and writhe invariant

Fact 2.1. *A $v[2]$-move and a crossing change are equivalent local deformations, that is, they can be realized by each other (see Figure 3).*

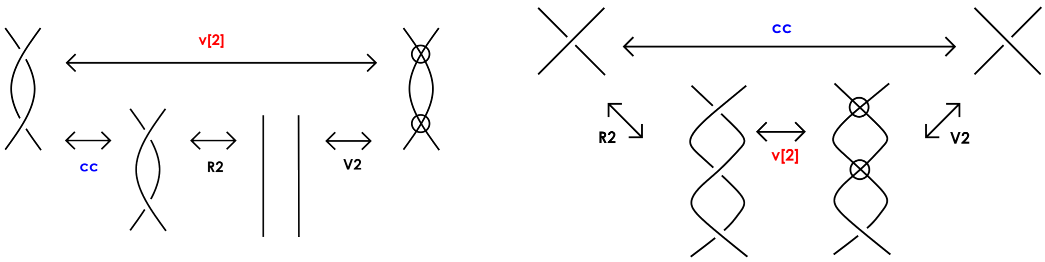


Figure 3:

Fact 2.2. *The $v[3]$-move is the same local deformation as $v\Delta$-move.*

Proposition 2.3. *A $v[n]$-move is realized by a $v[n+1]$-move for any $n \geq 2$.*

Proof. Figure4 illustrates how this can be accomplished. $\square$

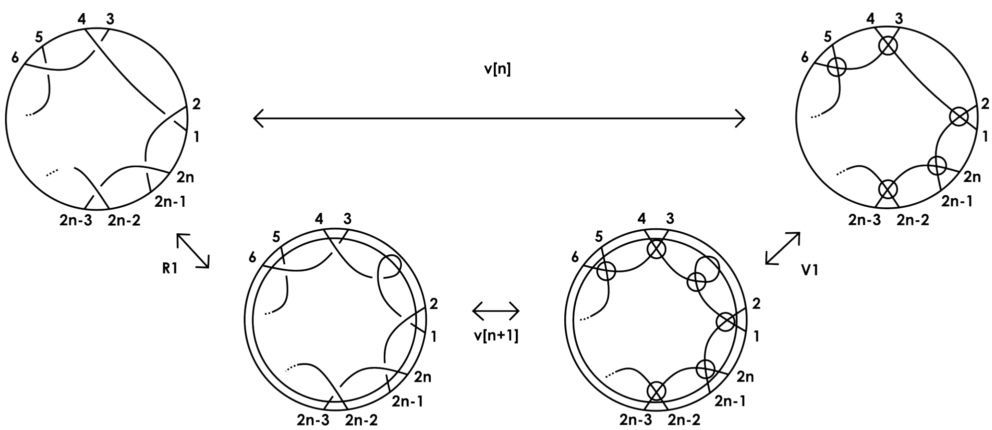


Figure 4:

Proof of Proposition 1.4. It follows from Theorem 1.2 and Proposition 2.3. □

Definition 2.4. For virtual knots K and K', we denote by $d_{v[n]}(K, K')$ the minimal number of $v[n]$-moves needed to deform a diagram of K into one of K'.

By Proposition 2.3, we obtain the following corollary.

Corollary 2.5. *For any virtual knots K and K', we have $d_{v[n]}(K, K') \geq d_{v[n+1]}(K, K')$. In particular, $u_{v[n]}(K) \geq u_{v[n+1]}(K)$.*

Satoh-Taniguchi [4] introduced the *k-writhe* $J_k(D)$ of a virtual knot diagram D for each $k \in \mathbb{Z}$, defined by

$$J_k(D) := \sum_{\mathrm{Ind}(c)=k} \mathrm{sgn}(c).$$

Lemma 2.6. *[4, Lemma 2.3] If D and D' are virtual knot diagrams related by a finite sequence of generalized Reidemeister moves, then $J_k(D) = J_k(D')$ for any $k \neq 0$.*

Hence, $J_k(K)$ is well-defined for a virtual knot K. Also, the *odd writhe* $J(K)$ is

$$J(K) := \sum_{k:\mathrm{odd}} J_k(K).$$

Proposition 2.7. *Let K and K' be virtual knots. Then we have the following.*

(1)

$$d_{v[n]}(K, K') \geq \begin{cases} \dfrac{1}{n}|J(K) - J(K')| & (n : \textit{even}), \\ \dfrac{1}{n-1}|J(K) - J(K')| & (n : \textit{odd}). \end{cases}$$

(2)

$$u_{v[n]}(K) \geq \begin{cases} \dfrac{1}{n}|J(K)| & (n : \textit{even}), \\ \dfrac{1}{n-1}|J(K)| & (n : \textit{odd}). \end{cases}$$

Proof. (1) Suppose that $d_{v[n]}(K, K') = m$. Then there exists a sequence of virtual knots

$$K = K_0 \to K_1 \to \cdots \to K_{m-1} \to K_m = K'$$

such that K_i is obtained from K_{i-1} by a single $v[n]$-move for each $i = 1, \ldots, m$. Let $G_0, \ldots, G_m$ be the Gauss diagrams of $K_0, \ldots, K_m$, respectively. We can see that G_i is obtained from G_{i-1} by removing n chords corresponding to n real crossings involved in the $v[n]$-move (see Figure 5). Note that the indices of the other chords are changed by even numbers and the signs do not change. Thus, when n is even, we have

$$|J_*(K_0) - J_*(K_1)| \leq n, \ldots, |J_*(K_{m-1}) - J_*(K_m)| \leq n,$$

and hence

$$|J_*(K) - J_*(K')| \leq mn = d_{v[n]^o}(K, K') \cdot n. \tag{1}$$

When n is odd, note that the number of the chords with odd indices among the n chords is at most $n-1$ since the sum of the indices of the n chords is 0. Thus, we have

$$|J_*(K_0) - J_*(K_1)| \leq n-1, \ldots, |J_*(K_{m-1}) - J_*(K_m)| \leq n-1,$$

and hence

$$|J_*(K) - J_*(K')| \leq m(n-1) = d_{v[n]^o}(K, K') \cdot (n-1). \tag{2}$$

The equalities (1) and (2) imply the desired result.

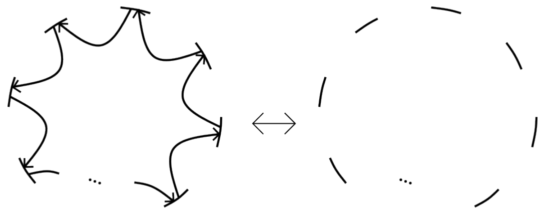


Figure 5:

(2) The inequality follows from (1) together with the fact that $J_*(O) = 0$, where O is the trivial knot. $\square$

3. Proof of Theorem 1.5

In the following, we will construct a family of infinitely many virtual knots K_s with $u_{v[n]}(K_s) = m$.

Let $n \geq 3$ and $m \geq 1$ be integers, and s be a positive odd integer. We consider the virtual knot diagram K_s and its Gauss diagram as shown in Figure 6 and Figure 7, respectively. (The Gauss diagram of K_s is shown in Figure 7 when m=2. In this Gauss diagram, the signs of chords are all $+1$, and the numbers inside the circle indicate indices of chords.) The contents of the box with $(*)$ will have a different shape depending on whether n is odd or even. When n is odd, this diagram have $nm + s + \frac{n-1}{2}$ real crossings $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}$, $b_1, \ldots, b_s$ and $c_1, \ldots, c_{\frac{n-1}{2}}$. When n is even, this diagram have $nm + s + \frac{n-2}{2}$ real crossings $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}$, $b_1, \ldots, b_s$ and $c_1, \ldots, c_{\frac{n-2}{2}}$.

Figure 8 and Figure 9 are examples of K_s in the case of $m = 3, n = 4$ and $m = 3, n = 5$, respectively.

Then we prove that the family $\{K_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ satisfies the following.

Claim 1. $u_{v[n]}(K_s) \leq m$.

Claim 2. $u_{v[n]}(K_s) \geq m$.

Claim 3. $K_s \neq K_{s'}$ if and only if $s \neq s'$.

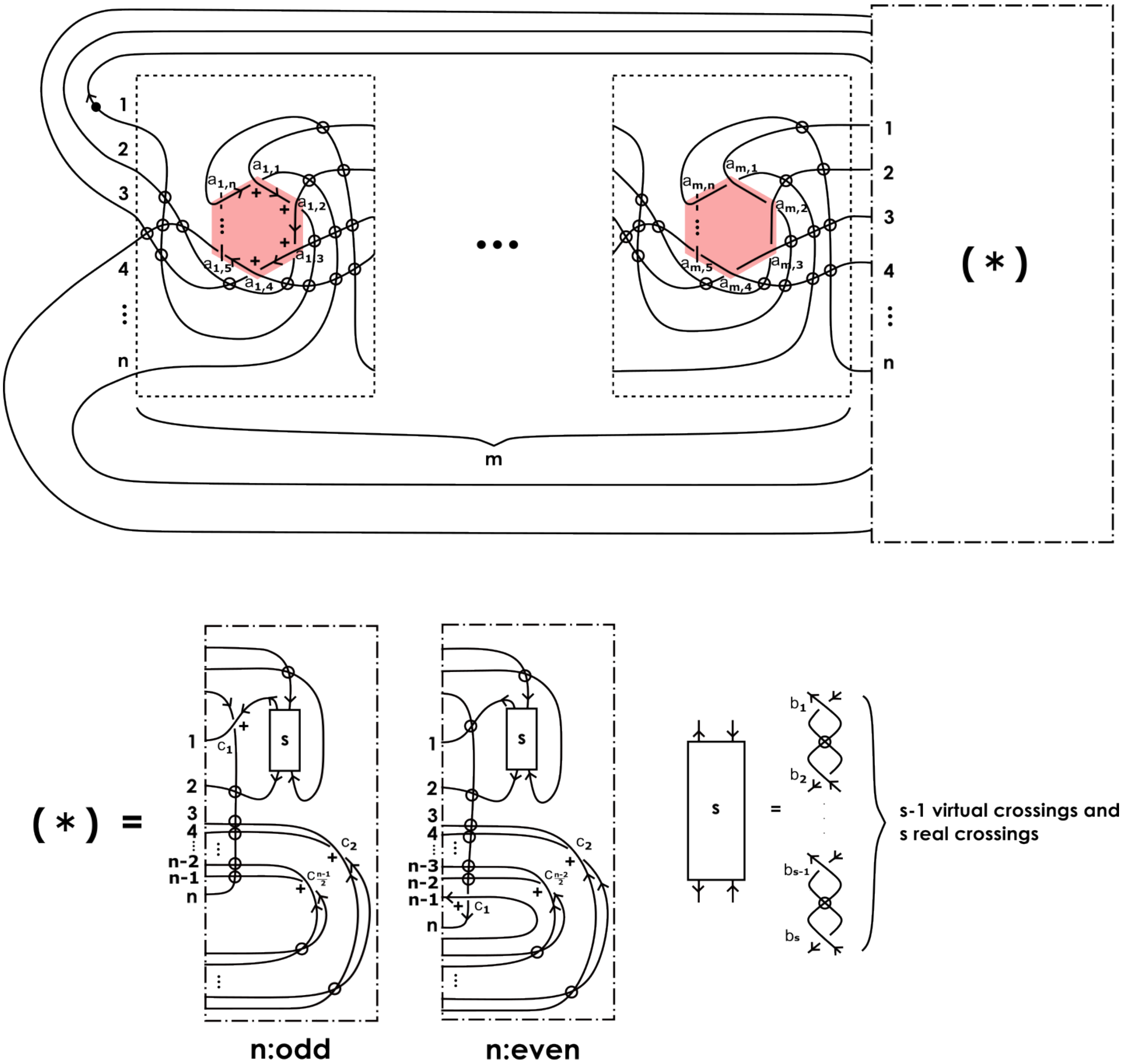


Figure 6:

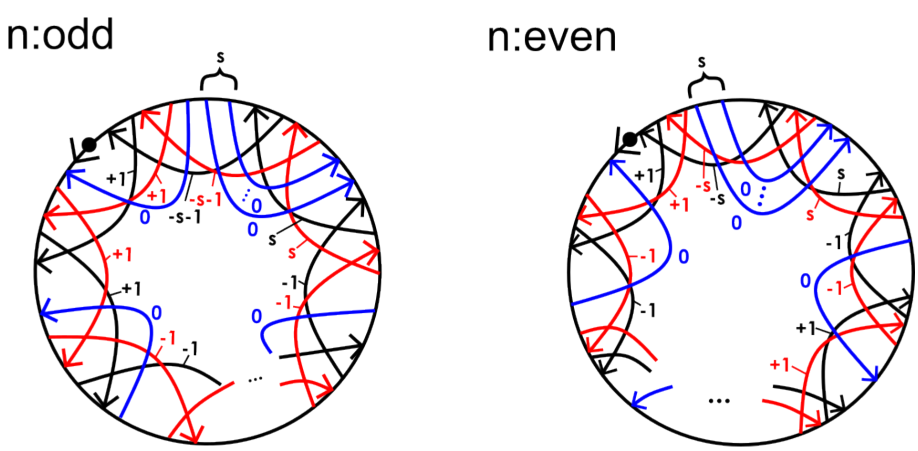


Figure 7: Gauss diagrams of K_s (when m=2)

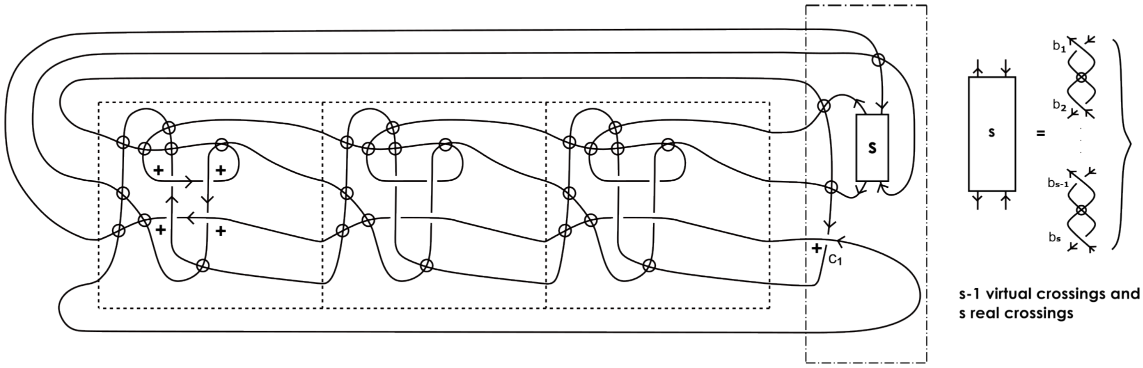


Figure 8:

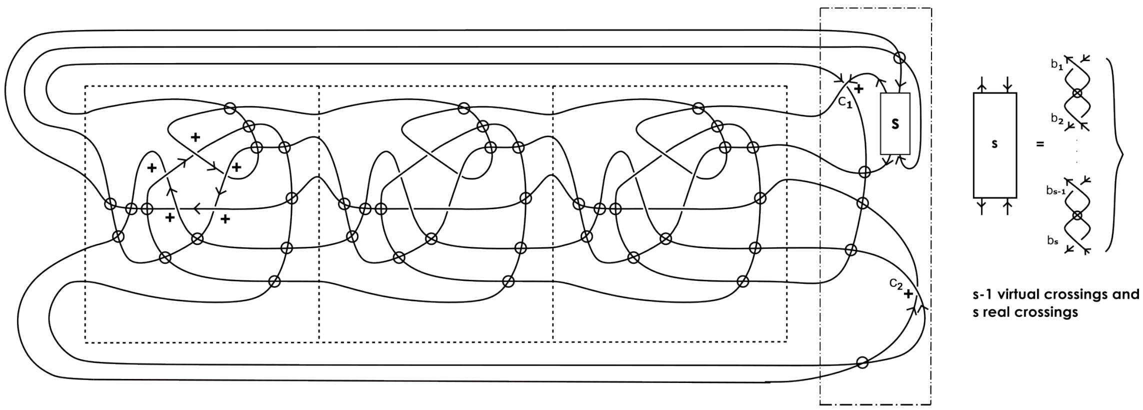


Figure 9:

Proof of Claim 1. The virtual knot K_s can be deformed into the trivial knot after m times of $v[n]$-moves are applied. Figure 10 illustrates how this can be accomplished when $n = 3$. The cases when $n \geq 4$ can be treated similarly, where the last part of Figure 10 is replaced by Figure 11 or Figure 12 according to whether n is odd or even. $\square$

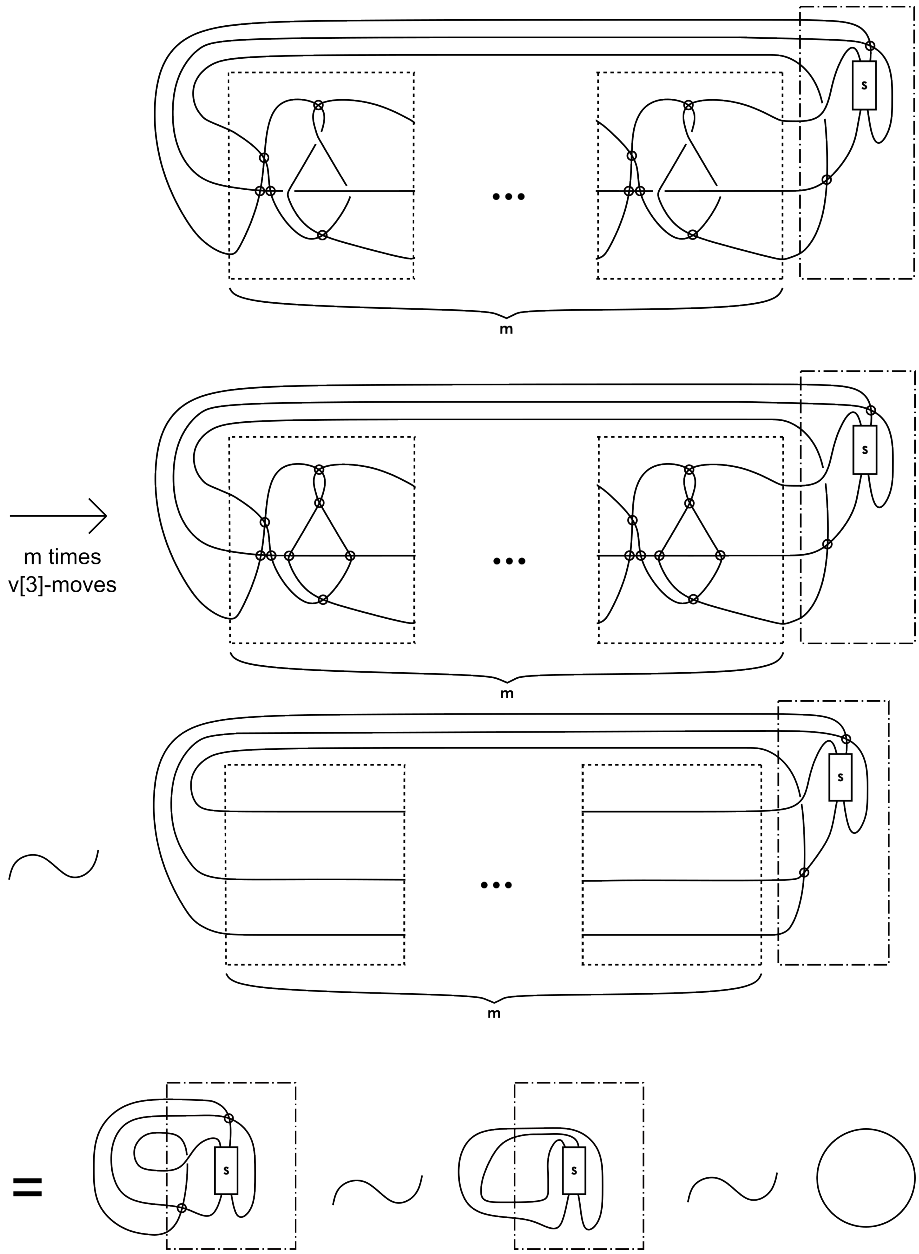


Figure 10:

Proof of Claim 2. When n is odd, we can see that

$$J_1(K_s) = \frac{n-1}{2}m, \quad J_{-1}(K_s) = \frac{n-3}{2}m, \quad J_s(K_s) = m, \quad J_{-s-1}(K_s) = m, \quad J_k(K_s) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq 1, -1, s, -s-1, 0, \tag{3}$$

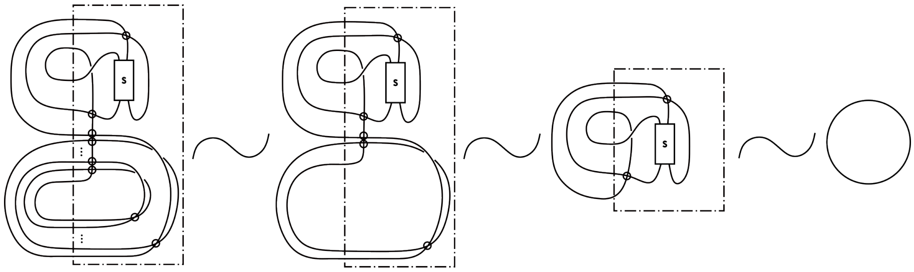


Figure 11:

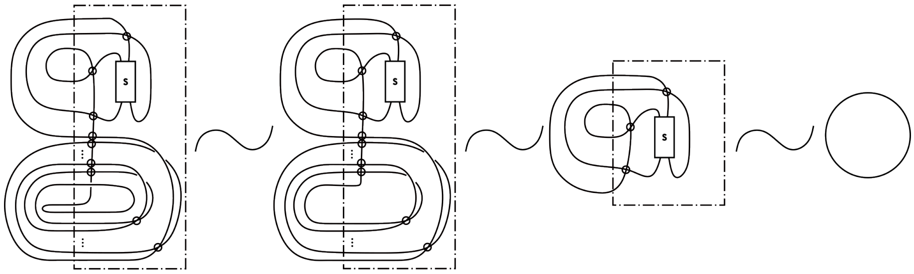


Figure 12:

and hence the odd writhe of K_s is

$$J(K_s) = \frac{n-1}{2}m + \frac{n-3}{2}m + m = (n-1)m.$$

Hence we have $u_{v[n]}(K_s) \geq \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)m = m$ by Proposition 2.7.

When n is even, we can see that

$$\begin{aligned} &J_1(K_s) = \frac{n-2}{2}m, \quad J_{-1}(K_s) = \frac{n-2}{2}m, \quad J_s(K_s) = m, \quad J_{-s}(K_s) = m, \\ &J_k(K_s) = 0 \quad \text{if} \quad k \neq 1, -1, s, -s, 0, \end{aligned} \tag{4}$$

and hence the odd writhe of K_s is

$$J(K_s) = \frac{n-2}{2}m + \frac{n-2}{2}m + m + m = nm.$$

Hence we have $u_{v[n]}(K_s) \geq \frac{1}{n} \cdot nm = m$ by Proposition 2.7. □

Proof of Claim 3. By the equalities (3), (4) and Lemma 2.6, we have the conclusion. □

4. Remark

In the talk in the conference, we gave a lower bound for $d_{v[n]}(K, K')$ in terms of "non-zero" writhe. However, we realized that we need to be careful with orientation. Proposition 2.7 in this article is a corrected version.

In the following, we introduce an oriented version of virtualized n-gon move, which is related with non-zero writhe. This is called an *oriented virtualized n-gon move* (or a $v[n]^o$-*move*) and is a local deformation on an oriented virtual link diagram as shown in Figure 13. We denote it by $v[n]^o$ in figures. This move is a generalization of $v\Delta^o$-*move* defined in [3].

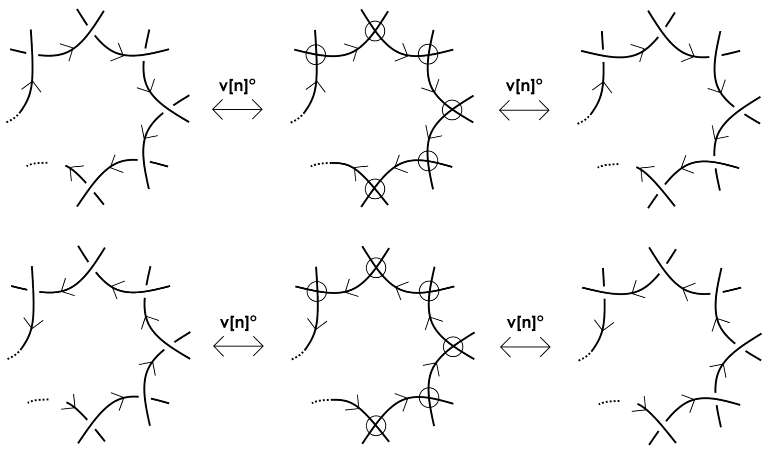


Figure 13:

The *non-zero writhe* $J_*(K)$ is defined by

$$J_*(K) := \sum_{k \neq 0} J_k(K).$$

Proposition 4.1. *Let K and K' be oriented virtual knots. Then we have the following.*

(1) $d_{v[n]^o}(K, K') \geq \dfrac{1}{n}|J_*(K) - J_*(K')|.$

(2) $u_{v[n]^o}(K) \geq \dfrac{1}{n}|J_*(K)|.$

Proof. This can be proved by arguments similar to the proof of Proposition 4.1. Note that it can be easily seen that the indices and signs of any other chords are preserved by the $v[n]^o$-move (see Figure 14, which shows the change of Gauss diagram corresponding to a $v[n]^o$-move). □

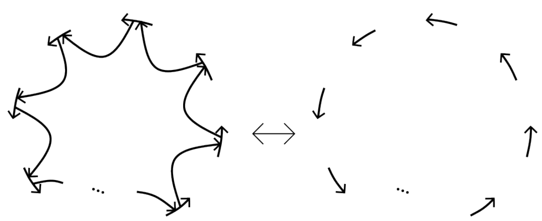


Figure 14:

Then, for the oriented virtual knot K_s constructed in the previous section, we can see that $u_{v[n]^o}(K_s) = m$, where $u_{v[n]^o}(K_s)$ is the minimal number of $v[n]^o$-moves needed to deform K_s into the trivial knot. The proof is similar to that for Proposition 2.7, where we can use Proposition 4.1 to show $u_{v[n]^o}(K_s) \geq m$. We remark that s can also be an even number in the oriented case.

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」において公演の機会を与えてくださり、運営をしてくださった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生に深く感謝いたします。また、この発表に関して質問やコメントをくださった聴衆の方々にも深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] H. Aida, *Unknotting operations of polygonal type*, Tokyo J. Math. **15** (1992), no. 1, 111–121.

[2] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh and K. Wada, *Virtualized Delta moves for virtual knots and links*, to appear in J. Topol. Anal.

[3] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh and K. Wada, *Virtualized Delta, sharp, and pass moves for oriented virtual knots and links*, to appear in Hiroshima Math. J.

[4] S. Satoh and K. Taniguchi, *The writhes of a virtual knot*, Fund. Math. **225** (2014), no. 1, 327–342.

交点数が3以下のロング溶接結び目について

西元勇樹

神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期課程 2 年

1 ロング仮想結び目, ロング溶接結び目, 仮想アーク図式の r 同値類

定義 1.1. I を閉区間 $[0,1]$ とする．はめこみ $\alpha : I \to I \times I$ が次の条件 (i) を満たすとき, その像 $\alpha(I)$ を仮想アーク図式という．また α が条件 (i), (ii) を満たすとき, その像 $\alpha(I)$ をロング仮想結び目図式という．図 2 は仮想アーク図式であり, ロング仮想結び目図式でもある．

(i) α の多重点は全て横断的な 2 重点であり, その各 2 重点は実交点, 仮想交点のどちらかである．ただし, 実交点, 仮想交点とは, それぞれ図 1 のように表される情報がついている 2 重点のことである．

(ii) $\alpha(0) = (0, \frac{1}{2})$, $\alpha(1) = (1, \frac{1}{2})$ が成り立つ．

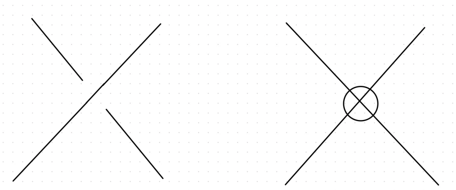


図 1: 実交点 (左) と仮想交点 (右)

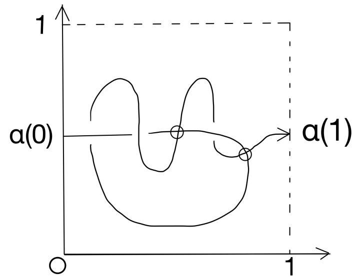


図 2: 仮想アーク図式, ロング仮想結び目図式

本稿では, 仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式には, $\alpha(0)$ から $\alpha(1)$ へ向きが付いているとする．$\alpha(0)$, $\alpha(1)$ をそれぞれ $\alpha(I)$ の始点, 終点といい, $\alpha(I)$ の始点と終点を合わせて $\alpha(I)$ の端点という．また, $\mathcal{AD}, \mathcal{LD}$ をそれぞれ, 仮想アーク図式全体の集合, ロング仮想結び目図式全体の集合とする．

定義より, 任意のロング仮想結び目図式は仮想アーク図式である．

定義 1.2. D を仮想アーク図式またはロング仮想結び目図式とする．D の下交点から次の下交点, D の下交点から D の端点, D の端点から次の下交点のいずれかである D の一部を, D の弧という．ただし D の弧の内部には下交点をもたないとする．D が実交点をもたないときは, D の端点から D の端点も D の弧という．

仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式に対して同値関係を定義するため, 局所変形を紹介する．局所変形 R1~R3, V1~V4, OC, E1, E2 を図 3 で定める．ただし, 変形の前後で図式に付いた向きは変わらないとする．また図 3 において, 黒丸は端点を表す．

仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式の同値類を定義する．

定義 1.3. D, D' をロング仮想結び目図式とする．D と D' が有限回の局所変形 R1~R3, V1~V4, 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' はv 同値であるといい, $D \overset{v}{\sim} D'$ と書く．また, D と D' が有限回の局所変形 R1~R3, V1~V4, OC, 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' はw 同値であるといい, $D \overset{w}{\sim} D'$ と書く．

定義 1.4. D, D' を仮想アーク図式とする．D と D' が有限回の局所変形 R1~R3, V1~V4, OC, E1, E2, 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' はr 同値であるといい, $D \overset{r}{\sim} D'$ と書く．

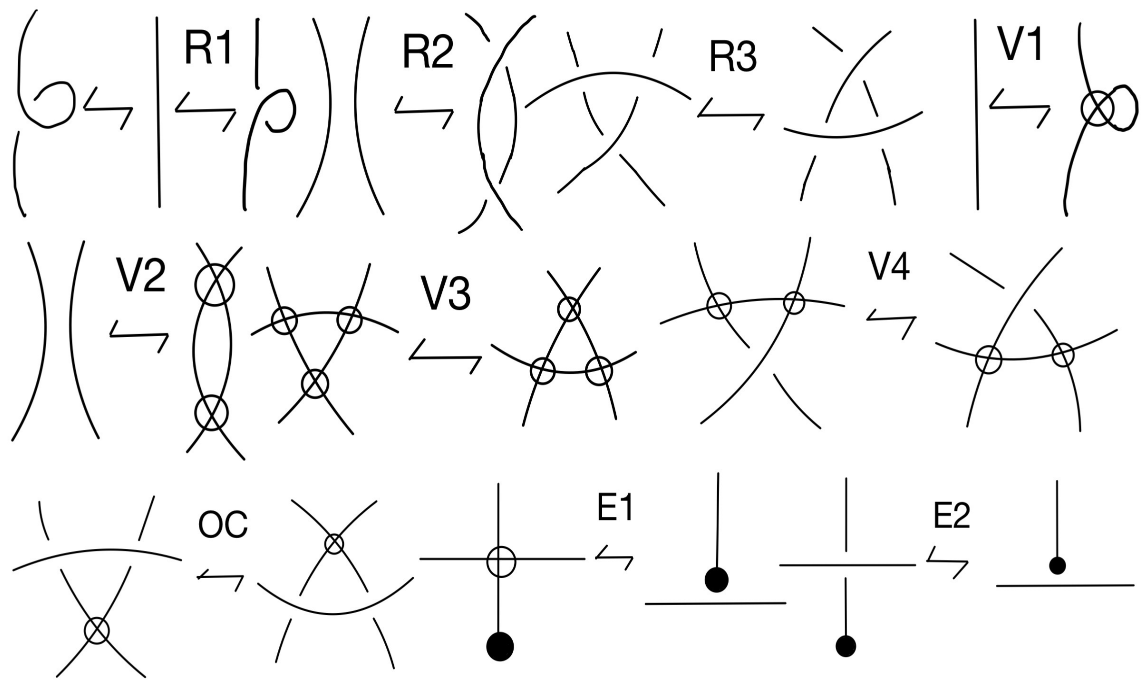


図 3: 局所変形 V1∼V4, OC, E1, E2

容易にわかるように, v 同値と w 同値は $\mathcal{LD}$ 上の同値関係であり, r 同値は $\mathcal{AD}$ 上の同値関係である.

注意 1.5. D, D' をロング仮想結び目図式とする. $D \overset{v}{\sim} D'$であるならば $D \overset{w}{\sim} D'$であり, $D \overset{w}{\sim} D'$であるならば $D \overset{r}{\sim} D'$ である.

定義 1.6. $\mathcal{LD}$ に対し, 同値関係 $\overset{v}{\sim}$ で割ったときの各同値類をロング仮想結び目, $\overset{w}{\sim}$ で割ったときの各同値類をロング溶接結び目という. また, ロング仮想結び目またはロング溶接結び目 K の代表元 D を K の図式という. さらに, $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類 K の代表元 D を K の図式という.

K を $\mathcal{LD}/\overset{v}{\sim}$, $\mathcal{LD}/\overset{w}{\sim}$ または $\mathcal{AD}/\overset{r}{\sim}$ の元とする. K が実交点も仮想交点ももたない図式を少なくとも 1 つもつとき, K は自明であるという. また, $\min\{D$ の実交点の個数 $\mid D$: K の図式 $\}$ を K の交点数といい, $c(K)$ と書く.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. D^* を, 図 4 のように D の真下に鏡を置いて映した図式とする. また $-D$ を, 図 4 のように D の向きを逆にし, さらに 180 度回転させた図式とする. $-D$ の向きはロング仮想結び目図式の向きの条件を満たしている.

注意 1.7. ロング溶接結び目 K に対し, D, D' をその図式とする. このとき, $[D] = [D']$ であるならば, $[D^*] = [D'^*], [-D] = [-D']$ である.

$K^* := [D^*], -K_{:} = [-D]$ とおく. 注意 1.7 より, この記号の定義は well-defined である. また $(-K)^* = -(K^*)$ であるから, これを $-K^*$ と表す. さらに, $\overline{K} := \{K, K^*, -K, -K^*\}$ とおく.

吉田 [14] により, 交点数が 3 以下のロング仮想結び目の完全な分類が与えられた. また, 金信-小松 [9] により, 交点数が 4 以下の $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類が 105 種類以下であることが示された. さらに金信-角 [10] により, 交点数が 4 である 1 組 $\{R^4_{8,1}, R^4_{8,6}\}$ を除いて, 交点数が 4 以下の $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類の分類が与えられた. 今回, ロング仮想結び目と $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類との中間に位置するようなロング溶接結び目の分類に取り組んだ.

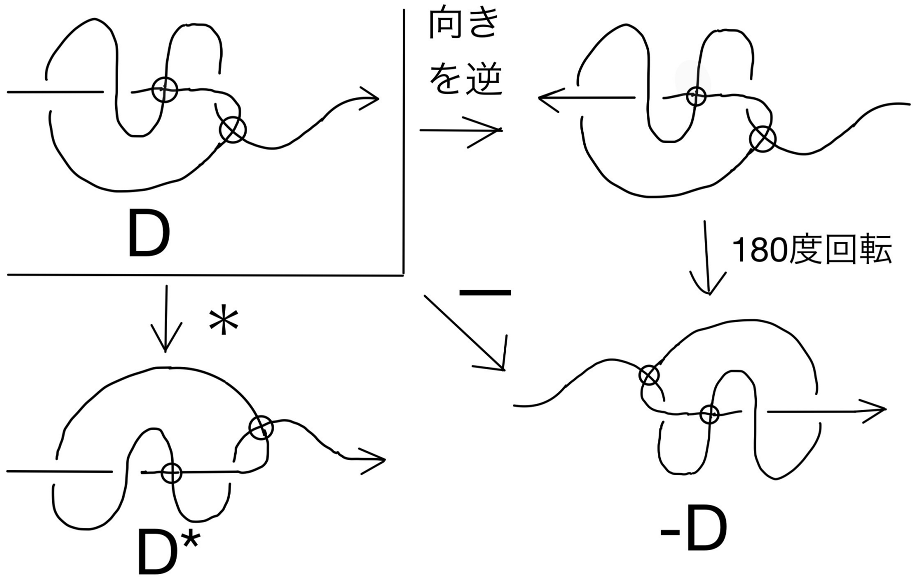


図 4: D に対する D^* と $-D$

2　不変量の導入

ロング溶接結び目を分類する上で必要な不変量を紹介する．第 2.1 節では閉包, 第 2.2 節では正規化されたアレキサンダー多項式の定義を述べる．なお, 第 2.2 節中の群の定義は [8] を, 自由微分の定義は [12] を参照している．第 2.3 節では $\overline{K}$ に対する不変量を定義する．

2.1　閉包

ロング仮想結び目図式 D に対し, 図 5 のように両端点を閉じることで得られる仮想結び目図式を $\mathrm{Cl}(D)$ とかく．ただし, $\mathrm{Cl}(D)$ に対し, w 同値, $*$, $-$ の操作で移り合うものは同じ図式であるとみなす．

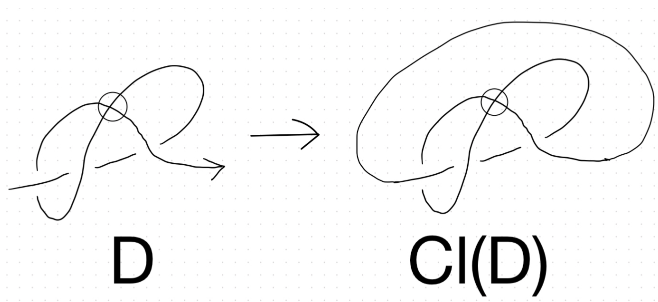


図 5: 仮想結び目図式 D と $\mathrm{Cl}(D)$

ロング溶接結び目 K に対し, D, D' をその図式とする．$D \overset{w}{\sim} D'$ ならば $\mathrm{Cl}(D) \overset{w}{\sim} \mathrm{Cl}(D')$ であることが容易にわかる．よって $\mathrm{Cl}(D)$ は K の不変量である．これを K の閉包といい, $\mathrm{Cl}(K)$ と書く．また, 定義より $\mathrm{Cl}(D) = \mathrm{Cl}(D^*) = \mathrm{Cl}(-D)$ である．

2.2　正規化されたアレキサンダー多項式

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする．$\{a_1, \ldots, a_n\}$ を D の弧の集合とし, 各 a_i に文字 x_i を対応させた階数 n の自由群 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ を考える．v を D の 1 つの実交点とし, そこに集まる 3 つの弧を a_i, a_j, a_k

とする. ただし, 図 6 のように, a_j は上交点を通る弧とし, a_j の進行方向に見て右側が a_i, 左側が a_k とする. このとき, v における関係式 $r(v)$ を $x_j^{-1}x_ix_j = x_k$ と定める. このとき, a_i と a_k の向きは気にしない. この関係式を D の各実交点 $v_1, \dots, v_{n-1}$ について求めると, 群表示 $\langle x_1, \dots x_n \mid r(v_1), \dots r(v_{n-1})\rangle$ が得られる. この群を $G(D)$ と書く.

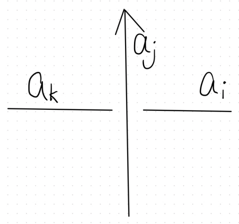


図 6: 実交点における関係式:$x_j^{-1}x_ix_j = x_k$

このとき, 次が知られている.

定理 2.1 ([6],[11],[13])**.** ロング仮想結び目図式 D, D' に対し, $D \overset{w}{\sim} D'$ ならば $G(D) \cong G(D')$ が成り立つ.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. 定理 2.1 から $G(D)$ は K の不変量である. これをK の群といい, $G(K)$ と書く.

群 G および環 R に対し, $RG := \{r_1g_1 + \dots, r_ng_n \mid r_1 \in R, g_1 \in G, n \in \mathbb{Z}\}$ を G の R 上の群環という. 群環の元には自然な和と積が入る.

階数 n の自由群 $F_n = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$ に対し, 写像 $\frac{\partial}{\partial x_j} : F_n \to \mathbb{Z}F_n$ が, 次の性質：

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}, \frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial v}{\partial x_j}(u, v \in F_n) \tag{1}$$

を満たすものとして一意的に存在する ([5]). これを群環の準同型に拡張した写像 $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}F_n$ を, x_j に関する自由微分という.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. また $G(K)$ は $\langle x_1, \dots x_n \mid r(v_1), \dots, r(v_{n-1})\rangle$ の表示をもつとし, $F_n = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$ を階数 n の自由群とする. さらに, $\varphi : \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を $x_j \mapsto t(j = 1, ..., n)$ で定まる環準同型とする. ここで, $(n-1) \times n$ 行列 $M = (\frac{\varphi(\partial r(v_i)}{\partial x_j})_{i,j}$ に対し, M の $(n-1)$ 次小行列式が生成するイデアルは単項イデアルであることが知られている ([4]). この単項イデアルの生成元をアレキサンダー多項式といい, $\Delta_K(t)$ と書く. アレキサンダー多項式は単元倍の差を除いて K の不変量となっている ([4]). さらに, $\Delta_K(t)$ は $\Delta_K(1) = 1$, $\frac{d}{dt}\Delta_K(1) = 0$ を満たすように正規化することができる ([7]). K の正規化されたアレキサンダー多項式を $\widetilde{\Delta}_K(t)$ と書く. また, $*, -$ の操作に関して次が成り立つ.

補題 2.2. ロング溶接結び目 K に対し, $\widetilde{\Delta}_K(t^{-1}) = \widetilde{\Delta}_{K^*}(t) = \widetilde{\Delta}_{-K}(t)$ が成り立つ.

2.3 $\overline{K}$ の不変量

本稿では, ロング溶接結び目の分類を考える上で, $*, -$ で移り合うものは同じ結び目として扱うものとする. ロング溶接結び目 K に対して定義される $\overline{K}$ の分類を行うため, $\overline{K}$ に対する不変量を定義する. K をロング溶接結び目, 写像 f をロング溶接結び目の不変量としたとき, $f(\overline{K}) := \{f(K), f(K^*), f(-K), f(-K^*)\}$ と定義すると, 次が成り立つ.

注意 2.3. ロング溶接結び目 K, K' に対し, $\overline{K} = \overline{K'}$ ならば $f(\overline{K}) = f(\overline{K'})$ である.

第 2.1 節の最後より, $\mathrm{Cl}(\overline{K}) = \{\mathrm{Cl}(K)\}$ が成り立つ. よって単に $\mathrm{Cl}(\overline{K}) = \mathrm{Cl}(K)$ としてよい. また, 補題 2.2 より, $\widetilde{\Delta}_{\overline{K}}(t^{-1}) = \{\widetilde{\Delta}_K(t), \widetilde{\Delta}_K(t^{-1})\}$ が成り立つ.

3 主結果

定理 3.1. 交点数が 3 以下のロング溶接結び目 K に対し, 次が成り立つ. ただし, $K_1^0, K_1^2, K_2^2, K_1^3, \dots K_{10}^3$ は図 7 のロング溶接結び目である.

- $c(\overline{K}) = 0$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^0}$ であることは同値である.
- $c(\overline{K}) = 1$ である $\overline{K}$ は存在しない.
- $c(\overline{K}) = 2$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}$ であることは同値であり, $\overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}$ は互いに異なる.
- $c(\overline{K}) = 3$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^3}, \overline{K_2^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ であることは同値であり, 組 $\{\overline{K_5^3}, \overline{K_6^3}\}, \{\overline{K_7^3}, \overline{K_9^3}\}$ を除いて, $\overline{K_1^3}, \overline{K_2^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ は互いに異なる.

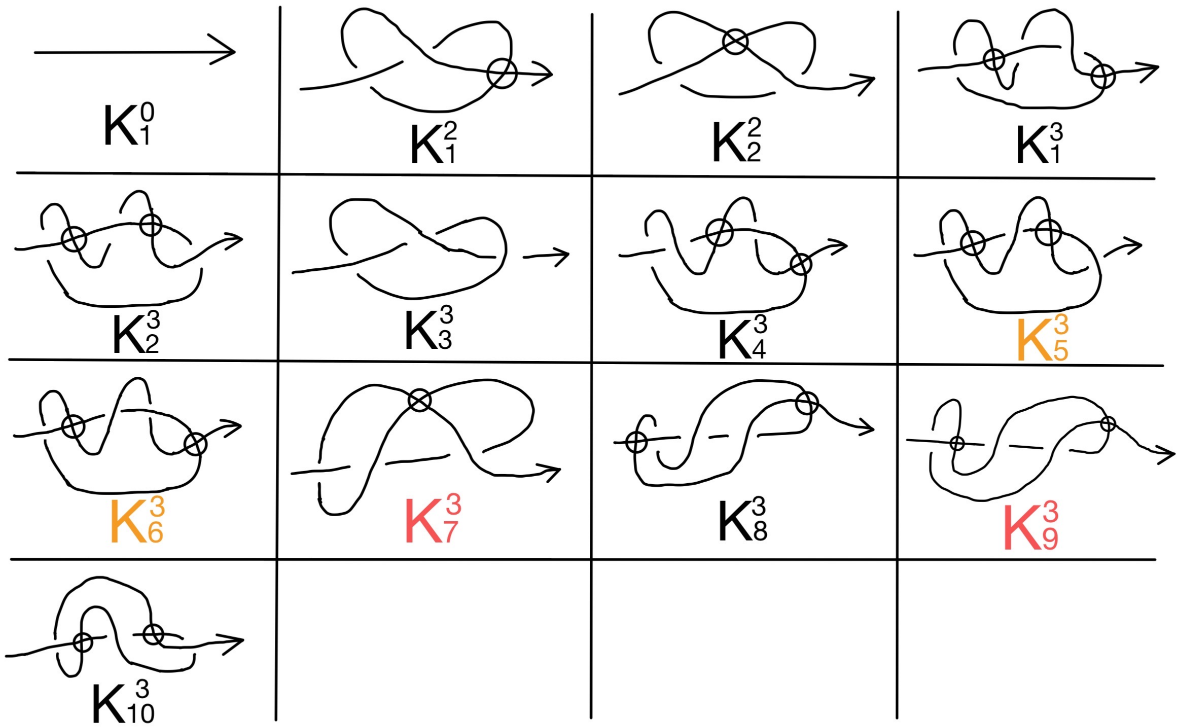


図 7: 交点数が 3 以下のロング溶接結び目のリスト

$\overline{K_1^0}, \overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}, \overline{K_1^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ の正規化されたアレキサンダー多項式と閉包を表 1 に示す. 表 1 における w3.1, w3.2 は, Bartholomew と Fenn により与えられた溶接結び目の表 ([1]) 中の溶接結び目を指している. [1] の表は [2], [3] をもとに作成され, Bartholomew のホームページに掲載されている. 図 8 は, [1] の表に掲載されている溶接結び目のうち交点数が 4 以下の範囲である. ただし, [1] の表は $*$ の操作による差を除いた表となっている.

$\overline{K}$	$\widetilde{\Delta}_{\overline{K}}(t)$	$\mathrm{Cl}(\overline{K})$
$\overline{K_1^0}$	$\{1\}$	自明
$\overline{K_1^2}$	$\{t-1+t^{-1}\}$	自明
$\overline{K_2^2}$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	自明
$\overline{K_1^3}$	$\{t^2-t+t^{-1}, t-t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K_2^3}$	$\{-t^3+t^2+t, t^{-1}+t^{-2}-t^{-3}\}$	自明
$\overline{K_3^3}$	$\{t-1+t^{-1}\}$	$w3.2$
$\overline{K_4^3}$	$\{t-1+t^{-1}\}$	$w3.1$
$\overline{K_5^3}$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	$w3.1$
$\overline{K_6^3}$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	$w3.1$
$\overline{K_7^3}$	$\{t^2-2t+2, 2-2t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K_8^3}$	$\{-t+3-t^{-1}\}$	自明
$\overline{K_9^3}$	$\{t^2-2t+2, 2-2t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K_{10}^3}$	$\{-t^3+2t^2-t+1, 1-t^{-1}+2t^{-2}-t^{-3}\}$	自明

表 1: 各 $\overline{K}$ の正規化されたアレキサンダー多項式と閉包

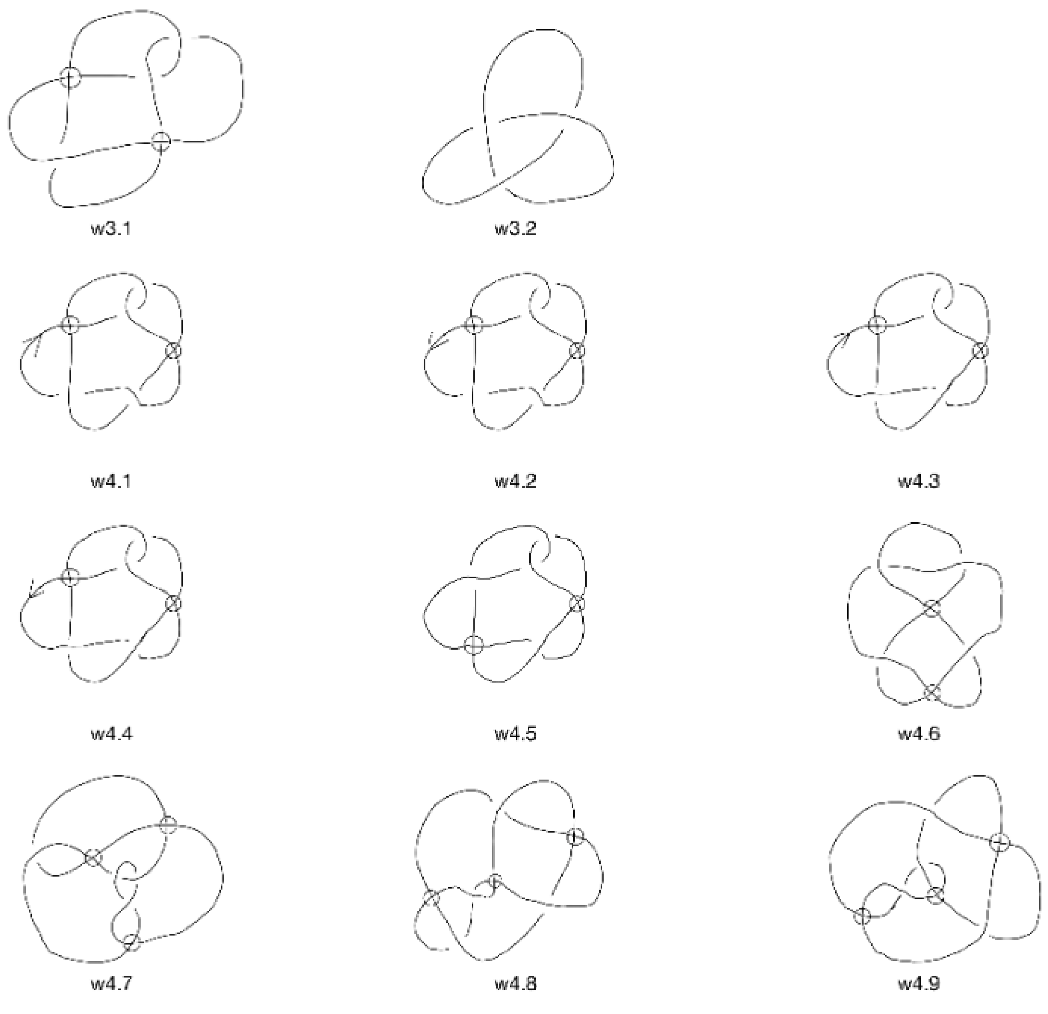


図 8: Bartholomew と Fenn による溶接結び目の表の交点数が 4 以下の範囲

謝辞

本研究集会で講演の機会をくださった世話人の先生方に御礼申し上げます. また, 講演に際してご指導くださった和田康載先生, 講演後にたくさんの助言をくださった佐藤進先生にも重ねて感謝申し上げます.

参考文献

[1] A. Bartholomew, https://www.layer8.co.uk/maths/welded-knots/index.htm

[2] A. Bartholomew and R. Fenn, *Biquandles of small size and some invariants of virtual and welded knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), no. 7, 943–954.

[3] R. Fenn and A. Bartholomew, *Erratum: Biquandles of small size and some invariants of virtual and welded knots*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1792002, 11 pp.

[4] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Based upon lectures given at Haverford College under the Philips Lecture Program Ginn and Company, Boston, MA, 1963. x+182 pp.

[5] クロウェル フォックス 著, 寺阪英孝 野口広 訳, 結び目理論入門, 岩波書店 (1967)

[6] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, Finite-type invariants of classical and virtual knots, Topology **39** (2000), no. 5, 1045–1068. Topology 39 (2000), no. 5, 1045–1068.

[7] Habiro Kazuo, Kanenobu Taizo, Shima Akiko, *Finite type invariants of ribbon 2-knots*, Low-dimensional topology (Funchal, 1998), 187–196. Contemp. Math., **233** American Mathematical Society, Providence, RI, 1999

[8] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, 丸善出版 (2012).

[9] T. Kanenobu and S. Komatsu, *Enumeration of ribbon 2-knots presented by virtual arcs with up to four crossings*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1750042, 41 pp.

[10] T. Kanenobu and T. Sumi, *Classification of a family of ribbon 2-konts with trivial Alexander polynomial*, Commun. Korean Math. Soc. **33** (2018), no. 2, 591–604.

[11] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690.

[12] 新國亮, SGC ライブラリ-178 空間グラフのトポロジー Conway-Gordon の定理をめぐって, サイエンス社 (2022).

[13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9**(2000), no. 4, 531–542.

[14] 吉田立樹, Long Virtual Knot の分類に向けて, 神戸大学大学院理学研究科修士学位論文, 2024.

On characterization of a multivariable polynomial invariant of twisted links

名古屋市立大学院
金　云峰 *

Abstract

S. Satoh and Y. Tomiyama gave a characterization of a multivariable polynomial invariant of almost classical virtual links. N. Kamada extended the multivariable polynomial invariant to twisted links. In this talk, We give some results which are similar to S. Satoh and Y. Tomiyama's.

1 Preparation

1.1 virtual link の Alexander numbering

D を virtual knot diagram [1] とする．ここで，D の *semi-arc* とは D の 2 つの real crossing の間にある arc または real crossing を持たない loop のことである．また D の *Alexander numbering* とは D の各 real crossing を構成する semi-arc に対して Fig. 1 の条件を満たす numbering である．($i, j \in \mathbb{Z}$)

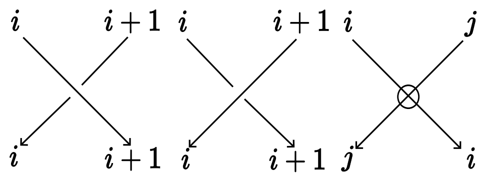


Fig. 1: Alexander numbering

virtual link diagram の Alexander numbering の例を Fig. 2 に示す．ここで classical link diagram は常に Alexander numbering 可能である．

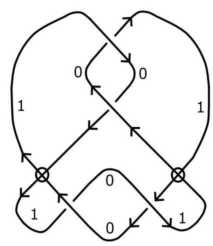


Fig. 2: Alexander numbering

ここで，すべての virtual link diagram が Alexander numbering を持つとは限らない．Fig. 3 に Alexander numbering を持たない virtual link diagram の例を示す．

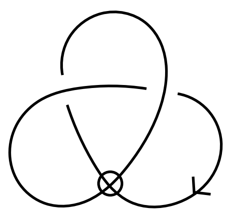


Fig. 3: Virtual link diagram which does not admit an Alexander numbering.

virtual link diagram D が *almost classical* [2] であるということは，D が Alexander numbering 可能であるということである．virtual link L が *almost classical* であるということは，L が almost classical な virtual link diagram を持つことである．

*e-mail : minehiro@gmail.com

1.2 virtual link の multivariable polynomial invariant

D を virtual link diagram とする．*pole diagram* とは，Fig. 4 に示すように edge 上に pole を持つ link diagram のことである．Fig. 5 に pole diagram の例を示す．

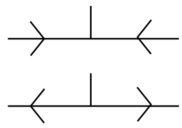


Fig. 4: A pole

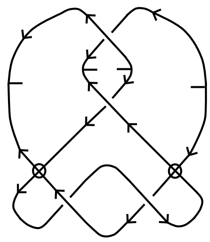


Fig. 5: A pole diagram

*A-splice (*または *B-splice)* とは Fig. 6 に示す link diagram の real crossing における local replacement のことである．ここで Fig. 6 において, 上 (または下) の 各 real crossing における local replacement を A-*splice* (または B-*splice*) という．

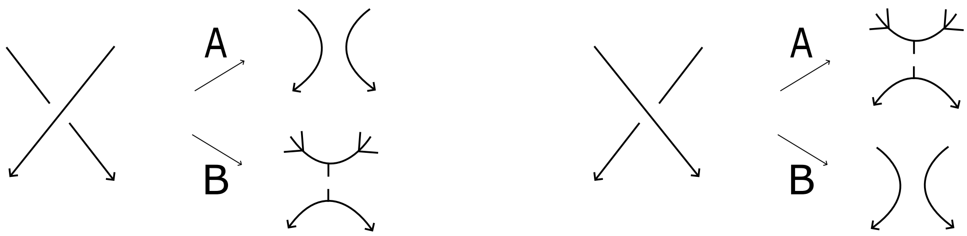
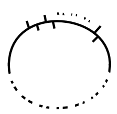
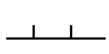


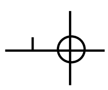
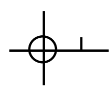
Fig. 6: A-splice and B-splice

D を link diagram とする．D の *state* とは D の各 classical crossing を A-*splice* (または B-*splice*) して得られた pole diagram のことである．ここで D の state の loop 上の pole の数は even である．

map ι とは以下の条件を満たす state diagram の loop の集合から $\mathbb{Z}$ への写像である．

(i) ι () $= r$, ここで pole は 交互に $2r$ 個あり, 点線部は virtual crossing を含む.

(ii) ι () $= \iota$ ( )

(iii) ι () $= \iota$ ()

D を virtual link diagram とする．D の state S について, $\natural S =$ (S の A-splice の数) $-$ (S の B-splice の数), $\sharp S =$ (S の loop の数), $\tau_i(S) =$ ($\iota(l) = i$ となる S の loop l の数) とする．

D の *double bracket* を以下に定める．

$$\langle\!\langle D \rangle\!\rangle := \sum_S A^{\natural S}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp S} d_1^{\tau_1(S)} d_2^{\tau_2(S)} \cdots \ \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2 \cdots].$$

$w(D) =$ (D の positive crossing の数) $-$ (D の negative crossing の数) とする．D の *multivariable polynomial* を以下に定める．

$$R_D \coloneqq (-A^3)^{-w(D)} \langle\!\langle D \rangle\!\rangle .$$

Theorem 1.1. *(H. A. Dye, L.H. Kauffman and Y. Miyazawa* [3], [4]*)*
D を virtual link diagram とする. multivariable polynomial R_D は virtual link の不変量である.

multitvariable polynomial $R_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2 \cdots]$ について, $\mathrm{Exp}(R_D)$ を R_D の d_i を含まない項の A の指数の集合とする.

Theorem 1.2. *(T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh and Y. Tomiyama* [5]*)*
L を almost classical な $\mu(L)$ compornent の virtual link とし, D を L の virtual link diagram とする.

$$\mathrm{Exp}(R_D) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & (\mu(L) : even) \\ 4\mathbb{Z}+2 & (\mu(L) : odd) \end{cases}$$

この定理の例を示す. D を Fig. 2 に示す virtual link diagram とし, L を D を持つ virtual link とする. ここで multivariable polynomial $R_D = -A^{-10}(A^4+1)(A^{16}+A^{12}+A^8+A^4+1)$ となり $\mu(L)=1$ であるので, 定理を満たしている.

1.3 twisted link の multivariable polynomial invariant

twisted link diagram [6] とは virtual link diagram の arc 上に Fig. 7 のように bar を含んだ diagram のことである. twisted link diagram の例を Fig. 7 の右側に示す.

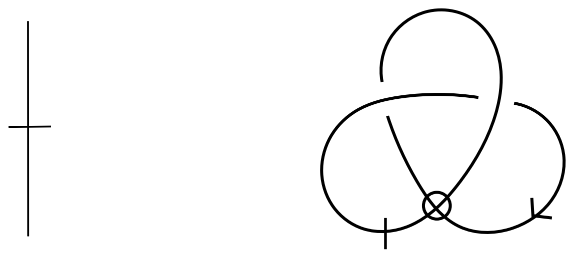


Fig. 7: bar と twisted link diagram

twisted Reidemeister moves とは Fig. 8 に示す局所変形である. twisted link diagram D と D' が有限回の generalized Reidemeister move と twisted Reidemeister move で移り合うとき, D と D' は同値であるという. *twisted link* とは twisted link diagram の同値類である.

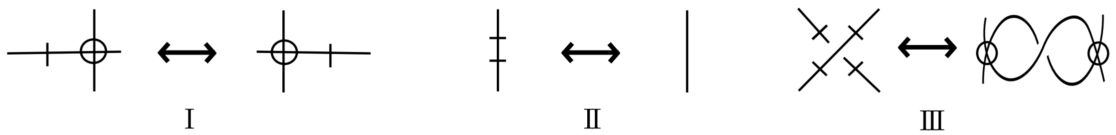
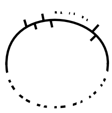
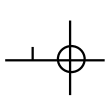
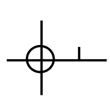


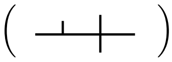
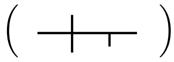
Fig. 8: twisted Reidemeister move

次に twisted link の *multivariable polynomial invariant* [7], [8] について定義する. D を twisted link diagram とし, D に対して map ι を定義する. map ι とは以下の条件を満たす state diagram の loop の集合から $\mathbb{Z}$ への写像である.

(i) ι () $= r$, ここで pole は 交互に $2r$ 個あり, 点線部は virtual crossing, bar を含む.

(ii) ι () $= \iota$ ( )

(iii) ι () $= \iota$ ()

(iv) ι  $= \iota$ 

D の state の loop l に対して, l の bar の数が odd であるとき, $\iota(l) = 0$ となる.

twisted link diagram D の state S について, $\natural S = (S$ の A-splice の数$) - (S$ の B-splice の数$)$, $\sharp S = (S$ の loop の数$)$, $\natural_0 S = (S$ の bar の数が odd である loop の数$)$, $\tau_i(S) = (\iota(l) = i$ となる S の loop l の数$)$ とする.

D の *double bracket* を以下に定める.

$$\langle\!\langle D \rangle\!\rangle \coloneqq \sum_S A^{\natural S}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp S} M^{\natural_0 S} d_1^{\tau_1(S)} d_2^{\tau_2(S)} \cdots \ \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, M, d_1, d_2 \cdots].$$

$w(D) = (D$ の positive crossing の数$) - (D$ の negative crossing の数$)$ とする. D の *multivariable polynomial* を以下に定める.

$$X_D \coloneqq (-A^3)^{-w(D)} \langle\!\langle D \rangle\!\rangle .$$

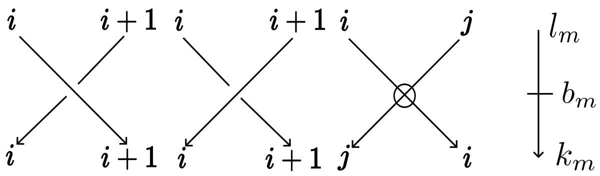
Theorem 1.3. *(N. Kamada* [7]*)*
D を twisted link diagram とする. multivariable polynomial X_D は twisted link の不変量である.

twisted link の multivariable polynomial の例を示す. D を Fig. 7 に示す twisted link diagram とする. このとき multivariable polynomial $X_D = -A^{-12}M(A^4+1)(A^6+A^4-1)$ となる.

2 Main result and applications

2.1 Main result

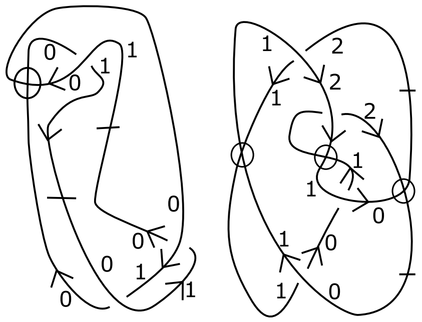
D を twisted link diagram とし, $b_1, b_2, \cdots, b_r$ を D の bar とする. ここで D の *bar-edge* とは D の 2 つの real crossing または bar の間にある arc または real crossing, bar を持たない loop のことである. また D の *twisted pseudo Alexander numbering* とは D の各 real crossing, bar を構成する bar-edge に対して Fig. 9 の条件を満たす numbering である $(i, j, l_m, k_m \in \mathbb{Z})$. ここで l_m, k_m とは D の bar b_m に隣接する bar-edge に対する twisted pseudo Alexander numbering である. 各 l_m, k_m に対して, 和は n になる.



$$l_1 + k_1 = l_2 + k_2 = \cdots = l_r + k_r = n \ (1 \leq m \leq r)$$

Fig. 9: ｔwisted pseudo Alexander numbering

D の *twisted pseudo odd Alexander numbering* とは D の各 l_m, k_m の和が odd になる D の twisted pseudo Alexander numbering であり, D の *twisted pseudo odd Alexander numbering* とは D の各 l_m, k_m の和が even になる D の twisted pseudo Alexander numbering である. Fig. 10 にその例を示す.



$n = 1$ $\qquad$ $n = 2$

Fig. 10: twisted pseudo Alexander numbering の例

D の twisted pseudo odd Alexander numbering と twisted pseudo odd Alexander numbering に対して, 以下の定理を発見した.

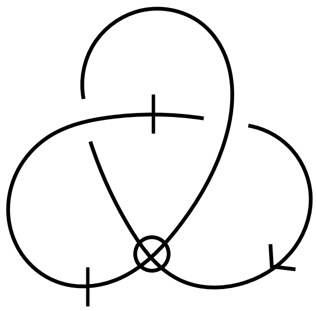
Theorem 2.1. *D を twisted pseudo odd Alexander numbering を持つ twisted link diagram とする．このとき D の multivariable polynomial に対して $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ が成り立つ.*

Theorem 2.2. *D を成分数が $\mu(L)$ で twisted pseudo even Alexander numbering を持つ twisted link diagram とする．The multivariable polynomial $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}, M]A^{2\mu(L)}$*

この定理の例を示す. D_1, D_2 を Fig. 10 に示す twisted link diagram とする．ここで D_1 が twisted pseudo odd Alexander numbering を持ち, D_2 が twisted pseudo even Alexander numbering を持つ. また L を D を持つ virtual link とする．このとき multivariable polynomial $X_{D_1} = -A^4(A^4+1)(A^{10} - A^6 - A^4 + A^2 + 1)$, $X_{D_2} = -A^{-10}(A^4+1)\{(A^8 - 3A^4 + 1)A^4 - (A^{16} - 2A^8 + 1)M^2\}$ となり $\mu(L) = 1$ であるので, 定理を満たしている.

2.2 application

L を twisted link とし, D を Fig. 11 に示す L の twisted link diagram とする．このとき multivariable polynomial $X_D = -A^{-12}(A^4+1)(A^6 + A^4 d_1 - (A^4+1)M^2 + A^4)$ となるので, L は twisted pseudo Alexander numbering を持つ twisted link diagram を持たない.



D

Fig. 11: twisted pseudo Alexander numbering を持たない twisted link diagram

また, twisted link diagram D の twisted pseudo Alexander numbering に関して以下の proposition を発見した.

Proposition 2.3. *D を twisted link diagram とし, $\widetilde{D}$ を D の double covering diagram とする．このとき D が twisted pseudo Alexander numbering を持つならば, $\widetilde{D}$ は almost classical である.*

twisted link diagram D の *double covering diagram* $\widetilde{D}$ [9] について定義する. $b_1, b_2, \cdots, b_k$ を twisted link diagram D の bar とする．D を y 軸の左側に置き, D の任意の 2 つの bar において, bar を通る x 軸に平行な直線が同じにならないようにする．Fig. 12 のように D の y 軸対称の diagram の real crossing の符号をすべて入れ替えて得られた diagram を $s(D)$ とする.

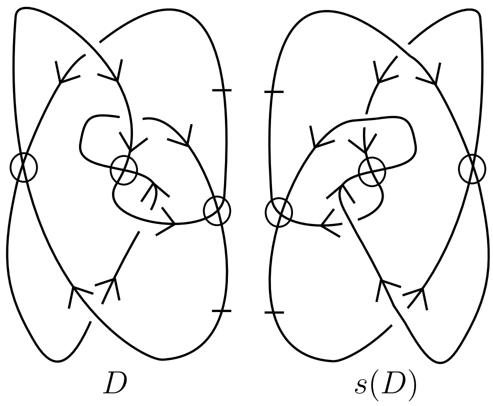


Fig. 12: D と $s(D)$

D と $s(D)$ の各 bar における近傍を Fig. 13 のように変形する．このようにして得られた diagram $\widetilde{D}$ を D の double covering diagram という．double covering diagram の例を Fig. 14 に示す.

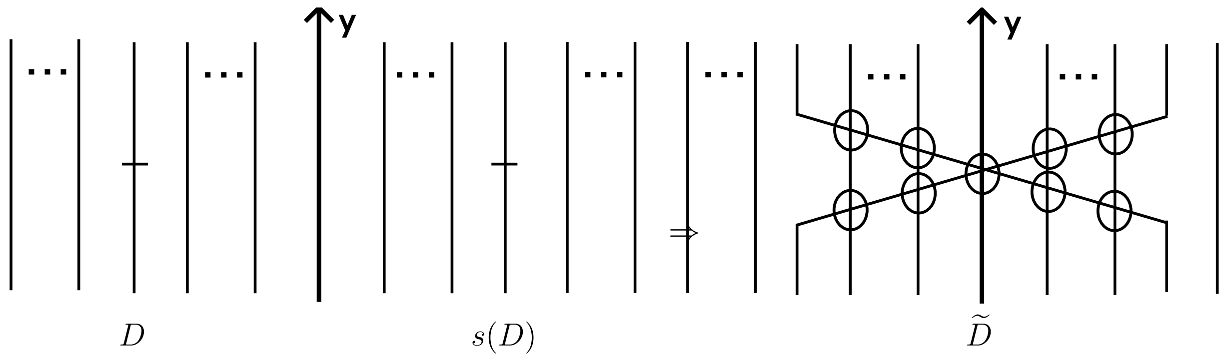


Fig. 13: double covering diagram

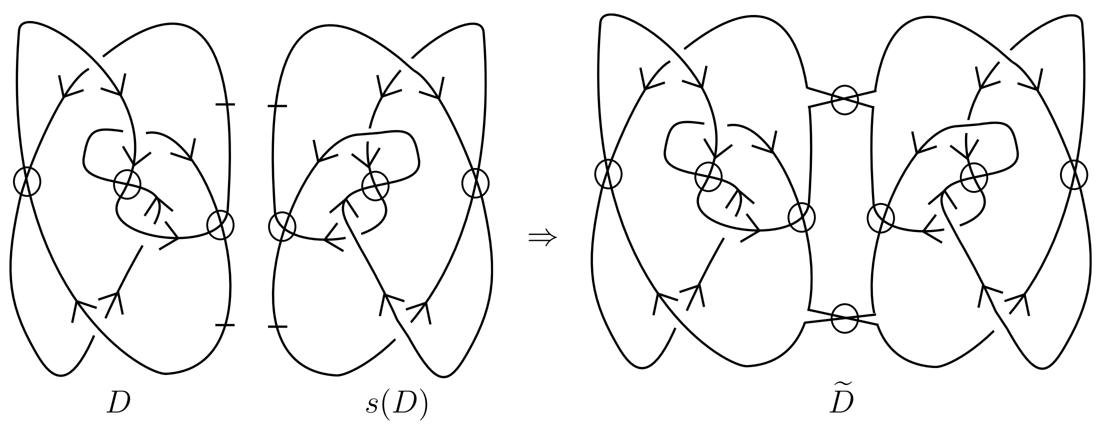
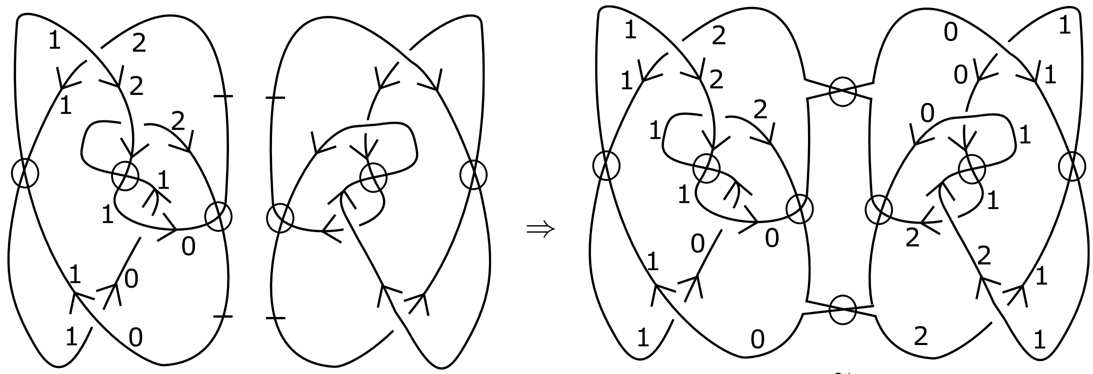


Fig. 14: double covering diagram の例

ここで, Fig. 14 の twisted link diagram D は Fig. 15 に示すように twisted pseudo Alexander numbering を持つ．このとき, D の double covering diagram $\widetilde{D}$ は Fig. 15 に示すように almost classical である.



D $\qquad s(D)$ $\qquad \widetilde{D}$

Fig. 15: D と $\widetilde{D}$ の numbering

References

[1] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999) 663-690.

[2] R. G. H. Boden E. Harper, *Virtual knot groups and almost classical knots*, Fundamenta Mathematicae **238** (2017), 101–142.

[3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Virtual Crossing Number and the Arrow Polynomial* (2009), available at `0810.3858`.

[4] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **17** (2008), no. 11, 1311-1326, DOI 10.1142/S0218216508006658. cited By 34.

[5] T. Nakamura and Y. Nakanishi and S. Satoh and Y. Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **10** (2012), DOI 10.1142/S0218216512500952.

[6] M. O Bourgoin, *Twisted link theory*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), no. 3, 1249-1279.

[7] N. Kamada, *Polynomial invariants and quandles of twisted links*, Topology Appl **159** (2012), 999–1006.

[8] N. Kamada, *On twisted knots*, Knot theory and its applications **670** (2016), 328–341.

[9] N. Kamada and S. Kamada, *Double coverings of twisted links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **25** (2016), no. 9. 1641011, 22 pp.

コード図の数え上げと doodle 不変量による Milnor の 3 重絡み数の表示

平田遼介（信州大学）*

概要

[3] から，次数 2 の結び目不変量はガウス図式の数え上げの項と Arnold 不変量の項の和で表すことが出来ることが分かる．本稿では，同じく次数 2 の不変量である Milnor の 3 重絡み数をあるコード図の数え上げと doodle 不変量を用いて表す．また本稿では，講演スライドで紹介したコード図の作り方を簡略化しており，例に挙げる絡み目も変更している．

1　Doodle 不変量

この章では doodle を定義した後，3 成分 doodle の不変量を定義する．

定義 1.1. [cf.[2], [5]] Doodle とは，平面上の有限個の閉曲線の和集合であって，高々 2 重点しか持たず，各 2 重点が横断的になっているものである．n 個の閉曲線の和集合である doodle のことを n 成分 doodle といい，$D = (C_1, \dots, C_n)$ と書く．また，doodle D を構成している各 C_i のことを，doodle の成分という．

本稿では，断りがない限り doodle と書いたら 3 成分 doodle を表しているものとする．

例 1.2. 図 1 において，doodle の例とそうではない例を示す．図 1 の (c) では，横断的ではない 2 重点を持っている点，(d) では 3 重点を持っている点から，それぞれ doodle ではない例となっている．

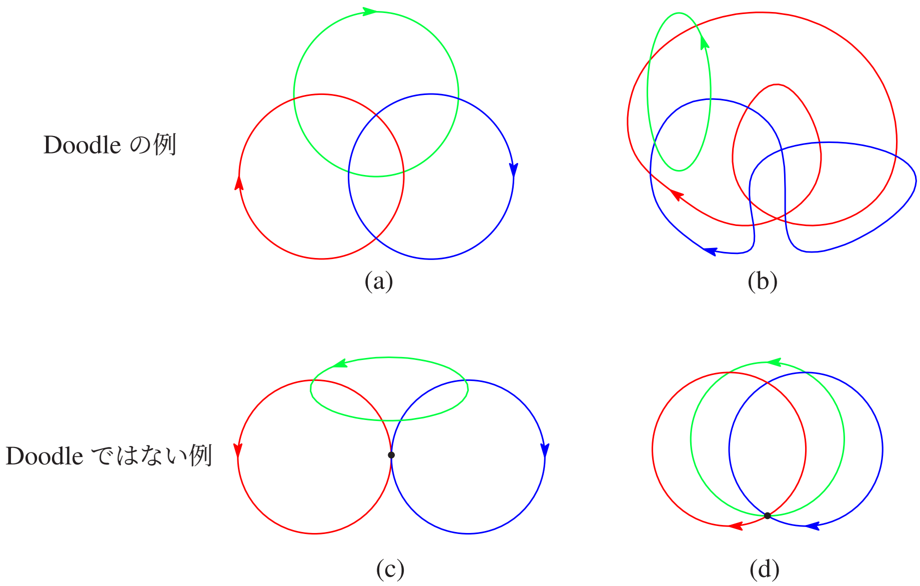


図 1　Doodle と doodle ではない例

定義 1.3. [cf.[2], [5]] 2 つの doodle D と D' が isotopic であるとは，全同位な変形と Reidemeister 変形の I と II と III の一部だけで移り合うときにいう．

* mail:23ss108k@gmail.com

注意 1.4. 定義 1.3 において，許可されている Reidemeister 変形と禁止されている Reidemeister 変形は次の図 2 と 3 に示す通りである． これらの図では，同じ色で描かれた曲線は同じ成分の一部を表しており，変形前後で向きを保っ

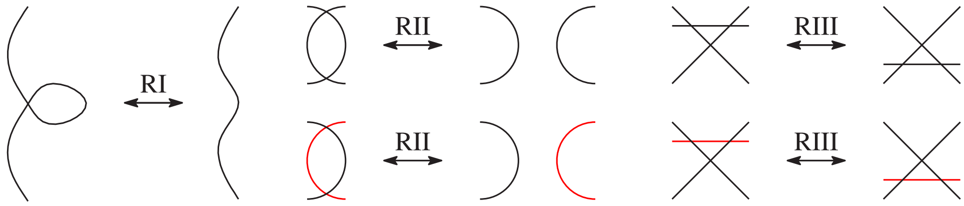


図 2　許可されている変形

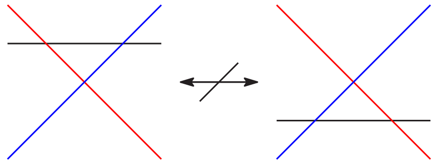


図 3　禁止されている変形

ているものとする．

3 成分 doodle の不変量を定義する．Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ の C_2 と C_3 の交点 p の符号 $\delta(p; C_2, C_3)$ を図 4 のように定義する．そして，単純閉曲線 C_1 の内部にある C_2 と C_3 の交点 p の符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ を図 5 のように定義する．符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ は，C_1 に反時計回りの向きがついていれば $\delta(p; C_2, C_3)$ と一致し，C_1 に時計回りの向きがついていれば $\delta(p; C_2, C_3)$ の -1 倍となるものである．

$\delta(p; C_2, C_3) = +1$　　$\delta(p; C_2, C_3) = -1$

図 4　符号 $\delta(p; C_2, C_3)$ の絵

$\epsilon(p; C_1, C_2, C_3) = \delta(p; C_2, C_3)$　　$\epsilon(p; C_1, C_2, C_3) = -\delta(p; C_2, C_3)$

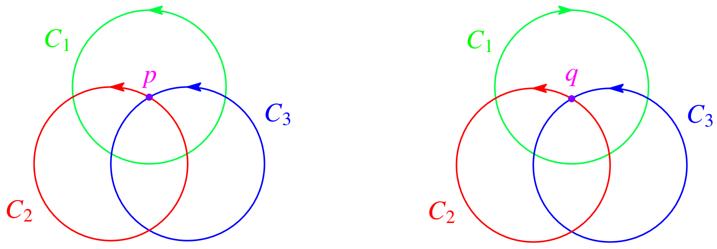
図 5　符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ の絵

定義 1.5 (cf. [2])**.** 各成分が自己交差を持たない doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ を考える． このとき，C_1 の内部にあるすべての C_2 と C_3 の交点を考え，$\mu(C_1, C_2, C_3)$ を次で定義する:

$$\mu(C_1, C_2, C_3) := \sum_p \epsilon(p; C_1, C_2, C_3). \tag{1.1}$$

例 1.6. 図 6 にて，$\mu(C_1, C_2, C_3)$ の計算例を示す．

定義 1.5 で定義した μ 不変量を自己交差を持つ doodle に拡張する．Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ の成分 C_1 に着目し，C_1 の全ての自己交差に対して smoothing という自己交差を繋ぎ変える操作を行うことを考える（図 7 を参照)．



$\epsilon(p; C_1, C_2, C_3) = +1$ $\quad$ $\epsilon(q; C_1, C_2, C_3) = -1$

$\mu(C_1, C_2, C_3) = +1$ $\quad$ $\mu(C_1, C_2, C_3) = -1$

図 6　$\mu(C_1, C_2, C_3)$ の計算例

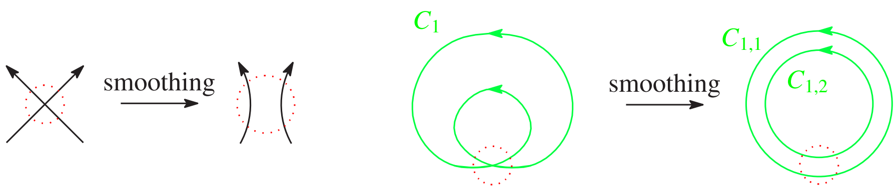


図 7　Smoothing の例

定義 1.7. Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ を考え，C_1 の全ての自己交差に smoothing を行うことで得られた単純閉曲線の和集合を $(C_{1,1}, \ldots, C_{1,a})$ とする．このとき，$\mu(C_1, C_2, C_3)$ を次で定義する:

$$\mu(C_1, C_2, C_3) := \sum_{i=1}^{a} \sum_{p} \epsilon(p; C_{1,i}, C_2, C_3). \tag{1.2}$$

この μ 不変量は次の性質を満たす．

命題 1.8. (1) $\mu(C_1, C_2, C_3)$ の値は整数である．
(2) $-C_i$ と書いたら C_i と向きだけが入れ替わっているものを表しているとする．このとき，次の式が成り立つ:

$$\mu((-1)^{s_1} C_1, (-1)^{s_2} C_2, (-1)^{s_3} C_3) = (-1)^{s} \mu(C_1, C_2, C_3) \quad (s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}, s = s_1 + s_2 + s_3). \tag{1.3}$$

(3) $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群とする．このとき，次の式が成り立つ:

$$\mu(C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}, C_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \mu(C_1, C_2, C_3) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_3). \tag{1.4}$$

(4) μ 不変量は，定義 1.3 に関しての不変量となっている．

2　コード図の作り方

まずは doodle から絡み目を作ることを考える．Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ から絡み目 $L(D)$ を次のように作る．

- C_1 と C_2 の交点では C_1 の方が上になるように上下をつける．
- C_2 と C_3 の交点では C_2 の方が上になるように上下をつける．
- C_3 と C_1 の交点では C_3 の方が上になるように上下をつける．
- 各成分の自己交点には適切な上下をつける．

例 2.1. 図 8 にて，doodle から絡み目を作る例を示す．図 8 の D' の自己交差には左上から右下へ向かう方を上にするような上下をつけて $L(D')$ を作ったが，上下を逆にしても問題はない．

Doodle から出来る絡み目には次のことが成り立つ．

命題 2.2 (cf. [2]). (1) $L(D)$ の各成分が自明になるように上下を付けられる．

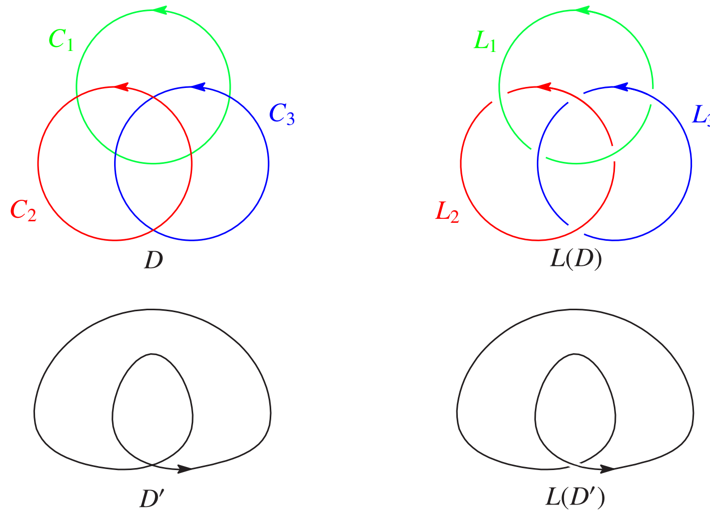


図 8　Doodle から絡み目を作る例

(2) $L(D)$ のどの 2 つの成分の絡み数を考えても 0 になる.

ここからは，今回の主結果に必要なコード図を作っていく.

定義 2.3. S^1 上のコード図であって，次のような頂点を許すコード図のことを一般化されたコード図という.

- 他の頂点とコードで結ばれていない頂点.
- 2 つ以上の頂点とコードで結ばれている頂点.

例 2.4. 図 9 にて，頂点集合 $V = \{a, b, c, d\}$ を持つ一般化されたコード図の例を示す．頂点 a は 2 つ以上の頂点とコードで結ばれている頂点であり，頂点 d は他の頂点とコードで結ばれていない頂点になっている.

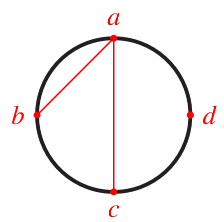


図 9　一般化されたコード図の例

図 10 の 3 成分絡み目 $L = (L_1, L_2, L_3)$ を基にコード図を作ることを考える．L から得られる doodle を $D_L =$

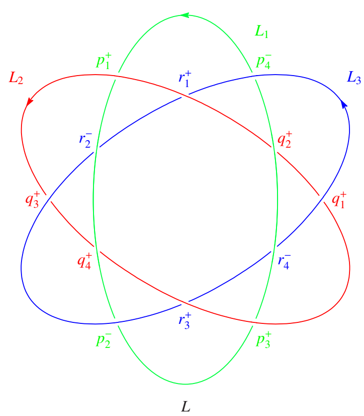


図 10

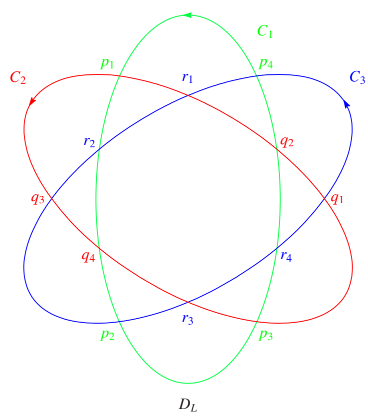


図 11

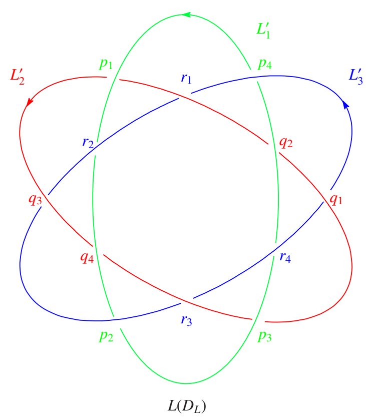


図 12

(C_1, C_2, C_3) とし，D_L から出来る絡み目を $L(D_L) = (L'_1, L'_2, L'_3)$ とする（それぞれ図 11 と 12 を参照)．各交点には次

の図 13 のような符号 $\gamma(p; L_1, L_k)$ がついていると仮定する（図 10 の各交点には既にこの符号を右上につけている）．$V_a(L_1)$ を絡み目 L において L_1 と他の成分との交点のうち，L_1 の方が上にある交点を集めた集合とする．絡み目 L と

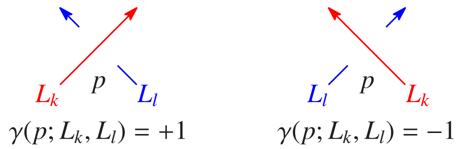


図 13　符号 $\gamma(p; L_1, L_k)$ の絵

$L(D_L)$ を比較したときに，成分 L_i と L_j の交点の上下が入れ替わっている交点を集めた集合を $V_c(L_i, L_j)$ とし，上下が入れ替わっていない交点を集めた集合を $V_{nc}(L_i, L_j)$ とする（図 14 を参照）．$L(D_L)$ の作り方から，$V_a(L_1)$ は次のよう

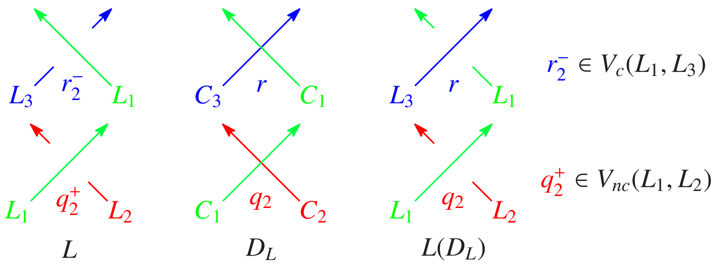


図 14　図 10 の L における $V_c(L_1, L_3)$ と $V_{nc}(L_1, L_2)$ の例

に書くことが出来る:

$$V_a(L_1) = \{q_2^+, r_2^-, q_4^+, r_4^-\} = \{r_2^-, r_4^-\} \sqcup \{q_2^+, q_4^+\} = V_c(L_1, L_3) \sqcup V_{nc}(L_1, L_2). \tag{2.1}$$

ここで，2 点 b_{c_3} と b_{nc_2} を L_1 上に取る．ただし，b_{c_3} を始点，b_{nc_2} を終点とするような L_1 の一部を切り取ったときに，その上に $V_a(L_1)$ の元が存在していないような位置に 2 点を取ることにする（図 15 を参照）．$V_a(L_1)$ の元と 2 点

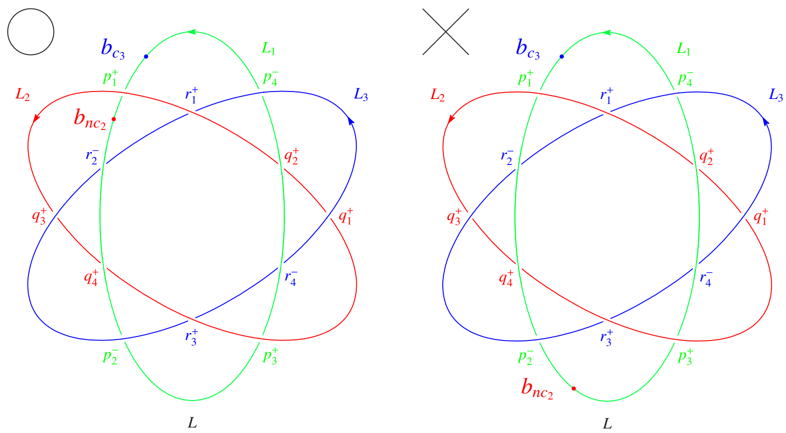


図 15

b_{c_3} と b_{nc_2} を頂点とするような一般化されたコード図 G_{L_1} を次の手順で作っていく．

1. L_1 上の $V_a(L_1)$ の元と 2 点 b_{c_3} と b_{nc_2} の位置に対応するように，S_1 上に各点を取る（図 16 を参照）．ここで S_1 とは G_{L_1} の外側の円周のことを表しており，L_1 に対応する向きがついているとする．
2. $V_c(L_1, L_3)$ の元と b_{c_3} を交点を持たないようにコードで結ぶ．このとき，符号 $\gamma(p; L_1, L_3)$ が $+1$ の元は b_{c_3} が終点に，-1 の元は b_{c_3} が始点となるようにコードに向きをつける（図 17 を参照）．これらのコードを集めた集合を $T_{1,3}$ とする．
3. 同様に，$V_{nc}(L_1, L_2)$ の元と b_{nc_2} をお互いに交点を持たないようにコードで結び，向きをつける（図 18 を参照）．このとき結んだコードを集めた集合を $T_{1,2}$ とする．

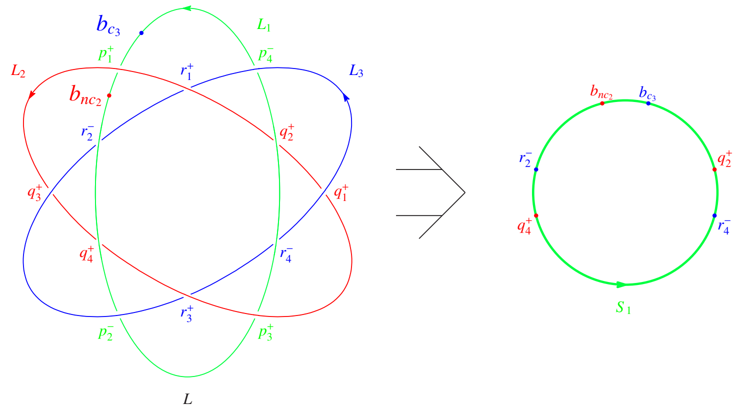


図 16

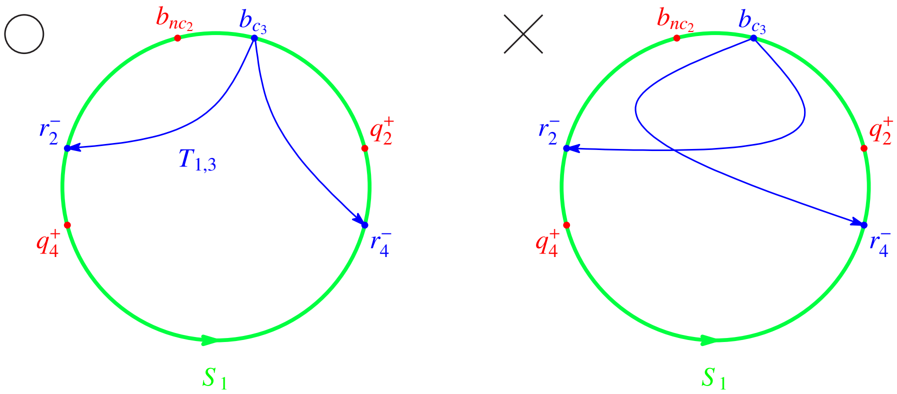


図 17

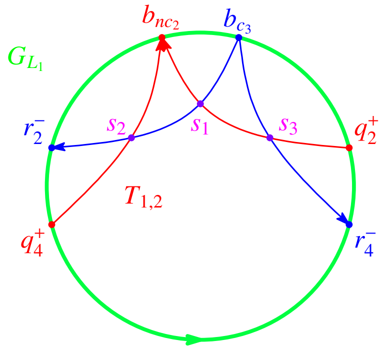


図 18

同じ様にコード図 G_{L_2} と G_{L_3} を作る.

定義 2.5. コード図 G_{L_k} において, $T_{k,j}$ と $T_{k,i}$ の全ての交点を符号 $\epsilon(p; S_k, T_{k,j}, T_{k,i})$ で足し合わせたものを $\langle {}_j\bigotimes_i, G_{L_k}\rangle$ と書く.

3 主結果

定理 3.1. 向き付けられた 3 成分絡み目 $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ を考え, L から得られた doodle を $D_L = (C_1, C_2, C_3)$ とする. また, $\mathfrak{A}_3$ を 3 次交代群とする. このとき, Milnor の 3 重絡み数は次のように書くことが出来る:

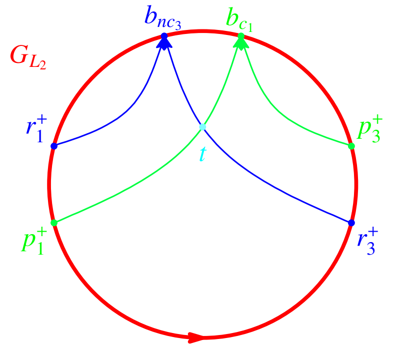
$$\bar{\mu}_L(123) \equiv -\mu(C_1, C_2, C_3) - \sum_{(i,j,k)\in\mathfrak{A}_3} \langle {}_j\bigotimes_i, G_{L_k}\rangle \mod \Delta_L(123). \tag{3.1}$$

例 3.2. 図 10 の絡み目 L の 3 重絡み目 $\bar{\mu}_L(123)$ を計算する. 絡み目 L の絡み数はそれぞれ $\mathrm{Link}(L_1, L_2) = 2, \mathrm{Link}(L_2, L_3) = 2, \mathrm{Link}(L_3, L_1) = -2$ であるので, $\Delta_L(123) = 2$ である. また, doodle D_L の μ 不変量を計算すると $\mu(C_1, C_2, C_3) = +2$ であることが分かる (図 11 を参照). 次に G_{L_1} を基に $\langle {}_3\bigotimes_2, G_{L_1}\rangle$ を計算すると -3 になることが分かる (図 18 を参照). 同様に G_{L_2} と G_{L_3} を構成して, それぞれの交点の符号和を計算すると $\langle {}_1\bigotimes_3, G_{L_2}\rangle = -1$ となり, $\langle {}_2\bigotimes_1, G_{L_3}\rangle = -1$ となることが分かる (図 19 と 20 を参照). 以上のことから, 絡み目 L の 3 重絡み数を計算すると次のようになる:

$$\bar{\mu}_L(123) \equiv -2 - (-3 - 1 - 1) \equiv 1 \mod 2. \tag{3.2}$$

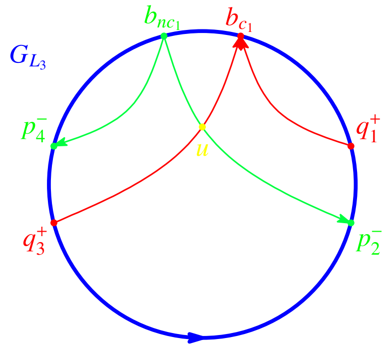
定理 3.1 は次の定理を基に証明する.

定理 3.3 (cf. [4, Theorem(1)]). 絡み目 $L = (L_1, L_2, L_3)$ の各成分を境界とするザイフェルト曲面を $F_i\,(i = 1, 2, 3)$ とし,



$\epsilon(t; S_1, T_{1,1}, T_{1,3}) = -1$

図 19



$\epsilon(u; S_1, T_{1,2}, T_{1,1}) = -1$

図 20

$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ とする．任意のザイフェルト曲面 F に対して, 次が成り立つ:

$$\bar{\mu}_L(123) \equiv m_{123}(F) - t_{123}(F) \quad \text{mod } \Delta_L(123). \tag{3.3}$$

この定理で出てくる $t_{123}(F)$ はザイフェルト曲面 F の 3 重点の符号和を表しており, $m_{123}(F)$ は L_i と $\mathrm{Int}\,(F_j), \mathrm{Int}\,(F_k)$ の交点が定める語の追い越し数の和を表している（詳細は [4] を参照）.

定理 *3.3* の証明方針. 最初にコード図 G_{L_i} $(i = 1, 2, 3)$ を基にして，次の手順で L_1 を境界とする曲面を貼る．

1. ザイフェルトアルゴリズムによって L_1 を境界とするザイフェルト曲面を貼る（図 21 と 22 を参照）．このよう

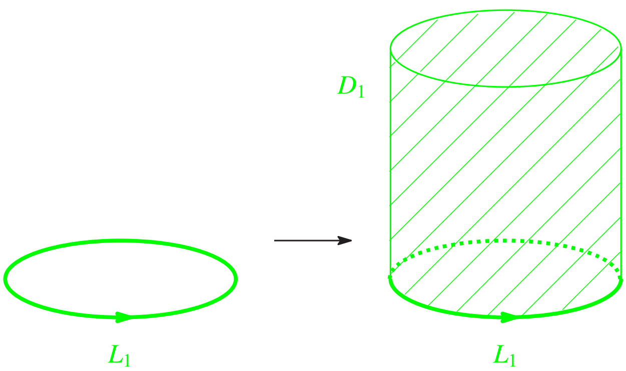


図 21

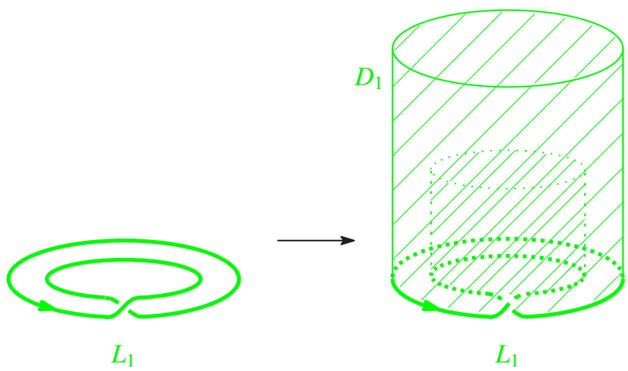


図 22

   にして貼った曲面を D_1 と置く．
2. ここでは図 23 のように stretch という曲面を引き伸ばす操作をすることで D_1 を変形することを考える．$V_a(L_2)$

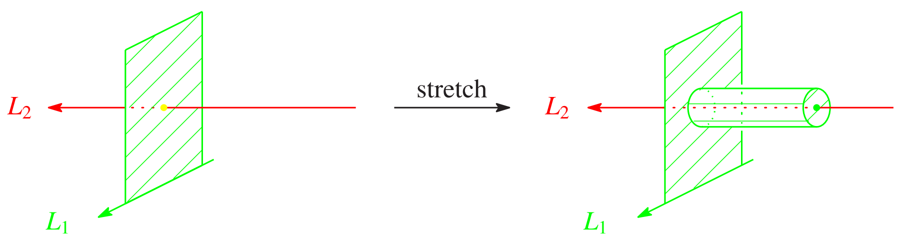


図 23

   の元のうち L_1 と L_2 の交点になっている元を考える．この元に対応する D_1 と L_2 の交点の付近の曲面を，b_{c_1} に向けて L_2 の向きに沿って stretch する．ただし，太さと stretch する先を調整することで曲面同士が交点を持たないようにする．

3. 同様に $V_a(L_3)$ の元のうち L_1 と L_3 の交点になっている元を考える．この元に対応する D_1 と L_3 の交点の付近の曲面を，b_{nc_1} に向けて L_3 の向きとは反対向きに stretch する．このときも太さと stretch する先を調整することで曲面同士が交点を持たないようにする．

以上の操作によって出来たザイフェルト曲面を Σ^1 とおく．同様の手順で Σ^2 と Σ^3 を構成する．このとき，$m_{123}(\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3) \equiv 0 \mod \Delta_L(123)$ となる．また，ザイフェルト曲面 $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$ に現れる 3 重点は次の 2 つに分けることが出来る．

(1) 変形する前のザイフェルト曲面 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ に現れる 3 重点.

(2) 変形する前のザイフェルト曲面 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ には現れない 3 重点.

この後は (1) の 3 重点の符号和が $\mu(C_1, C_2, C_3)$ に対応していることを証明する（図 24 を参照）．その後，(2) の 3 重

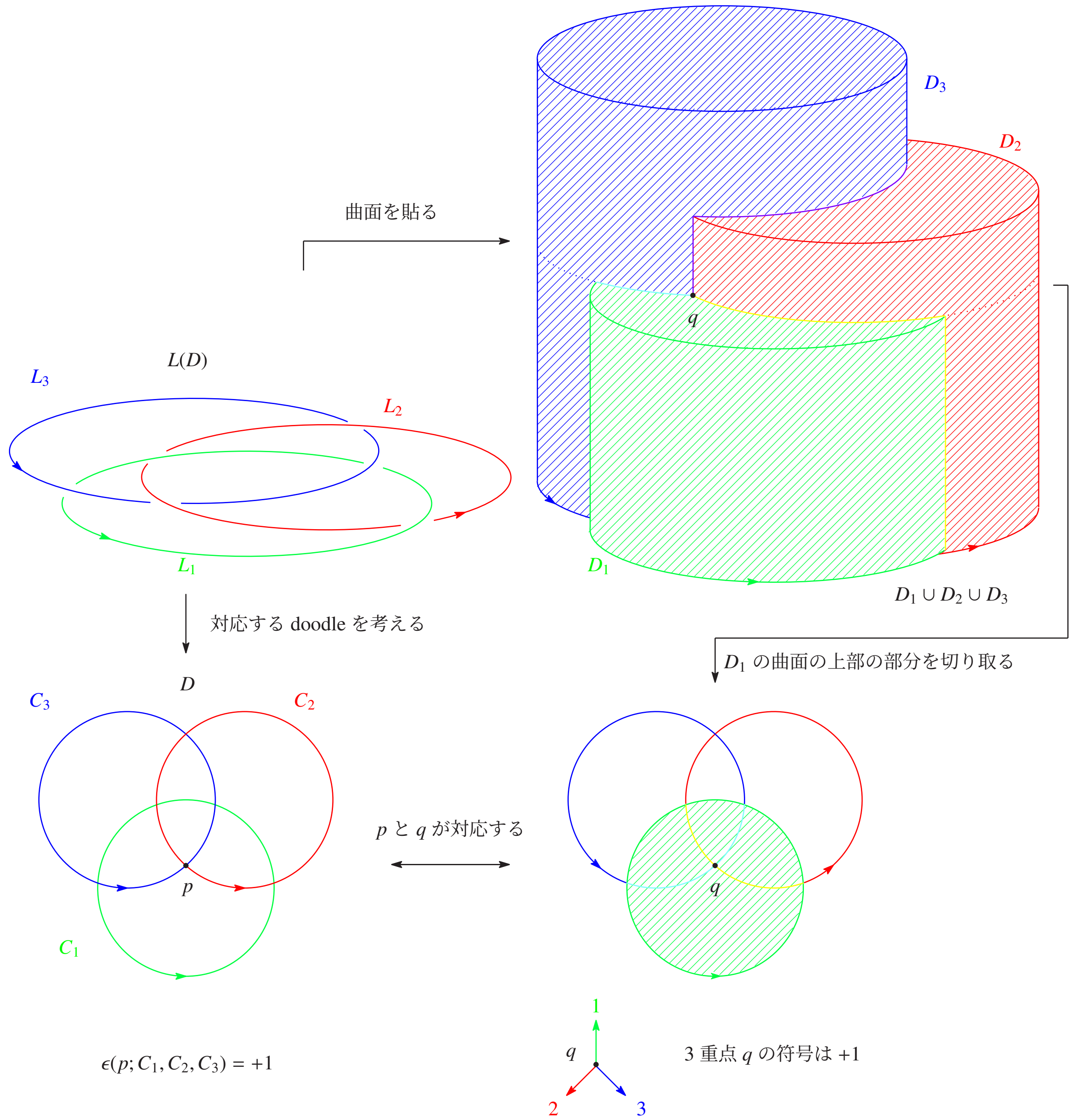
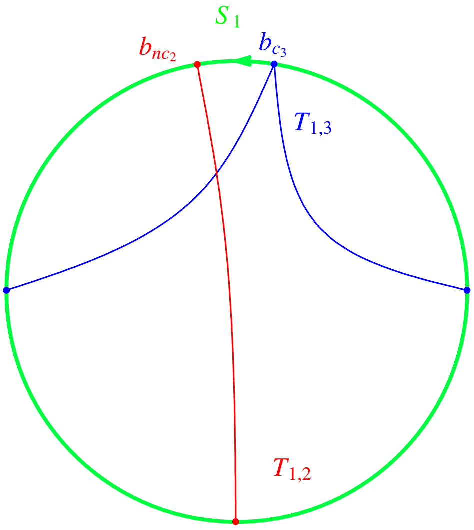
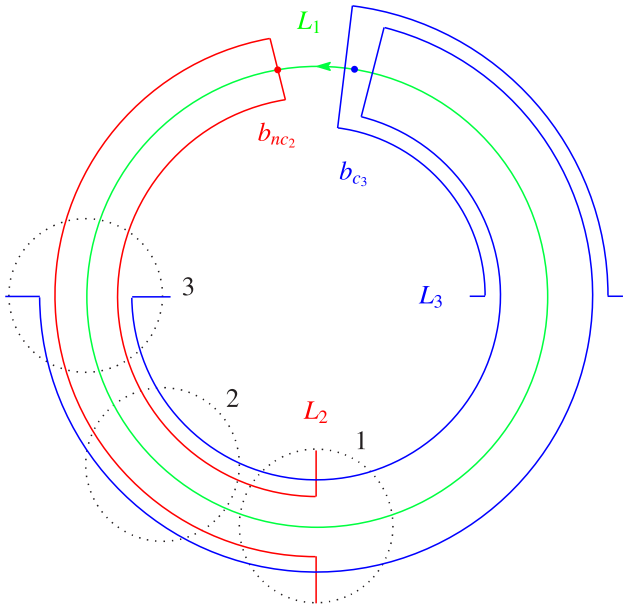


図 24

点の符号和が $\sum_{(i,j,k)\in\mathfrak{A}_3} \langle {}_j\bigotimes_i, G_{L_k}\rangle$ に一致することを示すことで定理 3.1 を証明できる（図 25 を参照）． □



G_{L_1}



L

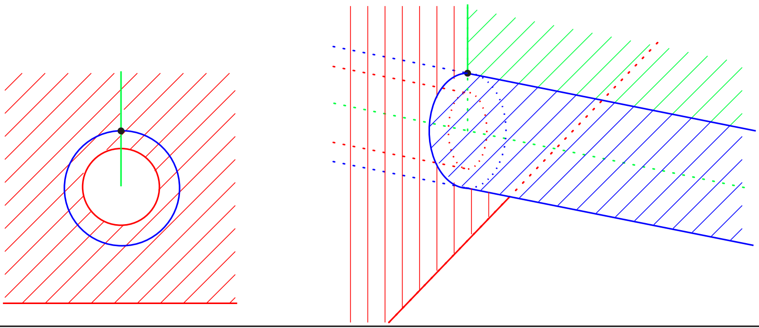
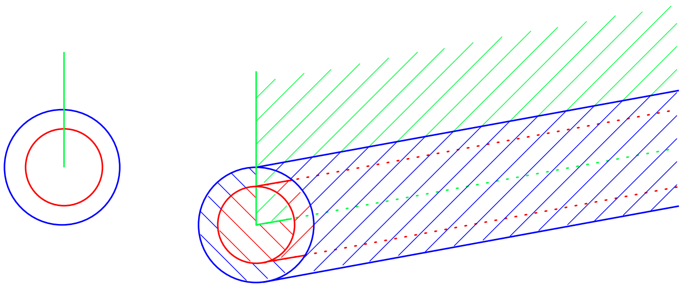
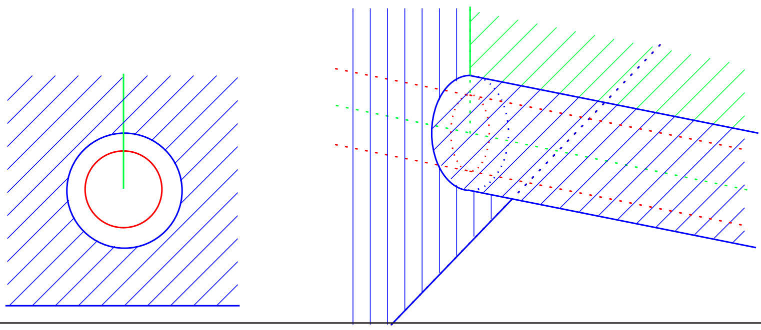
曲面の付近の様子		3 重点が存在するかしないか
1		存在する
2		存在しない
3		存在しない

図 25

4 謝辞

本研究集会にて講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます．また，参加者の皆様には貴重なアドバイスをいくつも頂きました．お礼申し上げます．最後に信州大学の境圭一先生にはセミナーを通し，たくさんのことをご指導していただきました．ここに感謝申し上げます．

参考文献

[1] C. W. Davis, M. Nagel, P. Orson and M. Powell, *Surface Systems and Triple Linking Numbers*, Indiana University Mathematics Journal, 69(2020), no. 7, 2505-2547.

[2] R. Fenn and P. Taylor, *Introducing doodles*, Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 37-43.

[3] X. S. Lin and Z. Wang, *Integral geometry of plane curves and knot invariants* J. Differential Geom., 44(1996), 74-95.

[4] B. Mellor and P. Melvin, *A geometric interpretation of Milnor’s triple linking numbers*, Algebr. Geom. Topol. 3 (2003), no. 1, 557–568.

[5] A. B. Merkov, *On the classification of ornaments*, in Singularities and bifurcations, Advances in Soviet Mathematics 21 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994), pp. 199-211.

[6] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz (1957), 280–306.

3 重以上の交点を持つ図式に対する 3 重絡み数の Polyak-Viro 型公式

奥原 悠朔 *（信州大学大学院総合理工学研究科）

概要

R.Brooks と R.Komendarczyk による 2024 年の論文で, 次数 2 の有限型不変量である Conway 多項式の 2 次の係数について，3 重以上の交点を許容するような図式に対する Polyak-Viro 型公式が与えられた．本講演では次数 2 の有限型不変量である Milnor の 3 重絡み数について，R.Koytcheff と I.VoliĆ による積分表示から読み替えて，3 重以上の交点を許容するような図式に対する Polyak-Viro 型の公式を与える．

1 はじめに

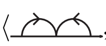
次数 2 の有限型不変量である Casson knot invariant c_2 について，以下の定理が証明されている．

定理 1 ([1, Theorem A]). *Long knot* K の図式 D_K が横断的 2 重点のみを持つとき，次の等式が成り立つ：

$$c_2(D_K) = \langle$$  $$, G_{D_K}\rangle.$$

ここで右辺は D_K の Gauss diagram 内の subdiagram を符号付きで数え上げた値とし，以下も同様とする．

定理 2 ([1, Theorem B]). *Long knot* K の図式 D_K が横断的な 3 重以上の交点を持つとき次の式が成り立つ：

$$c_2(D_K) = \langle$$  $$, G_{D_K}\rangle + \frac{1}{2}(\langle$$  $$, G_{D_K}\rangle + \langle$$  $$, G_{D_K}\rangle + \langle$$  $$, G_{D_K}\rangle).$$

同じく次数 2 の有限型不変量である Milnor triple linking number[2] について類似の定理の成立を示した．

定理 A. *Long link* L の図式 D_L が横断的な 2 重点のみを持つとき，次の等式が成り立つ：

$$\mu_{123}(D_L) = \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle - \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle + \langle$$  $$, G_{D_L}+\rangle.$$

定理 B. *Long link* L の図式 D_L が横断的な 3 重以上の交点を持つとき，次の等式が成り立つ：

$$\mu_{123}(D_L) = \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle - \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle + \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}(\langle$$  $$, G_{D_L}\rangle - \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle + \langle$$  $$, G_{D_L}\rangle).$$

2 Long link と図式

この節の始めに，考察の対象となる long link[1, 3] を定義する．

* e-mail: 23ss103j@gmail.com

定義 1. 3 成分の long link とは滑らかな埋め込み $L = (L_1, L_2, L_3) : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ で，第 i 成分は $t \geq 1$ のとき $f_i^+(t) = (t, (2-i)t, 0)$ に，$t \leq -1$ のとき $f_i^-(t) = (t, (i-2)t, 0)$ に一致し，$-1 \leq t \leq 1$ のとき $L_i(t) \in I^3$ を満たす $(I^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_k| \leq 1 (k = 1, 2, 3)\})$ ものをいう．

つまり 3 成分の long link とは，原点を中心とする立方体の内部で絡まり合い，立方体の外側で半直線であるような 3 本の曲線である．誤解の恐れが無い限り L の像を long link と呼ぶこともある．以降 $\mathcal{L} = \{3$ 成分の long link$\}$ とする．次に定義する long link の図式の方が紙面上では扱いやすい．

定義 2. $L \in \mathcal{L}$ の図式 D_L とは，$N = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ に垂直な平面への射影の像で，交点において上下の情報をもつようなものをいう．

Long link の図式が 3 重以上の点を持つ場合に上下関係を視認しにくいので色により表現する．例えば次の図のように，3 重点は手前側の成分から青，黒，赤の順番で表す．以降図式の交点 p の符号を $\mathrm{sgn}(p)$ と書く．

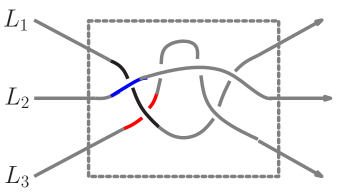


図 1　2 重点のみをもつ long link の図式の例

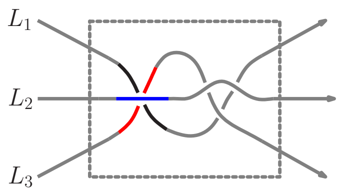


図 2　3 重点ももつ long link の図式の例

3　Arrow diagram と Gauss diagram

この節では，arrow diagram と Gauss diagram を定義する [3]．

定義 3. 3-strand arrow diagram とは，直線 $\mathbb{R}$ の 3 本のコピー (strand) と，その上の相異なる点をつなぐ向きづけられた chord からなるグラフのことをいう．

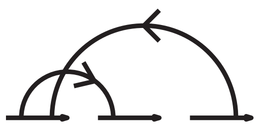


図 3　端点を共有してない arrow diagram

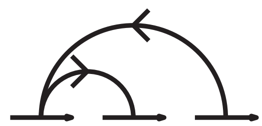


図 4　端点を共有する arrow diagram

定義 4. 3-strand Gauss diagram とは，chord に符号を与えられた 3-strand arrow diagram のことをいう．

以上の定義の下で long link の図式に Gauss diagram を対応づけられる．Long link の第 i 成分を i 番目の strand に向きを保って対応させ，図式の交点を成す 2 点が対応する strand の間に chord を張り，交点の下側の点に対応した strand 上の点から上側の点に対応した strand 上の点に向かうように chord の向きを定め，交点の符号を chord の符号とすればよい．図式 D_L に対応する Gauss diagram を G_{D_L} と書く．

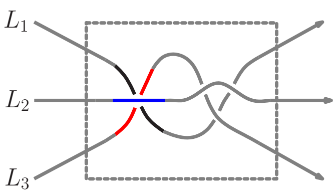


図 5　Long link L' の図式 $D_{L'}$

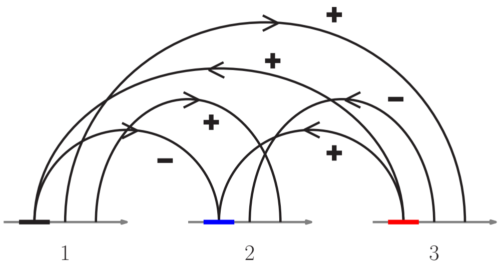


図 6　$D_{L'}$ の Gauss Diagram $G_{D_{L'}}$

Gauss diagram G_{D_L} の chord 全体から成る集合を $C(G_{D_L})$ と表し，2 つの元の（順序を考えない）組 $\{\alpha, \beta\}$ の集合を $C^2(G_{D_L})$ と表す．α の端点が i-th strand と j-th strand 上にあることを α を α_{ij} と書いたりする．

4　配置空間積分

後に定理の証明で用いる Milnor triple linking number の配置空間積分による表示について述べる．詳しいことは [4, 5] を参照されたい．始めに η_N^ε を定義する．

定義 5. η_N^ε を N を中心とした半径 ε の円盤上で台をもち，$\int_{S^2} \eta_N^\varepsilon = 1$ を満たす $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の 2-形式とする．

ここで以下の図で表した arrow diagram を X_1, X_2, X_3 として，配置空間 $F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}$ を定義する．

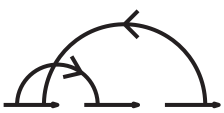


図 7　X_1

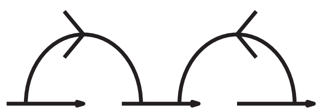


図 8　X_2

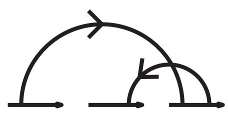


図 9　X_3

定義 6.

$$F_{X_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2\} \tag{1}$$
$$F_{X_2} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_3\} \tag{2}$$
$$F_{X_3} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 < x_4\} \tag{3}$$

つまり F_{X_k} は X_k の chord の端点に付随して定義される配置空間である．気持ちとしては上から順に元を，

第 1 成分上の相異なる 2 点，第 2 成分上の 1 点，第 3 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，
第 2 成分上の相異なる 2 点，第 1 成分上の 1 点，第 3 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，
第 3 成分上の相異なる 2 点，第 1 成分上の 1 点，第 2 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，

定義 7. $L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対し写像 $h_{13} : F_{X_1} \to S^2$ を $h_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{L_2(x_3) - L_1(x_1)}{|L_2(x_3) - L_1(x_1)|}$ と定める．

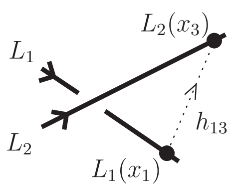


図 10　h_{13} のイメージ

つまり h_{ij} は X_k の chord に付随して定義される写像である．言葉で説明すれば h_{13} は F_{X_1} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_2(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づけている．以下同様に定義する:

$h_{42}: F_{X_1} \to S^2$; F_{X_1} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_1(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{12}: F_{X_2} \to S^2$; F_{X_2} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_2(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{43}: F_{X_2} \to S^2$; F_{X_2} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_2(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{13}: F_{X_3} \to S^2$; F_{X_3} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_3(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{42}: F_{X_3} \to S^2$; F_{X_3} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_2(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．

実際は F_{X_k} や h_{ij} が L の取り方に依存するので，$F_{X_k,L}$ とか h_{ij}^L のように書くべきだが，煩わしさを回避するために L を省略する．h_{13} が F_{X_1}, F_{X_3} 上の写像を表しているが，文脈から読み取れるので混乱の恐れは無いだろう．配置空間積分について述べる前に次の定理に言及しておく．詳しいことは [6] を参照されたい．

定理 3 ([6]). F_{X_k} について，各 h_{ij} を $\overline{F_{X_k}}$ 上に滑らかに拡張可能な角付き多様体 $\overline{F_{X_k}}$ が存在する．$\overline{F_{X_k}}$ を F_{X_k} の *Axelrod-Singer compactification* と呼ぶ．

それでは配置空間積分 I_{X_k} を定義しよう．

定義 8. $L \in \mathcal{L}$ に対し，$I_{X_k} = I_{X_k}(L)$ を次のように定義する：

$$I_{X_1} = \int_{\overline{F_{X_1}}} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon, \quad I_{X_2} = \int_{\overline{F_{X_2}}} h_{12}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{43}^*\eta_N^\varepsilon, \quad I_{X_3} = \int_{\overline{F_{X_3}}} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon$$

これらも $I_{X_k,L}$ などと書くべきところの $L \in \mathcal{L}$ を省略する．続いて以下の図で表したグラフを Y とする．

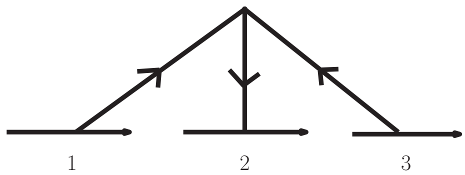


図 11　Y

定義 9.

$$F_Y = \{(x_1, x_2, x_3; x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid L_i(x_i) \neq x_4, i \neq 1, 2, 3\}.$$

つまり F_Y は Y の頂点に付随して定義される配置空間であり，集合の元は与えられた link の各成分上に 1 点ずつ，link の外側の空間に 1 点を配置したものとみなす．F_Y の Axelrod-Singer compactification については定理 3 と同様のことが成り立つ．

定義 10. $L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対して，$h_{14}, h_{42}, h_{34}: F_Y \to S^2$ を次のように定義する：

$$h_{14}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{x_4 - L_1(x_1)}{|x_4 - L_1(x_1)|}, \quad h_{42}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{L_2(x_2) - x_4}{|L_1(x_1) - x_4|}, \quad h_{34}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{x_4 - L_3(x_3)}{|x_4 - L_1(x_1)|}.$$

つまり h_{ij} は Y の辺に付随して定義される写像である．

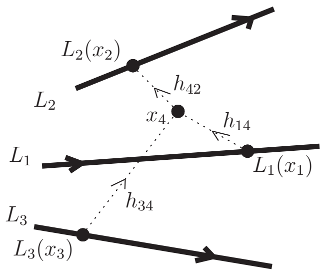


図 12　h_{14}, h_{42}, h_{34} のイメージ

それでは配置空間積分 I_Y を定義しよう．

定義 11. $\overline{F_Y}$ を F_Y の Axelrod-Singer's compactification とし，次で定義する：

$$I_Y = \int_{\overline{F_Y}} h_{14}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^* \eta_N^\varepsilon.$$

以上の定義の下で次の定理が成り立つ．

定理 4 ([4, 5]). $L \in \mathcal{L}$ に対し $\mu_{123}(L)$ を L の *Milnor triple linking number* とするとき，次の等式が成り立つ：

$$\mu_{123}(L) = I_{X_1} - I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y.$$

5　定理 A

定理 A を証明する上で用いる記号を定義する．$L \in \mathcal{L}$ に対して，$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2(G_{D_L})$ のうち次の図を成すようなものだけを集めた集合を $C^2_{X_1}(G_{D_L})$ とする．同様にして chord の位置関係を以下の図の様に替えることで $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_2}(G_{D_L})$ と $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_3}(G_{D_L})$ を定義する．

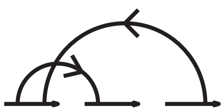


図 13　$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}$ の位置関係

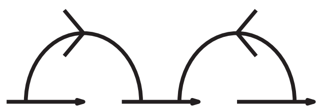


図 14　$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

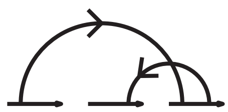


図 15　$\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

$C^2_{X_1}(G_{D_L})$ に含まれる組に対して chord の符号の積を取り，全て足し合わせた値を以下の様に表す：

$$\langle\ \ , G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2_{X_1}(G_{D_L})} \mathrm{sgn}(\alpha_{12})\mathrm{sgn}(\alpha_{13}),$$

記号 $\langle\ \ , G_{D_L}\rangle$，$\langle\ \ , G_{D_L}\rangle$ については，$\langle\ \ , G_{D_L}\rangle$ の $\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}, C^2_{X_1}$ の部分をそれぞれ $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_2}$ あるいは $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_3}$ に差し替えて同様に定義する．

Proof of Theorem A. D_L に対し，L_2 が上にあるような L_1 と L_2 の 2 重点を $p_1, ..., p_m$ とする．ただし p_i は $L_1(s_i)$ と $L_2(t_i)$ に対応するものとする．L_1 が上にあるような L_1 と L_3 の 2 重点を $q_1, ..., q_n$ とする．ただし q_j は $L_1(u_j)$ と $L_3(v_j)$ に対応するものとする．このとき，ε の取り方に依存した s_i の近傍 J_i^1，u_j の近傍 J_j^2，t_i の近傍 J_i^3，v_j の近傍 J_j^4 が存在して次の等式が成立する：

$$\mathrm{supp}(h_{13}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon) = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} J_i^1 \times J_j^2 \times J_i^3 \times J_j^4.$$

したがって，ε が十分に小さいとき次の等式が成立する：

$$I_{X_1} = \int_{\mathrm{supp} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \int_{J_i^1\times J_j^2\times J_i^3\times J_j^4} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon. \tag{4}$$

式（4）の第 3 辺を計算するために Hopf link $L=(L_1,L_2)$ を考え，$h: S^1\times S^1\to S^2$ を

$$h(x_1,x_2) = \frac{L_2(x_2)-L_1(x_1)}{|L_2(x_2)-L_1(x_1)|}$$

で定義する．η_N^ε は $H_{DR}^2(S^2)$ の生成元を与えることに注意すれば次の等式が成り立つ：

$$\int_{S^1\times S^1} h^*\eta_N^\varepsilon = \mathrm{link}(L_1,L_2). \tag{5}$$

一方 L の 2 つの交点のうち L_2 が上にあるほうを p とし，p が $L_1(s)$ と $L_2(t)$ に対応するものだとすれば s と t の（小さい）開近傍 U,V が存在して $\mathrm{supp}(h^*\eta_N^\varepsilon)\subset U\times V$ となる．したがって次の等式が成立する：

$$\int_{S^1\times S^1} h^*\eta_N^\varepsilon = \int_{U\times V} h^*\eta_N^\varepsilon. \tag{6}$$

式（6）の右辺が $\int_{J^1\times J^3} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon$ や $\int_{J^2\times J^4} h_{42}^*\eta_N^\varepsilon$ に他ならない．(5) と (6) により，求める値は $\mathrm{link}(L_1,L_2)$ にほかならず，それが $\mathrm{sgn}(p)$ に等しいことが容易に確かめられる．したがって次の等式が成り立つ：

$$I_{X_1} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \left(\int_{J^1\times J^3} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon\right)\left(\int_{J^2\times J^4} h_{42}^*\eta_N^\varepsilon\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \mathrm{sgn}(p_i)\mathrm{sgn}(p_j) = \sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\in C_{X_1}^2} \mathrm{sgn}(\alpha_{12})\mathrm{sgn}(\alpha_{13}). \tag{7}$$

式（7）の最後の辺は $\langle\ , G_{D_L}\rangle$ の定義式に他ならない．つまり $\varepsilon\to 0$ としたとき I_{X_1} は $\langle\ , G_{D_L}\rangle$ に収束する．同様にして以下の等式の成立が確認できる：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{X_2} = \langle\ , G_{D_L}\rangle, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_{X_3} = \langle\ , G_{D_L}\rangle.$$

F_Y の定義から，$(x_1,x_2,x_3;x_4)\in F_Y$ について，$(x_1,x_2,x_3;x_4)\in\mathrm{supp}(h_{14}^*\eta_N^\varepsilon\wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon\wedge h_{34}^*\eta_N^\varepsilon)$ となるような x_4 の範囲は次の図のようになる．

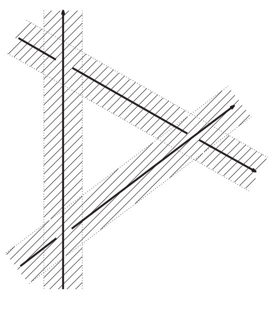


図 16　x_4 が存在しうる範囲

D_L が横断的な 2 重点しかもたないことから，ε が十分小さいとき F_Y 上で

$$\mathrm{supp}(h_{14}^*\eta_N^\varepsilon\wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon\wedge h_{34}^*\eta_N^\varepsilon)=\emptyset$$

が成り立つので，$\varepsilon \to 0$ とすれば I_Y は 0 に収束する. 以上のことから，次の等式が成り立つ：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_{X_1} - I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y) = \langle\ , G_{D_L}\rangle - \langle\ , G_{D_L}\rangle + \langle\ , G_{D_L}\rangle.$$

□

6　定理 B

図式が 3 重以上の交点を持つような $L' \in \mathcal{L}$ を考える．$C^2_{X_1}(G_{D_L})$ と同様に，$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2(G_{D_{L'}})$ のうち次の図を成すようなものだけを集めた集合を $C^2_{X_1'}(G_{D_{L'}})$ とする．同様にして chord の位置関係を以下の図の様に替えることで $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_2{}'}(G_{D_{L'}})$ と $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_3{}'}(G_{D_{L'}})$ を定義する．

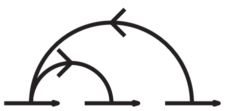


図 17　$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}$ の位置関係

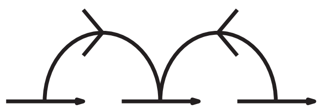


図 18　$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

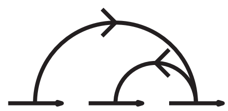


図 19　$\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

さらに定理 A のときと同様にして組を成す chord の符号の積を全て足し合わせて以下の様に表す：

$$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle = \sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\in C^2_{X_1'}(G_{D_{L'}})} \mathrm{sgn}(\alpha_{12})\mathrm{sgn}(\alpha_{13}),$$

記号 $\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$，$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$ については，$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$ の $\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}, C^2_{X_1'}$ の部分をそれぞれ $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_2'}$ あるいは $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_3'}$ に差し替えて同様に定義する．

Proof of Theorem B. $L' \in \mathcal{L}$ は図式が 3 重以上の交点を持つとし，3 重以上の交点の近傍を少し isotopy で動かして図式が横断的な 2 重点だけを持つようにした link を L とおく．L', L の取り方により自然な全単射 $F : C(G_{D_L}) \to C(G_{D_{L'}})$ が得られる．例えば以下の図で同じ番号を添えられた chord が対応する．

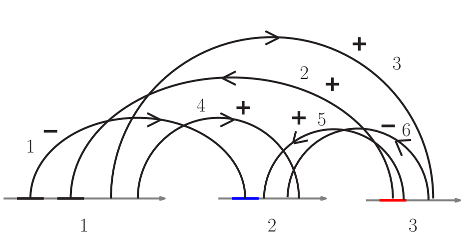


図 20　L' の図式 $D_{L'}$

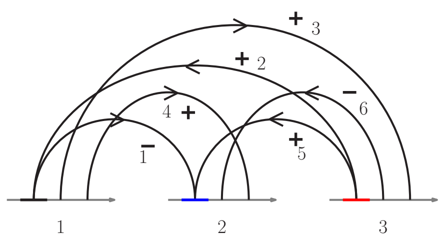


図 21　$D_{L'}$ の Gauss Diagram $G_{D_{L'}}$

また，写像 $f_{X_m} : C^2(G_{D_L}) \to \{0, 1, -1\}(m = 1, 2, 3)$ を次のように定める：

$$f_{X_m}(\{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\alpha_{ij})\mathrm{sgn}(\alpha_{kl}), & \{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\} \in C^2_{X_m}(G_{D_L}) \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

すると各記号の定義から，以下の等式が成り立つ：

$$\langle\ , G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_1}(\{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\}). \tag{8}$$

$$\langle \;, G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_2}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{9}$$

$$\langle \;, G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_3}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{10}$$

今後は $\beta_{ij} = F(\alpha_{ij}) \in C(G_{D_{L'}})$ とする．$C^2(G_{D_L})$ は以下の 3 つの交わらない集合に分けられる：

$$\begin{aligned}
C^2_s(G_{D_L}) &= \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \beta_{ij}\text{と}\beta_{kl}\text{が } X_1, X_2, X_3\text{のいずれかの形を成す }\},\\
C^2_c(G_{D_L}) &= \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \beta_{ij}\text{と}\beta_{kl}\text{が } X'_1, X'_2, X'_3\text{のいずれかの形を成す }\},\\
C^2_o(G_{D_L}) &= \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \text{他の場合 }\}.
\end{aligned}$$

$\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2_o(G_{D_L})$ であるとき $f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = 0$ となるので，(8)，(9)，(10) を書き換えると；

$$\sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_{L'}})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) + \sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_c(G_{D_{L'}})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{11}$$

となる．特に $C^2_s(G_{D_L})$ の定義から次の等式が成り立つ：

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_1}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \;, G_{D_{L'}}\rangle, \tag{12}$$

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_2}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \;, G_{D_{L'}}\rangle, \tag{13}$$

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_3}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \;, G_{D_{L'}}\rangle. \tag{14}$$

等式 (8) から (14) により，次の書き換えができる：

$$\begin{aligned}
&\langle \;, G_{D_{L'}}\rangle - \langle \;, G_{D_{L'}}\rangle + \langle \;, G_{D_{L'}}\rangle\\
&= \langle \;, G_{D_L}\rangle - \langle \;, G_{D_L}\rangle + \langle \;, G_{D_L}\rangle\\
&+ \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2_c(G_{D_L})} (f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\}) + f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\})).
\end{aligned} \tag{15}$$

等式 (15) の第 2 項を考察する．(順序を考えない) 組 $\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\}$ は $\{\beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\} = \{F(\alpha_{12}),F(\alpha_{23}),F(\alpha_{13})\}$ が以下の chord diagram $Y_m (m = 1,2,3,4,5,6)$ を成すか否かで分かれる．

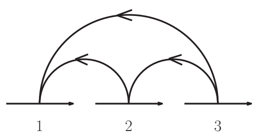


図 22　Y_1

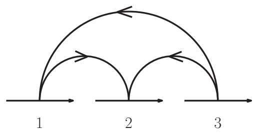


図 23　Y_2

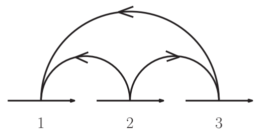


図 24　Y_3

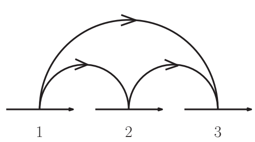


図 25　Y_4

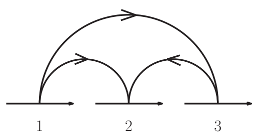


図 26　Y_5

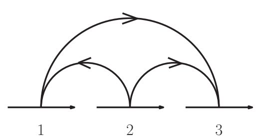


図 27　Y_6

3 つ組 $\{\{\alpha_{12},\alpha_{23}\},\{\alpha_{23},\alpha_{13}\},\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\}$ と 3 つ組 $\{\beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\}$ が 1 対 1 に対応するので，

$$C^3_Y(G_{D_L})=\{\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\}\mid \beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\text{が図 22 から図 27 のいずれかの形を成す}\}$$

とすれば次の等式が成立する：

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2_c(G_{D_L})}(f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\})+f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\})+f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\}))\\ =&\sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\}\in C^3_Y(G_{D_L})}(f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\})+f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\})+f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\})).\end{aligned}\tag{16}$$

以下の形が出現するような気もするが，link に対応した arrow diagram には現れないことに注意しておく．

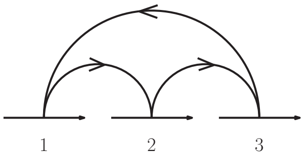


図 28　Y_7

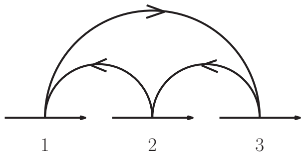


図 29　Y_8

$g(Y)=f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\})+f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\})+f_{X_3}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}), Y=Y_1,...,Y_6$ とする．さらに，a,b,c を有理数とし，以下の連立方程式を解く：

$g(Y)=a\langle$  $,G_{D_{L'}}\rangle+b\langle$  $,G_{D_{L'}}\rangle+c\langle$  $,G_{D_{L'}}\rangle.$ (17)

各 Y_m について検証するがここでは Y_2 のみ扱う．$G_{D_{L'}}$ において次の図の様な形を発見したとする．

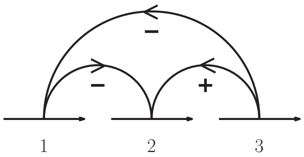


図 30　3 本の chord の位置関係

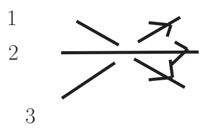


図 31　対応する 3 重点

このとき G_{D_L} において対応する chord がなす形は以下の 2 種類が考えられる．しかしいずれの場合でも，等式（17）の左辺は同じ値 $g(Y)=0$ が得られる．

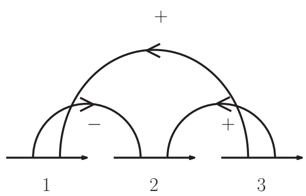


図 32　3 本の chord の位置関係

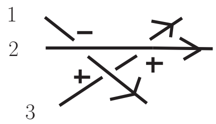


図 33　対応する 2 重点

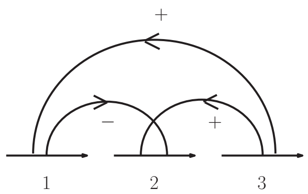


図 34　3 本の chord の位置関係

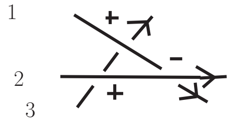


図 35　対応する 2 重点

式（17）の右辺を各校について計算してみるよう．まず以下の結果が得られる：

$$\langle\ , G_{D_L}\rangle = -1, \quad \langle\ , G_{D_L}\rangle = -1, \quad \langle\ , G_{D_L}\rangle = 0. \tag{18}$$

式（18）より，等式 $0 = -a - b$ を得る. 同様のことをすべての $m = 1, \ldots 6$ と全ての符号のつき方（各 m に対して 8 通りずつありえる）について繰り返せば，全てを満たす解として次の結果を得る：

$$a = -b = c = \frac{1}{2}. \tag{19}$$

したがって，次の等式が成立する：

$$\begin{aligned}
&\langle\ , G_{D_L}\rangle - \langle\ , G_{D_L}\rangle + \langle\ , G_{D_L}\rangle \\
&= \langle\ , G_{D_{L'}}\rangle - \langle\ , G_{D_{L'}}\rangle + \langle\ , G_{D_{L'}}\rangle \\
&+ \frac{1}{2}(\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle - \langle\ , G_{D_{L'}}\rangle + \langle\ , G_{D_{L'}}\rangle).
\end{aligned}$$

この等式と Thm$A$，ならびに $\mu_{123}(L) = \mu_{123}(L')$ であることから次の結果が得られる：

$$\begin{aligned}
\mu_{123}(D_L) =& \langle\ , G_{D_L}\rangle - \langle\ , G_{D_L}\rangle + \langle\ , G_{D_L}\rangle \\
&+ \frac{1}{2}(\langle\ , G_{D_L}\rangle - \langle\ , G_{D_L}\rangle + \langle\ , G_{D_L}\rangle).
\end{aligned}$$

□

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」にて講演の機会を与えてくださいました世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生，そして運営の皆々様へ感謝申し上げます．

参考文献

[1] ROBYN BROOKS AND RAFAL KOMENDARCZYK, *From integrals to combinatorial formulas of finite type invariants - a case study* (2024)

[2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz (1957), 280-306, Princeton Univercity Press

[3] ROBIN KOYTCHEFF, BRIAN A. MUNSON, AND ISMAR VOLIĆ, *Configuration space integrals and the cohomology of the space of homotopy string links* (2013)

[4] ROBIN KOYTCHEFF, *The Milnor triple linking number of string links by cut-and-paste topology*, Algebraic & Geometric Topology 14 (2014) 1205-1247

[5] Robin Koytchef, ISMAR VOLIĆ, *Milnor invariants of string links, trivalent trees, and configuration space integrals*, Topology and its Applications 251 (2019) 47-69

[6] Scott Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory. II*

Vassiliev 不変量の基本定理の別証明

岩元　悠一郎（信州大学）*

概要

結び目の交点の上下の情報を落として特異点にしたものを特異結び目という．任意の結び目不変量は特異結び目の不変量に拡張できる．m 個の特異点を持つ特異結び目に対してを返すような不変量を mm 次の Vassiliev 不変量という．不変量の基本定理は m 次の Vassiliev 不変量の空間が order m の chord 図の空間に同型であるという主張である．本講演では D. Bar-Natan と A.Stoimenow による予想をもとにこれの 3 次における別証明を与える．

1　Vassiliev 不変量

1.1　特異結び目の空間と Vassiliev 不変量

埋め込み $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して，像 $f(S^1)$ を結び目，f 自体を向き付けられた結び目と呼ぶ．また，埋め込み $f\colon (S^1)^{\sqcup k} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (k \geq 2)$ を絡み目，f 自体を向き付けられた絡み目と呼んだ．図 1, 2, 3 は結び目，絡み目の例である．2 つの結び目が isotopy で移りあうとき，2 つの結び目を同一視する．結び目を図示するときは，下側を通る弧を切って表すことで交点における上下の情報を与える．また，交点は横断的な二重点のみ許すこととし，そうでないときは適切な形に isotopy 変形をする．

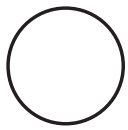


図 1　Trivial knot

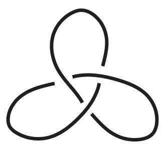


図 2　Trefoil

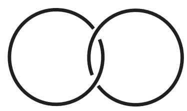


図 3　Hopf link

定義 1.1. 横断的な二重点のみを許した S^1 のはめ込み $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ を特異結び目と呼ぶ．また，横断的な二重点を特異点と呼び，m 個の特異点を持つ特異結び目を m 特異結び目と呼ぶ．

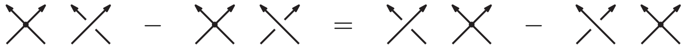
定義 1.2. K, J を m 特異結び目とする．$\mathbb{R}^3$ の向きを保つ同相写像 φ と S^1 の向きを保つ同相写像 ψ が存在して，次が成り立つとき，m 特異結び目 K, J は互いに isotopic であるという．

$$K = \varphi \circ J \circ \psi \tag{1.1}$$

Isotopic であるという関係は同値関係である．この同値関係による同値類を特異結び目の isotopy class と呼ぶ．また，m 特異結び目 isotopy class の集合を $\mathcal{K}^0_m$ と書く．

* mail:IwamotoY.math@gmail.com

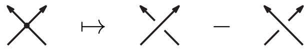
定義 1.3. 次で $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ 上の関係を定める．


(1.2)

ただし，(1.2) の図式はそれぞれ，その外側では同じ結び目であり，交点の情報だけが異なる結び目であることを表す．この関係を differential relation と呼び，(DR) で表す．

m 特異結び目の isotopy class の張るベクトル空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ を (DR) で割った空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/(DR)$ も単に $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ で表す．

定義 1.4. 線型写像 $\delta\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \to \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ を次で定める．


(1.3)

この δ が well-defined であることは，differential relation によって担保される．(1.3) における ,  はそれぞれ正交点，負交点と呼び，互いに 1 回の交差交換で移り合う．

任意の向き付けられた結び目の不変量 f は，次の式で 1 特異結び目の不変量へ拡張できる．

$\delta^*(f)\Big($$\Big) \coloneqq f \circ \delta\Big($$\Big) = f\Big($$\Big) - f\Big($$\Big)$ (1.4)

また，δ^* を結び目不変量の微分と呼ぶ．$K \in \mathcal{K}_m^0$ の m 個ある特異点 $s_1, \ldots, s_m$ を正負に分解して得られる結び目を $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}$ と書くことにする．ただし，s_i を正（負）の交点に解消するとき $\epsilon_i = +1(-1)$. 次のように (1.4) を m 特異結び目の不変量に拡張する．

$$(\delta^*)^m(f)(K) \coloneqq \sum \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m f(K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}) \tag{1.5}$$

定義 1.5. 特異結び目の不変量 f が次を満たすとき，f を m 次以下の Vassiliev 不変量という．

$$(\delta^*)^{m+1}(f) = 0 \tag{1.6}$$

定義 1.6. S^1 を向き付けられた円周とし，$\mathcal{P} = \{(p_1, q_1), \ldots, (p_m, q_m)\}$ を S^1 上の互いに異なる $2m$ 個の点による m 個の対の集合とする．

このとき，組 $(S^1, \mathcal{P})$ を chord 図と呼び，向き付けられた円周とその上の点 $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ に対して，p_i と q_i $(i = 1, \ldots, m)$ を結ぶ chord を書いて図示する．ただし，対は順序を考慮しないものとする．2 つの chord 図 D, D' が $2m$ 個の点の順序を変えないような S^1 の同相写像で移り合うとき，D, D' は同じ chord 図とみなす．また，m 本の chord を持つ chord 図全体の集合を $\mathcal{D}_m^0$ と書く．

定義 1.7. 写像 $F\colon \mathcal{K}_m^0 \to \mathcal{D}_m^0$ を次のように定義する．m 特異結び目 $K \in \mathcal{K}_m^0$ 上の特異点を $s_1, \ldots, s_m$ とする．埋め込み $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ によって $f(p_1) = f(q_1) = s_i, (p_i \neq q_i, i = 1, \ldots, m)$ となるとき，$F(K)$ を $\mathcal{P} = \{(p_i, q_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ が表す chord 図と定義する．

F の線型拡張した写像 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 \to \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^o$ も同じ記号 F で表す．F は図 4 のように，自然に chord 図をつくる写像と考えてよい．また，chord (p_i, q_i) について，$S^1 \backslash \{p_i, q_i\}$ に $\mathcal{P}$ の元が属さない連結成分が存在するとき，chord (p_i, q_i) を孤立 chord(isolated chord) と呼ぶ．図 4 中の chord (p_4, q_4) は孤立 chord の例である．

命題 1.8. 次の列は完全列である．

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 \xrightarrow{F} \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0 \tag{1.7}$$

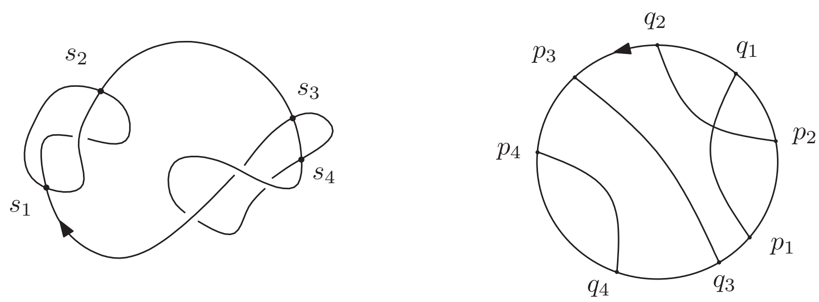


図 4　Chord 図の作り方の例

1.2　特異結び目あるいは Chord 図における 1-term relation と 4-term relation

定義 1.9. はめ込み $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ に対し，$\#f^{-1}(s) = 3$ となる点 s において，f（の像）が横断的に交わるとき，この点 s を triple point と呼ぶ．また，f（の像）の上で特に指定された 1 点のことを marked point と呼ぶ．Triple point, marked point は図 5, 7 のように表す．1 つの triple point と $m-2$ 個の特異点を持

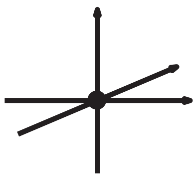


図 5　Triple point

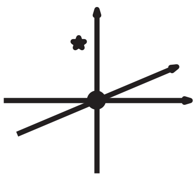
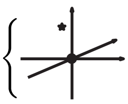


図 6　弧に指定のある triple point

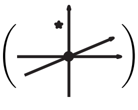
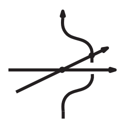
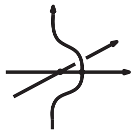
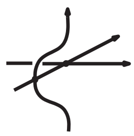
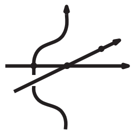
図 7　Marked point

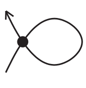
つ特異結び目であって，図 6 のように triple point に集まる 3 本の弧のうち 1 つが指定されたものと，1 つの marked point と $m-1$ 個の特異点を持つ特異結び目の isotopy class の集合を $\mathcal{K}^1_m$ で表す．ただし，triple point に集まる 3 本の弧のうち別の弧が指定した特異結び目は $\mathcal{K}^1_m$ の元としては違うものと考える．

$\mathcal{K}^1_m\colon = \Big\{$  with $m-2$ singular points,  with $m-1$ singular points $\Big\}$　(1.8)

また，これらの特異結び目の isotopy class によって張られるベクトル空間を $\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m$ で表すが，$\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ と同じように，$\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m$ を (DR) で割った空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m/(DR)$ も単に $\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m$ で表す.

定義 1.10. 線型写像 $\partial_1^{\mathcal{K}_m}\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ を次で定める．

$\partial_1^{\mathcal{K}_m}\Big($  $\Big) :=$  $+$  $-$  $-$  ,　(1.9)

$\partial_1^{\mathcal{K}_m}\Big($  $\Big) :=$ 　(1.10)

定義 1.11. 次で，topological 4-term relation 及び topological 1-term relation を定義する．

形式和 $+$ $-$ $-$ を $4T$-knots, を $1T$-knot で表すことにする．

- $(\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m)^*$ の元 f に対し，
$$f(4T\text{-knots}) = 0 \tag{1.11}$$
が常に成立するとき，f は topological 4-term relation (T4T) を満たすという．
- $(\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m)^*$ の元 f に対し，
$$f(1T\text{-knots}) = 0 \tag{1.12}$$
が常に成立するとき，f は topological 1-term relation (T1T) を満たすという．

ただし，4-term relation における 4 項は図 8 のように triple point の指定された弧を各方向 N, S, E, W（北，南，東，西）に少しずらして得られる 4 つの図を表す．

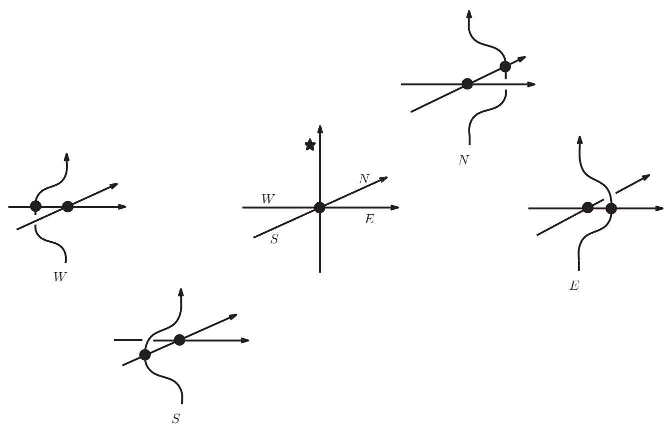


図 8　4-term relation における 3 重点と 4 つの図式 N, E, S, W

$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m)^*$ が $(T1T), (T4T)$ を満たすことは，$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m})^*$ であることと同じである．

定義 1.12. Triple point や marked point を表す chord を次の図 9, 10 のように図示する．

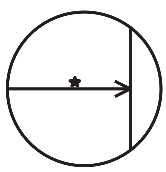


図 9　Triple point を表す chord

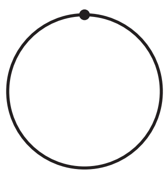
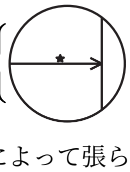
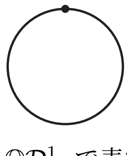


図 10　Marked point

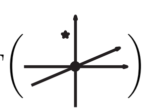
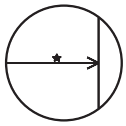
1 つの triple point を表す chord と $m-2$ 本の chord を持つ chord 図や，1 つの marked point と $m-1$ 本の chord を持つ chord 図全体の集合を $\mathcal{D}^1_m$ で表す（ただし $3 \le m$ である）．

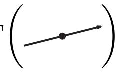
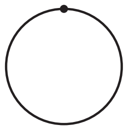
$\mathcal{D}^1_m := \Big\{$  with $m-2$ chords,  with $m-1$ chords $\Big\}$　(1.13)

また，これらの chord 図によって張られるベクトル空間を $\mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m$ で表す．

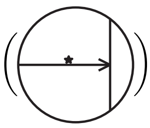
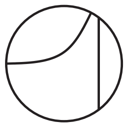
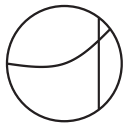
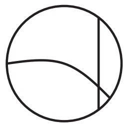
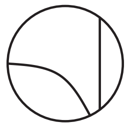
定義 1.13. 線型写像 $\delta\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m$ を $\delta\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ と同様に定義する．ただし，分解する特異点は triple point, marked point 以外を選ぶことにする．

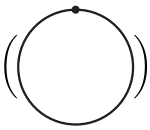
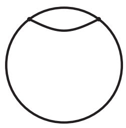
定義 1.14. 線型写像 $F\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m \to \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m$ を $F\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m \to \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m$ と同様に定義する．ただし，triple point, marked point については次の対応で定める．

F  $:=$  , (1.14)

F  $:=$  (1.15)

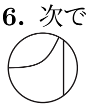
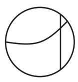
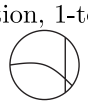
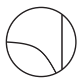
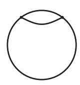
定義 1.15. 線型写像 $\partial^{\mathcal{D}_m}_1\colon \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m \to \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m$ を次で定める．

$\partial^{\mathcal{D}_m}_1$  $:=$  $-$  $+$  $-$  (1.16)

$\partial^{\mathcal{D}_m}_1$  $:=$  (1.17)

ただし，注目している triple point に対応する chord と marked point に対応する chord のみが描かれているが，通常の chord は描けれていないだけで両辺とも同じ chord が配置されているとする．

定義 1.16. 次で 4-term relation, 1-term relation を定義する．

形式和  $-$  $+$  $-$  を 4T-diagrams,  を 1T-diagram で表すことにする．

- $(\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m)^*$ の元 f に対し，
$$f(4T\text{-diagrams}) = 0 \tag{1.18}$$
が常に成立するとき，f は 4-term relation (4T) を満たすという．
- $(\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m)^*$ の元 f に対し，
$$f(1T\text{-diagram}) = 0 \tag{1.19}$$
が常に成立するとき，f は 1-term relation (1T) を満たすという．ただし，1T-diagram の chord 図に描かれている chord は孤立 chord を表す．

$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m)^*$ が $(1T), (4T)$ を満たすことは，$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m})^*$ であることと同じである．

命題 1.17. [cf. [3, 定理 7.2]] 線形写像 $\delta\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ は $\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}}$ でも定義され，さらに，$\delta\colon \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ は単射である．

命題 1.18. 次の横 2 列は完全列であり，図式は可換である．

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

2 Vassiliev 不変量の基本定理

2.1 Vassiliev 不変量の基本定理

定義 2.1. $\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m}$ の双対空間 $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m})^*$ の元のことを weight system と呼ぶ.

Vassiliev 不変量の基本定理とは次の定理のことである.

定理 2.2 (cf. [2, Theorem4.5]). order m の weight system の空間 $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m})^*$ と m 次の Vassiliev 不変量の空間 $(\mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1})$ は同型である．つまり，

$$(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m})^* \cong \mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1}\ . \tag{2.1}$$

本質的には chord 図の空間の不変量である weight system から Vassiliev 不変量を構成することができるという主張である.

この定理はすでに証明されている．M. Kontsevich によって導入された Kontsevich 積分は，これの発見によって Vassiliev 不変量の基本定理の全ての次数 m についての証明となる.

2.2 D. Bar-Natan と A. Stoimenow による予想

より自然でトポロジカルな証明方法があるのではないかという考えのもと，D.Bar-Natan と A.Stoimenow は [1] で次のような予想を残している.

予想 2.3 (cf. [1, Conjecture 1.13]). 任意の不変量 $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m})^*$ に対して, $g \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m-1}^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m-1}})^*$ が存在し，次ををみたす.

$$\delta^*(f) = g \tag{2.2}$$

3 Vassiliev 不変量の基本定理の証明

3.1 予想 2.3 の言い換え

命題 1.18 で可換であることが示された可換図式を自然に拡張し，これに snake lemma を適用することで，次の列が完全列となるような写像 d が存在することがわかる.

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \xrightarrow{\delta} \ker \partial^{\mathcal{K}_m} \xrightarrow{F} \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \overset{d}{\dashrightarrow} \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m} \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m} \tag{3.1}$$

以下は拡張後の可換図式と，写像 d をまとめた図式である.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \ker \partial^{\mathcal{K}_m} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \arrow[d] \arrow[ddll, dashed, rounded corners, to path={-| ([xshift=2em]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1em]\tikztostart.south |- \tikztotarget.north) -| ([xshift=-4em]\tikztotarget.west) |- (\tikztotarget)}] & \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\partial"'] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{D}_m} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

予想 2.3 は完全列 3.1 によって，代数的に次のように言い換えられる．

$$\delta^* : (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m})^* \to (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m+1}})^* \text{が全射である．} \tag{3.2}$$

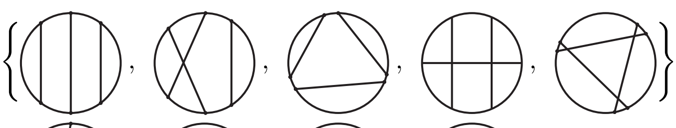
$$\Longleftrightarrow \delta : \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m} \text{が単射である．} \tag{3.3}$$

$$\Longleftrightarrow F : \ker \partial^{\mathcal{K}_m} \to \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \text{が全射である．} \tag{3.4}$$

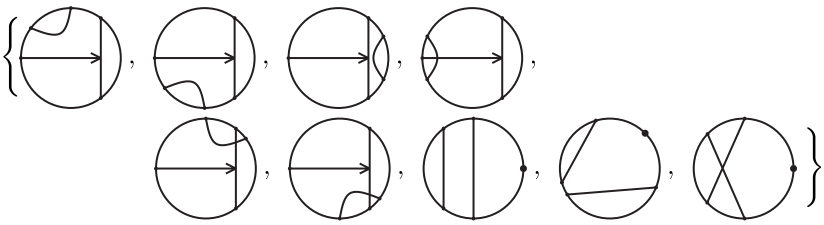
3.2　$m = 3$ における予想 2.3 の証明

この節では $m = 3$ において $F|_{\ker \partial^{\mathcal{K}_m}}$ が全射であることを示し，これをもって予想 2.3 の証明とする．そのための準備として，$\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_3, \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_3$ の基底達を描き出す．すると，次のように $\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_3$ は 5 つ，$\mathbb{Q}\mathcal{D}^1_3$ は 9 つの基底によって張られることがわかる．$\mathbb{Q}\mathcal{D}^1_3$ の基底はそれぞれ $D_A, \cdots, D_I$ で表すことにする．

$\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_3 = \mathbb{Q}$



$\mathbb{Q}\mathcal{D}^1_3 = \mathbb{Q}$



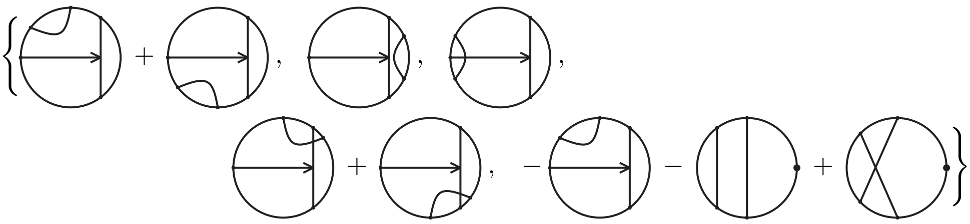
$$= \mathbb{Q}\left\{ D_A,\ D_B,\ D_C,\ D_D,\ D_E,\ D_F,\ D_G,\ D_H,\ D_I \right\}$$

ここで，写像 $\partial^{\mathcal{D}_3} : \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_3 \to \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_3$ を行列表示すると以下を得る．

$$\partial^{\mathcal{D}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

このことから $\ker \partial^{\mathcal{D}_3}$ は，次の 5 つの基底によって張られることがわかる．

$\ker \partial^{\mathcal{D}_3} = \mathbb{Q}$



$$= \mathbb{Q}\left\{ D_A + D_B,\ D_C,\ D_D,\ D_E + D_F,\ -D_A - D_G + D_H \right\}$$

次に，$\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1$ の各基底に対して，これらを与える $\mathcal{K}_3^1$ の元をひとつずつ取る．それらによって表される $\ker \partial^{\mathcal{D}_3}$ の各基底に対応する形式和が $\ker \partial^{\mathcal{K}_3}$ の元であることを確認する．

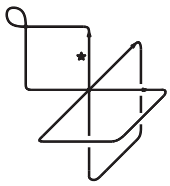


図 11　K_A

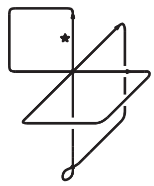


図 12　K_B

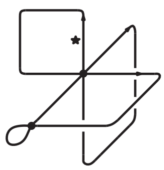


図 13　K_C

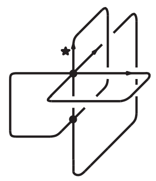


図 14　K_D

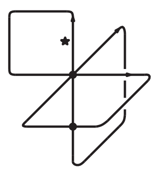


図 15　K_E

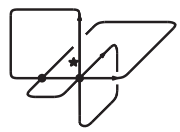


図 16　K_F

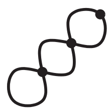


図 17　K_G

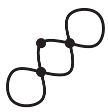


図 18　K_H

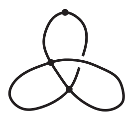
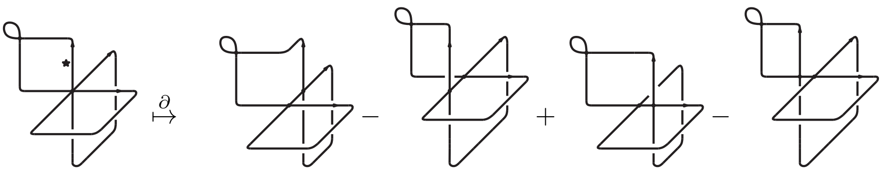


図 19　K_I

D_A を与える $\mathcal{K}_3^1$ の元として図 11 の K_A をとる．K_A は $\partial^{\mathcal{D}_3}$ によって次のような結び目に移る．これらは $\mathcal{K}_3^0$ の元である．ずらした方向 N, S, E, W （北，南，東、西）に応じて，$K_A^N, K_A^S, K_A^E, K_A^W$ と呼ぶ．

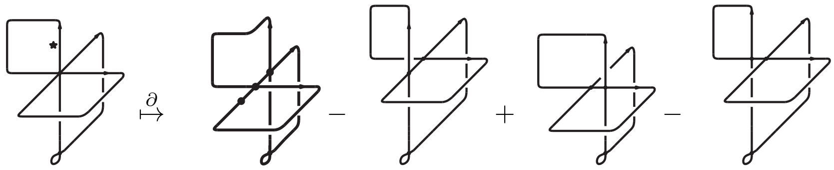


(3.6)

$$= \quad K_A^N - \quad K_A^S + \quad K_A^E - \quad K_A^W \tag{3.7}$$

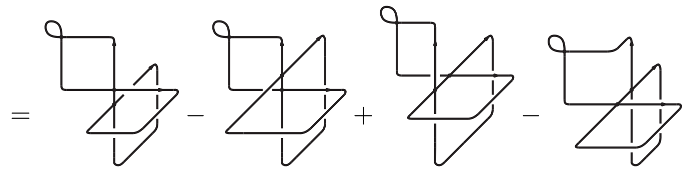
D_B を与える $\mathcal{K}_3^1$ の元として図 12 の K_B をとる．K_A と同様に $\partial^{\mathcal{K}_3}$ によって移った結び目達を $K_B^N, K_B^S, K_B^E, K_B^W$ と呼ぶことにするが，K_A に向きを合わせることで，N, S, E, W に加え，u, d （上，

下）を用いて次のように表せる．



(3.8)

$$= \quad K_B^N - \quad K_B^S + \quad K_B^E - \quad K_B^W \tag{3.9}$$



(3.10)

$$= \quad K_A^d - \quad K_A^u + \quad K_A^S - \quad K_A^N \tag{3.11}$$

$D_C, \cdots, D_F$ についても図 13, 14, 15, 16 のように，それぞれを与える結び目 $K_C, \cdots, K_F$ がとれて，$\partial^{\mathcal{K}_3}$ による移り変わりも同じように考えられるので以下にまとめる．ただし，K_E, K_F はそれぞれ K_D に向きを揃えて表す．

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_A) = K_A^N - K_A^S + K_A^E - K_A^W \tag{3.12}$$
$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_B) = K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N \tag{3.13}$$
$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_C) = K_A^W - K_A^E + K_A^u - K_A^d \tag{3.14}$$
$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_D) = K_D^N - K_D^S + K_D^E - K_D^W \tag{3.15}$$
$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_E) = K_D^d - K_D^u + K_D^S - K_D^N \tag{3.16}$$
$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_F) = K_D^W - K_D^u + K_D^E - K_D^d \tag{3.17}$$

さらに，これらの結び目のうち isotopy で移りあう組があるのでこれも以下にまとめる．

$$K_A^E = K_A^u,\ K_A^W = K_A^d,\ K_D^N = K_D^W,\ K_D^E = K_D^S. \tag{3.18}$$

基底 $D_A + D_B$ について

この基底を与える $\mathcal{K}_3^1$ の元として $K_A + K_B$ をとる．このとき，K_A^E と K_A^u , K_A^W と K_A^d は互いに isotopy で移りあうため，$K_A^E = K_A^u, K_A^W = K_A^d$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\partial^{\mathcal{K}_3}(K_A + K_B) &= \big(K_A^N - K_A^S + K_A^E - K_A^W\big) + \big(K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N\big) && (3.19)\\
&= \big(K_A^N - K_A^N\big) + \big(-K_A^S + K_A^S\big) + \big(K_A^E - K_A^u\big) + \big(-K_A^W + K_A^d\big) && (3.20)\\
&= 0. && (3.21)
\end{aligned}$$

故に，$K_A + K_B \in \ker \partial^{\mathcal{K}_3}$ である．その他の基底も同様に計算して各基底を与える $\mathcal{K}_3^1$ の元が取れる．

4 今後の展望

3.2 節では, 具体的な chord 図の書き出しと基底を与える結び目の計算によって, 写像 $F\colon \ker \partial^{\mathcal{K}_3} \to \ker \partial^{\mathcal{D}_3}$ の全射性を示した．

今後は，同じような議論のもと，一般の m（つまり，全ての次数）について証明を拡張することを目標する．その際予想される障壁として計算の煩雑さが挙げられる．3 次についての計算は，基底の数が少ないことが,

書き出しや計算の煩雑さを抑え，これに助けられたように感じる．実際，手計算でも，丁寧に，時間をかければやり遂げられる程度の計算であった．

しかし，4 次以上に拡張する場合，$\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0, \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1$ の基底の個数は組み合わせの数だけ増えていく．故に具体的に書き出す段階で計算機に頼らざるを得ないが，それには限界がある．

ここで，Kontsevich 積分について事実を確認する．Kontsevich 積分は，これを見つけてしまえば，それだけで Vassiliev 不変量の基本定理の証明になる．つまり，具体的な chord 図の書き出しや計算をする必要はなく，次数によって，構成の難しさには違いが無い．このことから，うまい定式化のもとでは，実は「Chord 図の書き出し」も「特異結び目の微分の計算」も必要ないという可能性がある．例えば，triple point を例に取って考えてみると，∂ による分解には，ずらす方向によって，北，南，東，西，上，下の 6 パターンが考えられ，triple point に集まる 3 本の弧のうち，ずらす弧の指定には 3 パターンが考えられる．各パターンについて triple point の近傍のみの計算で済ませてしまい，その外側が交差交換の差に収まること等が示せたら，「Chord 図の書き出し」や「特異結び目の微分の計算」のパートを省くことができるかもしれない．今後は，こういった，ブラッシュアップを考えていきたい．

5 謝辞

本研究集会への参加にあたり，講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます．また，旅費の補助も頂きましたこと，この場を借りて御礼申し上げます．参加者の皆様とは，懇親会やディスカッションで貴重なアドバイスをいくつも頂きました．最後に，信州大学の境圭一先生には日頃から熱心にご指導いただき，多くのことを教えていただきました．厚く感謝申し上げます．

参考文献

[1] D. Bar-Natan, A. Stoimenow, *The Fundamental Theorem of Vassiliev Invariants*, arXiv: 9702009.

[2] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (2012).

[3] 谷山公規，結び目理論 - 一般の位置から観るバシリエフ不変量 -, 数学のかんどころ 41 共立出版 (2023).

A presentation of the pure cactus group of degree four

浜　天星（日本大学大学院 総合基礎科学研究科）

1 Introduction

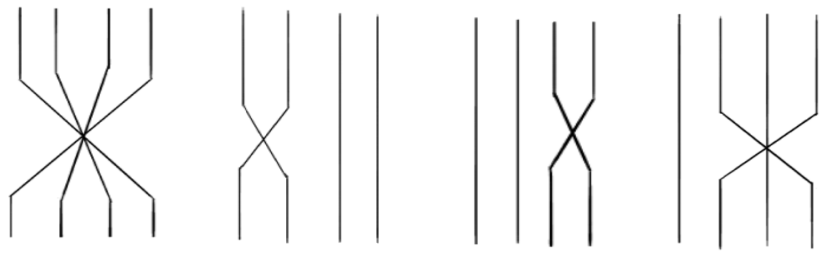
ブレイド群がブレイド圏の多重テンソル積に自然に作用する事が知られている。ブレイド圏に対応するコバウンダリー圏にブレイド群のアナロジーとして作用する群として、カクタス群と呼ばれる群が Henriques と Kamnitzer により [4] で導入された。

まず、n 次カクタス群を定義する。n を 2 以上の整数とする。また、$p < q$ を 2 以上 n 以下の整数とする。このとき、n **次カクタス群** J_n は生成元 s_{pq} と以下の関係式で定義される。

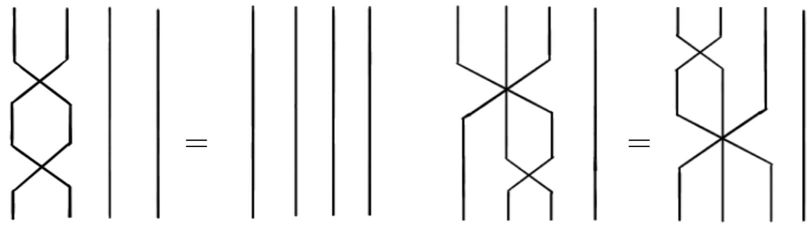
- $s_{p,q}^2 = 1$ $(1 \leq p < q \leq n)$
- $s_{p,q}s_{m,r} = s_{m,r}s_{p,q}$ $(1 \leq p < q \leq n$、 $1 \leq m < r \leq n$ として $[p,q] \cap [m,r] = \varnothing)$
- $s_{p,q}s_{m,r} = s_{p+q-r,p+q-m}s_{p,q}$ $(1 \leq p < q \leq n$、 $1 \leq m < r \leq n$ として $[m,r] \subset [p,q])$

ここで、$[p,q]$ は離散的な閉区間を表す。

また、ブレイド群と同様に、カクタス群のジェネレーターは以下のように図式に表せる。図は 4 次のカクタス群の場合である。積は、右から掛けた場合は掛けた元に対応する図式を元の図式の下に繋げる事で表される。



s_{14} s_{12} s_{34} s_{24}



s_{12}^2 e $s_{13}s_{23}$ $s_{12}s_{13}$

ブレイド群と同様にカクタス群 J_n から n 次対称群 S_n に対して自然な全射が定義できる。自然な全射のカーネルとして n 次純カクタス群 PJ_n を定義する。

注意 1.1. ブレイド群と異なる点は、例えば s_{14} は $(14)(23)$ に対応する事である。すなわち、インターバル内のストランド全てを入れ替える元に対応させるような全射が与えられる。

PJ_n は実数上の種数 0 の $n+1$ 点付き代数曲線のモジュライ空間の Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$ の基本群と同型である事が知られている ([4, Theorem 7])。

特に PJ_4 と $\pi_1\left(\overline{M_{0,5}}(\mathbb{R})\right)$ が同型であり、さらに、$\overline{M_{0,5}}(\mathbb{R})$ と実射影平面 5 つの連結和が同相である（[2] を参照）事から、PJ_4 は以下の表示を持つことが分かる。尚、以下の表示と PJ_4 の間に具体的な同型対応は、筆者の知る限り与えられていなかった。

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2 \rangle$$

ただし、[1] で、Reidemeister-Schreier method を用いることにより、PJ_4 が以下の表示を持つことは示されていた。

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon | \alpha\gamma\epsilon\beta\epsilon\alpha^{-1}\delta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} \rangle$$

本研究は日本大学文理学部の市原一裕氏との共同研究である。

2 Main Results

本稿の主結果は以下である。

定理 2.1. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 g_{10}^{-1} g_2^{-1}, g_9 g_5^{-1} g_4, g_5 g_1 g_6^{-1}, \\ g_8 g_{10} g_7^{-1}, g_8 g_3^{-1} g_4, \\ g_2 g_9 g_7^{-1} g_6 g_3^{-1} \end{array} \right\rangle$$

さらに、この表示は次の表示に変換できる。

$$\langle g_2, g_4, g_8, g_9, g_{10} \mid g_2 g_9 g_{10}^{-1} g_8^{-1} g_4 g_9 g_2 g_{10} g_8^{-1} g_4^{-1} \rangle$$

上の表示から具体的な同型対応を与えることで、次の系を得た。

系 2.2. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5^2 \rangle$$

また、PJ_4 が [1] で得られていた次の表示を持つことも再確認した。

系 2.3. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon | \alpha\gamma\epsilon\beta\epsilon\alpha^{-1}\delta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} \rangle$$

本稿では、定理 2.1 と、系 2.2 の証明の概要を紹介する。

3 Sketch of proof

証明の概要に先立ち、主だって使用する定理と、証明に使う J_4 のある部分群を紹介する。

定理 3.1 (Poincaré の多角形定理 [7] (c.f. [6])). D を双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上の、角度に関するある条件を満たす辺の張り合わせ付きの多角形とする。また、G を辺の張り合わせが生成する群とする。このとき、以下が成り立つ。

- G は不連続群である。
- D の内部は G が引き起こす $\mathbb{H}^2$ 上の作用の基本領域である。また、サイクルリレーションと呼ばれる G の生成元の列たちは G の全ての関係式を与える。

次に、J_4 の部分群 $J_4^{\{2,3\}}$ を以下で定義する。

$$J_4^{\{2,3\}} = \left\langle s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{13}, s_{24} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_{ij}^2 = e, s_{13}s_{12} = s_{23}s_{13}, \\ s_{24}s_{23} = s_{34}s_{24}, \\ s_{12}s_{34} = s_{34}s_{12} \end{array} \right\rangle$$

さらに、$J_4^{\{2,3\}}$ の Cayley 複体を $C_4^{\{2,3\}}$ と表記する。（Cayley 複体については [5] を参照。）$C_4^{\{2,3\}}$ は図 1 のような空間である。

注意 3.2. $C_4^{2,3}$ は $\mathbb{H}^2$ と定数倍を許して等長である。この事実から、*Poincaré* の多角形定理を $C_4^{\{2,3\}}$ 上で適用する事ができる。

また、次の定理は、明示的ではないが [3] で示されている。

命題 3.3 ([3, Proof of Corollary 7.3])**.** 下記の写像 Γ_0 から誘導される写像 Γ は PJ_4 の ${C_4}^{\{2,3\}}$ 上への作用を引き起こす。

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : PJ_4 \times \left({C_4}^{\{2,3\}}\right)^{(0)} &\longrightarrow \left({C_4}^{\{2,3\}}\right)^{(0)} \\ (g,h) &\longmapsto \begin{cases} gh & gh \in J_4^{\{2,3\}} \\ ghs_{14} & gh \notin J_4^{\{2,3\}}, \end{cases} \end{aligned}$$

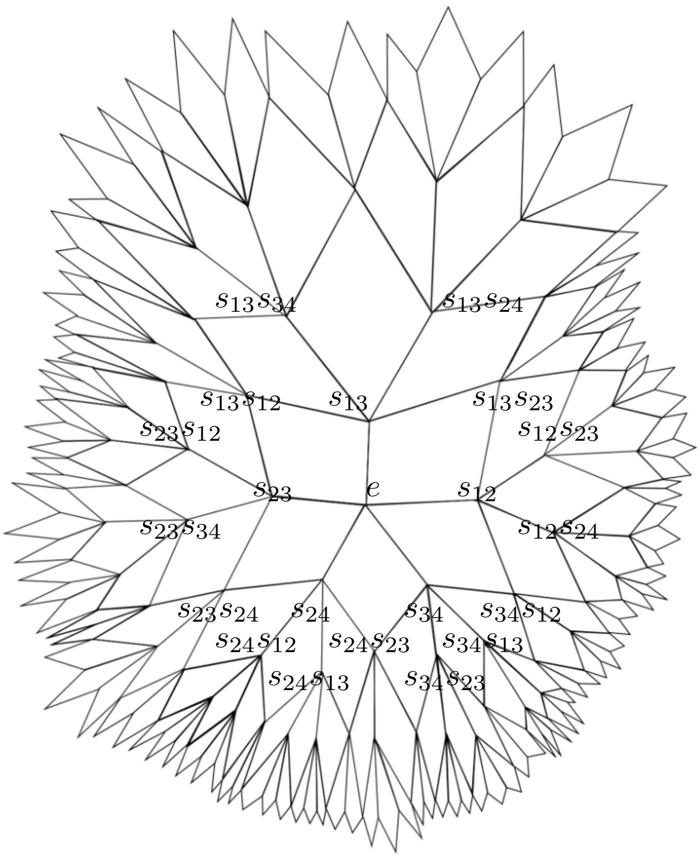
また、この作用は自由かつココンパクトである。

以上の準備のもと、定理 2.1 の証明の概略を与える。

Sketch of proof 定理 *2.1.* まず、Poincaré の多角形定理を適用するための多角形 D を取り出す。命題 3.3 で与えた作用に対して、$J_4^{\{2,3\}}$ の単位元 e の軌道のうち、e からの距離が最短である頂点をすべて書き出す。書き出した頂点と原点の等距離線を引く。その等距離線によって定まる、 e を含む半空間の共通部分が D となる。図 2 を参照。

またこの時、図 3 のように、辺の張り合わせを引き起こす PJ_4 の生成元も与えられる。図 3 は e を $s_{13}s_{24}s_{13}s_{24}$ へ移す生成元 g_2 の引き起こす辺の張り合わせである。同様に他の生成元と辺の張り合わせも与えられる。合計 20 本の辺に対し、10 個の生成元 g_1, $\ldots$, g_{10} を得る。

サイクルリレーションは、頂点を一つ選び、その頂点を含む辺の張り合わせを追っていくことで得られる。図 4 では $s_{13}s_{34}$ の場合を考えている。これにより、6 個のサイクル



$$
\begin{aligned}
&s_{ij}^2 = e \\
&s_{13}s_{12} = s_{23}s_{13} \\
&s_{24}s_{23} = s_{34}s_{24} \\
&s_{12}s_{34} = s_{34}s_{12}
\end{aligned}
$$

図 1　$C_4^{\{2,3\}}$

リレーション $g_3g_8^{-1}g_4^{-1}$、$g_5g_9^{-1}g_4^{-1}$、$g_5g_1g_6^{-1}$、$g_8g_{10}g_7^{-1}$、$g_{10}g_1^{-1}g_2$、$g_3g_6^{-1}g_7g_9^{-1}g_2^{-1}$ を得る。

よって、PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$
\left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1g_{10}^{-1}g_2^{-1}, g_9g_5^{-1}g_4, g_5g_1g_6^{-1}, \\ g_8g_{10}g_7^{-1}, g_8g_3^{-1}g_4, \\ g_2g_9g_7^{-1}g_6g_3^{-1} \end{array} \right\rangle
$$

□

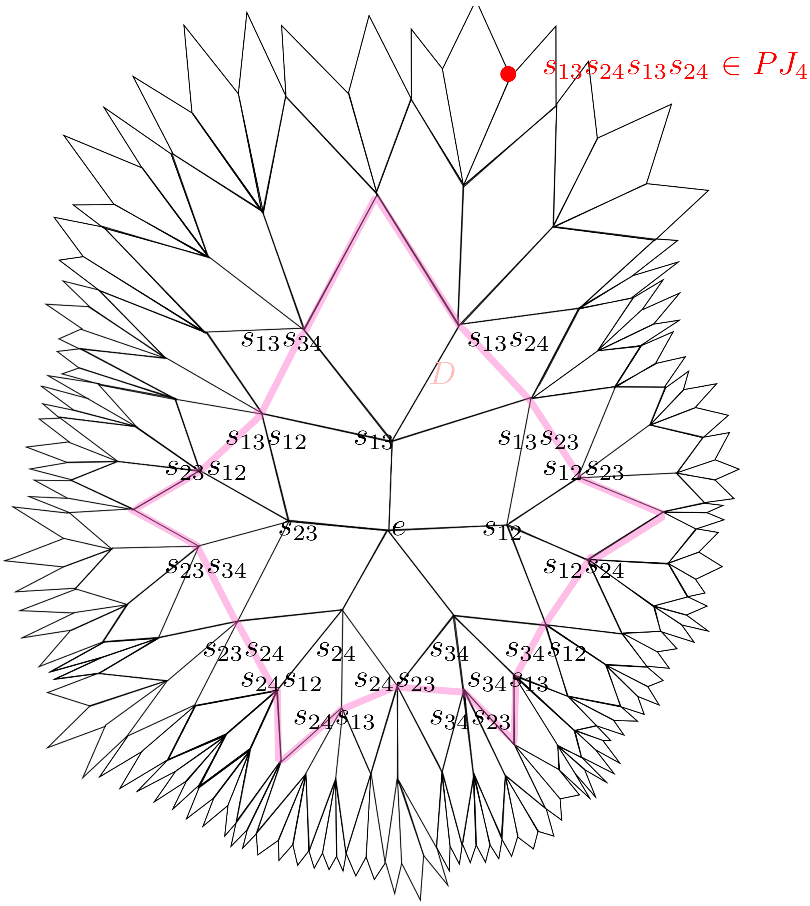


図 2　D

次に、系 2.2 の証明の概要を記す。系 2.2 は以下の同型対応を与える事で証明した。

$$
\begin{aligned}
&f : \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 | \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2 \rangle \\
&\longrightarrow \left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 g_{10}^{-1} g_2^{-1}, g_9 g_5^{-1} g_4, g_5 g_1 g_6^{-1}, \\ g_8 g_{10} g_7^{-1}, g_8 g_3^{-1} g_4, \\ g_2 g_9 g_7^{-1} g_6 g_3^{-1} \end{array} \right\rangle \\
&\alpha_1 \longmapsto g_1^{-1} = g_{10}^{-1} g_2^{-1} \\
&\alpha_2 \longmapsto g_2 g_{10} g_5^{-1} g_8 g_3^{-1} = g_2 g_{10} g_9^{-1} g_4^{-2} \\
&\alpha_3 \longmapsto g_4 \\
&\alpha_4 \longmapsto g_9 g_{10}^{-1} \\
&\alpha_5 \longmapsto g_8^{-1} g_6 = g_8^{-1} g_4 g_9 g_2 g_{10}
\end{aligned}
$$

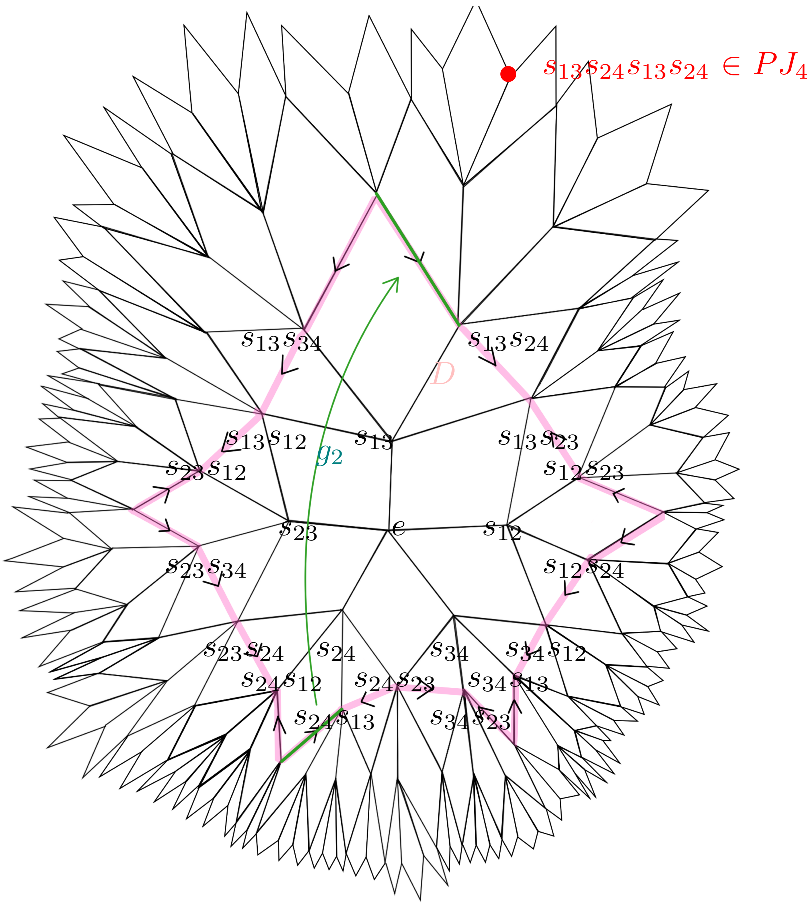


図 3

この同型対応は、PJ_4 による作用に従って張り合わせを調べる事で得られた。具体的には、図 5 のように、D から 5 つのメビウスの帯を切り取り、余った部分を張り合わせる。図 6 の左はメビウスの帯 5 つに囲まれていた中心部分の領域であり、右が残りの部分を張り合わせたものである。これらを張り合わせる様子が図 7 である。各点線部分にメビウスの帯を接着すれば $\mathbb{RP}^2$ 5 つの連結和と同相な $C_4^{\{2,3\}}/PJ_4$ となる。そこで、基本群の生成元として、$C_4^{\{2,3\}}/PJ_4$ 上の閉曲線を取る。これに対し閉曲線が通る辺の張り合わせを追っていく事で同型対応を与えた。図 7 は α_2 の場合である。

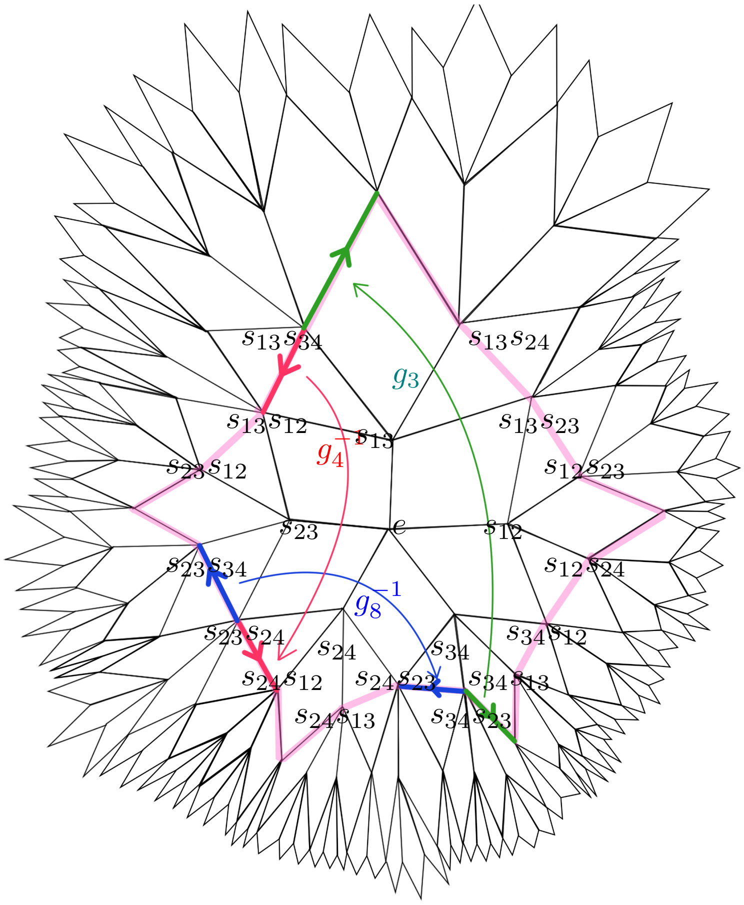


図 4　サイクルリレーション

4　謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」での講演の機会をくださった谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司、丹下稜斗先生に心より感謝いたします。また、本研究を進めるにあたり、先行研究などを紹介して下さいました逆井卓也先生に深く感謝申し上げます。

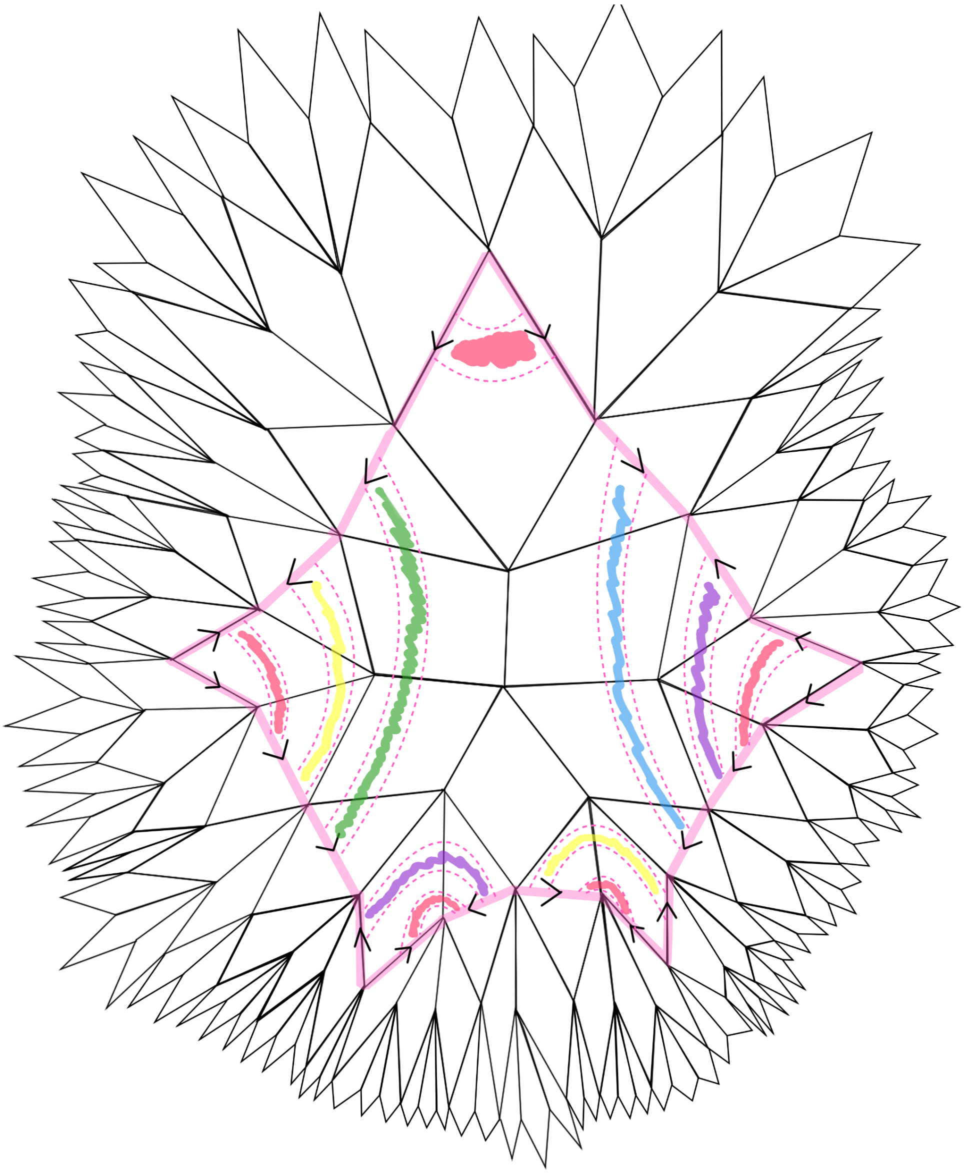


図 5

参考文献

[1] Paolo Bellingeri, Hugo Chemin, and Victoria Lebed, *Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups*, J. Algebraic Combin. **59** (2024), no. 1, 153–178. MR 4701892

[2] Satyan L. Devadoss, *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad*, 2000.

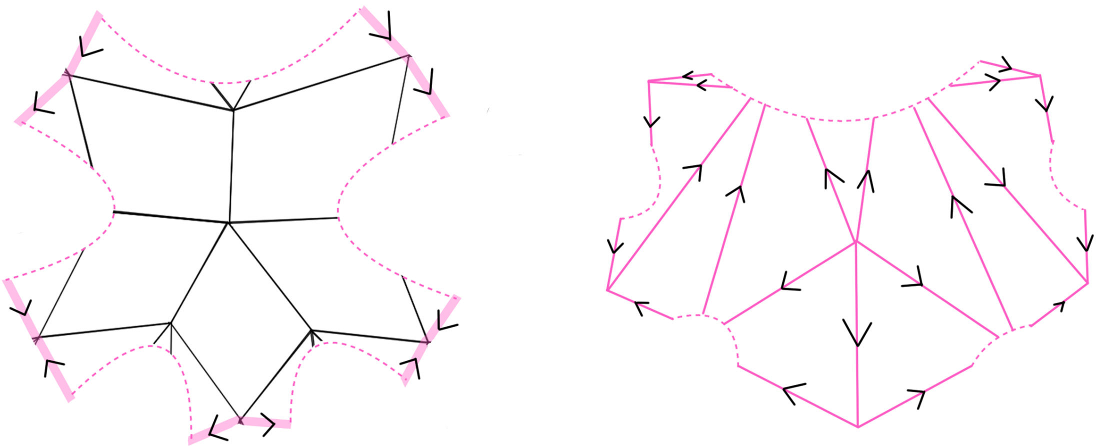


図 6

[3] Anthony Genevois, *Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory*, 2022.

[4] André Henriques and Joel Kamnitzer, *Crystals and coboundary categories*, Duke Math. J. **132** (2006), no. 2, 191–216. MR 2219257

[5] Clara Löh, *Geometric group theory*, Universitext, Springer, Cham, 2017, An introduction. MR 3729310

[6] Bernard Maskit, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Advances in

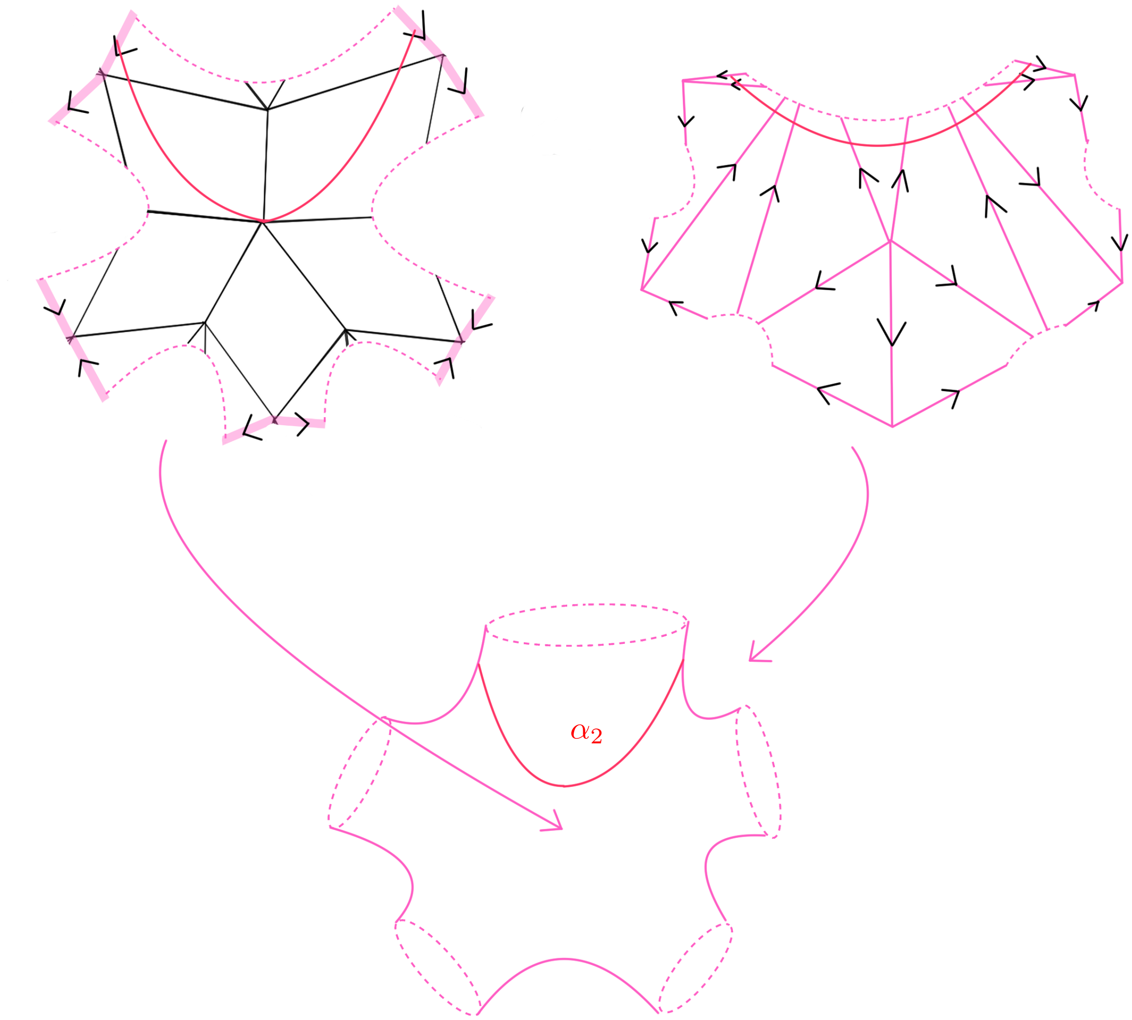


図 7

Math. **7** (1971), 219–230. MR 297997

[7] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta Math. **1** (1882), no. 1, 1–76. MR 1554574

向き付け不可能曲面のfine curve graphのGromov双曲性

久野 恵理香 (大阪大学)*

1. 導入と主結果

本稿では，$N = N_{g,p}$ と $S = S_{g,p}$ で，種数 g, パンクチャー $p \geq 0$ 個付きの向き付け不可能曲面と向き付け可能曲面をそれぞれ表すとする．また，F を N または S とする．Bowden–Hensel–Webb [1] が，以下で説明するファイン曲線グラフを導入した．

定義 1.1. 曲面 F の**ファイン曲線グラフ** $\mathcal{C}^\dagger(F)$ とは，F 上の本質的な単純閉曲線を頂点とし，2つの頂点はそれらに対応する2つの単純閉曲線が F 上で交わらないときに辺で結ばれる，と定めることによってできるグラフのことである (図 1)．ここで，曲面 F 上の単純閉曲線 c が**本質的**であるとは，c は非分離的であるか，もしくは c は分離的であり F 上の円板もメビウスの帯も囲まないことである．

定義 1.2. (X, d) を距離空間とする．X の3点 x, y, w に対して，**グロモフ積**を

$$\langle x, y\rangle_w \coloneqq \frac{1}{2}(d(w,x) + d(w,y) - d(x,y)).$$

で定める．X が δ-**双曲的**である（$\delta \geq 0$）とは，すべての $w, x, y, z \in X$ に対して，次の式が満たされることである:

$$\langle x, z\rangle_w \geq \min\{\langle x, y\rangle_w, \langle y, z\rangle_w\} - \delta.$$

さらに，X が **Gromov 双曲的**であるとは，ある $\delta \geq 0$ が存在して，X が δ-双曲的であることである．

本稿において，グラフの各辺に長さ1を与えることによって，グラフを距離空間と見なす．Bowden–Hensel–Webb [1] は，Rasmussen [3] の結果「ある $\delta \geq 0$ が存在して，任意の有限型向き付け可能曲面 S の非分離曲線グラフ $\mathcal{NC}(S)$ (曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ のフル部分グラフであって，S 上の非分離曲線で代表される頂点のみからなるもの) は δ-双曲的である（これを一様双曲的であると呼ぶ)」を応用して，向き付け可能閉曲面 $S = S_g$ $(g \geq 1)$ に対して，そのファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(S)$ が一様双曲的であることを証明した．講演者たちは，Bowden–Hensel–Webb の議論をもとに以下を証明した．

定理 1.3. ある $\delta \geq 0$ が存在して，種数 $g \geq 2$ の任意の向き付け不可能閉曲面 $N = N_g$ に対して，そのファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(N)$ は δ-双曲的である．但し，$g = 2$ の場合に，$\mathcal{C}^\dagger(N)$ の辺の定義は次のように改変している: $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の2つの頂点に対応する単純閉曲線が N 上で高々1回交わるとき，それら2頂点を辺で結ぶ．

本研究は，木村満晃氏（大阪歯科大学）との共同研究である．

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `e-kuno@math.sci.osaka-u.ac.jp`

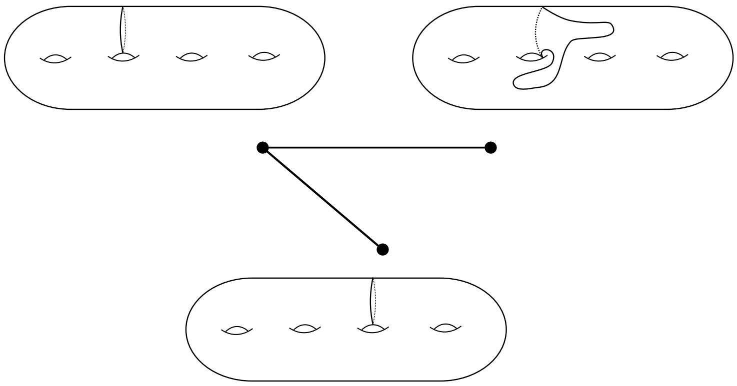


図 1: ファイン曲線グラフの例.

2. 証明の準備

本稿では，種数 $g \geq 3$ の向き付け不可能曲面 $N = N_{g,p}$ について議論する．

定義 2.1. (cf. [1]) 曲面 F の**生存曲線グラフ** $\mathcal{C}^s(F)$ とは，通常の曲線グラフ $\mathcal{C}(F)$ のフル部分グラフであって，F 上のパンクチャーをすべて埋めてもなお本質的なままである曲線のアイソトピー類全体からなるものである．

さらに，向き付け不可能曲面 N に対して以下のような曲線グラフを定める．**双側曲線グラフ** $\mathcal{C}_{\text{two}}(N)$ とは，通常の曲線グラフ（各頂点が本質的単純閉曲線のアイソトピー類であるもの）のフル部分グラフで双側曲線のアイソトピー類全体から構成されるものである．**拡大曲線グラフ** $\mathcal{C}^{\pm}(N)$ とは，本質的な単純閉曲線とメビウスの帯を囲む単純閉曲線のアイソトピー類全体を頂点集合に対応させた曲線グラフである．同一の記法を，$\mathcal{C}^s(N)$ と $\mathcal{C}^{\dagger}(N)$ に対しても使う．更に，これら2つの記法を同時に使用することもある．

定義 2.2. (X, d) と (X', d') を2つの距離空間とする．φ を X から X' への写像とする．写像 φ が**擬等長埋め込み**であるとは，定数 $\lambda \geq 1$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して以下の不等式が成り立つことである:

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y) - \lambda \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d(x,y) + \lambda.$$

写像 φ が **quasi-dense** であるとは，定数 $\lambda' \geq 0$ が存在して任意の点 $y \in X'$ に対して $x \in X$ で $d(\varphi(x), y) \leq \lambda'$ を満たすものが存在する．本稿では，上記定数 λ, λ' を**擬等長定数**と呼ぶ．さらに， 写像 φ が**擬等長写像**であるとは，φ が擬等長埋め込みかつ quasi-dense であることである．このとき X と X' は**擬等長的である**という．

本稿では，2つの距離空間 X と Y が擬等長的であることを，$X \underset{\text{q.i.}}{\sim} Y$ で表すこととする．以下の2つの補題が成り立つ．

補題 2.3. $N = N_{g,p}$ を種数 $g \geq 3$ で $p \geq 0$ 個のパンクチャーの付いた向き付け不可能曲面とする．このとき，$\mathcal{C}^s(N)$, $\mathcal{C}^{\pm s}(N)$, と $\mathcal{C}^{\pm s}_{\text{two}}(N)$ らは各々弧状連結で，さらに互いに擬等長的である:

$$\mathcal{NC}(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^s(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^{\pm s}(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^{\pm s}_{\text{two}}(N).$$

さらに，各擬等長写像の擬等長定数は曲面の位相型に依存しないものを選べる．

補題 2.4. $N = N_{g,p}$ を種数 $g \geq 3$ で $p \geq 0$ 個のパンクチャーの付いた向き付け不可能曲面とする．このとき，$\mathcal{C}^{\dagger}(N)$, $\mathcal{C}^{\pm\dagger}(N)$, と $\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ らは各々弧状連結で，さらに互いに擬等長的である:

$$\mathcal{C}^{\dagger}(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^{\pm\dagger}(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N).$$

さらに，各擬等長写像の擬等長定数は曲面の位相型に依存しないものを選べる．

講演者 [2] により，ある $\delta \geq 0$ が存在して，種数 $g \geq 1$ 以上の任意の有限型向き付け不可能曲面の非分離曲線グラフ $\mathcal{NC}(N)$ は δ-双曲的であることがわかっている．補題 2.3 と合わせて以下の系を得る:

系 2.5. ある $\delta' \geq 0$ が存在して，任意の有限型向き付け不可能曲面 $N = N_{g,p}$ に対して，$\mathcal{C}^{\pm s}_{\mathrm{two}}(N)$ は δ'-双曲的である．

3. 主結果の証明のアイディア

この節では定理 1.3 の証明方法について解説する．補題 2.4 より $\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ の一様双曲性を証明すれば十分である．

補題 3.1. (cf. *[1, Lemma 3.4]*)$\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ の頂点 a と b が横断的に交わり，かつ $N - P$ において最小の位置にあるとする，ただし，$P \subset N$ は有限集合で a と b と交わらないとする．このとき以下が成り立つ．ここで，*2* つの曲線 a'' と b が最小の位置にあるとは，a' と b' の幾何学的交点数が，a' と b' のアイソトピー類の中で最小であることである．

$$d_{\mathcal{C}^{\pm s}_{\mathrm{two}}(N-P)}([a]_{N-P}, [b]_{N-P}) = d_{\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)}(a, b).$$

ただし，$[a]_{N-P}$ で曲線 a の $N - P$ におけるアイソトピー類を表すとする．

ここから，定理 1.3 の証明のアイディアを説明する．ただし，向き付け不可能閉曲面 $N = N_g$ の種数 g は $g \geq 3$ とする．

定理 *1.3* の証明のアイディア (ただし，種数 g は $g \geq 3$ とする．)．$N = N_g$ $(g \geq 3)$ とする．すべての $u, a, b, c \in \mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ に対して，

$$\langle a, c\rangle_u \geq \min\{\langle a, b\rangle_u, \langle b, c\rangle_u\} - \delta' - 4, \tag{3.1}$$

を示していく．ただし δ' は系 2.5 における双曲性定数（曲面の位相型に依らない定数であることに注意する）である．

頂点 $u, a, b, c \in \mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ を，

(i) $d_{\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)}(a, a') \leq 1$, $d_{\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)}(b, b') \leq 1$, かつ $d_{\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)}(c, c') \leq 1$ を満たし，

(ii) 頂点 u', a', b', c' は各々横断的に交わる．

を満たす頂点 $u', a', b', c' \in \mathcal{C}^{\pm s}_{\mathrm{two}}(N - P)$ に以下のように対応させる．ただし，u' に関しては $u' = u$ としている．

任意の頂点の組 $d, e \in \mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ $(d, e \in \{a, b, c\})$ に対して，以下のようにして d, e とそれぞれアイソトピックな 2 頂点 d', e' を構成することを考える．任意の 2 頂点 $d, e \in \mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ に対して，d', e' をそれぞれ，d, e と交わらない $\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)$ の頂点であって，交わりがすべて横断的になるように d と e をそれぞれアイソトピーで変形したものとす

る（d', e' がそれぞれ d, e と交わらないようにアイソトピーで変形する際に d, e の双側性が必要となる）.

さらに, 有限集合 $P \subset N$ で，曲線 u', a', b', c' が形成する任意のバイゴンが P の点を含むようなものを選ぶ．すると bigon criterion により，u', a', b', c' は互いに $N-P$ において最小の位置にあることがわかる．すると，u', a', b', c' は補題 3.1 の仮定をみたす.

補題 3.1 により，任意の組 $d, e \in \{a, b, c\}$ に対して

$$d_{\mathcal{C}^{\pm\dagger}_{\mathrm{two}}(N)}(d', e') = d_{\mathcal{C}^{\pm s}_{\mathrm{two}}(N-P)}([d']_{N-P}, [e']_{N-P}) \tag{3.2}$$

が成り立つ．また

$$|\langle d', e'\rangle_{u'} - \langle d, e\rangle_u| \leq 2 \tag{3.3}$$

がわかる.

そして，式 (3.2) と式 (3.3) と系 2.5 から目標の式 (3.1) を得ることができる． □

謝辞

研究集会「結び目の数理VII」における講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心から感謝申し上げます．著者は木下記念事業団自然科学系基礎的分野研究助成，科研費 (課題番号: 21K13791)，JST，ACT-X 研究費 (課題番号: JPMJAX200D) の助成を受けました．共同研究者の木村満晃氏は科研費（課題番号: JP20H00114, JP24K16921），JST 未来 (課題番号:JPMJMI22G1) の助成を受けました.

参考文献

[1] J. Bowden, S. Hensel, and R. Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, J. Amer. Math. Soc. **35** (2022), 211–231.

[2] E. Kuno, Uniform hyperbolicity of nonseparating curve graphs of nonorientable surfaces, arXiv:2108.08452 [math.GT].

[3] A. Rasmussen, *Uniform hyperbolicity of the graphs of nonseparating curves via bicorn curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 6, 2345—2357.

Cosmetic crossing conjecture を満たす結び目に対する generalized cosmetic crossing conjecture への拡張について

中島 拓巳（京都大学大学院理学研究科）

概要

結び目理論の古典的な予想である cosmetic crossing conjecture，および generalized cosmetic crossing conjecture は，結び目のある交差における交差交換およびそれを一般化した操作 generalized crossing change により結び目が不変ならば，その交差が自明である事を主張している．先行研究により，様々な結び目が cosmetic crossing conjecture を満たす事が示されているが，これらの結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかについて，一般には直ちには不明であり，2 つの予想の間には興味深いギャップがある．本稿では，[LM17] および [Ito22] において cosmetic crossing conjecture の成立が示されている結び目について，generalized バージョンに拡張しても議論が成立するかを検討し，いくつかの具体的な結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たす事を示す．

1　準備

1.1　Cosmetic crossing conjecture

はじめに，本稿の主題である cosmetic crossing conjecture を正確に述べるために，[LM17] を参考に次の定義 1，定義 2，定義 3 を記述する．

定義 1 (crossing disk, crossing arc)**.** S^3 内の（向きづけられた）絡み目 K の交点（crossing）c に付随する **crossing disk** D とは，S^3 内のディスクであって，$\mathrm{int}(D)$ と K が横断的に 2 回，代数的交点数が 0 になるように交わり，さらに K の図式において c を含むようなもののことである．図 1 を参照．∂D の事を **crossing circle** という．

また，K の交点 c における **crossing arc** γ とは，c に付随する crossing disk D 内の自明な arc であって，2 つの端点 $\partial\gamma$ が K 上に存在するようなもののことである．単に K の crossing arc という時は，K の図式内のいずれかの交点における crossing arc の事を指す．

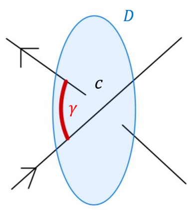


図 1　K の図式内で，交点 c の近傍だけを取り出した図

定義 2 ((generalized) crossing change)**.** S^3 内の絡み目 K の交点 c における **crossing change** とは，図 2 のように，図式において c の交差の上下を入れ替えるような操作のことである．この操作は，D で K を切り，1 回ねじった後にもう 1 度貼り合わせるような操作である．また，N**-generalized crossing change** とは，図 3 のように，c に $2N$ 個の交差を挿入するような操作のことである．この操作は，D で K を切り，N 回ねじった後にもう 1 度貼り合わせるような操作である．$N=1$ のとき，この操作は通常の crossing change に一致する．

定義 3 (cosmetic, nugatory)**.** S^3 内の絡み目 K の交点 c が **cosmetic** な交点であるとは，交点 c において crossing change をして得られる絡み目 K' が K と同値であるようなものである事をいう．また，K の交点 c が N**-cosmetic** な交点であるとは，交点 c において N-generalized crossing change をして得られる絡み目 K_N が K と同値であるようなものである事をいう．

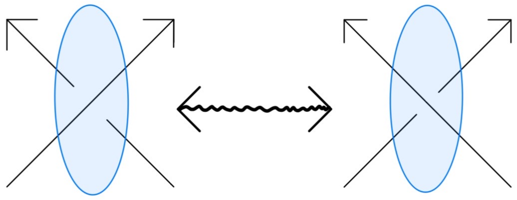


図 2　crossing change

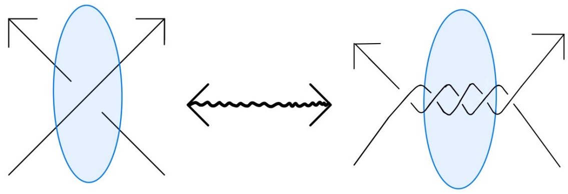


図 3　N-generalized crossing change($N=2$ の例)

S^3 内の絡み目 K の交点 c，または c に付随する crossing disk D が **nugatory** であるとは，∂D が K の外部空間 $E(K)$ に含まれるディスクの境界となる事である．図 4 のように，nugatory な交点は cosmetic，または N-cosmetic になる．

Remark 4. N-generalized crossing change，N-cosmetic という表記は一般的ではなく，本稿において便宜上用いる．

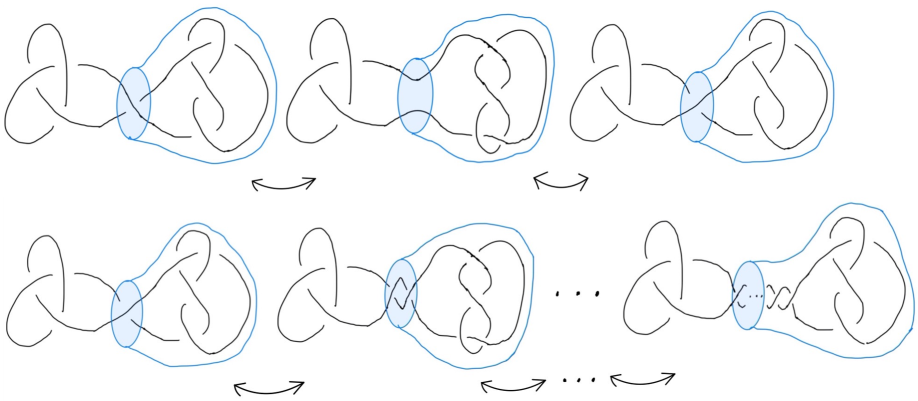


図 4　nugatory な交点は常に cosmetic，または N-cosmetic.

必要な概念が定義されたので，ここで，本稿の主題である cosmetic crossing conjecture について述べる．

予想 5 (Cosmetic crossing conjecture，[Kir78, Problem 1.58])**.** S^3 内の結び目 K の交点 c が cosmetic であるとする．このとき，c は nugatory であるか.

上の予想は crossing change に対するものであるが，次のより強い，generalized crossing change に対する予想の事を「cosmetic crossing conjecture」と称する事もある．なお，本稿では引き続き，以下の予想の事は「generalized cosmetic crossing conjecture」と表記する．

予想 6 (Generalized cosmetic crossing conjecture)**.** $N \neq 0$ を任意に定める．S^3 内の結び目 K の交点 c が N-cosmetic であるとする．このとき，c は nugatory であるか.

1.2　スロープとデーン手術

結び目理論の基本事項については [Lic97] 等を参照し，[Mot22] を元にデーン手術に関する基本事項の定義を確認する．

定義 7 (結び目のスロープ，スロープの距離)**.** S^3 または一般の 3 次元多様体 M 内の結び目 K に対し，$\partial N(K)$ 上の，向きをもたない本質的な単純閉曲線のアイソトピー類の事を，K の**スロープ**という．$\partial E(K)$ 上の，$\partial N(K)$ のスロープに対応する単純閉曲線のアイソトピー類も**スロープ**と呼ぶ.

特に S^3 内の結び目 K については，スロープに向きを与えた単純閉曲線のアイソトピー類は，K のメリディアン μ_K，ロンジチュード λ_K のホモロジー類 $[\mu_K], [\lambda_k] \in H_1(\partial N(K))$ と，互いに素な整数 p, q を用いて $p[\mu_K] + q[\lambda_K] \in H_1(\partial N(K))$ と書ける．$r = p/q$ は向きの取り方によらずスロープを一意的に定めるので，しばしばこの同一視により，スロープを $r = p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty = 1/0\}$ と表示する．

K のスロープ η_1, η_2 の**距離** $\Delta(\eta_1, \eta_2)$ を，η_1, η_2 により代表される単純閉曲線の交点数の最小値として定める．$H_1(\partial N(K))$ の基底 (m, ℓ) について $\eta_1 = p_1 m + q_1 \ell, \eta_2 = p_2 m + q_2 \ell$ のとき，$\Delta(\eta_1, \eta_2) = |p_1 q_2 - p_2 q_1|$ である．

定義 8 (デーン手術, デーンフィリング)**.** 3 次元多様体 M 内の n 成分絡み目, $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ について, $N(L) = \bigcup_{i=1}^{n} N(L_i)$ と $E(L) = M - \mathrm{int}(N(L))$ を同相写像により貼り合わせる事を考える．M から $N(L)$ を取り除き，L_i のメリディアン $\mu_i \in H_1(\partial N(L_i))$ がスロープ $r_i \in H_1(\partial E(L_i))$ と貼り合うような同相写像により $E(L)$ に埋め戻す操作を，**L に沿った $(r_1, \cdots, r_n)$-デーン手術**といい，この操作で得られる 3 次元多様体を $M_{L_1 \cup \cdots \cup L_n}(r_1, \cdots, r_n)$ で表す．本稿において，$M = S^3$ のとき，L に沿った $(r_1, \cdots, r_n)$-デーン手術をして得られる多様体を $L(r_1, \cdots, r_n)$ とも書く．

また，デーン手術において n 個のソリッドトーラス $N(L)$ を埋め戻す操作を**デーンフィリング**という．特に，境界がトーラスである 3 次元多様体 M に，∂M のスロープ η に沿ってソリッドトーラスをデーンフィリングして得られる多様体の事を，$M(\eta)$ と書く．

上記の定義より，ある絡み目の交点に付随する crossing disk を D としたとき，この交点での N-generalized crossing change は，S^3 に crossing circle ∂D に沿った $\pm 1/N$-デーン手術をする事によっても達成できる．

定義 9 (rational longitude)**.** M を，トーラスを境界にもち，$H_1(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ をみたす 3 次元多様体とする．

∂M のスロープであって，包含写像 $i : \partial M \hookrightarrow M$ から誘導される準同型 $i_* : H_1(\partial M) \to H_1(M)$ による像が $H_1(M)$ 内で有限のオーダーをもつようなものの事を，M の **rational longitude** という．rational longitude は一意的に存在する．証明は [Wat12, Section 3.1] を参照.

1.3　2 重分岐被覆と Montesinos trick，L 空間

絡み目の一部を取り出し，有理タングルを別の有理タングルに置き換えて別の絡み目を得る操作は，2 重分岐被覆においてはある結び目に沿ったデーン手術に対応する．特に，(generalized) crossing change は有理タングルの置き換えで実現できるため，以下に述べる Montesinos trick は (generalized) cosmetic crossing conjecture に対するアプローチとして重要である．

定義 10 (2 重分岐被覆)**.** S^3 内の絡み目 K に対し，3 次元多様体 $\Sigma(K)$ が **K に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 (double branched cover)** である，とは，$\Sigma(K)$ 上の対合 $\iota : \Sigma(K) \to \Sigma(K)$ が存在して，ι による $\Sigma(K)$ の固定点集合を $\mathrm{Fix}(\iota) \subset \Sigma(K)$ とするとき，ι による $(\Sigma(K), \mathrm{Fix}(\iota))$ の商空間が (S^3, K) となる事をいう．

$p : (\Sigma(K), \mathrm{Fix}(\iota)) \to (S^3, K)$ を 2 重分岐被覆写像とするとき，S^3 の部分集合 F の p による逆像 $p^{-1}(F)$ を F の **lift** とよび，$\widetilde{F}$ で表す.

定義 11 (有理タングル)**.** 3 次元球体 B とその中の 2 本の自明な arc τ の組 (B, τ) であって，$\partial \tau$ は B 上に固定した 4 点であり，B の同相写像によって，図 5 で示した球体と arc の組 $R(1/0)$ にうつす事ができるようなものを，**有理タングル**という．

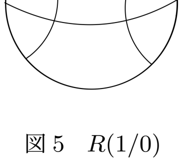


図 5　$R(1/0)$

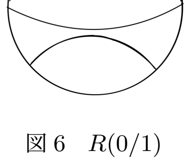


図 6　$R(0/1)$

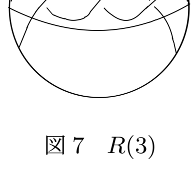


図 7　$R(3)$

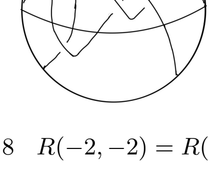


図 8　$R(-2,-2) = R(-\frac{5}{2})$

有理タングルは全て $R(a_1, \ldots, a_n) = R(q/p)$ の形で表す事ができる．ここで,

$$\frac{q}{p} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}$$

であり，有理タングル $R(a_1, \ldots, a_n)$ は,

・n が奇数のとき，$R(0/1)$ を水平方向に a_1 回半ねじり，垂直方向に a_2 回半ねじり，$\cdots$，水平方向に a_n 回半ねじりして得

られる．

・n が偶数のとき，$R(1/0)$ を垂直方向に a_1 回半ねじり，水平方向に a_2 回半ねじり，$\cdots$，水平方向に a_n 回半ねじりして得られる．

（但し，ねじる方向はいずれも右回りを正とする．図 7，図 8 を参照）

有理タングル (B,τ) の τ に沿った 2 重分岐被覆写像 $p:(\widetilde{B},\widetilde{\tau})\to(B,\tau)$ について，$\widetilde{B}$ は，2 つの arc τ をつなぐ自明な arc γ の lift $\widetilde{\gamma}$ を中心線とするソリッドトーラスになっている．さらに，ねじり操作と 2 重分岐被覆の対応を考える事で，次を得る．詳細は [Mot22, Section 6.4]，[Mon75] を参照．

命題 12 (Montesinos trick)**.** $p:\Sigma(L)\to S^3$ を，$L\subset S^3$ に沿った 2 重分岐被覆写像とする．S^3 内の 3 次元球体 B を，L との交わり $B\cap L$ が有理タングルとなるようにとる．この有理タングルを $R(p_1/q_1)$ とし，タングル内の 2 つの arc をつなぐ自明な arc を γ とする．

このとき，$R(p_1/q_1)$ を $R(p_2/q_2)$ に入れ替える事によって L から得られる絡み目 L' に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 $\Sigma(L')$ について，$\Sigma(L')$ は $\Sigma(L)$ 内の結び目 $\widetilde{\gamma}$ に沿ったデーン手術で得られ，さらに，

$$\Sigma(L)_{\widetilde{\gamma}}(\alpha)\cong\Sigma(L),\Sigma(L)_{\widetilde{\gamma}}(\beta)\cong\Sigma(L')$$

となる $\widetilde{\gamma}$ のスロープ α,β について，$\Delta(\alpha,\beta)=|p_1q_2-p_2q_1|$ が成り立つ．

[OS05] を参考に，3 次元有理ホモロジー球面のクラスとして L 空間を定義する．L 空間はそれ自体深遠な研究対象である（例えば，[Mot22, 14 章]）が，本稿では，L 空間におけるデーン手術の性質として定理 14 が重要である．

定義 13 (L 空間)**.** 3 次元有理ホモロジー球面 M が L **空間**であるとは，ハットバージョンの Heegaard Floer Homology $\widehat{HF}(M)$ が，$\dim\widehat{HF}(M)=|H_1(M;\mathbb{Z})|$ を満たす事である．

次の [Gai18] 内で示された定理は，L 空間内の unknot をある種特徴付けるようなものである．

Y を L 空間，$K\subset Y$ を Y 内の null-homologous な結び目，$U\subset Y$ を Y 内の unknot とする．

K は Y 内で null-homologous であるから，ロンジチュード λ_K が S^3 内の結び目と同様に一意的にとれる．$H_1(\partial N(K))$ の基底として $([\mu_K],[\lambda_K])$ をとり，S^3 内の結び目と同様にスロープと $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ を同一視するものとする．U についても同様にスロープと $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ を同一視する．

定理 14 ([Gai18, Theorem 8.2])**.** $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ に対し，$Y_K(\frac{p}{q})$ と $Y_U(\frac{p}{q})$ が向きを保って同相であるとき，$K=U$，即ち K は unknot である．

また，2 重分岐被覆が L 空間になるような S^3 内の絡み目のクラスとして，quasi-alternating や $\overline{Kh}$ homologically σ-thin といったクラスが挙げられる．quasi-alternating の正確な定義については [OS05, Definition 3.1] を，$\overline{Kh}$ homologically σ-thin については [MO08]，[Wat12, Definition 2.3] 等を参照．

quasi-alternating は交代性という性質の拡張であり，全ての非分離な交代絡み目を含む．さらに，絡み目が quasi-alternating ならば，その 2 重分岐被覆は L 空間になる．（[OS05, Lemma 3.2，Proposition 3.3] を参照．）また，絡み目が $\overline{Kh}$ homologically σ-thin であってもその 2 重分岐被覆は L 空間になる．（[OS05, Theorem 1.2]，[Wat12, Proposition 4.2] を参照．）実は，[MO08, Theorem 1] で quasi-alternating ならば $\overline{Kh}$ homologically σ-thin という事も示されている．

具体的な結び目が 2 重分岐被覆が L 空間になるという性質をもつかは，しばしば quasi-alternating や $\overline{Kh}$ homologically σ-thin といった十分条件をもとに考えられる．

1.4 Casson-Walker 不変量とその明示的な公式

2 つ目の主結果の議論を述べるために必要な，有理ホモロジー球面に対して定義される Casson-Walker 不変量について，定義のみ確認する．$S\left(\dfrac{p}{q}\right)$ は Dedekind symbol であり，Dedekind 和 $s(p,q)$ と q の符号 $\mathrm{sign}(q)$ を用いて，

$$S\left(\frac{p}{q}\right)=12(\mathrm{sign}(q))s(p,q),\quad s(p,q)=\sum_{k=1}^{|q|-1}\left(\left(\frac{k}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{kp}{q}\right)\right),\ (\!(x)\!)=\begin{cases}0 & (x\in\mathbb{Z})\\ x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2} & (x\notin\mathbb{Z})\end{cases}$$

と定義されるものとする．

有理ホモロジー球面 M 内の結び目 K に対し，K のアレキサンダー多項式 $\Delta_{K;M}(t)$ の 2 階微分を $\Delta''_{K;M}(t)$ と書く．$H_1(\partial E(K);\mathbb{Z})$ の交叉形式を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とし，$E(K)$ の（rational でない）ロンジチュード ℓ を，$i_*: H_1(\partial E(K);\mathbb{Z}) \to H_1(E(K);\mathbb{Z})$ の ker を生成する $H_1(\partial E(K);\mathbb{Z})$ のホモロジー類とする．また $E(K)$ の rational longitude $\lambda_{E(K)}$ を含む $H_1(\partial E(K);\mathbb{Z})$ の基底 $(x,y)=(x,\lambda_{E(K)})$ を $\langle x,y\rangle = 1$ となるようとり，$d \in \mathbb{Z}$ は $\ell = dy$ を満たすものとする．

$a, b \in H_1(\partial E(K);\mathbb{Z})$ を，$\langle y,a\rangle \neq 0, \langle y,b\rangle \neq 0$ を満たすスロープとする．さらに，a, b, ℓ に対して $\tau(a,b;\ell)$ を

$$\tau(a,b;\ell) = \frac{1}{12}\left\{-S\left(\frac{\langle x,a\rangle}{\langle y,a\rangle}\right) + S\left(\frac{\langle x,b\rangle}{\langle y,b\rangle}\right) + \left(1-\frac{1}{d^2}\right)\left(\frac{\langle x,a\rangle}{\langle y,a\rangle} - \frac{\langle x,b\rangle}{\langle y,b\rangle}\right)\right\}$$

で定める．

定義 15 (Casson-Walker 不変量，[Wal90])**.** 有理ホモロジー球面 M の **Casson-Walker 不変量** $\lambda_{CW}(M)$ とは，次によって一意的に定義される（$\mathbb{Q}$ に値をもつ）不変量である．

$\cdot\lambda_{CW}(S^3) = 0$

$\cdot M$ 内の結び目 K と上記の a, b, ℓに対し，

$$\lambda_{CW}(M_K(b)) = \lambda_{CW}(M_K(a)) + \tau(a,b;\ell) + \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,\ell\rangle\langle b,\ell\rangle}\Delta''_{K;M}(1)$$

S^3 内の 2 成分絡み目に沿ったデーン手術で得られる有理ホモロジー球面の Casson-Walker 不変量については，[Ito22, Proposition 1.5] においてその明示的な公式が示されている．

2　2 つの主結果に共通して用いる命題（N-cosmetic な交点の crossing arc の lift が L 空間内で null-homologous ならば，交点は nugatory である）

det $L \neq 0$ の絡み目について，次が成立する．特にこの補題 16 より，crossing arc の lift が unknot になる場合については cosmetic crossing conjecture が正しい事が分かる．

補題 16 ([Bon23, Proposition A.1])**.** L を S^3 内の det $L \neq 0$ を満たす絡み目とする．γ を L 内のある交点の crossing arc，D を crossing disk とし，$\widetilde{\gamma} \subset \Sigma(L)$ は unknot であるとする．この交点が cosmetic ならば，D は nugatory.

補題 16 は，[Bon23] と同様の議論により，次の generalized crossing change に対する補題に拡張できる事を確認した．

補題 17. L を S^3 内の det $L \neq 0$ を満たす絡み目とする．γ を L 内のある交点の crossing arc，D を crossing disk とし，$\widetilde{\gamma} \subset \Sigma(L)$ は unknot であるとする．ある $N \neq 0$ について，この交点が N-cosmetic ならば，D は nugatory.

以下，証明の概略のみを述べる．

γ の近傍となる 3 次元球体 B を，$B \cap D$ が int(D) 内のディスクになり，$(B, B\cap L)$ が有理タングルとなるようにとる．このとき B の $\Sigma(L)$ への lift $\widetilde{B}$ は，$\widetilde{\gamma}$ を中心線とするソリッドトーラスである．

det $L \neq 0$ という仮定から，$\Sigma(L)$ は有理ホモロジー球面である．従って，$M = \Sigma(L) - \mathrm{int}(\widetilde{B})$ とおくと，$H_2(M;\mathbb{Q}) \cong 0, H_1(M;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ が従う．∂M の rational longitude を λ_M とする．

さらに，$\widetilde{\gamma}$ は $\Sigma(L)$ 内の unknot であるので，$\Sigma(L)$ 内で $\widetilde{\gamma}$ が境界となるディスクをとれる．それを $\widetilde{\Gamma} \subset \Sigma(L)$ とすると，$\widetilde{\Gamma} \cap \partial M$ は rational longitude の定義より λ_M に一致する．

$\Sigma(L)$ 上の対合 $\iota: \Sigma(L) \to \Sigma(L)$ に対し，$\iota(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{\gamma}$ である．よって $\widetilde{\gamma}$ を境界とする $\widetilde{\Gamma}$ について，equivariant Dehn's Lemma[MY81] より，被覆変換群 $\{\mathrm{id}_{\Sigma(L)}, \iota\}$ が $\widetilde{\Gamma}$ に自由に作用するとき $\iota(\mathrm{int}(\widetilde{\Gamma})) \cap \mathrm{int}(\widetilde{\Gamma}) = \emptyset$ であるから，

$$\iota(\mathrm{int}(\widetilde{\Gamma})) \cap \mathrm{int}(\widetilde{\Gamma}) = \emptyset \text{ または，} \iota(\widetilde{\Gamma}) = \widetilde{\Gamma}$$

のいずれかが成立するが，$\iota(\widetilde{\Gamma}) = \widetilde{\Gamma}$ のときは起こりえないか，$\iota(\mathrm{int}(\widetilde{\Gamma})) \cap \mathrm{int}(\widetilde{\Gamma}) = \emptyset$ のときに帰着される．よって，$\iota(\mathrm{int}(\widetilde{\Gamma})) \cap \mathrm{int}(\widetilde{\Gamma}) = \emptyset$ のときのみ考えればよい．

$p: (\Sigma(L), \mathrm{Fix}(\iota)) \to (S^3, L)$ を 2 重分岐被覆写像とする．$p(\widetilde{\Gamma} \cap M) = \Gamma$ は $S^3 - \mathrm{int}(B)$ 内のディスクであり，$\Gamma \cap L = \emptyset$.

図で示したタングルの組を入れ替える事により L から得られる絡み目について考える．L_N を，γ を crossing arc とする L の交点での N-generalized crossing change により L から得られる絡み目とする．一般性を失わず，$L_N = L_{N,+}$ は，タングル $B = B_{0,+}$ を $B_{N,+}$ に入れ替える事により得られるとしてよい．同様に，B を $B_{k,\pm}$ に入れ替える事で L から得られる絡み目を $L_{k,\pm}$ とする．

図より明らかに $B_{k,-}$ と $B_{k-1,+}$ は同値な有理タングルであるから，$L_{k,-} = L_{k-1,+}$ である．さらに，B を $B_{N,0}, B_{N-1,0}, \ldots, B_{1,0}$（これらは全て同値であり，$B_0$ と記述する）に入れ替える事で得られる絡み目を L_0 と書く．

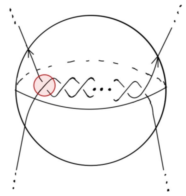


図 9　$B_{k,+}$

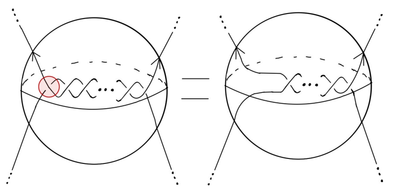


図 10　$B_{k,-} = B_{k-1,+}$

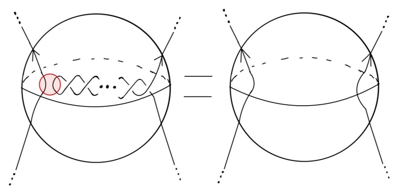


図 11　$B_{k,0} = B_0$

アレキサンダー多項式 Δ について，スケイン関係式，および $\Delta_{L_{k,-}}(x) = \Delta_{L_{k-1,+}}(x)$ により，

$$\Delta_{L_{N,+}}(x) - \Delta_{L_{0,+}}(x) = N(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0}(x)$$

が従うが, L が N-cosmetic である事から, $L_N = L$ より $\Delta_{L_0}(x) = 0$, 特に, det $L_0 = \Delta_{L_0}(-1) = 0$ より, $|H_1(\Sigma(L_0);\mathbb{Z})| = \infty$ であり，計算により $|H_2(\Sigma(L_0);\mathbb{Z})| = \infty$ も従う．特に，$H_2(\Sigma(L_0);\mathbb{Z})$ は自明でない．

B_0 の $\Sigma(L_0)$ への lift を $\widetilde{B_0}$ とし，M に $\widetilde{B_0}$ の中心線に沿って，$\partial\widetilde{B_0}$ 上のスロープ γ_0 によってデーンフィリングする事で $\Sigma(L_0)$ が得られる，即ち $M(\gamma_0) \cong \Sigma(L_0)$ であるとする．$H_2(\Sigma(L_0);\mathbb{Z})$ の自明でない元を用いて，$\gamma_0 = \lambda_M$ であり，$D \cap \partial B$ が λ_M に lift する事を示せる．これより，∂D が境界となる $S^3 - L$ 内のディスクが得られる．以上より，D は nugatory.

特に，2 つの主結果の証明に共通して用いる命題として，次が従う．

命題 18. S^3 内の結び目 K について，$\Sigma(K)$ は L 空間であるとする．

$N \neq 0$ を任意に 1 つ固定する．K の交点 c は N-cosmetic であるとする．このとき，c に付随する crossing arc γ について，$\widetilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ で null-homologous であるとき，この c は nugatory である．

命題 *18* の証明. 定理 14 と同様の記法を用いる．c での N-generalized crossing change により K から得られる結び目を K_N とすると，Montesinos trick より $\Sigma(K_N) = \Sigma(K)_{\widetilde{\gamma}}\left(\dfrac{p}{q}\right)$ となるスロープ $\dfrac{p}{q}$ が存在し，$K_N = K$ より $|H_1(\Sigma(K_N))| \cong |H_1(\Sigma(K))| \oplus \mathbb{Z}/|p|\mathbb{Z} \cong |H_1(\Sigma(K))|$，よって $\Sigma(K_N)$ は，$\Sigma(K)$ 内の $\widetilde{\gamma}$ に沿った $\pm\dfrac{1}{q}$-デーン手術により得られる．

一方，$\Sigma(K_N) = \Sigma(K)$ は $\Sigma(K)$ 内の unknot に沿った $\pm\dfrac{1}{q}$-デーン手術によっても得られる．従って，定理 14 により，$\widetilde{\gamma}$ は $\Sigma(K)$ 内の unknot である．

よって，補題 17 により，$\widetilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ で null-homologous であるとき，c は nugatory である． □

3　主結果

3.1　1 つ目の主結果；[LM17] の拡張

次は，[LM17] の主定理である．

定理 19 ([LM17, Theorem 1.2])**.** S^3 内の結び目 K について，$\Sigma(K)$ は L 空間であり，$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z})$ が square-free な，平方因子をもたない成分の直和で表されるとする．即ち，

$$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

と直和分解したとき，各 d_i は square-free であるとする．このとき，K は cosmetic crossing conjecture を満たす．

本稿の 1 つ目の主題として，定理 19 の主張を generalized crossing change に拡張する事を考える．

S^3 内の結び目 K の交点 c が N-cosmetic であると仮定する．即ち，c で N-generalized crossing change をして得られる結び目 K_N が K と同値であるとする．c に付随する crossing arc γ について，K に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 $\Sigma(K)$ への γ の lift $\widetilde{\gamma}$ は，$\Sigma(K)$ 内の結び目である．$M = \Sigma(K) - \mathrm{int}(N(\widetilde{\gamma}))$ とおく．$\Sigma(K)$ が L 空間ならば有理ホモロジー球面であるから，$H_1(\partial M)$ には rational longitude λ_M が一意にとれる．Montesinos trick より，スロープ $\alpha, \beta \in H_1(\partial M)$ を，$M(\alpha) \cong \Sigma(K), M(\beta) \cong \Sigma(K_N)$ となるようにとる事ができ，さらに $\Delta(\alpha, \beta) = 2N$ が従う．

以下は，本稿の 1 つ目の主結果である．

定理 20. S^3 内の結び目 K について，$\Sigma(K)$ は L 空間であり，$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z})$ が square-free な，平方因子をもたない成分の直和で表されるとする．即ち，

$$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

と直和分解したとき，各 d_i は square-free であるとする．

$N \neq 0$ を任意に 1 つ固定する．K の交点 c は N-cosmetic であるとする．このとき，次の (1), (2) がともに成立する事は，命題 18 の十分条件である．

(1) 包含写像 $i : \partial M \hookrightarrow M$ から誘導される準同型 $i_* : H_1(\partial M;\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z})$ について，
$i_*(\lambda_M) = 0$ in $H_1(M;\mathbb{Z})$

(2) $M(\alpha) \cong \Sigma(K)$ なる∂M 上のスロープαを, $\Delta(\alpha, \lambda_M) = 1$ を満たすようにとれる．

さらに，(1) に対する十分条件として，次の (3) が与えられる．

(3) det K が square-free，または, det K の square 成分 ($\ell'^2 \mid \det K$ なる ℓ') と N は互いに素である

さらに，(2) に対する十分条件として，次の (4) が与えられる．

(4) det K と N は互いに素である

特に，$\Sigma(K)$ が L 空間であり，$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z})$ が square-free な成分の直和で表される S^3 内の結び目 K，および，det K と互いに素である N に対し，K が N-cosmetic な交点をもつならば，その交点は nugatory である．

Remark 21. 一般の rational longitude が定義できる多様体 M に対し，(2) は自明な条件ではない．特に，有理ホモロジー球面内の結び目 K の外部空間 M に対し，$\Delta(\mu_K, \lambda_M) = 1$ であるとは限らない．

定理 *20* の証明の概略. (1),(2) がともに成立する事が命題 18 の十分条件である事は，(1),(2) をともに仮定したとき，λ_M が境界となるような M 内の曲面と，$N(\tilde{\gamma}) \subset M(\alpha)$ 内で，$N(\tilde{\gamma})$ の中心線 $\tilde{\gamma}$ と λ_M を境界とするアニュラスの和をとる事で，$\tilde{\gamma}$ を境界とする $\Sigma(K) = M(\alpha)$ 内の曲面が得られる事より従う．

(3) が (1) の十分条件である事，(4) が (2) の十分条件である事は，[LM17] と同様の技術的な計算から従う．なお，(3) が (1) の十分条件である事を示す議論において，$H_1(\Sigma(K);\mathbb{Z})$ の各直和成分が square-free である事は本質的な仮定である．[LM17, Theorem 2.4] を参照せよ．

(4) は (3) の十分条件でもある事から特に, det K と互いに素である N に対し, K の N-cosmetic な交点は nugatory. □

3.2 2 つ目の主結果；[Ito22] の拡張（Casson-Walker 不変量を用いたアプローチ）

[Ito22] においては，Casson-Walker 不変量を cosmetic crossing conjecture に応用する事で，次が示されている．

定理 22 ([Ito22, Theorem 1.9])**.** K を S^3 内の結び目とし，$\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーン手術で得られる L 空間であるとする．即ち，$\Sigma(K)$ は L 空間であって，$\Sigma(K) \cong K_y(\frac{p}{q})$ なる結び目 K_y，スロープ $\frac{p}{q}$ が存在するとする．さらに，$\det K = 9p'$（$3 \nmid p'$ かつ p' は square-free）であるとする．このとき，K は cosmetic crossing conjecture を満たす．

以下，上の結果の拡張として得られる 2 つ目の主結果，定理 23 について述べる．

定理 23. K を S^3 内の結び目とし，$\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーン手術で得られる L 空間であるとする．即ち，$\Sigma(K)$ は L 空間であって，$\Sigma(K) \cong K_y(\frac{p}{q})$ なる結び目 K_y，スロープ $\frac{p}{q}$ が存在するとする．さらに，$\det K = p$ と N について，次のいずれかが成り立つとする．

- $p = 3p'(3 \nmid p'$かつ p'は square-free) であり，p と N は互いに素，または $\gcd(p, N) = 3$, $9 \nmid N$
- $p = 9p'(3 \nmid p'$かつ p'は square-free) であり，p と N は互いに素，または $\gcd(p, N) = 3$

このとき，K が N-cosmetic な交点をもつならば，その交点は nugatory である．

定理 23 は，次の定理 24 および命題 17 の直接の帰結であり，定理 24 は，[Ito22, Proposition 1.7] の議論と同様の計算により示されるが，証明は本稿では割愛する．

定理 24. S^3 内の結び目 K_y について，$M = K_y(\frac{p}{q})$ が L 空間であり，M 内の結び目 K は null-homologous でないとする．K のスロープ s に対し，$n = \Delta(s, \mu_K)$ とする．次のいずれかが成り立つとする．

- $p = 3p'(3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であり，p と n は互いに素，または $\gcd(p, n) = 3$，$9 \nmid n$
- $p = 9p'(3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であり，p と n は互いに素，または $\gcd(p, n) = 3$

このとき，$M_K(s) \cong M$ とはならない．

定義 25. S^3 内の結び目 K_y に沿った $\frac{p}{q}$-デーン手術をして得られる 3 次元多様体 $M = K_y(\frac{p}{q})$ と，M 内の結び目 K に対し，K を $E(K_y) \subset M$ 内に動かして，$i : E(K_y) \hookrightarrow S^3 = K_y(\infty)$ による K の像となる，S^3 内の結び目 K_x を，K **に対応する結び目**と記述する．

$M = K_y(\frac{p}{q})$ 内の結び目 K に対し，S^3 内の K に対応する結び目を K_x とする．M から K に沿ったデーン手術で得られる多様体は，S^3 内の絡み目 $K_x \cup K_y$ に沿ったデーン手術でも記述する事ができる．実際，K のスロープ s によるデーン手術で得られる多様体 $M_K(s)$ について，$M_K(s)$ は K_x のあるスロープ $\frac{m}{n}$ を用いて $M_K(s) = K_x \cup K_y(\frac{m}{n}, \frac{p}{q})$ と記述できる．（但し，K のメリディアン μ_K に対し $n = \Delta(s, \mu_K)$ であり，$m \in \mathbb{Z}$ は n と互いに素）よって特に $M_K(s)$ が有理ホモロジー球面であるとき，その Casson-Walker 不変量について，[Ito22, Proposition 1.5] を適用できる．$M_K(s)$ と M の Casson-Walker 不変量を比較し，定理 24 を得る．

定理 23 の証明. K の N-cosmetic な交点に付随する crossing arc を γ，$\Sigma(K)$ への γ の lift を $\widetilde{\gamma}$ とし，$\Sigma(K)$ 内の結び目 $\widetilde{\gamma}$ に対応する S^3 内の結び目を K_x とする．また，$M = \Sigma(K) - \mathrm{int}(N(\widetilde{\gamma}))$ とする．

Montesinos trick より，$\Delta(s, \mu_{\widetilde{\gamma}}) = 2N$ となる $\widetilde{\gamma}$ のスロープ s が存在し，$\Sigma(K) \cong M(\mu_{\widetilde{\gamma}}) \cong M(s)$ が成立する．また，$M(s) \cong K_x \cup K_y(\frac{m}{2N}, \frac{p}{q})$ なる K_x のスロープ $\frac{m}{2N}$ が存在する．

このとき，$\widetilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ において null-homologous ならば，$\Sigma(K)$ が L 空間である事から，命題 18 より crossing は nugatory．$\widetilde{\gamma}$ が null-homologous でないならば，定理 24 より $M(s) \cong \Sigma(K)$ とはなりえない．以上により示された． □

4 Generalized cosmetic crossing conjecture を満たす具体的な結び目の例

上記の主結果はいずれも，特定のタイプの結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たす，といった事を主張できている訳ではない．（N に，$\det K$ と互いに素，または最大公約数が 3，などの制約がついており，一般の N について N-cosmetic なら nugatory が示せている訳ではないため．）特に 1 つ目の主結果に関連して，次は重要な検討課題である．

検討課題 26. K は $\Sigma(K)$ が L 空間であり，$H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ が square-free な成分の直和で表される S^3 内の結び目とする．N が必ずしも $\det K$ と互いに素でないとき，K の N-cosmetic な交点は自明であるか．即ち，定理 19 は何の制約もなく，generalized cosmetic crossing conjecture に拡張できるか．

この検討課題に関連して，[Bon24] においては K に [LM17] より少し強い制約をつけた状態での generalized cosmetic crossing conjecture の成立が示されている．

定理 27 ([Bon24, Theorem 1.2])**.** S^3 内の結び目 K について，$\Sigma(K)$ は L 空間であり，K が nugatory でない N-cosmetic な交点をもつとき，K のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は

$$f(t)f(t^{-1})$$

（f は $f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}], f(-1) \neq \pm 1$ を満たす）という形の因子をもつ．

特に，$\Sigma(K)$ が L 空間であり $\det K$ が square-free であるとき，K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

上述の検討課題は，この定理 27 が，必ずしも $\det K$ が square-free とは限らないが，$H_1(\Sigma(K))$ の直和成分は square-free になるような場合にも成り立つか，と言い換える事もできる．

最後に，2 つの主結果の系として，特に 2 重分岐被覆がスモールザイフェルト多様体というある種の多様体になるようないくつかの具体的な結び目が，generalized cosmetic crossing conjecture を満たす事を紹介する．定理 28，定理 29 で言及している具体的な結び目について，いずれも det が square-free でない事は，特に [Bon24] の結果との比較という観点においては注目すべき事項であると考える．

3 次元多様体内の結び目が双曲である，とは，外部空間の内部に有限体積の完備双曲構造が入る事をいう．2 重分岐被覆がスモールザイフェルト多様体になる結び目 K について，Montesinos trick と [Mat10, Theorem 1.3] および例外手術（双曲結び目に沿った，完備双曲でない多様体を得る手術）に関する定理（[LM13, Theorem 1.2]）より，K が N-cosmetic な，crossing arc の lift が unknot でないような交点を持つならば，$2N \leq 8$ である事が N の制約として得られる．

Montesinos 絡み目 $M(\frac{q_1}{p_1}, \cdots, \frac{q_n}{p_n})$ は，図 12 で示したように有理タングル $R(\frac{q_1}{p_1}), \cdots, R(\frac{q_n}{p_n})$ を並べ，繋げる事により得られる絡み目であるとする．Montesinos 結び目 $K = M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})$ に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 $\Sigma(K)$ は，$|H_1(\Sigma(K))| = \det K < \infty$ よりスモールザイフェルト多様体になる．

以上の事実と，本稿の主結果である定理 20，定理 23 を組み合わせる事で，それぞれ次の定理 28，定理 29 を得る．

定理 28. $K = M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})(|p_1|, |p_2|, |p_3| \geq 2)$ を S^3 内の Montesinos 結び目とし，$\Sigma(K)$ は L 空間であるとする．さらに，$\det K = |p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3|$ は 3 と互いに素であり，$\gcd(p_1, p_2, p_3)$, $\frac{\det K}{\gcd(p_1,p_2,p_3)}$ はともに square-free であるとする．このとき，K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

特に，p を 5 以上の 3 と互いに素，かつ square-free な奇数とし，正の偶数 a，正の奇数 b, c は，

$\cdot\, a > \min(b, c)$

$\cdot\, ab + ac - bc$ は 3 および p と互いに素，かつ square-free

を満たすとする．このとき，プレッツェル結び目 $P(-ap, bp, cp) = M(\frac{-1}{ap}, \frac{1}{bp}, \frac{1}{cp})$ は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

また，K_n を次の図 13 で示される，2 つの結び目 5_2 の symmetric union であるとする．$14 \mid n, n \neq 0$ のとき，K_n は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

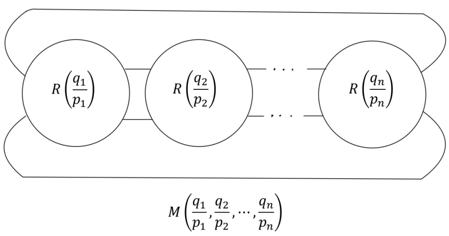


図 12　Montesinos 絡み目 $M(\frac{q_1}{p_1}, \cdots, \frac{q_n}{p_n})$

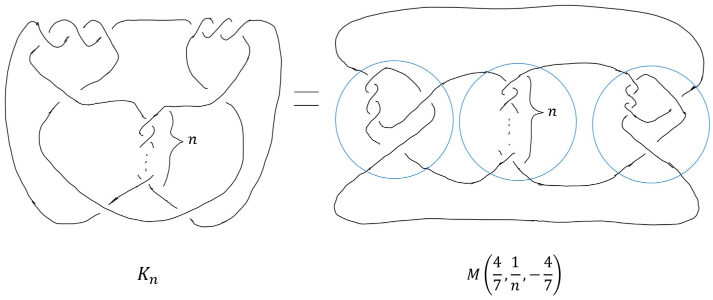


図 13　図に示した K_n は，$14 \mid n, n \neq 0$ のとき generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

定理 29. K を S^3 内の結び目とし，$\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーン手術で得られる L 空間であるとする．さらに，$\det K = 9p'(3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であり，K は Montesinos 結び目であり $M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})(|p_1|, |p_2|, |p_3| \geq 2)$ という表示をもつとする．このとき，K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

特に，結び目 $10_{65}, 10_{67}, 10_{77}$ は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす．

なお，[LM17, Example 4.3] では，定理 28 とは異なる形で記述される，（det 自体が square-free になる）ある種のプレッツェル結び目が cosmetic crossing conjecture を満たす事が紹介されている．また，$14 \mid n, n \neq 0$ のとき K_n は cosmetic crossing conjecture を満たす事が [Moo16] にて示され，[LM17, Example 4.5] でも紹介されている．

さらに，[Ito22, Corollary 1.11] では，定理 22 を用いて $10_{65}, 10_{67}, 10_{77}, 10_{108}, 10_{164}$ が cosmetic crossing conjecture を満たす事が示されているが，$10_{108}, 10_{164}$ は Montesinos 結び目としての表示をもたないため，定理 29 から直ちに generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかは不明である．

[LM17] においては交点数が少ない結び目に対し，cosmetic crossing conjecture を満たすかについてのテーブルが作られている．本稿においては generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかについて，交点数が少ない結び目に対し網羅

的に調べ，同様のテーブルを作る事はかなわなかった．こちらについても今後の検討課題といえる．

5 謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」において発表の機会を与えてくださった，世話人である早稲田大学の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます．また，私の修士課程の研究における軸であるデーン手術に関するテキスト [Mot22] の著者であり，本研究集会でお会いした際にも温かいコメントをいただいた日本大学の茂手木公彦先生，および，私の拙い発表に対し，セッションの座長を務められており，示唆に富むご質問をいただいた日本大学の市原一裕先生をはじめ，発表を聞いていただいた皆様に心より感謝申し上げます．

参考文献

[Bon23] J. Boninger, On the cosmetic crossing conjecture for special alternating links, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **10** (2023), 288–295; MR4631993

[Bon24] J. Boninger, (2024). An Alexander Polynomial Obstruction to Cosmetic Crossing Changes. arXiv preprint arXiv:2407.12763.

[Gai18] F. Gainullin, Heegaard Floer homology and knots determined by their complements, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 1, 69–109; MR3748239

[Ito22] T. Ito, Applications of the Casson-Walker invariant to the knot complement and the cosmetic crossing conjectures, Geom. Dedicata **216** (2022), no. 6, Paper No. 63, 15 pp.; MR4475472

[Kir78] R. C. Kirby, Problems in low dimensional manifold theory, in *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2*, pp. 273–312, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978; MR0520548

[Lic97] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, 175, Springer, New York, 1997; MR1472978

[LM13] M. Lackenby and G. R. Meyerhoff, The maximal number of exceptional Dehn surgeries, Invent. Math. **191** (2013), no. 2, 341–382; MR3010379

[LM17] T. Lidman and A. H. Moore, Cosmetic surgery in L-spaces and nugatory crossings, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 5, 3639–3654; MR3605982

[Mat10] D. Matignon, On the knot complement problem for non-hyperbolic knots, Topology Appl. **157** (2010), no. 12, 1900–1925; MR2646423

[MO08] C. Manolescu and P. Ozsváth, On the Khovanov and knot Floer homologies of quasi-alternating links, in *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2007*, 60–81, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2008; MR2509750

[Mon75] J. M. Montesinos-Amilibia, Surgery on links and double branched covers of S^3, in *Knots, groups, and* 3-*manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, pp. 227–259, Ann. of Math. Stud., No. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, ; MR0380802

[Moo16] A. H. Moore, Symmetric unions without cosmetic crossing changes, in *Advances in the mathematical sciences*, 103–116, Assoc. Women Math. Ser., 6, Springer, ; MR3654492

[Mot22] 茂手木公彦『デーン手術』, 共立出版 (2022)

[MY81] W. H. Meeks III and S.-T. Yau, The equivariant Dehn's lemma and loop theorem, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 2, 225–239; MR0630952

[OS05] P. Ozsváth and Z. Szabó, On the Heegaard Floer homology of branched double-covers, Adv. Math. **194** (2005), no. 1, 1–33; MR2141852

[Wal90] K. Walker, An extension of Casson's invariant to rational homology spheres, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **22** (1990), no. 2, 261–267; MR1016040

[Wat12] L. Watson, Surgery obstructions from Khovanov homology, Selecta Math. (N.S.) **18** (2012), no. 2, 417–472; MR2927239

レンズ空間内の双曲結び目でレンズ空間の連結和を得るデーン手術

祝井 堅太朗（京都大学大学院理学研究科）

1 イントロダクション

デーン手術においてよく知られている問題のケーブリング予想 [9] では，S^3 内の双曲結び目でのデーン手術で可約な多様体は得られないと予想されている．ケーブリング予想は未解決だが，レンズ空間ふたつの連結和は S^3 内の双曲結び目でのデーン手術で得られないことが示されている [10]．一方でレンズ空間内の双曲結び目でのデーン手術でレンズ空間の連結和を得るものは存在し，Baker によるレンズ空間のケーブリング予想で，そのようなデーン手術で得られる多様体は $L(r,1)\#L(s,1)$ の形だと予想されていた [1]．しかし，Gainullin によりレンズ空間のケーブリング予想の反例にあたる，$L(15,4)$ 内の双曲結び目でのデーン手術で $L(3,2)\#L(5,3)$ を得るものが構成された [8]．Gainullin の構成では，ザイフェルト手術についての研究で Deruelle,Miyazaki,Motegi により導入されたザイフェルター [3] のアイデアが使われている．今回はザイフェルターをより詳しく扱うことで Gainullin の構成を一般化し，レンズ空間のケーブリング予想の反例を無限個構成する．

2 準備

2.1 ザイフェルター

この章では [3] で導入されたザイフェルターについて [3], [11] を参考に確認する．デーン手術やザイフェルト多様体の基本的な内容も [11] を参照する．

2.1.1 退化したザイフェルトファイブレーション

M をザイフェルト多様体とし，$t_1,\cdots,t_k$ をファイバーとする．M' を，各ファイバーについてメリディアンが正則ファイバーとなるようにデーン手術した多様体とする．このとき，$M-\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{int}N(t_i)$ に制限された M のファイブレーションは M' に拡張できないが，各 $N(t_i)$ の中心線を指数 0 の特異ファイバーとみなし，退化したザイフェルトファイブレーションを持つと考える．退化したザイフェルトファイブレーションを持つ多様体として以下がある．

補題 1. 底曲面が S^2 であって，退化したファイバーが 1 本，ザイフェルト不変量 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ を持つ特異ファイバーが 2 本の退化したザイフェルトファイバー構造を持つ多様体は $L(a_1,-b_1)\#L(a_2,-b_2)$ である．

2.1.2 ザイフェルト手術のザイフェルター

S^3 内の結び目 K の m デーン手術を組 (K,m) で表す．(K,m) と (K',m') は，K と K' がアイソトピックかつ m=m' のとき同じデーン手術であるといい，$(K,m)=(K',m')$ と書く．

定義 2. $K(m)$ がザイフェルトファイブレーション，または退化したザイフェルトファイブレーションを持つとき，(K,m) をザイフェルト手術とよぶ．

定義 3. (K,m) をザイフェルト手術とし，c を K と交わらない結び目とする．以下の条件を満たすとき，c をザイフェルト手術 (K,m) のザイフェルターとよぶ．

(i) c は S^3 で自明な結び目である．
(ii) c は $K(m)$ の，ある（退化した）ザイフェルトファイブレーションにおいて正則ファイバー，例外ファイバーあるいは退化したファイバーになる．

ザイフェルターの重要な性質として，遺伝性がある．

補題 4 ([3, Proposition 2.6])**.** (K,m) をザイフェルター c を持つザイフェルト手術とする．(K,m) を c で n 回ツイストして得られる (K_n,m_n) はザイフェルト手術であり，c は (K_n,m_n) のザイフェルターになっている．

c の像も c と書いていることに注意する．ザイフェルターの定義より c は自明な結び目なので c での $-1/n$ 手術が c に沿った n ツイストに対応する．一方で c は $K(m)$ のあるファイブレーションにおいてファイバーになっている．よって c のファイバー近傍を取り除き，埋め戻して得られる $K_n(m_n)$ はザイフェルトファイブレーションまたは退化したザイフェルトファイブレーションを持つので (K_n,m_n) もザイフェルター c を持つザイフェルト手術である．このことは図式を用いると以下のように表される．

$$\begin{tikzcd}
K\subset S^3 \arrow[r, "n-\text{twist along } c"] \arrow[d, "m-\text{surgery on } K"'] & K_n\subset S^3 \arrow[d, "m_n-\text{surgery on } K_n"] \\
K(m) \arrow[r, "\text{surgery on } c"'] & K_n(m_n)
\end{tikzcd}$$

ザイフェルト手術の遺伝性は，今紹介したザイフェルターに沿ったツイストだけではなく，ふたつのザイフェルターが張るアニュラスに沿ったツイストでも考えられる．

定義 5. (K,m) をザイフェルト手術とし，c_1 と c_2 を (K,m) のザイフェルターとする．c_1 と c_2 が $K(m)$ の１つの（退化した）ザイフェルトファイブレーションで同時にファイバーになるとき，組 $\{c_1,c_2\}$ を (K,m) のザイフェルター対とよぶ．特に c_1 と c_2 が S^3 内のアニュラスの境界になっているとき，順序対 (c_1,c_2) をザイフェルターのアニュラス対とよぶ．

補題 6 ([3, Proposition 2.33])**.** (K,m) をザイフェルターのアニュラス対 (c_1,c_2) を持つザイフェルト手術とする．(K,m) を c_1,c_2 が張るアニュラスで n 回ツイストして得られる (K_n,m_n) はザイフェルト手術であり，(c_1,c_2) は (K_n,m_n) のザイフェルターのアニュラス対になっている．

c_1,c_2 の像も c_1,c_2 と書いていることに注意する．ザイフェルターのアニュラス対の定義より，$c_1\cup c_2$ が $(2l,2)$ トーラス絡み目とすると手術 $c_1\cup c_2(l-1/n,l+1/n)$ が c_1,c_2 が張るアニュラスに沿った n ツイス

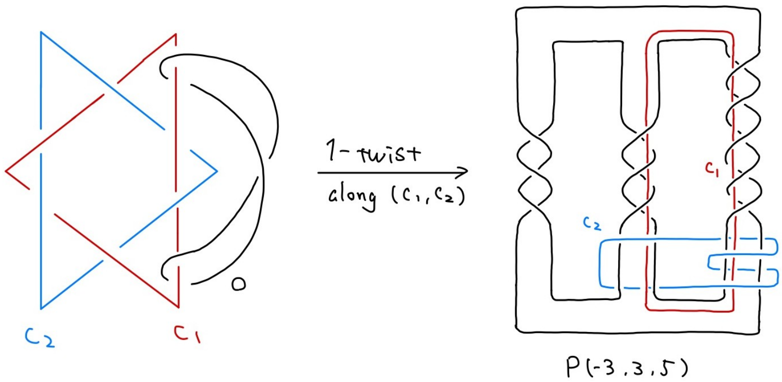


図 1

トに対応する．一方で c_1, c_2 は $K(m)$ のあるファイブレーションにおいて同時にファイバーになっている．よって c_1, c_2 のファイバー近傍を取り除き，埋め戻して得られる $K_n(m_n)$ はザイフェルトファイブレーションまたは退化したザイフェルトファイブレーションを持つので (K_n, m_n) もザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) を持つザイフェルト手術である．このことは図式を用いると以下のように表される．

$$\begin{tikzcd} K \subset S^3 \arrow[r, "n-\text{twist along } (c_1,c_2)"] \arrow[d, "m-\text{surgery on } K"'] & K_n \subset S^3 \arrow[d, "m_n-\text{surgery on } K_n"] \\ K(m) \arrow[r, "\text{surgery on } (c_1,c_2)"'] & K_n(m_n) \end{tikzcd}$$

以上の遺伝性により，ザイフェルト手術がザイフェルターを持つとき，ザイフェルターを介して別のザイフェルト手術が得られる．これまで知られているほとんどのザイフェルト手術がザイフェルターを介して自明な結び目でのザイフェルト手術につながっていることがわかっている [3, 4, 5, 6, 7].

2.2 主結果に用いるザイフェルト手術とそのザイフェルター

図 1 左にあるのはザイフェルト手術 $(O, 1)$ とそのザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) である（[11] 図 12.13）．c_1, c_2 でバウンドされるアニュラスで O を 1-twist すると，右のプレッツェル結び目 $P(-3, 3, 5)$ となりザイフェルト手術 $(P(-3, 3, 5), 1)$ を得る．Gainullin の構成では右のザイフェルト手術 $(P(-3, 3, 5), 1)$ とそのザイフェルター c_1 が使われている．今回の構成では左のザイフェルト手術 $(O, 1)$ とそのザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) を使う（$(O, 1)$ と $(P(-3, 3, 5), 1)$ のどちらを使っても構成できるデーン手術は変わらないが，計算の都合で $(O, 1)$ を選ぶ）．

ザイフェルト手術 (K, m) のザイフェルター c に対して $H_1(\partial N(c))$ の生成系をふたつ考える．ひとつ目は K での手術前の S^3 において一意に定まるメリディアン μ とロンジチュード λ による $\{\mu, \lambda\}$．ふたつ目は K での手術後のザイフェルト多様体 $K(m)$ において断面 S を選ぶごとに定まる $s = S \cap \partial N(c)$ と正則ファイバー h による $\{s, h\}$（向きの選び方は [11] に従う）．図 1 左の c_1, c_2 についてそれぞれ $\mu_i, \lambda_i, s_i, h_i \in H_1(\partial N(c_i))$ には，断面の選び方や途中の計算を省略するが以下の関係が成り立つ．

$$c_1 : \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

そして，$O(1)=S^3$ のもう一本の特異ファイバー c について $\mu, s, h \in H_1(\partial N(c))$ には以下の関係が成り立つ．

$$\mu = 3s + h$$

以上の情報をもとに次の章ではデーン手術の構成をする．

3 デーン手術の構成

定理 7. 整数 n に対して，$L(9n+6, 3n+1)$ 内の結び目 K_n でのデーン手術で $L(3,2)\#L(3n+2, 2n+1)$ を得るものが存在する．

（証明の概略）
デーン手術の構成は次の図式で表される．

$$\begin{array}{ccc} O \subset S^3 & \xrightarrow[3+\frac{1}{n}\text{ surgery on } c_2]{6\text{ surgery on } c_1} & K_n \subset L(9n+6, 3n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(1) & & \\ = S^2((1,0),(2,-1),(3,1)) & \xrightarrow[\text{surgery on } c_2]{\text{degenerated surgery on } c_1} & L(3,2)\#L(3n+2, 2n+1) \end{array}$$

- 左上から右上について
  O でデーン手術する前の S^3 において $c_1 \cup c_2$ はトーラス絡み目 $T_{2,6}$ であるので，c_1 で 6 手術をし c_2 で $3+1/n$ 手術をすると $L(9n+6, 3n+1)$ を得る．

- 左下から右下について
  $O(1)=S^3$ において前の章にあるとおり

  $$c_1 : \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad c : \mu = 3s + h$$

  である．よって c_1 での 6 手術はファイブレーションを退化させ，c_2 での $3+1/n$ 手術により新たなメリディアン ${\mu_2}'$ は

  $${\mu_2}' = (3n+2)s - (2n+1)h$$

  をみたす．補題 1 より得られる多様体は $L(3n+2, 2n+1)$ である．

今構成したデーン手術のうち $n \neq -1$ のものは双曲結び目での可約手術である（証明略）．$n \neq -2, -1, 0$ のものはレンズ空間のケーブリング予想の反例になっていて，$n=1$ のものは Gainullin により構成された最初の反例に相当する．

このほかにも図 2 にあるザイフェルト手術とそのザイフェルターのアニュラス対を用いて同様の構成をすることで，レンズ空間のケーブリング予想の反例が無限個得られることを確認している．

定理 8. 整数 n に対して以下のデーン手術が存在する．

(i) $L(9n+6, 3n+1) \longrightarrow L(3,2)\#L(3n+2, -3)$
(ii) $L(8n+6, 4n+1) \longrightarrow L(2,1)\#L(4n+3, -4)$

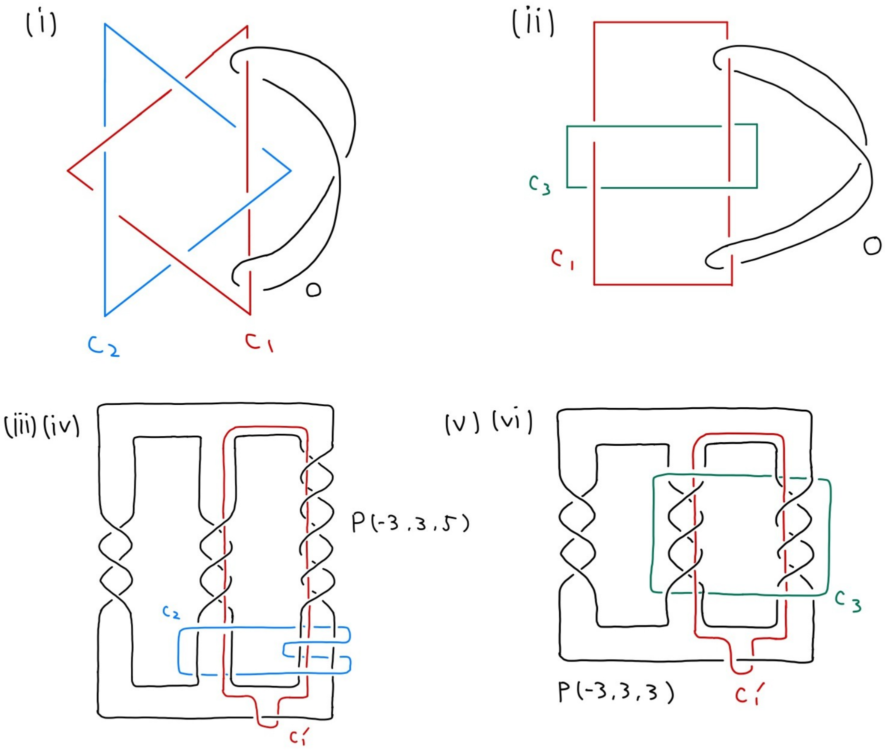


図 2

(iii) $L(21n-2, 7n-3) \longrightarrow L(3,2)\#L(3n+2,-3)$
(iv) $L(9n+3, 3n+2) \longrightarrow L(3,2)\#L(7n-3,-7)$
(v) $L(18n+1, 9n-4) \longrightarrow L(2,1)\#L(4n+3,-4)$
(vi) $L(8n+2, 4n+3) \longrightarrow L(2,1)\#L(9n-4,-9)$

そして，
(i) $n \neq -1$，(ii) $n \neq -1$ は双曲結び目での手術.
(iv)，(vi) は有限個の整数 n を除いて双曲結び目での手術.
(iii)，(v) は SnapPy[2] による計算を認めると，有限個の整数 n を除いて双曲結び目での手術.

参考文献

[1] K. L. Baker, A cabling conjecture for knots in lens spaces, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **20** (2014).
[2] M. Culler, N. M. Dunfield, and J. R. Weeks. SnapPy, a computer program for studying the topology of 3-manifolds. Available at http://snappy.computop.org (01/09/2013).
[3] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots, Mem. Amer. Math. Soc. **217** (2012)
[4] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots. II. The Berge's lens surgeries, Topology Appl. **156** (2009)

[5] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots, III, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014)

[6] A. Deruelle et al., Networking Seifert surgeries on knots IV: Seiferters and branched coverings, in *Geometry and topology down under*

[7] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Neighbors of Seifert surgeries on a trefoil knot in the Seifert surgery network, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **20** (2014)

[8] F. Gainullin, Reducible surgery in lens spaces and seiferters, J. Knot Theory Ramifications **31** (2022).

[9] F. J. González-Acuña and H. Short, Knot surgery and primeness, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986)

[10] J. E. Greene, L-space surgeries, genus bounds, and the cabling conjecture, J. Differential Geom. **100** (2015)

[11] 茂手木 公彦, デーン手術, 共立出版 (2022).

素数べきを周期としてもつ結び目の HOMFLY 多項式について

松嶋 柚希
（東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻）

概要

結び目 K が周期 r をもつとは，S^3 上の周期 r の向きを保つ同相写像 f で，$f(K) = K$, $\mathrm{Fix}(f) \cong S^1$ かつ $\mathrm{Fix}(f) \cap K = \emptyset$ をみたすものが存在するときのことを言う．ここで，$\mathrm{Fix}(f)$ は f の固定点を表す．また，周期的結び目の定義について，Smith 予想の肯定的な解決により，f は，$\mathrm{Fix}(f)$ が自明な結び目である，S^3 内の単純な回転であることが分かっている．

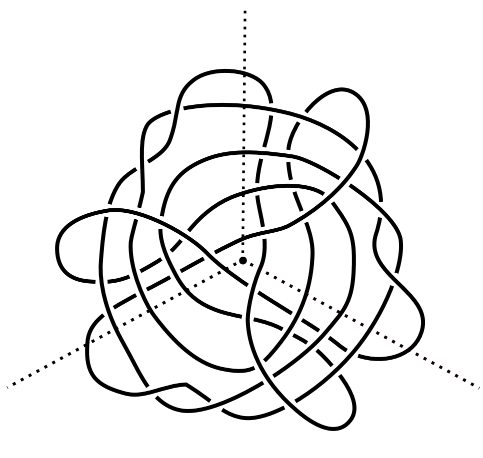
結び目のもつ周期性の研究には，Jones 多項式に代表される多項式不変量が非常に有効であり，1980 年後半から 1990 年後半まで，村杉 [3]，Przytycki [4, 5]，Traczyk [7, 6]，横田 [8] 等の研究が知られている．本論文は，奇素数周期をもつ結び目に対する [8] の結果を素数べき周期をもつ結び目の HOMFLY 多項式 [1] に拡張する試みであり，9 周期をもつ結び目に対して [8] の拡張となる結果を得た．

1 結び目の周期性と HOMFLY 多項式

はじめに，結び目の周期性と，向き付けられた絡み目の HOMFLY 多項式 [1] を定義する．

定義 1.1 (周期性). 結び目 K が周期 r をもつとは，S^3 上の周期 r の向きを保つ同相写像 f で，$f(K) = K$, $\mathrm{Fix}(f) \cong S^1$ かつ $\mathrm{Fix}(f) \cap K = \emptyset$ をみたすものが存在するときのことを言う．

例 1.2. 以下は 3 周期をもつ結び目の図式である．



定義 1.3 (HOMFLY 多項式)**.** S^3 内の向き付けられた絡み目 L に対して，以下の (1),(2) をみたす関数

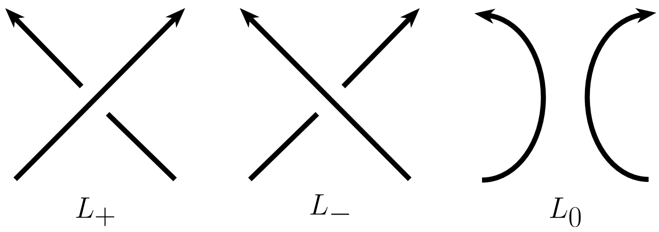
$$P_L : \{\ S^3\text{内の向き付けられた絡み目}\ \} \to \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$$

が一意的に存在する．この $P_L(v,z)$ を，向き付けられた絡み目の HOMFLY 多項式と言う．

(1) $P_O(v,z) = 1$ である．ここで，O は自明な結び目を指す．

(2) 以下の図で表されるような L_+, L_-, L_0 に対して，次の関係式が成り立つ．

$$v^{-1}P_{L_+}(v,z) - vP_{L_-}(v,z) = zP_{L_0}(v,z)$$



注意 1.4. 絡み目 L に対して，L の成分数を $\#L$ とすると，ある多項式 $P_{2i}(v;L) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ が存在して，

$$P_L(v,z) = \sum_{i \geq 0} P_{2i}(v;L) z^{2i+1-\#L}$$

と表されることが知られている．

2 HOMFLY 多項式を用いた周期性の判定法

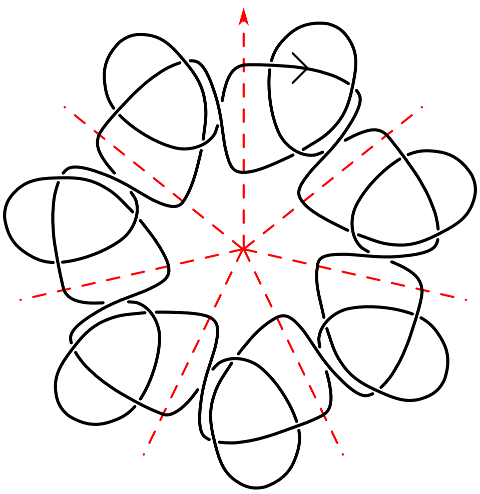
ここでは，Traczyk と横田による，周期性に関する HOMFLY 多項式を用いた先行研究を述べる．詳細は，[7, 8] を参照されたい．

以下では，奇素数 r に対し，K は周期 r の結び目とし，回転軸との絡み数は k とする．

定理 2.1 ([7, Theorem 1.1])**.** $P_0(v;K) = \sum a_{2i}v^{2i}$ とすると，$2i+1 \not\equiv \pm k \pmod r$ のとき，$a_{2i} \equiv a_{2i+2} \pmod r$ が成立する．

定理 2.2 ([8, Main Theorem])**.** $2i < r-1$ に対して，r と k により定まる整数 b_{2i} が存在し，$P_{2i}(v;K) \equiv b_{2i}P_0(v;K) \pmod r$ が成立する．

例 2.3. 以下の 7 周期の結び目 K を考える．下図のように向きを定めると，回転軸との絡み数は 2 となる．



この結び目の HOMFLY 多項式 $P_K(v,z)$ は,

$$\begin{aligned}
&4v^{-8}-10v^{-6}+7v^{-4}\\
&+(10v^{-8}-74v^{-6}+147v^{-4}-119v^{-2}+35)z^2\\
&+(6v^{-8}-106v^{-6}+455v^{-4}-735v^{-2}+560-196v^2+21v^4)z^4\\
&+(v^{-8}-49v^{-6}+448v^{-4}-1351v^{-2}+1750-1141v^2+364v^4-43v^6+v^8)z^6+\cdots\\
&\equiv 4v^{-8}+4v^{-6}+(3v^{-8}+3v^{-6})z^2+(6v^{-8}+6v^{-6})z^4+(v^{-8}+6v^6+v^8)z^6+\cdots \pmod 7
\end{aligned}$$

となり，定理 2.1($k=2$)，定理 2.2 が成立していることが確かめられる．

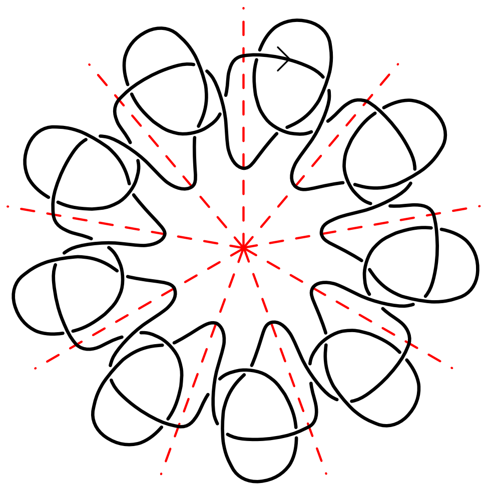
3 主結果

先行研究を受けて，奇素数周期に限らず，他の周期，特に，素数べきを周期としてもつ結び目の HOMFLY 多項式がもつ代数的性質を調べた．本論文では，9 周期の結果を述べる．これが今回の主結果である．

3.1 主結果

定理 3.1. K を 9 周期をもつ結び目とする．このとき，$0 \le 2i \le 4$ に対して，回転軸との絡み数により定まる整数 b_{2i} が存在し，$P_{2i}(v;K) \equiv b_{2i}P_0(v;K) \pmod 3$ が成立する．

例 3.2. 以下の 9 周期の結び目 K を考える．下図のように向きを定めると，この結び目と回転軸との絡み数は 2 となる．



この結び目の HOMFLY 多項式 $P_K(v,z)$ は,

$$\begin{aligned}
&5v^{-10} - 13v^{-8} + 9v^{-6} \\
&+ (20v^{-10} - 145v^{-8} + 306v^{-6} - 264v^{-4} + 84v^{-2})z^2 \\
&+ (21v^{-10} - 321v^{-8} + 1395v^{-6} - 2484v^{-4} + 2142v^{-2} - 882 + 126v^2)z^4 \\
&+ (v^{-10} - 253v^{-8} + 2079v^{-6} - 6636v^{-4} + 9996v^{-2} - 7938 + 3318v^2 - 624v^4 + 36^6)z^6 + \cdots \\
&\equiv 2v^{-10} + 2v^{-8} + (2v^{-10} + 2v^{-8})z^2 + (v^{-10} + 2v^{-8})z^6 + \cdots \pmod 3
\end{aligned}$$

となり，

$$P_0(v;K) \equiv P_2(v;K),\ P_0(v;K) \equiv 3P_4(v;K) \pmod 3$$

が確かめられる．

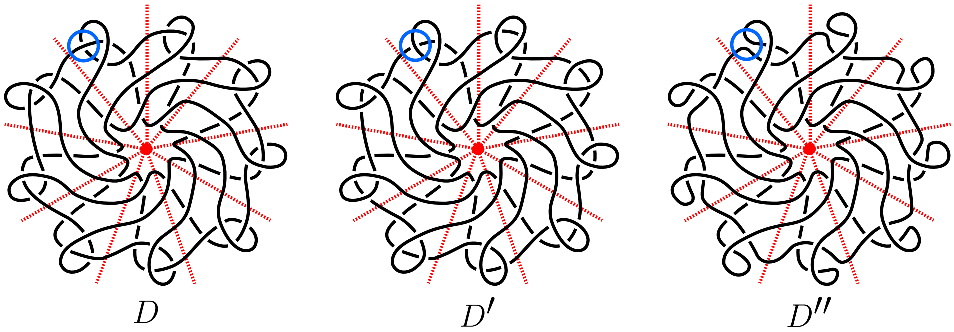
3.2 主結果の証明の概略

ここでは，主結果の証明の概略を述べる．この証明は Traczyk が行ったものを参考にしている．詳しくは，[6, 7] を参照されたい．

9 周期をもつ結び目 K の 9 周期をもつ図式を D とする．$n_2 \in \mathbb{Z}, n_1 \in \{0,1,2\}, n_0 \in \{1,2\}$ を用いて，K と回転軸との絡み数を $9n_2 + 3n_1 + n_0$ と表す．証明には，以下の命題 3.3 を用いる．

命題 3.3. T_{n_2} を $(9, 9n_2 + 3n_1 + n_0)$ トーラス結び目とする．このとき，$0 \le 2i \le 4$ に対して，$P_{2i}(v;T_{n_2}) \equiv b_{2i}P_0(v;T_{n_2}) \pmod 3$ が成立する．ここで，b_{2i} は 3 と n_0 で定まる整数である．

下図のように，図式 D のある交点の軌道上にある 9 個の交点をすべて交差交換または平滑化した図式をそれぞれ D'，D'' とする．



このとき，[8, Lemma 4.1] のと同様に，

$$v^{\mp 9}P_D(v,z) - v^{\pm 9}P_{D'}(v,z) \equiv \pm z^9 P_{D''}(v,z) \pmod 3$$

を得る．ここで，D'' の成分数は，2，4，10 のいずれかであることに注意する．D'' の成分数が 2 のとき，右辺の z の次数は 8 以上なので，$0 \leq 2i \leq 6$ に対して，

$$v^{\mp 9}P_{2i}(v;D) - v^{\pm 9}P_{2i}(v;D') \equiv 0 \pmod 3$$

が成立する．同様に，D'' の成分数が 4 のときは，$0 \leq 2i \leq 4$ に対して，

$$v^{\mp 9}P_{2i}(v;D) - v^{\pm 9}P_{2i}(v;D') \equiv 0 \pmod 3$$

が成立する．また，D'' の成分数が 10 のときは，すべての $2i$ に対して，

$$v^{\mp 9}P_{2i}(v;D) - v^{\pm 9}P_{2i}(v;D') \equiv \pm P_{2i}(v;D'') \pmod 3$$

が成立する．

Case.1　D が closed $(9n_2 + 3n_1 + n_0)$ braid のとき
n_2 に関する帰納法により主張を示す．D は，有限回の同時交差交換により $(9, 9n_2 + 3n_1 + n_0)$ トーラス結び目の図式に変形できるので，命題 3.3 より，D' が主張をみたすならば D も主張をみたすことを示せばよい．D'' が 2 成分または 4 成分のときは，$P_{2i}(v;D'') = 0$ より明らかである．D'' が 10 成分のときは，D'' は 9 周期をもつ結び目の図式 D_1 と，どの成分も 9 周期写像で固定されない 9 周期の 9 成分絡み目の図式 D_2 により構成されている．D_1 と D_2 の間の交点の軌道上の 9 個の交点を平滑化して得られる図式は 1 成分，すなわち結び目の図式になるので，$0 \leq 2i \leq 4$ に対して，

$$P_{2i}(v;D'') \equiv v^{18\nu}(v^{-1} - v)\sum_{j=0}^{i} P_{2j}(v;D_1)P_{2i-2j}(v;D_2) \pmod 3$$

が成立する．ただし，18ν は D_1 と D_2 の絡み数である．ここで，以下の補題を用いる．

補題 3.4. $2 \leq 2i \leq 6$ に対して，$P_{2i}(v;D_2) \equiv 0 \pmod 3$ が成立する．

補題 3.4 と帰納法の仮定より，$0 \leq 2i \leq 4$ に対して，

$$\begin{aligned} P_{2i}(v; D'') &\equiv v^{18\nu}(v^{-1} - v)P_0(v; D_2) \cdot b_{2i}P_0(v; D_1) \\ &\equiv b_{2i}P_0(v; D'') \pmod 3 \end{aligned}$$

が成立する．これにより，D' が主張をみたすならば D も主張をみたす．

<u>*Case.2*</u>　それ以外のとき

有限回の同時交差交換により，*Case.1* に帰着できる．　□

4　命題 3.3 と補題 3.4 の証明の方針

上の補題 3.4 の証明には以下の命題を用いる．

命題 4.1. L_n を $(9, 9n)$ トーラス絡み目とすると，$2 \leq 2i \leq 6$ に対して，$P_{2i}(v; L_n) \equiv 0 \pmod 3$ が成立する．

また，命題 3.3，命題 4.1 の証明は，[2, Theorem 9.6] と [8, Proposition 3.2] を用いる．

定理 4.2 ([2, Theorem 9.6])**.** n, m を互いに素な正の整数，K を (n, m) トーラス結び目とする．このとき，

$$P_K((\lambda q)^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\lambda^{\frac{(n-1)(m-1)}{2}}}{(1-\lambda q)\overline{[n]}} \sum_{\gamma+\beta+1=n} (-1)^{\beta} q^{\frac{\beta m + \gamma(\gamma+1)}{2}} \frac{\prod_{i=-\gamma}^{\beta}(q^i - \lambda q)}{[\beta]![\gamma]!}$$

が成立する．

命題 4.3 ([8, Proposition 3.2])**.**

$$\sum_{\gamma+\beta+1=n} (-1)^{\beta} q^{\frac{\beta m + \gamma(\gamma+1)}{2}} \frac{\prod_{i=-\gamma}^{\beta}(q^i - \lambda q)}{[\beta]![\gamma]!} = 1 - \lambda^n q^n$$

5　今後の展望

今回は，9 周期をもつ結び目の HOMFLY 多項式の代数的性質を得られた．25 周期のトーラス結び目については，命題 3.3 となる結果をすでに得ていることと，いくつかの r^2 周期のトーラス結び目の HOMFLY 多項式の計算結果から，以下が予想できる．

予想. K を r^2 周期をもつ結び目とする．このとき，$0 \leq 2i \leq r^2 - r - 2$ に対して，周期数と回転軸との絡み数により定まる整数 b_{2i} が存在し，$P_{2i}(v; K) \equiv b_{2i}P_0(v; K) \pmod r$ が成立する．

謝辞

本研究集会において，講演の機会をくださった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生をはじめとした関係の皆様に心より感謝申し上げます．

参考文献

[1] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Liclorish, K. Millet, A. Ocneanu, *A polynomial invariant of oriented knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (2) (1985), 239–246.

[2] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Math. Ann. **126**(1987), 335–388.

[3] K. Murasugi, *Jones polynomials of periodic links*, Math. Ann. **283** (1988), 319–329.

[4] J. H. Przytycki, *On Murasugi's and Traczyk's criteria for periodic links*, Pac. J. Math. **131** (1989), 465–478.

[5] ———, *An elementary proof of the Traczyk-Yokota criteria for periodic knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (5) (1995), 1607–1611.

[6] P. Traczyk, *A criterion for knots of period* 3, Topology Appl. **36** (1990), 275–281.

[7] ———, *Periodic knots and the skein polynomial*, Invent. Math. **106** (1991), 73–84.

[8] Y. Yokota, *The skein polynomial of periodic knots*, Math. Ann. **291**(1991), 281–291.

概単純線形グラフを持つ Brieskorn 球面に対する Ozsváth-Szabó の d 不変量

鈴木 龍正 (明治大学 研究・知財戦略機構) *

概要

Karakurt 氏とŞavk 氏は, 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の中で, 3 次元閉多様体を枠付き絡み目図式で表現する手術図式が概単純線形グラフで表現できる場合に焦点を当てた. そして, これらのホモロジー球面が既知の例とは独立に 3 次元ホモロジー同境群の $\mathbb{Z}$ 直和因子を生成することを, Ozsváth 氏と Szabó 氏の d 不変量の計算公式を考案することで明らかにした. 本稿では, この公式を精密化することで新たに判明した, ホモロジー同境にならない 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の対を紹介する. 特に, この精密化で現れる不等式において等号が成立するためのいくつかの十分条件と, この等号が成立しない無限個の例について紹介する.

1 導入

n 次元ホモロジー同境群 $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ は, Kervaire 氏と Milnor 氏 [KM63] の n 次元ホモトピー同境群 Θ^n に対する研究を基に, González–Acuña 氏 [GAn70] により導入された. 松本 堯生氏 [Mat78] と Galewski 氏と Stern 氏 [GS80] により, 三角形分割予想と Rokhlin 不変量, ホモロジー同境群とを関連付けることで, 三角形分割予想はホモロジー同境の差を除いた 3 次元多様体と 4 次元多様体との相互作用に関する問題に帰着された. その後, Manolescu 氏 [Man16] は [Mat78], [GS80] を基に三角形分割予想を否定的に解決することで, $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は低次元位相幾何学の研究において, より一層興味深い対象となった.

Rokhlin 氏 [Rok52] は $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ が非自明群であることを示した. その後, $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は Fintushel 氏と Stern 氏 [FS85] により $\mathbb{Z}$ 部分群, 古田 幹雄氏 [Fur90] により $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を持つことが判明した. 一方, Frøyshov 氏 [Frø02] により $\mathbb{Z}$ 直和因子を持つことが判明した. そして, Dai 氏, Hom 氏, Stoffregen 氏, Truong 氏 [DHST23] は Ozsváth 氏と Szabó 氏 [OS03] により構成された d 不変量と呼ばれる 3 次元ホモロジー球面に対する 3 次元ホモロジー同境の一種を用いて $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を含むことを示した. その後, Karakurt 氏とŞavk 氏 [KŞ22] により $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ に複数の $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子が存在することを, [KŞ20] の d 不変量の計算結果を用いて示された. また, $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は結び目コンコーダンス群 $\mathcal{C}$ との相互作用により低次元位相幾何学と結び目理論双方の観点から進展している. 例えば [Fur90] のゲージ理論を用いた手法で, 遠藤 久顕氏 [End95] は $\mathcal{C}$ の位相的にスライスな結び目で生成されるコンコーダンス部分群 $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を持つことを示し, Hom 氏 [Hom15] による $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子の存在を示すことに繋がった概念の類似で, [DHST23] で $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を含むことを示している. 一方, [DHST23], [KŞ22] で提示された $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を持つ無限系列は全て概単純線形グラフを持つ p が奇数かつ $\Sigma(p,q,r)$ で構成されているが, そのクラスの d 不変量の計算結果は [KŞ22] にある 6 種類のみである.

本研究では, [KŞ20] で得られた公式の精密化 (定理 3.1) から, いくつかの p が奇数で概単純線形グラフを持つ $\Sigma(p,q,r)$ の無限系列に対して d 不変量の計算を行った (命題 3.2, 3.3). そして, 定理 3.1 の下から評価する値に対する不等式関係を紹介する (定理 3.4). また, 定理 3.1 の不等式において等号が不成立になるための十分

* e-mail: suzukit519@meiji.ac.jp
本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106 の支援を部分的に受けたものです.

条件を構成 (定理 3.6) することで, 3 次元ホモロジー同境群の構造に新たな情報を提示し得る具体的な無限種類の無限系列を発見した (例 3.8, 3.9). 更に, 結び目コンコーダンス群への応用についても紹介する (定理 4.8).

また, Levine 氏と Lidman 氏 [LL19] により, 単連結な 4 次元スパインレス多様体 X (つまり, 全ての piecewise linear に X 内に埋め込まれた S^2 は X とホモトピー同値にならない) を検出する際に, d 不変量 $d(\Sigma(2,q,r))$ の計算が用いられている. $\Sigma(p,q,r)$ が任意の結び目 K の Dehn 手術 $S^3_r(K)$ $(r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ に微分同相になるかが不明で $p > 5$ を満たす $d(\Sigma(p,q,r))$ の計算結果は [KŞ20] を除いてほとんど存在しない. 概単純線形グラフを持つ $d(\Sigma(p,q,r))$ の計算を推進することは, 4 次元多様体の研究に対する貢献も期待できる.

本稿では特に断りがない場合は多様体は全て滑らか, 連結かつ向き付けられているとし, 写像は全て滑らかであるとする. また, 2 つの群 G, H が同型であることを $G \cong H$, 2 つの多様体 X, Y がホモトピー同値であることを $X \simeq Y$, 2 つの多様体 X, Y が微分同相であることを $X \approx Y$ と表記する. 2 つの多様体 X と Y との連結和を $X \# Y$, 向きづけられた多様体 Z に対し, その逆の向きが与えられた多様体を $-Z$ で表す.

1.1 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面

(p,q,r) を $1 \leq p < q < r$, $\gcd(p,q) = \gcd(q,r) = \gcd(r,p) = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とし, S^5_ε を中心が原点で半径が ε の 5 次元球面とする $(0 < \varepsilon \ll 1)$.

定義 1.1 (**3 次元 Brieskorn ホモロジー球面**) 3 次元位相多様体

$$\Sigma(p,q,r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = 0\} \cap S^5_\varepsilon$$

を **3 次元 Brieskorn ホモロジー球面**と呼ぶ.

注意 1.2 $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ とし, D^6_ε を中心が原点で半径が ε の 6 次元球体であるとする. $\Sigma(p,q,r)$ を平滑化 (smoothing) すると, Milnor ファイバー $M(p,q,r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = \delta\} \cap D^6_\varepsilon$ の境界になる. このことから, 以降では 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面を滑らかな多様体と見做すことにする.

注意 1.3 多様体 $\Sigma(p,q,r)$ は 3 次元ホモロジー球面であることから, Diophantine 方程式

$$e_0 pqr + p'qr + pq'r + pqr' = -1,\ 0 < p' < p,\ 0 < q' < q,\ 0 < r' < r$$

を満たす唯一の整数の組 (e_0, p', q', r') が存在する.
p, q, r, p', q', r' をそれぞれ $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$ と表記すると,

$$-\frac{p_i}{p'_i} = t_{i1} - \cfrac{1}{t_{i2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{t_{im_i}}}},\ t_{im_i} \neq -1\ (i = 1,2,3)$$

のように一意的に連分数展開される.

$t \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Q}$ とする. 3 次元閉多様体の微分同相類を変えない手術図式上の操作として, slam-dunk と呼ばれる操作がある (図 1). $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式は図 2 に示される頂点に数字が付いたグラフで表現される. 特に $\Sigma(1,q,r) = S^3$ である. また, $\Sigma(2,3,5)$ は Poincaré ホモロジー球面に微分同相である. Poincaré ホモロジー球面は 3 次元球面 S^3 に同相ではない 3 次元ホモロジー球面の最初の例として, よく知られている.

1.2 Ozsváth–Szabó の d 不変量とその性質

定義 1.4 (**Ozsváth–Szabó の** d **不変量** [OS03]) Y を 3 次元有理ホモロジー球面, $\mathfrak{s}(Y)$ を Y 上の spin^c 構造とする. **Ozsváth–Szabó の** d **不変量** (または **Ozsváth–Szabó の correction term**) $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ とは, $+$

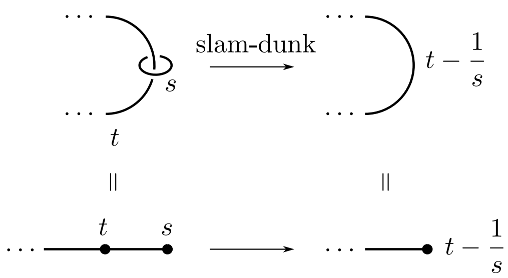


図 1　Slam-dunk.

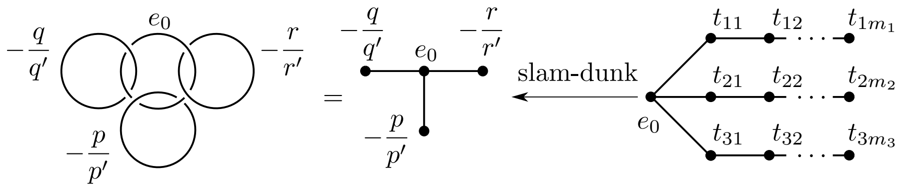


図 2　$\Sigma(p,q,r)$ の手術図式. 右は $\Sigma(p,q,r)$ に特異点解消 (resolution) を行うことで得られる 3 次元多様体の手術図式に相当し, Milnor ファイバーを用いた手法とは別に $\Sigma(p,q,r)$ の特異点を解消している.

版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^+(Y,\mathfrak{s}(Y))$ 内の ∞ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^\infty(Y,\mathfrak{s}(Y))$ の像内の捩れの無い元全体の中での最小の absolute grading のことである.

注意 1.5　[OS03] の Proposition 4.2 により, 一般に $d(-Y,\mathfrak{s}(Y)) = -d(Y,\mathfrak{s}(Y))$ が成り立つ. Y が 3 次元ホモロジー球面であるとき, spin^c 構造はただ一つであることから, この場合 $d(Y,\mathfrak{s}(Y))$ を $d(Y)$ と略記する. 更に $d(Y)$ は偶数である. また, $d(Y)$ はホモロジー同境不変量である. つまり, 任意の 3 次元ホモロジー球面に対して, $d(Y_1) \neq d(Y_2)$ であるならば, Y_1 と Y_2 はホモロジー同境ではないことが言える. ここでは, $d(Y) \geq 0$ を満たすように 3 次元ホモロジー球面 Y に向きを入れることにする.

例 1.6　S^3 に対する d 不変量は自明である: $d(S^3) = 0$. $L(p,q)$ を (p,q) 型レンズ空間とする. ここでは, $L(p,q)$ の向きを $d(L(p,q),0) \geq 0$ を満たすように入れる. $\mathfrak{s}(L(p,q))$ は $\mathbb{Z}_p$ の元と見做せる. $L(1,q) = L(1,0) = S^3$ より $d(L(1,q)) = 0$, $L(2,2m+1) = L(2,1)$ と [OS03] の Proposition 4.2, Proposition 4.8 により,

$$d(L(2,2m+1),n) = d(L(2,1),n) = \begin{cases} -(2-(-2)^2)/8 - d(L(1,2)) = 1/4 & (n=0), \\ -(2-0^2)/8 - d(L(1,2)) = -1/4 & (n=1). \end{cases}$$

$g(p,q) := (p-1)(q-1)/2$, $S(p,q) := \{ap+bq \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}\}$, $T(p,q)$ を (p,q) 型トーラス結び目とする. $S^3_r(K)$ を結び目 K に沿う S^3 上の係数 r の Dehn 手術とする ($r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$).

$$S^3_{-1/n}(T(p,q)) = \Sigma(p,q,pqn-1),\ S^3_{-1/n}(-T(p,q)) = \Sigma(p,q,pqn+1)$$

であることを利用することで, 次が示されている.

定理 1.7（Tweedy [Twe13]）　$d(\Sigma(p,q,pqn-1)) = 2|\{s \notin S(p,q) \mid s \geq g(p,q)\}|$, $d(\Sigma(p,q,pqn+1)) = 0$.

2　背景

2.1　Kirby 氏の低次元トポロジーの問題集の Problem 4.2

Kirby 氏の問題集の更新版 [Kir78] の Problem 4.2 に以下の未解決問題がある:

問題 2.1　どのような 3 次元ホモロジー球面が, ある可縮な 4 次元多様体の境界になるか.

注意 2.2　可縮な 4 次元多様体は 4 次元ホモトピー球体である．このことから d 不変量は, この未解決の分類問題の否定的解決を推進する手段になる: 3 次元ホモロジー球面 Y に対して $d(Y) \neq 0$ であるとき, Y は任意の 4 次元ホモトピー球体の境界にならない．つまり, Y は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならない.

注意 2.3　この未解決の分類問題を肯定的に解決する際には, Kirby 計算が有効である: Y がある可縮な 4 次元多様体の境界になることは, Y の手術図式が, ある 3, 4 ハンドルを持たない可縮な 4 次元多様体のハンドル図式 (の点付き円周を 0-framed knot に変更した図式) と同一であることを, Kirby 計算で証明できる.

2.2　3 次元ホモロジー同境群

Şavk 氏の survey [Şav24] を基に 3 次元ホモロジー同境群についての定義と背景について紹介する.

定義 2.4（h **同境**）　M_0, M_1 を n 次元ホモトピー球面とする.
ある $n+1$ 次元多様体 W が存在して,
・$\partial W = -M_0 \cup M_1$,
・包含写像 $M_0 \hookrightarrow W \hookleftarrow M_1$ が $M_0 \simeq W \simeq M_1$ を誘導する
が成り立つときに, M_0 と M_1 が h **同境**であるといい, $M_0 \sim M_1$ と表す.

$\sim$ は n 次元ホモトピー球面全体上の同値関係である．n 次元ホモトピー球面 M の $\sim$ による同値類を $[M]_\sim$ と表す.

定義 2.5（n **次元ホモトピー同境群**）　M_0, M_1 を n 次元ホモトピー球面とする.
$\Theta^n := \{n$ 次元ホモトピー球面 $\}/\sim$ は加法の演算 $[M_0]_\sim + [M_1]_\sim := [M_0 \# M_1]_\sim$ により可換群になる
(Θ^n の単位元は $[S^3]_\sim$, Θ^n の $[M]_\sim$ に対する逆元は $[-M]_\sim$ である).
Θ^n を n **次元ホモトピー同境群**という.

定義 2.6（**ホモロジー同境**）　M_0, M_1 を n 次元ホモロジー球面とする.
ある $n+1$ 次元多様体 W が存在して,
・$\partial W = -M_0 \cup M_1$,
・包含写像 $M_0 \hookrightarrow W \hookleftarrow M_1$ が $H_k(M_0;\mathbb{Z}) \cong H_k(W;\mathbb{Z}) \cong H_k(M_1;\mathbb{Z})$ for any $k \in \mathbb{Z}$ を誘導する
が成り立つときに, M_0 と M_1 が**ホモロジー同境**であるといい, $M_0 \sim_{\mathbb{Z}} M_1$ と表す.

$\sim_{\mathbb{Z}}$ は n 次元ホモトピー球面全体上の同値関係である．n 次元ホモロジー球面 M の $\sim_{\mathbb{Z}}$ による同値類を $[M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ と表す.

定義 2.7（n **次元ホモロジー同境群**）　M_0, M_1 を n 次元ホモロジー球面とする.
$\Theta^n_{\mathbb{Z}} := \{n$ 次元ホモロジー球面 $\}/\sim$ は加法の演算 $[M_0]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}} := [M_0 \# M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ により可換群になる
($\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ の単位元は $[S^3]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$, $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ の $[M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ に対する逆元は $[-M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ である).
$\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ を n **次元ホモロジー同境群**という.

$n \neq 3$ の場合は, [KM63] の Theorem 1.2 より Θ^n は有限群であり, [GAn70] の Theorem I.2 より $\Theta^n \cong \Theta^n_{\mathbb{Z}}$ であることが知られている．Poinceré 予想を解決した Perelman 氏による 3 本の論文により, 3 次元ホモロジー同境群 Θ^3 は自明である．一方, 3 次元ホモロジー同境群 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は非自明な群であることが判明していた:

定理 2.8（Rokhlin [Rok52]）　全射準同型 $\mu : \Theta^3_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_2$ が存在する.

その後, 3 次元ホモロジー同境群は無限群であることが判明した:

定理 2.9（Fintushel–Stern [FS85]） $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ 部分群を持つ: $\Theta^3_{\mathbb{Z}} > \mathbb{Z}[\Sigma(2,3,5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}[S^3_{-1}(T(2,3))]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

更に, 3 次元ホモロジー同境群は $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を持つことが判明した:

定理 2.10（Furuta [Fur90]） $\Theta^3_{\mathbb{Z}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2,3,6n-1)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[S^3_{-1/n}(T(2,3))]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

一方, 3 次元ホモロジー同境群は $\mathbb{Z}$ 直和因子をもつことも判明した:

定理 2.11（Frøyshov [Frø02]） ある非自明な $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して, $\Theta^3_{\mathbb{Z}} = A \oplus \mathbb{Z}[\Sigma(2,3,5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

更に, 3 次元ホモロジー同境群は $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子をもつことが判明した:

定理 2.12（Dai–Hom–Stoffregen–Truong [DHST23]） ある非自明な $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して,

$$\Theta^3_{\mathbb{Z}} = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1,4n+1,4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

その後, [DHST23] より簡便な手法が考案され, 3 次元ホモロジー同境群は複数種類の $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を持つことが示された:

定理 2.13（Karakurt–Şavk [KŞ22]） ある非自明な $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して,

$$\begin{aligned}\Theta^3_{\mathbb{Z}} = A &\oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1,4n+1,4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\ &\oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1,3n+2,6n+1)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1,3n+1,6n+5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.\end{aligned}$$

3 次元ホモロジー同境群 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ に対して以下の未解決問題がある:

問題 2.14 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}^\infty$ と同型であるか?

もし問題 2.14 が否定的に解決される, つまり $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ に捩じれ元が存在することが判明した場合は, $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ はより興味深い対象になると言える. 現時点では $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ の捩じれ元の候補は $\mathbb{Z}_2$ 型のみが [BC23] で構成されている.

2.3 概単純線形グラフを持つ ($pq+pr-qr=1$ を満たす) $\Sigma(p,q,r)$

$pq+pr-qr=1$ を満たす場合は, $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式は図 3 のようになる:

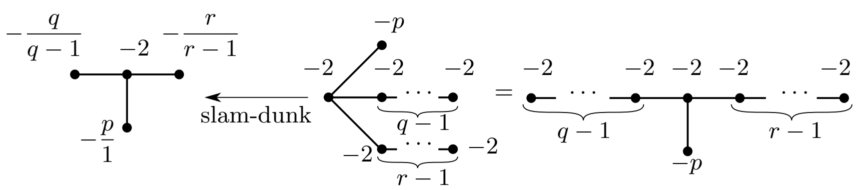


図 3 $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式.

図 3 の右のグラフは, 単純線形グラフに 1 個の頂点と 1 個の辺を枝分かれになるように繋ぐことで構成されることから, **概単純線形グラフ (almost simple linear graph)** と呼ばれる. $pq+pr-qr=1$ を満たす最も代表的な 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面は $\Sigma(2,3,5)$ であり, その概単純線形グラフは E_8 グラフである.

命題 2.15（Karakurt–Şavk [KŞ20]） p が偶数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき, $d(\Sigma(p,q,r)) = (q+r)/4$.

注意 2.16 p が偶数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき, 命題 2.15 により $d(\Sigma(p,q,r)) = -2\overline{\mu}(\Sigma(p,q,r))$ が分

かる. ここで, $\overline{\mu}(Y)$ は 3 次元ホモロジー球面 Y に対する Neumann–Siebenmann の $\overline{\mu}$ 不変量である. これにより, $\Sigma(p,q,r)$ の connected Heegaard Floer ホモロジーは自明になるから, $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ に新たな情報を提示できない. よって, $pq+pr-qr=1$ であるときは p が奇数の場合のみが $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ に対する重要な対象である.

$pq+pr-qr=1$ とする. このとき, r は p, q のみからただ一つに決まる.
p が奇数である場合に, $n_p := (p-1)/2$, $F_{p,q}(x,y) := (-(q+r)x^2+4qxy-4(q-p)y^2-4y+q+r)/4$,
$\mathfrak{L}_p := \{\pm1,\pm3,\ldots,\pm p\}\times\{0,1,\ldots,n\}$, $R_{p,q} := \{(a,m)\in\mathfrak{L}_p \mid F_{p,q}(a,m)\geq F_{p,q}(1,1)\}$ とする.

定理 2.17（Karakurt–Şavk [KŞ20]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in R_{p,q}} F_{p,q}(a,m).$$

注意 2.18 $pq+pr-qr=1$ であるとき, 命題 2.15 と定理 2.17 により $d(\Sigma(p,q,r))\neq 0$ である. よって, 概単純線形グラフを持つ 3 次元ホモロジー球面の範囲では, 分類問題 2.1 は解決している.

3 主結果

3.1 p が奇数の場合の精密化

$t_{p,q}$, $\alpha_{p,q}$ をそれぞれ $n_p=(p-1)/2$ を $q-p$ で割ったときの商, 剰余とする.
$\mathfrak{M}'_p := \{(a,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid a\in 2\mathbb{N}+1, a<m\leq n_p\}$ ($\mathbb{N}$ は正の整数全体), $\mathfrak{M}_{p,q} := \{(1,t_{p,q}+1)\}\sqcup\mathfrak{M}'_p$,
$S_{p,q} := \{(a,m)\in\mathfrak{M}_{p,q} \mid F_{p,q}(a,m)\geq F_{p,q}(1,1)\}$ とする.

定理 3.1（S. [Suz23]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in S_{p,q}} F_{p,q}(a,m) \geq F_{p,q}(1,t_{p,q}+1) = (t_{p,q}+1)(n_p+\alpha_{p,q}).$$

定理 2.17 で用いられた $\mathfrak{L}_p$ の点全体と定理 3.1 で用いられた $\mathfrak{M}_{p,q}$ の点の候補全体の様子は図 4 で表される.

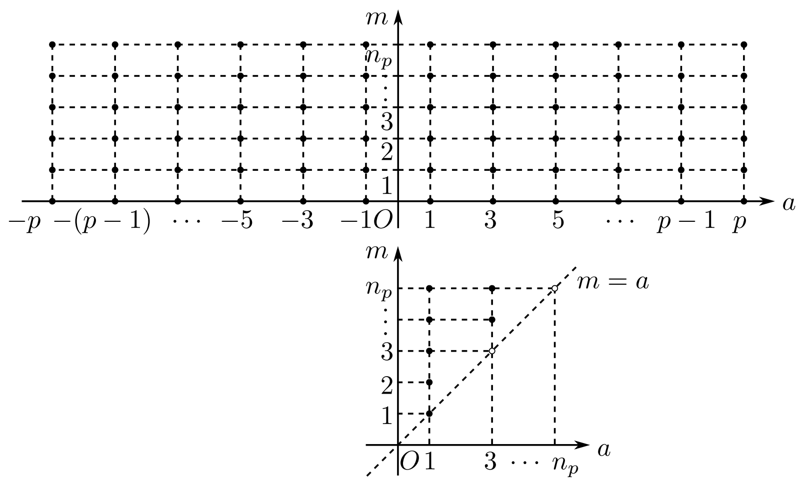


図 4 $\mathfrak{L}_p$ の点全体 (上) と $\mathfrak{M}_{p,q}$ の点の候補全体 (下).

定理 3.1 より, 以下の命題が成り立つ:

命題 3.2（S.） $\alpha_{p,q}=0$ の場合, $d(\Sigma(p,q,r))=(t_{p,q}+1)n_p$.

命題 3.3（S.） $1\leq l_{p,q}\leq 19$ の場合, $d(\Sigma(p,q,r))=(t_{p,q}+1)(n_p+\alpha_{p,q})$.

3.2　$pq + pr - qr = 1$ の場合の不等式関係

$$D(p,q,r) := \begin{cases} (t+1)(n+\alpha) & (p \in 2\mathbb{N}+1), \\ d(\Sigma(p,q,r)) & (p \in 2\mathbb{N}). \end{cases}$$

とし, $(p_i,\, q_i,\, r_i)$ を $1 < p_i < q_i < r_i$, $\gcd(p_i, q_i) = \gcd(q_i, r_i) = \gcd(r_i, p_i) = 1$, $p_i q_i + p_i r_i - q_i r_i = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とする $(i = 1, 2)$. [KŞ20] にある $\Sigma(p,q,r)$ の具体的な計算結果は全て $D(p,q,r) = d(\Sigma(p,q,r))$ になる. $D(p,q,r)$ は以下の不等式関係を満たす:

定理 3.4（S. [Suz23]）　$p_1 = p_2 = p$ かつ $q_1 \geq q_2$ であるとき

$$2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq D(p_1,q_1,r_1) \leq D(p_2,q_2,r_2) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

定理 3.1 と定理 3.4 の証明は [Suz23] に記載されている.

注意 3.5　p が奇数かつ $l_{p,q} \geq n_p$ である場合は, $D(p,q,r) = p-1$ である.

$s_{p,q} := l_{p,q}/n_p$ とする.

定理 3.6（S. [Suz23]）　十分大きい p に対して,
$s_{p,q} \in (1,2)$ かつ $s_{p,q} \neq 2u/(u+1)$ for any $u \in \mathbb{Z}_{>1}$ になる場合は, $d(\Sigma(p,q,r)) > F_{p,q}(1, t_{p,q}+1) = p-1$.

[証明]　$$F_{p,q}(a,m) = \frac{(2(a+1) - (2m-a-1)s_{p,q})(((2m-a+1)s_{p,q} - 2(a-1))n_p - 2(a-1))}{4s_{p,q}}$$

が成立する. 十分大きな p に対しては, $2s_{p,q}m \geq (s_{p,q}+2)(a+1)$ を満たす (a,m) が存在する. 更に, $s_{p,q} \neq 2u/(u+1)$ for any $u \in \mathbb{N}$ を満たす場合は, $b := m - a$ とすると

$$\frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a-1}{2} < b < \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a+1}{2}$$

を満たす整数 b が存在する.

$$\frac{(2(a+1) - (2m-a-1)s_{p,q})((2m-a+1)s_{p,q} - 2(a-1))}{4s_{p,q}} > 2 \iff \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a-1}{2} < b < \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a+1}{2}$$

に注意すると, $s_{p,q} \in (1,2)$ であるならば $F_{p,q}(a,m) > F_{p,q}(1, t_{p,q}+1) = p-1$ が成立する. □

注意 3.7　$s_{p,q} = 2u/(u+1)$ $(u \in \mathbb{N})$ であるならば, $(2 - s_{p,q})/s_{p,q} = 1/u$. このとき, $(a-1)/2 \in \mathbb{N}$ であることに注意すると, $(a-1)/(2u) < b < (a+1)/(2u)$ を満たす整数 b は存在しない.

定理 3.6 により, 定理 3.4 の不等式関係を満たさない無限種類のクラスの例を構成できる:

例 3.8（S.）　$(p,q,r) = (4t(2t+1)k + 4t + 1, (2t+1)(6t+1)k + 6t + 2, 4t(6t+1)k + 12t + 1)$
$((t,k) \neq (2,1))$ のとき, $d(\Sigma(p,q,r)) > p-1$.

例 3.9（S.）　$(p,q,r) = (t(2t-1)k + 4t - 1, t(3t-1)k + 6t - 1, (2t-1)(3t-1)k + 12t - 5)$
$(tk \in 2\mathbb{Z},\, (t,k) \neq (3,2), (4,1))$ のとき, $d(\Sigma(p,q,r)) > p-1$.

3.3　$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3}))$ の評価

Karakurt 氏とŞavk 氏により構成された $\Sigma(p,q,r)$ の具体例の中で, 現状唯一 d 不変量の値が完全には明らかではないクラスに $\{\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})\}_{k=1}^{\infty}$ がある (F_j は j 番目の Fibonacci 数). これらの一部に対

し, 非自明な不等式評価を可能にした:

命題 3.10（S.） $k \geq 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合に対して,

$$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) \geq F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(3,4) > F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(1, t_{F_{2k+1},F_{2k+2}} + 1) = F_{2k+1} - 1.$$

[証明] $F_{2k+1} \in 2\mathbb{Z}+1 \iff 2k+1 = 6j-1$ または $6j+1$ $(j \in \mathbb{Z})$ が成立することに注意する.
$l_{p,q} = F_{2k}$, $s_{F_{2k+1},F_{2k+2}} = 2F_{2k}/(F_{2k+1}-1)$ であるから,
$F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(3,4) = \dfrac{(2 - s_{F_{2k+1},F_{2k+2}})((3s_{F_{2k+1},F_{2k+2}} - 2)n_{F_{2k+1}} - 2)}{s_{F_{2k+1},F_{2k+2}}} = \dfrac{2(F_{2k-1}-1)(F_{2k}+F_{2k-2}-1)}{F_{2k}}$.
よって, $F_{2k}(F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(3,4) - F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(1,1)) = F_{2k-3}F_{2k-2} - 3F_{2k} + 2$ である. $k \geq 5$ より $2k+1 \geq 11$ である. $2k+1 = 11$ のときは, $F_{10}(F_{F_{11},F_{12}}(3,4) - F_{F_{11},F_{12}}(1,1)) = 110 > 0$ より主張が成立する. $2k+1 \geq 13$ のとき, $F_{2k-2} - 24 \geq F_{10} - 24 = 31 > 0$. $F_j = F_{j-1} + F_{j-2} < 2F_{j-1}$ $(j > 3)$ を用いると $F_{2k}(F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(3,4) - F_{F_{2k+1},F_{2k+2}}(1,1)) = F_{2k-3}F_{2k-2} - 3F_{2k} + 2 > F_{2k-3}F_{2k-2} - 24F_{2k-3} + 2 > 0$. □

注意 3.11 $k < 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合は, $l_{F_{2k+1},F_{2k+2}} \leq F_6 = 8$ より命題 3.3 から

$$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) = F_{2k+1} - 1.$$

系 3.12（S.） $k \geq 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合に対して, $\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})$ は
$\Sigma(F_{2k+1}, (3F_{2k+1}-1)/2, 3F_{2k+1}+2)$ や $\Sigma(F_{2k+1}, 2F_{2k+1}-1, 2F_{2k+1}+1)$ とホモロジー同境ではない.

3.4 先行研究と本研究で得られた $d(\Sigma(p,q,r))$ に対する結果

ここでは, p が奇数かつ概単純線形グラフを持つ $d(\Sigma(p,q,r))$ に対する先行研究 [KŞ20] と本研究の結果を図 5 にまとめる: $l_{p,q} = q - p \in [1, p-1] \cap \mathbb{Z}$ であることに注意する.

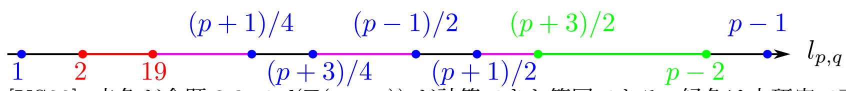


図 5 青色が [KŞ20], 赤色が命題 3.3 で $d(\Sigma(p,q,r))$ が計算できた範囲である. 緑色は本研究で不等式関係を満たさない例が得られた範囲である. 緑色と桃色の範囲は $\alpha_{p,q} = 0$ である場合 (命題 3.2) を除いて, 現時点で未解明の範囲である. 系 3.12 以外にもホモロジー同境にならない 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の対が本研究で新たに得られていることが, この図から分かる.

4 結び目コンコーダンス群への応用

4.1 結び目コンコーダンス群の定義と背景

K_0, K_1 を有向結び目 (S^1 から S^3 への滑らかな埋め込みの像), $K_0 \# K_1$ を K_0 と K_1 との連結和とする.

定義 4.1（結び目のコンコーダンス性） あるシリンダー C $(\simeq S^1 \times [0,1])$ が存在して,
・$C \subset S^3 \times [0,1]$,
・$\partial C = -(K_0) \cup K_1$ が成り立つときに, K_0 と K_1 が**コンコーダンスの関係にある**といい, $K_0 \sim_c K_1$ と表す.

$\sim_c$ は有向結び目全体上の同値関係である. 有向結び目 K の $\sim_c$ による同値類を $[K]_{\sim_c}$ と表す.

定義 4.2（結び目コンコーダンス群） $\mathcal{C} := \{$ 有向結び目 $\}/(\text{isotopy}, \sim_c)$ は加法の演算
$[K_0]_{\sim_c} + [K_1]_{\sim_c} := [K_0 \# K_1]_{\sim_c}$ により可換群になる ($[O]_{\sim_c}$: $\mathcal{C}$ の単位元 (O: 自明な結び目), $[-K]_{\sim_c}$: $\mathcal{C}$ の $[K]_{\sim_c}$ に対する逆元). $\mathcal{C}$ を**結び目コンコーダンス群**という.

$\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ を位相的にスライスな結び目で生成される $\mathcal{C}$ のコンコーダンス部分群とする.

p, q, r が全て奇数であるとき, プレッツェル結び目 $K(-p, q, r)$ 上で分岐される S^3 の 2 重分岐被覆が $\Sigma(p, q, r)$ である. 定理 2.10 の証明で使われたゲージ理論の手法により以下が示された:

定理 4.3（Endo [End95]） K_n がプレッツェル結び目 $K(-2n-1, 4n+1, 4n+3)$, $K(-2n-1, 2n+3, 2n^2+4n+1)$, $K(-2n-1, 2n+5, n^2+3n+1)$, $K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)$, $K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)$ のいずれかなら,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K_n].$$

注意 4.4 [Hom15] での研究が基になって, $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を持つことが示されている. また, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}_2^\infty$ 直和因子を持つことが保証されている. 問題 2.14 と同様に「$\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty$ と同型になるか」も未解決である.

注意 4.5 定理 4.3 にある $K(-p, q, r)$ に対応する $\Sigma(p, q, r)$ の d 不変量は [KŞ20] の Theorem 1.3 または命題 3.3 により $d(\Sigma(p, q, r)) = (t_{p,q}+1)(n_p + \alpha_{p,q})$ である.

定理 2.13 で $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を構成することにより, 定理 4.3 で構成された $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ で $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を生成するプレッツェル結び目の無限系列の一部が, $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ で $\mathbb{Z}^\infty$ 直和因子を生成することが判明した:

系 4.6（Karakurt–Şavk [KŞ22]） ある非自明な $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A_1, A_2 が存在して,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{TS}} = A_1 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)] = A_2 \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)].$$

4.2 結び目コンコーダンス群 $\mathcal{C}$ に対する結果

n を正の整数とし, (p_n, q_n, r_n) を $1 < p_n < q_n < r_n$, $\gcd(p_n, q_n) = \gcd(q_n, r_n) = \gcd(r_n, p_n) = 1$, $p_nq_n + p_nr_n - q_nr_n = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とする ($n \in \mathbb{N}$). p_n, q_n, r_n が全て奇数であるとき, $K(-p_n, q_n, r_n)$ は Alexander 多項式が $\Delta_{K(-p_n,q_n,r_n)}(t) = ((-p_nq_n + q_nr_n - r_np_n)(t-1)^2 + (t+1)^2)/(4t) = 1$ になるプレッツェル結び目である. また, この場合は常に Fintushel–Stern 不変量 $R(p_n, q_n, r_n)$ は 1 になり, 特に 0 より大きいことから, 定理 4.3 の証明を紐解くと実際には次が成立する:

定理 4.7（Endo [End95]） p_n, q_n, r_n を奇数とする. 全ての正の整数 n に対して, $p_nq_n + p_nr_n - q_nr_n = 1$ かつ $p_nq_nr_n < p_{n+1}q_{n+1}r_{n+1}$ を満たすとき

$$\mathcal{C}_{\mathrm{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_n, q_n, r_n)].$$

例 3.8 と例 3.9 を参考にすると, 定理 4.7 から次が成り立つ:

定理 4.8（S.） $(p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1}) = (4t(2t+1)(2k+1)+4t+1, (2t+1)(6t+1)(2k+1)+6t+2, 4t(6t+1)(2k+1)+12t+1)$,
$(p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2}) = (2t(2t-1)k+4t-1, 2t(3t-1)k+6t-1, 2(2t-1)(3t-1)k+12t-5)$ のとき,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{TS}} > \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1})],\ \mathcal{C}_{\mathrm{TS}} > \bigoplus_{t=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2})].$$

注意 4.9 $(t_1, k_1, i_1) \neq (t_2, k_2, i_2) \implies (p_{t_1,k_1,i_1}, q_{t_1,k_1,i_1}) \neq (p_{t_2,k_2,i_2}, q_{t_2,k_2,i_2})$ が成り立つことは, $(t_1, i_1) \neq (t_2, i_2) \implies s_{p_{t_1,k_1,i_1},q_{t_1,k_1,i_1}} \neq s_{p_{t_2,k_2,i_2},q_{t_2,k_2,i_2}}$ と $(t_1, i_1) = (t_2, i_2)$ かつ $k_1 \neq k_2$ $\implies p_{t_1,k_1,i_1} \neq p_{t_2,k_2,i_2}$ であることから従う. t, k の固定の仕方は無限通りあるので, 定理 4.8 は $\mathcal{C}_{\mathrm{TS}}$ の具体的な $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を可算無限通り検出している.

謝辞

本講演と本稿の作成の機会を与えてくださった本研究集会の運営に携わった皆様に感謝致します. 本稿の内容を書く際に参考になった貴重な意見や助言をしてくださった黒田 直樹氏, 高野 暁弘氏, 市原 一裕氏, 佐野 岳人氏, 今野 北斗氏, 飯田 暢生氏に感謝致します. 改めて, 今回の研究内容についての背景や方向性について多大な助言をしてくださった Oğuz Şavk 氏, 本研究について定期的に助言をしてくださった丹下 基生氏と遠藤 久顕氏に, この場を借りて感謝申し上げます. 最後に, 講演を聞いていただいた全ての方に感謝を申し上げます.

参考文献

[BC23] Keegan Boyle and Wenzhao Chen, *Negative amphichiral knots and the half-Conway polynomial*, Rev. Mat. Iberoam. **40** (2024), no. 2, 581–622.

[DHST23] Irving Dai, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen, and Linh Truong, *An infinite-rank summand of the homology cobordism group*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 12, 2365–2432.

[End95] Hisaaki Endo, *Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group*, Topology Appl. **63** (1995), no. 3, 257–262.

[Frø02] Kim A. Frøyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552.

[FS85] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 2, 335–364.

[Fur90] Mikio Furuta, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355.

[GAn70] Francisco J. González–Acuña, *On homology spheres*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1970, Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

[GS80] David E. Galewski and Ronald J. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 1, 1–34.

[Hom15] Jennifer Hom, *An infinite-rank summand of topologically slice knots*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 2, 1063–1110.

[Kir78] Rob Kirby, *Problems in low dimensional manifold theory*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 273–312, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978. ISBN:0-8218-1433-8

[KM63] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.

[KŞ20] Çağrı Karakurt and Oğuz Şavk, *Ozsváth-Szabó d-invariants of almost simple linear graphs*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 5, 2050029, 17 pp.

[KŞ22] Çağrı Karakurt and Oğuz Şavk, *Almost simple linear graphs, homology cobordism and connected Heegaard Floer homology*, Acta Math. Hungar. **168** (2022), no. 2, 454–489.

[LL19] Adam S. Levine and Tye Lidman, *Simply connected, spineless 4-manifolds*, Forum Math. Sigma **7** (2019), Paper No. e14, 11 pp.

[Man16] Ciprian Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 1, 147–176.

[Mat78] Takao Matumoto, *Triangulation of manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 3–6, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978. ISBN:0-8218-1433-8

[OS03] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261.

[Rok52] Vladimir A. Rohlin, *New results in the theory of four-dimensional manifolds*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **84** (1952), 221–224.

[Twe13] Eamonn Tweedy, *Heegaard Floer homology and several families of Brieskorn spheres*, Topology Appl. **160** (2013), no. 4, 620–632.

[Şav24] Oğuz Şavk, *A survey of the homology cobordism group*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **61** (2024), no. 1, 119–157.

[Suz23] Tatsumasa Suzuki, *The d-invariant of any Brieskorn homology sphere with an equation*, arXiv:2310.14279.

結び目ホモロジーとシンプレクティック・コンタクト幾何学

飯田暢生

2025 年 1 月 30 日

概要

種々の結び目ホモロジーのサーベイを行い, さらに 筆者らの共同研究で $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten 理論を用いて新しく導入した結び目コホモロジー理論およびそれから構成されるスライス-トーラス不変量 q_M について概説する.

3 次元多様体 Y 内の成分数 l の絡み目とは, l 個の S^1 の非交和の S^3 への埋め込み $L : \amalg_l S^1 \hookrightarrow Y$ のことをいい, その中でも成分数 l が 1 であるものを Y 内の結び目という. 例えば, l 枚の D^2 の滑らかな埋め込み $\amalg_l D^2 \hookrightarrow Y$ の境界である絡み目を Y 内の l 成分の自明絡み目 (unlink) といい $U_l \subset Y$ と書く. 特に成分数 l が 1 であるものを自明結び目 (unknot) といい, $U \subset Y$ と書く. 結び目を (up to アイソトピーで) 分類すること, 結び目の不変量を構成したりそれらの代数的性質や幾何との関係を調べることは結び目理論における基本的な問題であり, 組み合わせ的アプローチ, 幾何的なアプローチなどさまざまな研究方法がある. また, 結び目は, 低次元トポロジーにおいて, 分岐被覆やさまざまな手術 (例えば, 3 次元多様体の Dehn 手術, $T^2 \times D^2$ が埋め込まれた 4 次元多様体の Fintushel-Stern 手術はその代表例である) を通して, 豊富な具体例や問を提供する. 本稿では 4 次元の視点および, シンプレクティック・コンタクト幾何の視点で結び目理論を論じたい. [*1]

1 結び目理論のサーベイ: 4 次元& シンプレクティック・コンタクト幾何の視点から

1.1 Seifert 曲面/種数 (絡み目の種数) と, Murasugi 曲面/種数 (4-ball 種数, スライス種数), その古典的アプローチ

最も基本的で盛んに研究されているのは $Y = S^3$ 内の絡み目であり, 以下これを考える. 与えられた有向絡み目 $L \subset S^3$ の Seifert 曲面とは, S^3 に滑らかに埋め込まれた有向曲面 S であって, $\partial S = L$ であるもののことをいい, L の Murasugi 曲面とは, D^4 に滑らかかつ proper に埋め込まれた有向曲面 S であって, $\partial S = L$ であるものをいう.

結び目 K の連結 Seifert 曲面の種数の最小値は Seifert 種数 (あるいは単に結び目/絡み目の種数) とよばれ, ここではこれを $g_3(K)$ と書く. 結び目 K の連結 Murasugi 曲面の最小値は 4-ball 種数 (あるいはスライス種数, Murasugi 種数) とよばれ, ここではこれを $g_4(K)$ と書く. g_3, g_4 の有向絡み目への拡張を考えるとき, 連結な曲面に限る場合もあれば (closed component を持たない) 非連結な曲面を許して考える場合もあり, 種数概念にもさまざまな可能性があり得る. 連結な Seifert/Murasugi 曲面を考える際には, 同様に種数の最小値を $g_3(L), g_4(L)$ のように書くことにする. 非連結な曲面を許し, Euler 数 $\chi(S)$ の最大値 $\chi_3(L)$, $\chi_4(L)$ を考えるというのはまた一つの立場である. 後述する locally flat なものに対しても同様である. Murasugi 曲面の定義で, 滑らかな埋め込みの代わりに, locally flat な埋め込み[*2] を考えたバージョンは位相的 4-ball 種数とよばれ, ここでは $g_4^{top}(K)$ と書く. これらは向き付き絡み目のアイソトピー不変量であり, 全ての成分の向きを一斉に逆にしても不変であるが, 個々の成分の向きには依存することに注意する. Seifert のアルゴリズムにより, Seifert 曲面は少なくとも一つは存在する. また, Seifert 曲面が一つあったとき, それに T^2 を連結和することで, 種数が 1 だけ大きなものを作ることができるので, Seifert 種数の最小値 $g_3(K)$ を知ることは, 種数のとりうる値の全体を知ることと等価である. $g_4(K)$, $g_4^{top}(K)$ についても同様である.

任意の結び目 K(あるいは有向絡み目) に対し不等式

$$g_4^{top}(K) \leq g_4(K) \leq g_3(K)$$

が成り立つことは容易にわかる. 実際, 一つ目の不等式は定義から明らかであり, 二つ目の不等式は Seifert 曲面が与えられたとき, それを D^4 の内部に押し出して, 同じ種数を持つ Murasugi 曲面が作れることからわかる.

♠ 1.1.1 曲面コボルディズムとコンコーダンス群, スライス結び目

$L_0, L_1 \subset S^3$ を二つの有向絡み目とする. 曲面コボルディズム $S : L_0 \to L_1$ とは, 滑らかかつ proper に埋め込まれた曲面 $S \subset [0,1] \times S^3$ であって, $S \cap \{i\} \times S^3 = L_i$, $(i = 0,1)$ かつ向き込みで $\partial S = -L_0 \amalg L_1$ となっているもののことをいう.

[*1] 謝辞: 議論やコメント, 指摘, 質問への回答をしてくださった, 谷口正樹さん, 佐藤光樹さん, 佐野岳人さん, 磯島司さん, 鈴木龍正さん, 古田幹雄先生に感謝を申し上げる.

[*2] 曲面の位相的 4 次元多様体への proper な C^0 埋め込み $\Sigma \hookrightarrow X$ が locally flat であるとは, Σ の各点が X におけるある近傍 U であって, $(U, U \cap \Sigma)$ が $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ に同相な (境界の点では $(\mathbb{R}^4_+, \mathbb{R}^2_+)$ に同相な) 近傍を持つことをいう. locally flat な部分多様体の法束とは, ベクトル束 $E \to \Sigma$ と埋め込み $E \to M$ であって, ゼロ切断が Σ の埋め込みに一致しかつ, E は拡大可能 (extendable), すなわち, E が別のベクトル束 $F \to \Sigma$ に open unit disk bundle として埋め込まれているならば, $E \to X$ は埋め込み $F \to M$ に拡張できることをいう. 位相的 4 次元多様体の locally flat proper 部分多様体は, 法束をもち, それは ambient アイソトピーを除いて一意であることが知られている. [15] の 1.6.1 節や [40] の 9.3 節を参照. なお, 単に Murasugi 曲面の定義において, D^4 への埋め込みを (locally flat を課さずに)C^0 に変えただけでは, 結び目 K のコーンをとることで種数の最小値は常にゼロとなってしまい, 興味深いものではなくなってしまう.

ここで, 絡み目 $L \subset S^3$ に対し, その向きを逆向きにしたものを L^r, L の鏡像を $m(L)$ とかき, $-L = m(L^r)$(これはしばしば L のコンコーダンス逆とよばれる) と書いた．有向結び目 $K_0, K_1 \subset S^3$ に対し, 連結な種数 0 の (i.e. アニュラスに同相な) 曲面コボルディズム $A: K_0 \to K_1$ が存在するとき, K_0 と K_1 はコンコーダントであるという．*3 これは同値関係であり, K_0 と K_1 がコンコーダントであることと $g_4(K_0\# - K_1) = 0$ であることは同値であることが確かめられる．また, g_4 は明らかにコンコーダンス不変である．集合

$$\mathcal{C} = \{S^3\text{内の有向結び目}\}/\text{コンコーダント}$$

は, 連結和を加法, コンコーダンス逆を逆元とするアーベル群の構造を持つ．これをコンコーダンス群という．

結び目 $K \subset S^3$ であって, $g_4(K) = 0$ を満たす, すなわち, 種数 0 の連結 Murasugi 曲面 (スライス円版) を持つものは豊富に存在する．*4 そのような結び目をスライス結び目とよぶ．例えば, 任意の有向結び目 K に対し $K\#(-K)$ はスライス結び目である． 同様に $g_4^{top}(K) = 0$ である結び目 $K \subset S^3$ を位相的スライス結び目とよぶ．「スライス結び目=自明結び目にコンコーダントな結び目=コンコーダンス群の単位元を代表する結び目」である．

コンコーダンス群やスライス結び目は Fox-Milnor が 1960 年台に導入した [39].

♠ 1.1.2 絡み目解消数 (Goridan 数)

l 成分絡み目 $L \subset S^3$ に対し, それを crossing change により unlink U_l にするために必要な crossing change の最小数は絡み目/結び目解消数 (あるいは, Gordian 数) とよばれ, これを $u(L)$ と書く．これは, 向きによらないアイソトピー不変量である．結び目 $K \subset S^3$ に対し, $u(K)$ の定義に出てくるような crossing change の列は, $[0,1] \times S^3$ 内に U から K への immersed コボルディズムを定め, これを改変することで, 種数 $u(K)$ の有向 Murasugi 曲面を構成できる．よって,

$$g_4(K) \leq u(K)$$

が成り立つ．*5

与えられた結び目 $K \subset S^3$ に対し $g_3(K), g_4(K), u(K)$ などを決定することは古典的問題である．現在では, KnotInfo などで, 多くの結び目に対するこれらの値を知ることができる．

♠ 1.1.3 例: 代数的絡み目, 特にトーラス絡み目/結び目

絡み目の例として, 代数的絡み目というクラスを説明する．$f(x,y) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ を既約多項式あるいは異なる既約多項式の積であって, 原点での微分がゼロであるものとする.*6 $S^3_\delta \subset \mathbb{C}^2$ を半径 $\delta > 0$ を持つ球面とする．このとき, 部分空間

$$L_f = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | f(x,y) = \epsilon\} \cap S^3_\delta$$

は十分小さな $\epsilon \geq 0, \delta > 0$ に対し絡み目をなし, そのアイソトピー類が一意に定まる．このような絡み目を代数的絡み目という．*7 さらに,

$$M_f = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | f(x,y) = \epsilon\} \cap D^4_\delta$$

は $\epsilon = 0$ では特異点を持つが, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対しては連結かつ滑らかとなり, Murasugi 曲面を与える．これを f の Milnor ファイバーという．L_f には M_f の複素構造から定まる向きの境界としての向きを与える．特に, 正の整数 p, q に対し, $f(x,y) = x^p - y^q$ の場合の L_f を $T_{p,q}$ とかき, トーラス絡み目とよぶ．これは成分数 $l = gcd(p,q)$ を持つ絡み目であり, 特に, p と q が互いに素ならば結び目であり, トーラス結び目とよばれる．$T_{p,q}$ は 2 次元トーラス内で, メリディアン方向に p 周する間にロンジチュード方向に q 周する軌跡として描くこともできる．

Boileau–Weber による, Milnor 予想と Thom 予想に関するフランス語のサーベイ [19] が書かれた 1984 年の時点では代数的絡み目 L_f に対し,

$$g_4(L_f) \leq u(L_f) \leq g(M_f)$$

$$g_4(L_f) \leq g_3(L_f) = g(M_f)$$

がわかっていた．前者はブレイド表示から具体的に解消手順を与えることで確かめられる．後者は, Milnor のファイブレーション定理により (トーラス絡み目を含む) 代数的絡み目はファイバー絡み目であり, さらに Stallings のファイブレーション定理により g_3 はそのファイバーの種数に等しいという事実から従う．しかし, この時代には, これより種数の小さな Murasugi 曲面が存在するか, あるいは, これより少ない crosssing change で絡み目を解消できるか, という問いに答えることはできなかった．後述するが, 代数的絡み目の 4-ball 種数の下からの評価 $g(M_f) \leq g_4(L_f)$ を初めて示したのは Kronheimer–Mrowka であり, その証明はゲージ理論に基づく．特に, トーラス絡み目に対し

$$g_4(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)+1-l}{2}$$

*3 有向絡み目に対してはコンコーダントの概念が複数ある．ここでは有向結び目に限って考える．

*4 なお, 結び目 $K \subset S^3$ であって, $g_3(K) = 0$ であるもの, すなわち種数 0 の Seifert 曲面を持つものは unknot のみである．絡み目 L に対しては $g_3(L) = 0$ である絡み目のアイソトピー類は一意ではない．例えば, Hopf link は種数 0 の連結 Seifert 曲面を持つ．

*5 絡み目に対しては一般にこうしてできる Murasugi 曲面は連結とは限らないのでここでは除いて考えた．[19] ではラージ Murasugi 種数という概念を用いて不等式 $g_4(K) \leq u(K)$ の有向絡み目への拡張を考察している．

*6 これにより原点が孤立特異点であることが保証される．Milnor の教科書 [115] の 10 章を見よ．

*7 代数的結び目の up to isotopy での分類は Bonahon–Siebenmann の unpublished work である「The classification of algebraic links」で与えられ, Eisenbud–Neumann の本 [34]」に載っている．全ての代数的結び目はある iterated torus knot にアイソトピックである．iterated torus knot とは, 結び目 K に対して $C_{p,q}(K)$ を, K の管状近傍の境界上, メリディアン方向に p 周する間にロンジチュード方向に q 周するときの軌跡として得られる結び目とする, という操作を unknot から繰り返していって得られる結び目のことである．

が成り立つ．トーラス結び目, すなわち成分数 $l = gcd(p, q)$ が 1 である場合のこの等式はしばしば Milnor 予想とよばれる．[*8]

♠ 1.1.4 古典的アプローチ 1. Alexander 多項式

結び目 $K \subset S^3$ の Alexander 多項式 $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$(これは $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ の単元倍 ($\pm t^k$ 倍) の不定性を除いて定まり, ここでは規格化は $t \leftrightarrow t^{-1}$ について対称かつ $\Delta_K(1) = 1$ という規格化を採用する) は, 1920 年代に Alexander により発見された, 結び目の多項式不変量である．定義の仕方にはいくつかあり, 例えば, Seifert 行列を用いるものやスケイン関係式を用いるものがある．結び目に対しては, M を K の一つの Seifert 行列として

$$\Delta_K(t) = \left(Mt^{1/2} - M^T t^{-1/2}\right)$$

で与えられる．Alexander 多項式の次数 $\deg(\Delta(t))$ を最大次数と最小次数の差として定義する．不等式

$$2g_4^{top}(K) \leq \deg(\Delta(t)) \leq 2g_3(K)$$

が知られている．二つ目の不等式は古典的に知られていた．一つ目の不等式は比較的新しく 2015 年に Feller[37] により示されたもので, 「Alexander 多項式が自明 (i.e. $\Delta_K(t) = \pm 1$) な結び目は位相的スライスである」という 1980 年代の Freedman の結果[*9]の拡張である．[*10] [*11]

Fox–Milnor[39] は スライス結び目 $K \subset S^3$ の Alexander 多項式は, ある $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して $\Delta_K(t) = f(t)f(t^{-1})$ と書くことができることを示した．特に, 結び目行列式 $\det K = \Delta_K(-1)$ は平方数となる．例えば, 8 の字結び目 4_1 に対しては $\det 4_1 = 5$ でありこれは平方数でないので, $g_4(4_1) \geq 1$ である．絵から明らかに $u(4_1) \leq 1$ であるから, $g_4 \leq u$ より, $g_4(4_1) = u(4_1) = 1$ がわかる．[*12]

♠ 1.1.5 古典的アプローチ 2. 絡み目符号数 (Murasugi–Trotter 符号数)

ゲージ理論以前に $g_4(L)$, $g_4^{top}(L)$ を下から評価するやり方としてよく知られていたのは絡み目符号数 (Murasugi–Trotter 符号数)$\sigma(L)$ である．その一つの定義と, その種数評価の導出を説明する．有向絡み目 $L \subset S^3$(成分数を $|L|$ と書く) の locally flat な連結有向 Murasugi 曲面 $S \subset D^4$ に対し, その $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆

$$\Sigma_2(S) = S \times D^2 \cup_h E_2(S)$$

を考える．ここで, $E_2(S) \to E(S)$ は S の外部空間 $D^4 - \mathring{N}(S)$ の $\mathbb{Z}_2$ 被覆であり, 貼り合わせ写像 $h : \partial S \times D^2 \cup S \times \partial D^2 \to \partial E_2(S)$ は $* \times \partial D^2$ が S のメリディアンのリフトに写るようなものである．4 次元多様体 $\Sigma_2(S)$ の境界は, 同様に構成される L の $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(L)$ であり, $\det(L) = |\Delta_L(-1)| \neq 0$ ならばこれは $\mathbb{Q}HS^3$ になることが知られている．(ちなみに結び目は $\det(L) > 0$ を常に満たす.) 有向絡み目 L の符号数 $\sigma(L)$ は $\Sigma_2(S)$ の 4 次元多様体としての符号数 $\sigma(L) := \sigma(\Sigma_2(S))$

[*8] Milnor が教科書 [115] の 10 章において, 原点に孤立特異点を持つ多項式函数 $f(x, y) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ に対し, 「二重点の個数」とよばれる δ_f という量を導入, それが f に付随する代数的絡み目 $L = f^{-1}(0) \cap S^3_\delta$ の絡み目解消数 $u(L)$ に等しいかを問うたのが Milnor 予想の由来である．

Milnor はその教科書中で $\delta_f = \frac{\mu + |L| - 1}{2}$ を示した．ここで, $\mu = b_1(M_f)$ であり, $|L|$ は絡み目 L の成分数である．Boileau–Weber のサーベイ [19] によると, 一方, Pinkham は $u(L) \leq \delta_f$ を示した．Boileau–Weber は Bennequin との議論に基づき, この Pinkham の定理にブレイドを用いた初等的な証明を与えた．なお, Kronheimer–Mrowka の議論は, Milnor の元の問いにも肯定的に答えるものである．一方で, トーラス結び目に対する

$$g_4(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

だけから, より一般の slice-Bennequin 不等式を導くことができ, 特に代数的絡み目に対する $g_4(L_f) = g(M_f)$ が従うことが, Rudolph [141] により示された．なので, トーラス結び目の 4-ball 種数の公式を Milnor 予想とよぶことも, Kronheimer–Mrowka が Milnor 予想を解決したということも妥当であるといえよう．

[*9] Freedman のこの結果に関する議論が修正されていった経緯や証明については Garoufalids–Teichner の [45][15] を参照．証明には 4 次元位相多様体論の深い結果である disk embedding theorem を用いる．

[*10] Gompf [48] は, Alexander 多項式が自明な結び目のうち, 三葉結び目 $T_{2,3}$ の Whitehead ダブルや $(-3, 5, 7)$ プレッツェル結び目を含むいくつかの結び目はスライスでないことをゲージ理論を用いて示した (これは後述する Rasmussen 不変量を使って組み合わせ的な別証明を与えることができる)．さらに彼は, 位相的にスライスかつスライスでない結び目の存在からエキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在を従うことも示した．これは, (トレース埋め込み定理「結び目 $K \subset S^3$ がスライス (resp. 位相的スライス) であること, 0-trace $X_0(K)K = D^4 \cup_{K,0}$ (2 ハンドル) が $\mathbb{R}^4$ に滑らかな (resp. 位相的) 埋め込みを持つことは同値」の帰結である．$\mathbb{R}^4$ への $X_0(K)$ の位相的埋め込みの像の補空間 (これは非コンパクトなので微分構造を持つ) と $X_0(K)$ を貼り合わせてエキゾチック $\mathbb{R}^4$ が構成される．詳細は例えば Gompf–Stipsicz の教科書 [49] の 522 ページを見よ.) も示した．(例えば [42] や Mathoverflow の「Slice knots and exotic $\mathbb{R}^4$」を見よ.)

[*11] 一方で, 位相的スライスであるが, Alexander 多項式が非自明な (より強く Alexander 多項式が非自明な結び目に smoothly コンコーダントですらない) 結び目が豊富に存在することが 2012 年に Hedden–Livingstone–Ruberman[57] により示された．

[*12] なお, $4_1 \# 4_1$ はスライス結び目であることが確かめられる．すなわち, 4_1 はコンコーダンス群において位数 2 である．この例は, g_4 が結び目の連結和に対して一般には加法的でないことを意味している．一方で, 結び目の連結和に対する劣加法性 $g_4(K \# K') \leq g_4(K) + g_4(K')$ は容易に確かめられる．一般に, 結び目の Seifert 種数 g_3 は連結和に対して加法的である (i.e. $g_3(K \# K') = g_3(K) + g_3(K')$) ことが知られている．(証明は例えば Lickorish の教科書 [102] の定理 2.4 をみよ) このことは, 直ちに, 連結和について加法的逆が存在する結び目は unknot のみであることを意味する．

結び目の Gordian 数 u が加法的であるかは未解決問題である ($u(K \# K') \leq u(K) + u(K')$ は明らかである)．

として定義される．[*13] $b_2(\Sigma_2(S)) = b_1(S) = 2g(S) + |L| - 1$ が Euler 数の Mayer–Vietoris property により計算でき, 定義から $\sigma(\Sigma_2(S)) = \sigma(L)$ であるから

$$b^{\pm}(\Sigma_2(S)) = \frac{b_1(S) \pm \sigma(L)}{2} = g(S) + \frac{|L| - 1 \pm \sigma(L)}{2}$$

が成り立つ．これはゼロ以上であるから

$$g(S) \geq \frac{|\sigma(L)| + 1 - |L|}{2}$$

が成り立つ．よって,

$$(g_4(L) \geq) g_4^{top}(L) \geq \frac{|\sigma(L)| + 1 - |L|}{2}$$

を得る．

結び目の符号数は, 結び目の射影図 D から定まる Goeritz 行列 G_D と正負の交点数 $n_\pm$ を用いて Gordon–Litherand の公式 $\sigma(K) = \sigma(G_D) + n_+ - n_-$ により組み合わせ的に計算できる．例えば [114] の 3 章を見よ．符号数は連結和に対して加法的である．計算例として, $\sigma(T_{2,3}) = \pm 2$, $\sigma(\#_n T_{2,3}) = \pm 2n$ である．このことから $n \geq 1$ に対し $\#_n T_{2,3}$ はスライスではない (すなわち $T_{2,3}$ のコンコーダンス群における位数は無限大である) ことがわかる．結び目の符号数を用いて, $T_{2,q}$ を含むいくつかのトーラス結び目に対し Milnor 予想を証明することができたが, 全てのトーラス結び目について最善の下界が得られたわけではなかった．また, Murasugi–Trotter 符号数には, Tristram–Levine 符号数という一般化があるがここでは紹介しない．

1.2 ゲージ理論: Milnor 予想と Thom 予想の解決

1982 年, Donaldson が ASD(インスタントン) 方程式という物理学に由来する非線形偏微分方程式の 4 次元トポロジーへの最初の応用を見出した (対角化定理)．それ以来, ASD 方程式が 4 次元トポロジーに盛んに応用されるようになった．これを Donaldson 理論とよぶ．Donaldson は後に Donaldson 不変量とよばれる微分同相不変量を導入した．ここでは, 少し後の時代になって $U(N)$ 束に一般化されたバージョンの Donaldson 不変量を説明する．$b^+ \geq 2$ である有向閉 4 次元多様体 X の $U(N)$Donaldson 不変量は, X 上の $U(N)$ 束 P と, ASD モジュライ空間上のコホモロジー類を指定するデータとして $\mathbb{A}(X) = Sym^*(H_0(X;\mathbb{Q}) \oplus H_2(X;\mathbb{Q})) \otimes \Lambda^* H_1(X;\mathbb{Q})$ の $N-1$ 回テンソル積の元 (と N が偶数のときには homology orientation という符号を決めるためのデータ) を固定するごとに有理数が定まるという不変量である．すなわち,

$$D^N_{X,P} : \mathbb{A}(X)^{\otimes(N-1)} \to \mathbb{Q}$$

という関数である．そのようなバンドルと $\mathbb{A}(X)^{\otimes(N-1)}$ の元の選び方は無限個あるが, $N = 2$ では Kronheimer–Mrowka が, 多くの 4 次元多様体 X に対してはそれらが有限個のデータ[*14]で決定されるという, Donaldson 不変量の構造定理を証明し, その副産物として, 随伴不等式という, X 内の有向閉曲面に対する種数評価を得た．[86][89][88] これは特に $K3$ 曲面に対しては次の結果を与える．「滑らかに埋め込まれた種数 $g \geq 1$ の連結有向閉曲面 $\Sigma \subset X$ であって, $[\Sigma]\cdot[\Sigma] \geq 0$ であるものに対し, $[\Sigma]\cdot[\Sigma] \leq 2g - 2$ が成り立つ.」この K3 曲面に対する随伴不等式と, $K3$ 曲面が $\mathbb{C}P^2$ の分岐被覆であるという事実を用いて, 代数的絡み目の 4-ball 種数の下からの評価 $g(M_f) \leq g_4(L_f)$ が得られ, Minor 予想 $g(M_f) = g_4(L_f) = u(L_f)$ は解決した．[*15] [*16]

1994 年, 物理学者 Witten [152] は, $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論に関する Seiberg との共同研究に基づき, Seiberg–Witten(SW) 方程式とよばれる新しい非線形偏微分方程式を導入し, その解のモジュライ空間を用いて SW 不変量を導入した．Seiberg–Witten 方程式の解析は ASD 方程式の解析よりずっと簡単であり, その上 Donaldson 不変量やそれまで Donaldson 理論で得られてきた 4 次元トポロジーの結果の多くが, より簡単にあるいはより強力な形で証明できることが明らかになっていった．その代表例として, SW 理論が登場するとすぐに, Kronheimer–Mrowka により Thom 予想が証明された [87]．Thom 予想は, $\mathbb{C}P^2$ 内のホモロジー類 $d[\mathbb{C}P^1]$, $(d \geq 1)$ を代表する滑らかに埋め込まれた種数 $g \geq 1$ の連結有向閉曲面 Σ は

$$g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = g(S_d)$$

を満たすという主張である．ここで, $S_d \subset \mathbb{C}P^2$ は d 次の斉次方程式 $x^d + y^d = 0$ で表される複素曲線である．Thom 予想から Milnor 予想が従うことは古典的に知られていた (例えば [19] 参照) ので, Milnor 予想の再証明を与えたことにもなる．[*17]

これで, Milnor 予想は解決したのであるが, この手法は代数的絡み目の複素代数幾何的な特殊性に依存するものであった．Milnor 予想や Thom 予想が重要視されてきたのは, 代数幾何学と低次元トポロジーにまたがる問題であるというのが一つの理由であろう．従って, その先の自然な発展の方向性としては,

---

[*13] これが Murasugi 曲面 S の選び方によらないことは次のように確かめられる．二通りの Murasugi 曲面 S_1, S_2 があったとき, 埋め込まれた曲面 $S_1 \cup_L -S_2 \subset S^4$ はある 3 次元多様体 $H \subset D^5$ の境界となり, 符号数の同境不変性と Novikov 加法性より $0 = \sigma(\partial\Sigma_2(H)) = \sigma(\Sigma_2(S_1)) - \sigma(\Sigma_2(S_2))$ である．

[*14] 後に, Witten はこれらは本質的に後述する SW 理論から定まるデータ (SW 不変量と SW 基本類) であると予想した (Witten 予想).

[*15] 最近 Daemi–筆者–Scaduto [27] は $N = 3$ の場合の構造定理を証明し, やはり同様に Milnor 予想の証明が得られることを確認した．

[*16] 歴史的により正確に述べるならば, 特異インスタントンを使った構造定理の元の証明で用いられる一部だけの議論で K3 曲面に対しては随伴不等式を証明することができ, それを用いて Milnor 予想が証明された (この時点では basic class の概念は見出されていなかった)．その後で, その議論を拡張することで単純型 4 次元多様体に対する構造定理および随伴不等式が証明された．

[*17] なお, Donaldson 理論で Thom 予想を証明することは現在でもなされていない．これは $b^+ = 1$ である 4 次元多様体の Donaldson 不変量が難しいためであると考えられる．

- シンプレクティック, コンタクト幾何学は, 複素代数幾何学のカテゴリーよりも広く, 複素幾何的な硬さと可微分のカテゴリーのような手術で扱える柔らかさの両面を持つ. これらの幾何構造の低次元トポロジーにおける位置付けはどのようなものであるか?
- 代数的絡み目に限らないより広いクラスの絡み目を系統的に, (特に, 組み合わせ的に) 調べる手法を開発せよ.

ということが挙げられる. 例えば前者については, Taubes によるシンプレクティック多様体上の SW 不変量の研究や, Ozsváth–Szabó が Thom 予想の一般化として, シンプレクティック Thom 予想, すなわち 「シンプレクティック閉 4 次元多様体内の連結シンプレクティック曲面はそのホモロジー類を代表する滑らかに埋め込まれた連結有向曲面の中で種数を最小化する」主張を SW 理論を用いて証明したこと [123] や, Rudolph による slice-Bennequin 不等式の証明, 種々の Floer ホモロジーに値を取るコンタクト構造の不変量が導入されたことが挙げられる. 後者についてはこれから見るように, 種々の結び目ホモロジー理論の研究は現在まで続く低次元トポロジーにおける大きな流れになっている.

1.3 シンプレクティック構造とコンタクト構造

Rudolph が証明した, slice-Bennequin 不等式は, コンタクト構造を用いて 4-ball 種数の下からの評価を与えるもので, Milnor 予想の一般化である. これを説明するために, ここではシンプレクティック・コンタクト構造を, 4 次元と 3 次元を中心に説明する.

定義 1.1.

1. X を偶数次元 $2n$ を持つ可微分多様体とする. X 上のシンプレクティック構造とは, X 上の閉 2 形式 ω であって, ω^n がどの点でもゼロでないもののことをいう. ω をシンプレクティック形式とよぶ. このとき, ω^n は X の多様体としての向きを定めることに注意する.
2. Y を奇数次元 $2n+1$ を持つ可微分多様体とする. Y 上のコンタクト構造とは, ランク $2n$ 部分束 $\xi \subset TY$(すなわち, Y 上の余次元 1 接分布) であって, ある 1 形式 λ であって, $\lambda \wedge (d\lambda)^{2n}$ がどの点でもゼロでないもののことをいう. λ をコンタクト形式とよぶ. 商直線束 TY/ξ の向きを ξ の coorientation とよぶ. ここでは, coorientation を固定し, λ の取り方に対する条件として, λ が与える自明化 $TY/\xi \to \mathbb{R}$ が向きを保つことを課す. これにより, λ の取り方の不定性は, ちょうど正の関数倍で尽くされる. また, $\lambda \wedge (d\lambda)^{2n}$ の向きは Y の多様体としての向きを定めることに注意する.

シンプレクティック構造の由来は物理の古典力学や Kähler 幾何にある. コンタクト構造のさまざまな由来は例えば Geiges の教科書 [46] を参照するとよい. シンプレクティック多様体同士の連結和は一般にはシンプレクティック構造を持たない. シンプレクティック $2n$ 次元多様体を, 余次元 1 部分多様体に沿って切りはりする操作を, シンプレクティック構造込みで行うとき, その切り口の $2n-1$ 次元のコンタクト構造を考察することが, 便利であることが多い. しかし, 本稿ではこの側面は重要でないので詳細は説明しない. また, 境界付きシンプレクティック $2n$ 次元多様体 (X, ω) の境界には勝手にコンタクト構造が誘導されるというわけではないのだが, 境界上にコンタクト構造 ξ が与えられているとき, ω と ξ にはいくつかのクラスの整合性条件が定義される. この意味で, コンタクト多様体はシンプレクティック多様体の境界条件的な役割を果たす. 本稿で用いる整合性条件は, 3, 4 次元における次の定義である.

定義 1.2. (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体, (X, ω) を $\partial X = Y$ であるシンプレクティック 4 次元多様体とする. (X, ω) が (Y, ξ) の弱シンプレクティック充填であるとは, $\omega|_\xi > 0$ であることをいう. (X, ω) が (Y, ξ) の強シンプレクティック充填であるとは, Y のカラー近傍上定義され, Y 上外向きである Liouville ベクトル場 v (i.e. $\mathcal{L}_v \omega = \omega$) であって, $\lambda = \iota_v \omega$ が ξ のコンタクト形式になっているようなものが存在することをいう.

強シンプレクティック充填ならば弱シンプレクティック充填であることが確かめられる.
次に, シンプレクティック, コンタクト多様体の部分多様体には, いくつかの特別なクラスがあることを説明する. ここでは, この予稿に関係する 3, 4 次元での定義に限って書く.

定義 1.3.

- (X, ω) をシンプレクティック 4 次元多様体とする. $S \subset X$ を proper かつ滑らかに埋め込まれた 2 次元部分多様体とする. S がシンプレクティック曲面であるとは, $\omega|_S$ が S 上シンプレクティック形式であることをいい, S が Lagrange 曲面であるとは, $\omega|_S = 0$ であることをいう.
- (Y, ξ) をコンタクト 3 次元多様体とする. $L \subset Y$ を滑らかに埋め込まれた絡み目とする. L が transverse link であるとは, K のすべての点で接ベクトル $\dot{L}$ が ξ に横断的に交わることをいい, L が Legendrian link であるとは K のすべての点で $\dot{L}$ が ξ に接する (i.e. $\dot{L} \subset \xi$ である) ことをいう.
  ξ の coorientation は, 条件 $\lambda(\dot{\mathcal{T}}) > 0$ により, transverse link $\mathcal{T}$ に向きを定める. この向きを与えた transverse link を正の transverse link とよぶ. 以下では, 断らない限り, transverse link といったら正のもののことを指す.

♠ 1.3.1 transverse knot の古典的不変量 sl と, Legendrian knot の古典的不変量 tb, rot

ここでの解説は Etnyre のサーベイ [35] や Ozsvath–Szabo–Thurston の [131] 2 節に従う. (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体, $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (Y, \xi = \mathrm{Ker}\lambda)$ をそれぞれ, positive transverse knot, 有向 Legendrian knot とする. これらの knot には Seifert 曲面 $\Sigma \subset Y$(向きが与えられていて, 結び目を向きこみで境界に持つようなもの) が与えられているとする (特に, ヌルホモロガスな結び目であることが仮定されている).
positive transverse knot $\mathcal{T}$ に対し, self-linking number とよばれる不変量 $sl_\Sigma(\mathcal{T})$ が, 相対 Chern 数

$$sl_\Sigma(\mathcal{T}) = -\langle c_1(\xi, \vec{n}), [\Sigma, \partial\Sigma] \rangle$$

として定義される. ここで, $\vec{n}$ は Σ の外向き法ベクトルであって $\xi \cap T\Sigma$ に含まれるものである.
有向 Legendrian knot $\mathcal{L}$ に対し, 二つの不変量, Thurston–Bennequin 不変量 $tb_\Sigma(\mathcal{L})$($\mathcal{L}$ の向きに非依存) と, rotation number $rot_\Sigma(\mathcal{L})$($\mathcal{L}$ の向きに応じて符号が変わる) が定義され, これら二つの不変量は, Legendrian knot の古典的不変量 (classical invariant) とよばれる. Thurston–Bennequin 不変量は, $\mathcal{L}$ に定まる二つの framing の差

$$tb_\Sigma(\mathcal{L}) := (\xi\text{が定める contact framing}) - (\Sigma\text{が定める surface framing})$$

として定義され, rotation number は, 相対 Chern 数

$$rot_\Sigma(\mathcal{L}) := \langle c_1(\xi, \dot{\mathcal{L}}), [\Sigma, \partial\Sigma] \rangle$$

として定義される. *18 classical invariant の定義は, Legendrian/transverse link にも自然に拡張できる.

♠ 1.3.2　transverse-push off

与えられた有向 Legendrian knot $\mathcal{L}$ に対し, それを「管状近傍において少しずらす」ことで C^∞ 位相においていくらでも近い positive transverse knot $T_+(\mathcal{L})$ が構成でき, この構成により写像

$$T_+ : \frac{\{(Y,\xi)\text{ 内の Legendrian knot}\}}{\text{Legdenrian isotopy}} \to \frac{\{(Y,\xi)\text{ 内の transverse knot}\}}{\text{transverse isotopy}}$$

が well-defined に定まる. $T_+(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の transverse-push off とよばれる. また, Legendrian knot の negative stabilisation という改変操作があり,

$$T_+ : \frac{\{(Y,\xi)\text{ 内の有向 Legendrian knot}\}}{\text{Legdenrian isotopy\&negative stabilisation}} \to \frac{\{(Y,\xi)\text{ 内の positive transverse knot}\}}{\text{transverse isotopy}}$$

は well-defined かつ全単射となる. 逆写像は, Legendrian approimation とよばれる構成で与えられる. このことは, transverse アイソトピーで不変な transverse knot 不変量は, Legdenrian isotopy と negative stabilisation で不変な Legendrian knot 不変量と等価であることを主張している.

　有向 Legendrian knot$\mathcal{L}$ が Seifert 曲面 Σ を持つとき, transverse push-off の下で, 古典的不変量には

$$sl_\Sigma(T_+(\mathcal{L})) = tb_\Sigma(\mathcal{L}) - rot_\Sigma(\mathcal{L})$$

という関係式が成り立つ.

♠ 1.3.3　front projection と sl, tb, rot の計算公式

S^3(あるいは $\mathbb{R}^3$) 上の標準的コンタクト構造を ξ_{std} と書く. この 2-平面場は, $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ 上, $\mathrm{Ker}(dz - ydx)$ で与えられる. $(Y,\xi) = (S^3, \xi_{std})$ の場合, これら三つの古典的不変量は Σ のとり方にはよらず, $sl(\mathcal{T})$, $tb(\mathcal{L})$, $rot(\mathcal{L})$ と書かれる. このとき (ただし $\mathcal{T},\mathcal{L}$ は $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の無限遠に交わらないとする) には, front projection を用いた公式がある. ここで, front projection とは射影 $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad (x,y,z) \mapsto (x,z)$ のことをいう. transverse knot の front projection は, 垂直方向下向き $-\partial_z$ と平行になることはなく, generic な場合, 特異点は二重点のみである. self-linking number は writhe

$$sl(\mathcal{T}) = writhe(\Pi)$$

で与えられる. Legendrian knot の front projection は, 垂直方向 $\pm\partial_z$ と平行になることはなく, generic な場合, 特異点は二重点とカスプのみである. 古典的不変量は

$$tb(\mathcal{L}) = writhe(\Pi) - \frac{1}{2}\#\{\Pi\text{内のカスプ}\}$$

$$\begin{aligned} rot(\mathcal{L}) &= \frac{1}{2}(\#\{\Pi\text{内の下向きカスプ}\} - \#\{\Pi\text{内の上向きカスプ}\}) \\ &= \#\{\Pi\text{内の下向き左カスプ}\} - \#\{\Pi\text{内の上向き右カスプ}\} \end{aligned}$$

で与えられる. front projection において stabilization や transverse push-off は, 射影図に対する具体的な改変操作として書くことができる. 例えば Enyre のサーベイ [35] を参照.

♠ 1.3.4　transverse Markov 定理: transverse link と braid の対応

B_n を n-ストランドブレイド群とし, $Braids = \coprod_{\geq 1} B_n$ と書く. S^3 内の任意の絡み目があるブレイドのブレイド閉包として表示できることは, Alexander の定理としてよく知られ, さらに, ブレイド閉包をとる操作が

$$\hat{\bullet} : \frac{Braids}{\text{conjugate, positive stabilization/destabilization, negative stabilization/destabilization}} \to \frac{\{S^3\text{内の絡み目}\}}{\text{isotopy}}$$

という全単射を与えることは Markov の定理としてよく知られている. 左辺の分母の同値関係がいわゆる Markov ムーブである. positive (resp. negative) stabilization とは, $B_{m-1} \to B_m,\quad \beta \mapsto \beta\sigma_m$(resp. $B_{m-1} \to B_m,\quad \beta \mapsto \beta\sigma_m^{-1}$) という操作であり, destabilization は, $\beta\sigma_m\beta'$(resp. $\beta\sigma_m^{-1}\beta'$) (ここで $\beta,\beta' \in B_{m-1}$) という形の B_m の元に対し, $\beta\beta' \in B_{m-1}$ を対応させる操作である. 例えばトーラス絡み目 $T_{p,q}$ はブレイド $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{p-1})^q$ の閉包である.

　このような絡み目とブレイドの対応には, transverse link 版がある. Bennequin は, 任意のブレイドは, 自然な閉包の取り方があって, $\mathbb{R}^3$ 内の transverse link を与えることができ, 逆に, 任意の transverse link はあるブレイド閉包にアイソトピックであることを示した. さらに, 2002 年, Orevkov–Shevchishin[122] と Wrinkle[154] は独立に, 二つのブレイドが transversely isotopic な transverse link を represent することは, それらのブレイドが, 共役と positive stabilization/destabilization で関係し合うことと同値であるということを証明した. すなわち, 全単射

$$\frac{Braids}{\text{conjugation, positive stabilization/destabilization}} \cong \frac{\{\text{transverse links in}(S^3,\xi_{std})\}}{\text{transverse isotopy}}$$

*18 古典的不変量について, 閉 3 次元多様体上のコンタクト構造が tight であることを特徴づける Eliashberg–Bennequin の不等式が有名であるが, ここでは割愛する.

がある．この対応の下でブレイド β に対し，その閉包として得られる transverse link の self-linking number は，次の Bennequin の公式で与えられる：

$$sl(\hat{\beta}) = writhe(\beta) - n(\beta)$$

ここで，$n(\beta)$ は β のストランドの本数である．

この，transverse link とブレイドの対応は，Pavalescu により，一般の閉コンタクト 3 次元多様体内の transverse link とオープンブック内のブレイドの対応として拡張された [132]．これにより，任意の閉コンタクト 3 次元多様体内の transverse link を pointed open book という diagram により表示できるようになった．これは後述する，Heegaard knot Floer ホモロジーの transverse knot 元である Braid 不変量の定義に用いられた．

♠ 1.3.5 絡み目の positivity と fillability

Hedden の [56] に従い，S^3 内の有向絡み目 (up to アイソトピー) に対し，

$$\text{positive braid} \subsetneq \text{positive} \subsetneq \text{strongly quasi positive} \subsetneq \text{quasi positive} = \text{transvers } \mathbb{C}\text{-link}$$

というクラスを説明する．

1. S^3 内の絡み目が positive braid であるとは，正のブレイド (=writhe が負の交点を持たないブレイド) の閉包にアイソトピックであることをいう．Stallings の古典的な結果「Stallings, Constructions of fibered knots and links」によれば，positive braid 絡み目はファイバー絡み目である．すなわち，絡み目の補集合が S^1 上のファイバー束の全空間の構造を持つ絡み目にアイソトピックである．
   なお，代数的ならば positive braid であることは，Weierstrass 予備定理の帰結である．[19]
2. S^3 内の絡み目が positive であるとは，writhe が負の交点を持たない射影図を持つ結び目にアイソトピックであることをいう．「positive braid $\subset$ positive」は by definition である．「positive braid $\neq$ positive」は (KnotInfo で検索すればたくさん見つかるが) 例えば $5_2, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5$ が例を与える．これらが positive braid でないことは，ファイバー結び目でないことから確かめられる．
3. S^3 内の絡み目が strongly quasipositive であるとは，$i \leq j-2$ に対する
   $$(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})\sigma_{j-1}(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})^{-1}$$
   の形の因子 (positive embedded band) の積であるブレイドの閉包にアイソトピックであることをいう．「positive $\subset$strongly quasipositive 」は Rudolph[142] が示した．「positive $\neq$strongly quasipositive 」は，KnotInfo によると $12n_{148}, 12n_{149}$ が例を与える．
4. S^3 内の絡み目が quasipositive であるとは，
   $$w_i \sigma_{j_i} w_i^{-1}, \quad w_i \in B_n$$
   という形の因子 (positive band) の積でかけるブレイドの閉包にアイソトピックであることをいう．「strongly quasipositive$\subset$quasipositive」は by definition である．「strongly quasipositive$\neq$quasipositive」は，8_{20} が例えば例である．これが strongly quasipositive でないことは，[56] によると，strongly quasipositive knot は $g_3 = g_4 = \tau$ を満たすが，$g_3(8_{20}) = 2 \neq 0 = g_4(8_{20})$ であることからわかる．
5. S^3 内の絡み目が transverse $\mathbb{C}$-link であるとは単位球面 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ と滑らかな複素曲線の横断的交わりにアイソトピックであることをいう．*19 「quasi positive $\subset$ transverse $\mathbb{C}$ link」は Rudolph が示した [140]．「quasi positive $\supset$ transverse $\mathbb{C}$ link」は Boileau–Orekov が擬正則曲線を用いて証明した [18]．*20 quasipositive でない結び目は豊富にある．例えば 8 の字結び目はそうである．

Hayden により，quasipositive link の概念は S^3 とは限らない任意の閉コンタクト 3 次元多様体へ拡張された [54]．そこでは，Boileau–Orekov の結果「quasi positive $\supset$ transverse $\mathbb{C}$ link」の擬正則曲線によらない証明が与えられた．さらに，この論文で扱われた ascending surface の概念は，後に，Heegaard knot Floer ホモロジー，Khovanov ホモロジーの transverse knot 不変量の naturality およびそれを用いた，4-ball 内のエキゾチック曲面の存在証明に用いられた (前者は Juhasz–Miller–Zemke[73] による．後者は Hayden–Sundberg による [55] による)．

♠ 1.3.6 Rudolph による slice–Bennequin 不等式

Kronheimer–Mrowka による Milnor 予想の解決の帰結として，Rudolph は，次の slice–Bennequin 不等式を証明した．これは，Milnor 予想の一般化と見ることができる．

定理 1.4. (slice–Bennequin 不等式, Rudolph[141])

1. β をブレイドとする．このとき，ブレイド閉包である絡み目 $\hat{\beta}$ の任意の Murasugi 曲面 ($\hat{\beta} = \partial\Sigma$ を満たす proper かつ C^∞ に埋め込まれたコンパクト有向曲面) に対し
   $$writhe(\beta) - n(\beta) \leq \chi(\Sigma)$$
   が成り立つ．

---

*19 このときこの滑らかな複素曲線と D^4 との共通部分 $S \subset (D^4, \omega_{std}, J_{std}, g_{std})$ はシンプレクティック曲面であり，$K = \partial S$ は標準的コンタクト構造 $\xi_{std} = TS^3 \cap J_{std}TS^3$ について transverse link である．実際，S は複素部分多様体であることより，$v \neq 0 \in T_xS$ ならば $Jv \in T_xS$ であり，$\omega_{std}(v, Jv) = g_{std}(v, v) > 0$ であるから，$\omega|_S$ はシンプレクティックである．さらに，S と S^3 が横断的に交わっているという仮定より，$TS|_K \cap TS^3|_K = TK$ である．もし $TK \subset \xi = TS^3 \cap J_{std}TS^3$ であったとすると，特に $TK \subset J_{std}TS^3$ すなわち $JTK \subset TS^3$ となっていなくてはならないが，すると $TS|_K = TK + JTK \subset TS^3|_K$ となり，S と S^3 が横断的に交わることに反する．

*20 定数ではないある $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ に対し，$V_f := f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^2$ のことを 平面複素曲線という．V_f は有限個の特異点の集合を除いて滑らかな有向 2 次元多様体である．[141] は，絡み目が quasipositive であることは，$S^3 \subset \mathbb{C}^2$ とある $\mathbb{C}^2$ 内の平面複素曲線の交わり $S^3 \cap V_f$ にアイソトピックな絡み目であることと同値であることを示した．さらに，transverse $\mathbb{C}$-link は quasi positive であることを予想した．つまり，この予想は，Boileau–Orekov が擬正則曲線を用いて証明した.[18]．([54] も参照.)

2. $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std} = \mathrm{Ker}(dz - ydx))$ をそれぞれ, transverse knot, Legendrian knot とする．このとき, 不等式

$$sl(\mathcal{T}) \leq 2g_4(\mathcal{T}) - 1$$

$$tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| \leq 2g_4(\mathcal{L}) - 1$$

が成り立つ．

[*21] さらに, quasipositive knot に対しては, 等号が成り立つ transverse/Legendrian representative が存在する．

証明． ブレイドに対する主張は, crossing change により positive braid の場合に帰着され, positive braid の場合はトーラス結び目に対する Milnor 予想に帰着される．transverse knot に対する主張は, ブレイドに対する主張と, transverse Markov 定理から従う．trasnverse push-off により, Legendrian knot に対する主張は transverse knot に対する主張から従う．quasi positive knot に対する主張は, quasi positive knot に対しては transverse $\mathbb{C}$-knot との同値性から, symplectic surface $S \subset (D^4, \omega_{std})$ であって, その境界 $\partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse representative になっているものがとれ, $sl(\partial S) = 2g(S) - 1$ が成り立つことからわかる ([36] の補題 2.13 の帰結 (2) をみよ．[*22])．□

どんな結び目であっても, その Legendrian approximation の front projection を手で描いて古典的不変量を計算することで, (最善である保証はないにせよ)g_4 の下からの評価を与えることができるのである．

上の定理は, symplectic surface $S \subset (D^4, \omega_{std})$ であって, その境界 $\partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse knot であるものは, 種数を最小化しているということをいっている．D^4 を strong symplectic filling に一般化した結果があり, 相対版シンプレクティック Thom 予想とよばれる．

定理 1.5. (Gadgil–Kulkarni [44] ([36] 定理 1.20 も見よ) (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体, (X, ω) を (Y, ξ) の強シンプレクティック充填とする．$S \subset X$ を proper に埋め込まれた連結シンプレクティック曲面であって, ∂S が trasnverse link であるものとする．このとき, S はその相対ホモロジー類において種数最小である．

証明． 証明には 2 通りある．Mrowka–Rollin の一般化された Benequin 不等式を使うものと Relative symplectic cap(symplectic hat) を使って, 閉のシンプレクティック Thom 予想に帰着させるものである．□

他にも, Akbulut–Matveyev による Stein 多様体内の閉曲面に対する adjunction 不等式 [3] も知られており, これは閉 Kähler 多様体への埋め込みを利用する証明がある．他にも, H-slice 種数の評価など, S^3 や D^4 以外の多様体に境界付き種数評価を拡張するというのは今後発展していく可能性のある方向性であると言える．

1.4 2000 年以降: 結び目ホモロジー理論

2000 年代になると, いくつかの結び目ホモロジー理論が導入されたことで, 結び目理論の研究は大きく発展した．特に, 複素幾何や解析に依拠しないトポロジカルな, あるいは, 組み合わせ的なアプローチにより, これまで得られてきた成果が復元, 拡大されていき, その傾向は今後も続いていくと思われる．

♠ 1.4.1 結び目ホモロジーの序章としての Floer ホモロジー: 「圏化」と「TQFT」

結び目ホモロジー理論は, 結び目の多項式不変量の「圏化」を与える「TQFT」として発見された．その元祖が Khovanov ホモロジーである．これは普通の意味では Floer ホモロジーではない．しかし, 「圏化」や「TQFT」の思想的由来は Floer ホモロジー理論にあり, Floer 理論の変種としての結び目ホモロジー理論ものちに導入されていったので, ここではまず Floer ホモロジーについて説明する．「Floer ホモロジーは無限次元版の Morse ホモロジーである」というのはよく言われる標語である．Morse ホモロジーのアイディアは, 与えられた有限次元可微分多様体 B に対し, その上の「よい」Morse 関数 $f : B \to \mathbb{R}$ をとり, Morse 指数 i の臨界点全体の生成する加群 $C_i(B, f)$ に, 適切に微分 $\partial_i : C_i(B, f) \to C_{i-1}(B, f)$ を定義し, そのホモロジーが B のホモロジーを復元するようにするというものである．Morse ホモロジーは, Morse 関数 f により B をハンドル分解し, そのハンドルの太さの方向を潰して得られる胞対複体の cellular ホモロジーと実質同じものである．これは例えば 1960 年代, Smale が h 同境定理, 高次元 Poincaré 予想を解いた際に用いられた．物理学者 Witten は [150] において, 微分 ∂_i を f の負の gradient フローの本数の数え上げとして解釈できるという見方を提示した．それに触発され, Floer は, 無限次元版 Morse ホモロジーと称される, 「Floer ホモロジー」を導入した．Floer ホモロジーは大きく分けて, シンプレクティック幾何における Floer ホモロジー (Hamilnon Floer ホモロジーと Lagrangian intersection Floer ホモロジー) と, ゲージ理論における Floer ホモロジー (インスタントン Floer ホモロジーと SW モノポール Floer ホモロジー) に大別される．Y インスタントン Floer ホモロジーは, 技術的なことに目を瞑れば, 有限次元多様体 B の代わりに閉 3 次元多様体 Y 上の $SU(2)/SO(3)$ 接続のゲージ同値類の空間を, Morse 関数の代わりに Chern-Simons 汎関数を用いて, Morse ホモロジーを真似て作られる．微分を与える負の gradient フローは $\mathbb{R} \times Y$ 上の ASD 解のゲージ同値類に他ならない．インスタントン Floer ホモロジーは Casson 不変量 $\lambda(Y)$ とよばれる $\mathbb{Z}HS^3$ に対する整数値不変量の「圏化」であり, 同時に Donaldson 不変量の「$(3+1)$TQFT 化」でもある．「圏化」は, インスタントン Floer ホモロジーは Euler 数をとると Casson 不変量が

[*21] なお,Legendre 版で g_4 を g_3 に置き換えたより弱い主張は Bennequin が最初に発見した．これを用いて S^3 上に ξ_{std} とアイソトピックでないコンタクト構造 (これは overtwisted なコンタクト構造である．overtwisted disk は Bennequin 不等式を破る!) が見出されたことはコンタクトトポロジー初期の重要な結果である．

[*22] そこでの $sl(\partial S) = 2g(S) - 1$ の証明は次のとおり．$-K$ の Seifert 曲面 $\Sigma \subset S^3$ を一つとる． $TD^4|_{S\cup\Sigma} = (TS \cup \xi^{\perp}) \oplus (\nu_S \cup \xi)$ であり,

$$0 = c_1(TD^4|_{S\cup\Sigma})[S \cup \Sigma] = c_1(TS \cup \xi^{\perp})[S \cup \Sigma] + c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma]$$

であり, 境界付き版の Poincaré–Hopf の定理 (境界上外向きなら ok) より第一項は

$$c_1(TS \cup \xi^{\perp})[S \cup \Sigma] = \chi(S)$$

である．第二項 $c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma]$ を切断のゼロ点の個数の数え上げとして数えたい．まず, Σ 上には切断を $\xi \cap T\Sigma$ で与える．今 S の境界は空でないので, ν_S は自明束であり, 同一視 $\nu_S|_K = \xi|_K$ の下で, $\nu_S \to S$ は境界 K 上に nowhere vanishing section が与えられたことになる．これは写像度 0 であるから, nowhere vanishing に S 上に拡張する．よって, ゼロ点は S 上にはなく, $-\Sigma$ が K の Seifert 曲面であることに注意するとよって, $c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma] = sl(K)$ である．よって, $sl(K) = -\chi(S) = 2g(S) - 1$ を得る．

得られるという意味で, Casson 不変量を精密化しているということを指す. 「$(3+1)$TQFT 化」は, インスタントン Floer ホモロジーは Donaldson 不変量を境界つき 4 次元多様体や $(3+1)$ 次元コボルディズムに拡張する枠組みであって, コボルディズムの合成についてしかるべき合成則を持つことを指している. すなわち, しかるべき (3+1) コボルディズム圏から加群の圏への関手にしたということである. Kronheimer–Mrowka の構造定理の証明でもインスタントン Floer ホモロジーのあるバージョンが用いられた. インスタントン Floer ホモロジーは, reducible 平坦接続が出てくる理論と出てこない理論の二つに大別できる. Floer の時代よりも後になって一般化された形のものを説明する.

- reducible 平坦接続が出てくる理論 ($SU(2)$ 束を用いる $SO(3)$ 同変理論). これは, Floer が定義した整ホモロジー球面の場合に, 自明接続を無視して既約接続のみで Floer ホモロジーを定義するということがなされていた. 比較的最近, Daemi–Miller [26] により次のように拡張された定式化がなされた. 任意の PID R および有理ホモロジー球面 Y に対し, 3 種類の $\mathbb{Z}/8$ 次数づけられた $H^{-*}(BSO(3);R)$ 加群であって, 長い完全列

$$\cdots \xrightarrow{[-4]} I_*^+(Y;R) \xrightarrow{[3]} I_*^-(Y;R) \to I_*^\infty(Y;R) \xrightarrow{[-4]} \cdots$$

をなすものが定義される. さらに, これらは $1/2 \in R$ であるという条件のもとで, 次のような関手を与える. [*23]

$$I^+, I^-, I^\infty : (3+1)Cob_*^{\mathbb{Q}} \to gr^{\mathbb{Z}/8}H^{-*}(BSO(3);R)\text{-}Mod$$

[*24] また, signature data とよばれるデータ σ(摂動のデータ) を選ぶごとに, irreducible Floer homology group とよばれる $\mathbb{Z}/8$ 次数づけられた加群 $I_*(Y,\sigma)$ が定まり, σ を取り替えたときにどう変化するかを記述する exact triangle がある. また, nearly good とよばれるクラスのコボルディズムに対し関手性がある. $I_*(Y,\sigma)$ は, Casson–Walker 不変量を圏化すると予想されている. 整ホモロジー球面の場合には, σ の選び方はなく, Floer が元々定義した Floer ホモロジー $I_*(Y)$ に一致し, これは Casson 不変量を圏化する.

- reducible 平坦接続が出てこない理論 (N-admissible な $U(N)$ 束上の $PU(N)$ 接続を用いる). これは, 有向閉 3 次元多様体 Y と, その上の N-admissible バンドル, すなわち, $U(N)$ 束 P であって, ある $\sigma \in H_2(Y;\mathbb{Z})$ であって $\langle c_1(P), \sigma\rangle$ が N と互いに素であるもの, および単位的可換環 R に対し, 相対 $\mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}$-次数を持つ加群 $I_*^N(Y,P;R)$ を与える.
さらにこれは,

$$I_*^N : (3+1)Cob^{N-adm} \to gr^{rel.\mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}}\text{-}Mod$$

という関手を与える. また, 係数が例えば $R=\mathbb{C}$ のときには, $I_*^N(Y,P;\mathbb{C})$ は $\mathbb{A}(Y)^{\otimes(N-1)}$ 加群の構造を持つ. ここで, $\mathbb{A}(Y) := Sym^*(H_0(Y;\mathbb{C}) \oplus H_2(Y;\mathbb{C})) \otimes \Lambda^* H_1(Y;\mathbb{C})$ であり, $\mathbb{A}(Y)^{\otimes(N-1)}$ の第 i 因子 $(2 \le i \le N)$ の作用は

$$\mu_i : \mathbb{A}(Y;\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(I_*^N(Y,P;\mathbb{C})), \quad 2 \le i \le N$$

と書かれ, 第 i μ-map とよばれる.[*25]
$U(N)$ 束は 3 次元多様体上では 1 サイクル, 4 次元多様体上で 2 サイクルで指定できるので, そうすることが多い. さらに, 有向閉 3 次元多様体 Y に対し, 加群 $I_*^{\#,N}(Y) := I_*^N(Y\#T^3, S^1\times pt) \cap \mathrm{Ker}(\mu_2(pt)-N)$ が定義される. 最もよく研究されているのが $N=2$ の場合でありこの時は N を省略して書く. $I_*^{\#,N}(Y)$ は, Euler 数が $|H_1(Y;\mathbb{Z})|^{N-1}$(有理ホモロジー球面でなければゼロ) であり, 連結和に対する Kunneth 性, コボルディズム写像に対する関手性などが成り立つことを, Daemi–筆者–Scaduto は示した [27].

♠ 1.4.2 Jones 多項式, 量子不変量, Crane–Frenkel のプログラム, そして Khovanov ホモロジー

1980 年代, Jones によって Jones 多項式とよばれる結び目の多項式不変量が発見された [69]. これは S^3 内の結び目に対して, 射影図を用いて組み合わせ的に計算できるものである. Jones は元々作用素環論の研究から Jones 多項式を見出したが, 作用素環論の理解を要するものでもなければ, ゲージ理論のように PDE の解析を要するようなものでもない. Jones 多項式の発見を受けて, 複数の数学者により同時期に独立にその一般化である HOMFLY-PT 多項式が発見された [41]. [*26] これは特殊化として Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 ($n=2$ が元の Jones 多項式) を含む.

具体的には, 有向絡み目 $L \subset S^3$ に対し, normalized HOMFLY-PT 多項式 $\overline{P}_\infty(a,q) \in \mathbb{Z}[a^{\pm1}, q^{\pm1}]$ が

$$a\overline{P}_\infty(\sigma^{-1}) - a^{-1}\overline{P}_\infty(\sigma) = (q^{-1}-q)\overline{P}_\infty(\upuparrows), \quad \overline{P}_\infty(U) = 1$$

により定まる (σ, σ^{-1} はブレイド群の生成元と同じもの, $\upuparrows$ はブレイドに平行な方向への smoothing である). 特に, $a=q^n$ とおいたものが normalized Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 $\overline{P}_n(q) = \overline{P}_\infty(a=q^n, q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm1}]$ であり,

$$q^n\overline{P}_n(\sigma^{-1}) - q^{-n}\overline{P}_n(\sigma) = (q^{-1}-q)\overline{P}_n(\upuparrows), \quad \overline{P}_n(U) = 1$$

を満たす. $n=0$(ただし $\overline{P}_0(U)=1$ とする) の場合 $\overline{P}_0$ が Alexander 多項式である. $n=1$ に対しては全ての絡み目に対し $\overline{P}_1 = 1$ となってしまう. $n=2$ が (normalized)Jones 多項式である. $\mathfrak{sl}_n$ 多項式不変量が, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ のベクトル表現

[*23] $1/2 \in R$ であるという条件なしでも関手性を持つかは未解決である. 負定値コボルディズムに対しては, $1/2 \in R$ であるという条件なしでも関手性を持つことが示されている.

[*24] $(3+1)Cob_*^{\mathbb{Q}}$ の object は基点付き (連結)$\mathbb{Q}HS^3$ であり, morphism はホモロジー orientation と基点を結ぶ path が与えられた滑らかな連結有向コボルディズムである.

[*25] universal bundle が $PU(N)$ 束であり, その $PU(N)$ 特性類に対応する μ-map がある. 今の場合 $H^*(BPU(N);\mathbb{C}) = \mathbb{K}[_2, \ldots, _N]$ であり, $U(N)$ 束 E に対して $_i(E) \in H^{2i}(BPU(N);\mathbb{Q})$ は, 有理 K 理論類 $E \otimes (\det E)^{-1/N}$ の第 iChern 類として定義される. 例えば $_2(E)) = c_2(E) - \frac{N-1}{2N}c_1^2(E)$ である.

[*26] [41] の最初のページの Editer's note によると 1984 年 9 月末から 10 月初めあたりの数日間において, ほぼ同じ結果を述べた 4 つの独立のリサーチアナウンスメントがあった. それらが 1 つの共著論文として統合されることになりこの論文が書かれた.

$\mathbb{C}^2$ に対応する R 行列を使って解釈できることを最初に示したのは Turaev[148] である．$\mathfrak{sl}_n$ 多項式という名前の一つの由来はこのことにある．Murakami–Ohtsuki–Yamada [119] は $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に対し，今日 MOY グラフとよばれている trivalent planar ダイアグラムを用いた state sum 表示を与えた．*27

量子群は Hopf 代数の例であり, Drinfeld と神保により独立に導入され, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のある 1 パラメタ変形 $U_q(\mathfrak{g})$ として定義される．その出自は, 量子可積分系に分類されるいくつかの統計力学模型が持つ普遍的な構造として見出された Yang–Baxter 方程式にある．Yang–Baxter 方程式の解を R 行列というが, これは, ブレイド群の表現の構成に用いることができ, 量子群を用いて系統的に R 行列, 結び目不変量が得られるようになった．その後, 量子群は共形場理論の持つ対称性としても研究されていった．

後に, Witten は, 3 次元 Chern–Simons 汎関数を Lagrangian とする 3 次元 TQFT と, 2 次元共形場理論である Wess–Zumino–Witten 理論の間のある種の等価性と, これらの理論により Jones 多項式が (1 の冪根において) 記述でき, さらに一般の閉 3 次元多様体に拡張できることを提唱した [151]．Witten の提案は Rehetkhin–Turaev により数学的に定式化され [138], Witten–Reshetkhin–Turaev(WRT) 不変量という閉 3 次元多様体の不変量が定式化された．WRT 不変量の定式化でも量子群が用いられた．

Crane–Frenkel [25] は, インスタントン Floer ホモロジーを含む種々の TQFT が構成されていたことや, Lusztig により, 量子群の基底であって, 構造定数が正値性, 整数性を満たすようなもの (標準基底) が見出されていた (正の整数でなければ何かのベクトル空間の次元になっていることは期待できない!) ことを背景に, WRT 不変量を圏化した 4 次元 TQFT を構成するプログラムを提唱した.*28 彼らは Hopf 圏という概念を導入した．Frebenius 代数が 2 次元 TQFT を与え, Hopf 代数が 3 次元 TQFT を与えるように, Hopf 圏が 4 次元 TQFT を与えるはずであるということが彼らの構想である．WRT 不変量の圏化は現在でもまだ構成されていないが, この構想は, Khovanov が Jones 多項式の圏化である Khovanov ホモロジー [78] を定式化する動機の一つとなった．*29

Khovanov–Rozansky により, $\mathfrak{sl}_n$-Khovanov–Rozansky ホモロジー $KhR_n (n=2$ が Khovanov ホモロジー $Kh = KhR_2$ である) およびその reduced 版 $\overline{KhR}_n$ が定義された [80]．KhR_n の構成方法は, MOY グラフに, あるやり方で行列因子化 (matrix factorization) を付随させ, それに基づいて絡み目図式に対してチェイン複体を構成するというものである．

KhR_n は Maslov(あるいはホモロジカル) 次数と Alexander 次数とよばれる二重次数をもち, $\mathfrak{sl}_n$ 多項式を圏化する．すなわち, unreduced 版の graded Euler 数は unknormalized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に等しいという等式

$$\sum_{i,j}(-1)^i q^j \dim_{\mathbb{C}} KhR_n(K) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \overline{P}_n(q) =: P_n(q)$$

(最右辺を unnormalized Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式とよぶ) および, reduced 版の graded Euler 数は normalized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に等しいという等式

$$\sum_{i,j}(-1)^i q^j \dim_{\mathbb{C}} \overline{KhR}_n(K) = \overline{P}_n(q)$$

が成り立つ．

さらに, 曲面コボルディズム写像が定義され, 関手

$$KhR_n : Link \to gr^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} AbGrp$$

を与える ([117] 定理 4.9)．　ここで, $Link$ は S^3 内の有向絡み目を object とし, $[0,1]\times S^3$ 内の曲面コボルディズム (up to　境界を固定するアイソトピー) を射とする圏であり, $gr^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}AbGrp$ は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 次数を持つアーベル群を object とし, 斉次な準同型を morphism とする圏である．*30 *31

$\mathfrak{sl}_n$-Khovanov–Rozansky ホモロジーの変種として, ポテンシャル関数 $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ とよばれる次数 n の monic 多項式のデータを入れて変形したもの $KhR_{\partial w}(\partial w = x^n$ の場合が元の $KhR_n^{**})$ がある (例えば, [100] を見よ)．また, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 3 重次数を持つ HOMFLY-PT-Khovanov–Rozansky ホモロジー KhR_∞^{***} およびその reduced 版 $\overline{KhR}_\infty^{***}$ も定式化され,

*27 Reshetikin–Turaev [139] は単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し, 絡み目の各成分に量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ のある既約表現 (いわゆる「色」) を付与したものに対する多項式不変量を定義した．例えば, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合に表現 $V_n = Sym^n(\mathbb{C}^2)$ 上の表現を全ての絡み目成分に与えたものに対して定まるのが n-colored Jones 多項式 $J_n(K,q)$ であり, $n=1$ の場合が通常の Jones 多項式である．　絡み目 $L = K_1\cup\cdots\cup L_l$ の成分 L_i に表現 V_{n_i} を与えたものに対して定まるのがより一般的な colored Jones 多項式 $J(L_{\boldsymbol{n}},q)$ 多項式である．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ の場合に, 絡み目 $L = L_1\cup\cdots L_l$ の第 i 成分 L_i に $V_{k_i} = \Lambda^{k_i}\mathbb{C}^n$ 上の表現 (基本表現) を与えたものは colored Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 $P_n(L_{\boldsymbol{k}},q)$ とよばれ, 全ての絡み目成分に対して表現 V_1 を与えた場合が元の Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式である．　Murakami–Ohtsuki–Yamada [119] は, colored 版の Rehetikhin–Turaev$\mathfrak{sl}_n$ 多項式にも state sum 表示を与えていた．colored Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式の圏化については, 例えば Wedrich のスライド「Some differentials on colored Khovanov–Rozansky link homology」や, [33] とそこから辿れる文献などを参照.

*28 Wikipedia によると「圏化」は Crane による造語である．

*29 Khovanov ホモロジーを定式化した動機については Khovanov の元論文 [78] や Lauda –Sissan によるサーベイ [97] Khovanov–Lipshitz によるサーベイ [79] で説明されている．

*30 Rasmussen の [136] 2.9 節」によると, reduced 版 $\overline{KhR}_n^{**}$ の方は, 絡み目に対しては, marked component に依存することが知られている．

*31 $\mathfrak{sl}_n$-Khovanov–Rozansky ホモロジーには, いくつかの別構成が知られている．一つは, シンプレクティック Khovanov ホモロジーで, ある種の Lagrangian intersection Floer ホモロジーとして構成される．$\mathfrak{sl}_2$ 版を Seidel–Smith[145] が構成し, Manolescu[111] がそれを $\mathfrak{sl}_n$ に拡張した．　$\mathfrak{sl}_2$ のとき, 標数 0 の体上では, Abouzaid–Smith により元の Khovanov ホモロジーと同型であることが証明されている [1]．また一つの構成は, シンプレクティック Khovanov ホモロジーのホモロジカルミラーとされている, Cautis–Kamnitzer の導来代数幾何的 $\mathfrak{sl}_n$Khovanov–Rozansky ホモロジー [20] [21] である．現在 $\mathbb{C}$ 係数上定義されており, これも $n=2$ の場合は元の Khovanov ホモロジーと同型であることが証明されている．また一つの構成は, Webster [149] が任意の複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して構成した絡み目ホモロジーである．これは higher representation theory(量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の 2 圏類似) を用いるもので, $\mathfrak{sl}(2)$ の場合に元の Khovanov ホモロジーを復元することが示されている．他にも数学的に厳密ではないが, 物理学者たちが Khovanov–Rozansky ホモロジーの構成についていくつかのアプローチを提唱している．Gukov–Schwarz–Vafa([53]), Witten([153]), Aganagic([2] とその続編) などが挙げられる．

HOMFLY-PT 多項式を圏化する [81]. すなわち全ての絡み目 $L \subset S^3$ に対し, unreduced 版に対しては,

$$\sum_{i,j,k}(-1)^{\frac{k-j}{2}}a^j q^i \dim KhR_\infty^{i,j,k}(L) = \frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}}\overline{P}_\infty(a,q)$$

が成り立ち, 右辺を unnormalized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式とよぶ. reduced 版に対しては,

$$\sum_{i,j,k}(-1)^{\frac{k-j}{2}}a^j q^i \dim \overline{KhR}_\infty^{i,j,k}(L) = \overline{P}_\infty(a,q)$$

が成り立つ.

♠ 1.4.3 Heegaard/モノポール/ インスタントン Floer ホモロジーとその knot 版, sutured 版

ここまでは 2000 年ごろからの Khovanov ホモロジーの発展の話を振り返ったが, 今度はそれとほぼ同時期のゲージ理論, Heegaard Floer 理論の展開をみよう. 1994 年に Seiberg–Witten 方程式が発見されて以来, インスタントン Floer ホモロジーの SW 版, すなわち, モノポール Floer ホモロジーを定式化する試みはいくつかなされてきた. 2007 年に本として出版された, Kronheimer–Mrowka による SW 方程式の実 blow up を用いた定式化 [94] が, 一つの完成形であると広く認識されている. *32 モノポール Floer ホモロジーが持つ $U(1)$ 対称性についての同変理論として, 長い完全列で結ばれる 3 つの $\mathbb{Z}[U]$ 加群

$$\cdots \xrightarrow{p} H\bar{M}_\bullet(Y) \xrightarrow{i} H\check{M}_\bullet(Y) \xrightarrow{j} H\hat{M}_\bullet(Y) \xrightarrow{p} \cdots$$

*33 および, reduced フレーバー $HM_\bullet^{red}(Y) = \mathrm{Im} j$ *34, そして, Bloom[17] が定式化 $U(1)$ 対称性を無視した非同変理論 $\widetilde{HM}_\bullet(Y)$*35があり, 「Thom–Gysin 完全列」

$$\to H\check{M}_{\bullet+2}(Y) \xrightarrow{U} H\check{M}_\bullet(Y) \to \widetilde{HM}_\bullet(Y) \to$$

をなす. これらの Floer ホモロジー群は, 関手

$$H\bar{M}_\bullet(Y), H\check{M}_\bullet, H\hat{M}_\bullet : (3+1)Cob \to \mathbb{Z}[U]\text{-}Mod$$

をなす.*36 また, これら 5 種類のモノポール Floer ホモロジー群は $Spin^c$ 構造の同型類に応じた分解 $\overset{\circ}{HM}(Y) = \oplus_{\mathfrak{s}\in Spin^c(Y)}\overset{\circ}{HM}(Y,\mathfrak{s})$ および, 有向 2 平面場のホモトピー類の集合 $\pi_0(\Xi(Y)) = \coprod_{\mathfrak{s}\in Spin^c(Y)}\pi_0(\Xi(Y,\mathfrak{s}))$ *37による次数付けを持つ. $c_1(\mathfrak{s})$ がトージョンである $Spin^c$ 構造に対しては, (特に $\mathbb{Q}HS^3$ ならばいつでも) 有理数 $\mathbb{Q}$ による絶対次数も定まる. Floer コホモロジー群, 局所係数付き版なども定義される.

Heegaard Floer ホモロジー [127] は, SW 版の Atiyah–Floer 予想におけるモノポール Floer ホモロジーの Lagrangian intersection Floer 的対応物であり, モノポール Floer ホモロジーよりもトポロジカル, 組み合わせ的計算に適したものを意図して Ozsváth–Szabó が構成した理論である. モノポール Floer ホモロジーとの同型

$$HF^\infty(Y,\mathfrak{s}) \cong H\bar{M}(Y,\mathfrak{s}), \quad HF^+(Y,\mathfrak{s}) \cong H\check{M}(Y,\mathfrak{s}), \quad HF^-(Y,\mathfrak{s}) \cong H\hat{M}(Y,\mathfrak{s})$$

$$\hat{HF}(Y,\mathfrak{s}) \cong \widetilde{HM}(Y,\mathfrak{s}), \quad HF^{red}(Y,\mathfrak{s}) \cong HM^{red}(Y,\mathfrak{s})$$

*38 が証明されており, コボルディズム写像, (i, j, p) 長完全列, コホモロジー群などもモノポール Floer 理論と同様に存在する.*39

Ozsváth–Szabó[125] と Rasmussen [137] は独立に, Heegaard Floer 理論の結び目入り版として, knot Floer ホモロジーを導入した.

$$\hat{HFK}(Y,K), \quad HFK^+(Y,K), \quad HFK^-(Y,K), \quad HFK^\infty(Y,K),$$

---

*32 モノポール Floer ホモロジーよりも, それに触発されて構成されたであろう SW Floer 安定ホモトピー型, Heegaard Floer ホモロジーの方が時系列としては先に発表されたことになっており, 時系列が一見奇妙に見えるが, Kronheimer–Mrowka は 1996 年の講演で, $\mathbb{Q}HS^3$ に対しては $U(1)$ 同変モノポール Floer ホモロジーの構成を実 blow up なしで行えることを説明していた. [126] の 4.1 節を参照. Kronheimer–Mrowka が $b_1 = 0$ とは限らない場合まで含めて扱えるように実 blow up を定式化とし, 境界付き多様体の Morse ホモロジーの無限次元版という描像を精巧に実現することに, 時間と労力をかけたことが想像される.

*33 それぞれ HM バー, from, to とよばれ, 境界付き多様体 B の全体と境界との対の完全列

$$\cdots \xrightarrow{p} H_*(\partial B) \xrightarrow{i} H_*(B) \xrightarrow{j} H_*(B,\partial B) \xrightarrow{p} \cdots$$

の Morse ホモロジーとしての実現の無限次元版と解釈される.

*34 $\mathbb{Q}HS^3$ に対し, これがゼロであることは $\mathbb{Z}$ 係数で L-space であることと同値である

*35 $\mathbb{Q}HS^3$ に対し, どの $Spin^c$ 構造に対してもこれのランクが対しても 1 であることは $\mathbb{Z}$ 係数で L-space であることと同値である

*36 (3+1) コボルディズム圏の object としては連結有向閉 3 次元多様体のみを考える. また, 射には, homology orientation のデータを付与するか, さもなくば ±1 倍を除いてしかコボルディズム写像が定まらない, 終域を射影的 $\mathbb{Z}[U]$ 加群の圏にする. また, 閉 4 次元多様体の SW 不変量を再現するには, もう一つのコボルディズム写像 $\vec{HM}(W)$ を用いる必要がある.

*37 $\pi_0(\Xi(Y,\mathfrak{s}))$ には $\mathbb{Z}/div(c_1(\mathfrak{s}))$ が free かつ transitive に作用する. ここで, $div(c_1(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}$ は $c_1(\mathfrak{s}) : H_2(Y) \to \mathbb{Z}$ の像である.

*38 正確には HM 側では balanced perturbation をとる.

*39 ただし, コボルディズム写像の合成則は $\mathbb{Z}$ 係数では証明されていない.

さらに, Ozsváth–Szabó はそれの有向絡み目への拡張として, link Floer ホモロジー

$$\hat{HFL}(Y,K), \quad HFK^-(Y,L)$$

も導入した [130]. $Y=S^3$ のときには, $\hat{HFK}(K)$ は Alexander 多項式を圏化し, $\hat{HFL}(K)$ は多変数 Alexander 多項式を復元する. Heegaard knot Floer ホモロジーの元々の定義には, 擬正則曲線 (非線形 Cauchy–Riemann 方程式) の解析が使われていたが, S^3 内の結び目に対しては, Manolescu–Ozsváth–Sarkar[113] により, grid diagram を用いた組み合わせ的構成が与えられた. これは grid homology とよばれる.

Juhász により導入された, Heegaard sutured Floer ホモロジー [70] は, balanced sutured 3-manifold (M,γ) [*40] に対して, 加群 $SHF(M,\gamma)$ を与える Heegaard Floer ホモロジー群の変種である. $M=Y-Int(D^3)$ に $\gamma=$(赤道)$\subset \partial M=S^2$ を suture として与えると閉 3 次元多様体の $\hat{HF}(Y)$ を復元し, knot exterior $M=Y-Int(N_K)$ にメリディアンとそれを平行にずらして向きを逆にしたもの $\gamma=\mu \amalg -\mu$ を suture として与えると Heegaard $\hat{HFK}(Y,K)$ を復元する. これらの 3 次元での関手性 (すなわちホモロジー群が群の同型類としてだけでなく, その間のカノニカルな同型射を与えた) については, Juhász–Thurston–Zemke [75] で確立された.

$$\hat{HF}, HF^-, HF^+, HF^\infty : 3Man_* \to \mathbb{F}_2[U]\text{-}Mod$$

$$SFH : Sut_{\mathrm{bal}} \to \mathbb{F}_2\text{-}Vect$$

$$\hat{HFL}, HFL^- : Link_* \to \mathbb{F}_2[U]\text{-}Mod$$

ただし $\hat{HF}$, $\hat{HFL}$ の $\mathbb{F}_2[U]$ 加群作用は自明である. $3Man_*$ は基点付き有向閉 3 次元多様体を object とし, 基点と向きをを保つ微分同相を射とする圏であり, Sut_{bal} は balanced sutured 3-manifold を object とし, その間のしかるべき向きを保つ微分同相を射とする圏である. $Link_*$ は, object が S^3 内の based link, すなわち, 各成分にちょうど一つの基点を持つ絡み目であり, morphism が, 絡み目および基点を保つような向き保つ微分同相である圏である. 後述するコンタクト元や Legendre/transverse knot 元を考えるとき, Floer ホモロジーを加群の同型類として扱うのでは, 元は up to 自己同型でしか定まらないのに対し, このように 3 次元での関手性を示しておけば, 元が意味をなすことになるという意味で重要である. balanced sutured 3-manifold の間の sutured コボルディズムに対するコボルディズム写像に関する関手性, およびその帰結としての link Floer ホモロジーとしての関手性については Juhász の [72] をみよ.

Kronheimer–Mrowka は Heegaard sutured Floer ホモロジーのモノポール, インスタントン版として, モノポール/インスタントン sutured Floer ホモロジー $SHM(M,\gamma)$, $SHI(M,\gamma)$ を構成し, その特別な場合として knot exterior を考えることで, モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジー $KHM(Y,K)$($\mathbb{Z}$ 係数), $KHI(Y,K)$($\mathbb{C}$ 係数) を構成した [95]. ヌルホモロガスな種数 g の連結 Seifert 曲面 $\Sigma\subset Y$ が与えられると, 相対ホモロジー類 $[\Sigma]$ に応じた分解

$$\hat{HFK}(Y,K)=\bigoplus_{i=-g}^{g}\hat{HFK}(Y,K,[\Sigma],i),\ KHM(Y,K)=\bigoplus_{i=-g}^{g}KHM(Y,K,[\Sigma],i),\ KHI(Y,K)=\bigoplus_{i=-g}^{g}KHI(Y,K,[\Sigma],i),$$

が定まり, 特に $Y=S^3$ の場合この分解は Σ によらないので, (Y,Σ) を表記から省略する. この i を Alexander 次数とよぶ. 結び目 $K\subset S^3$ に対して, 次が知られている.

1. Alexander 次数について次の対称性 (conjugation symmetry) がある

$$\hat{HFK}_d(K,i)\cong\hat{HFK}_{d-2i}(K,-i),\quad KHM(K,i)\cong KHM(K,-i),\quad KHI(K,i)\cong KHI(K,-i)$$

2. 次の意味で, Heegaard/モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーは Seifert 種数を detect する: $\max\{i|\hat{HFK}(K,i)\neq 0\}=\max\{i|KHM(K,i)\neq 0\}=\max\{i|KHI(K,i)\}=g_3(K)$
従って, 上の項目と合わせると, 非自明な最大および最小 Alexander 次数は $\pm g_3(K)$ に等しく, $g_3(K)=0$ である結び目は unknot だけであったから, $K\neq U$ に対しては, $\hat{HFK}(K)$, $KHM(K)$, $KHI(K)$ はランク 2 以上である (一方で, unknot に対してはランク 1 である).
3. 次の意味で, Heegaard/モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーはファイバー結び目を detect する
$\hat{HFK}(K,g_3(K))\cong\mathbb{Z}$ であることは K がファイバー結び目であることと同値である. KHM, KHI についても同様に Alexander 次数最高部分がランク 1 であることファイバー結び目であることが同値である. (Heegaard では, Ni[121] が sutured manifold 理論を使って証明し, Juhász[71] は sutured Floer を用いた別証明を与えた. モノポール/インスタントンでの証明は Kronheimer–Mrowka [95] によりあたえられ, その議論は Juhász のものとほぼ並行している):

---

*40 balanced sutured manifold (M,γ) とは, closed component を持たない境界付きコンパクト有向 3 次元多様体 M に次のデータを与えたものである:

1. 有向閉 1 次元部分多様体 $\gamma\subset\partial M$(i.e. M の境界上の disjoint な有向円周の集まり). これを suture という.
2. γ の管状近傍 $A(\gamma)\subset\partial M$. $R(\gamma):=\partial M-A(\gamma)$ である.

さらにこれらが次の条件を満たすことを要請する.

1. $R(\gamma)$ は closed component を持たない.
2. $R(\gamma)$ には, 次を満たす向き (canonical orientation) を与える: $R(\gamma)$ が境界に誘導する向きは, γ の向きと一致する.
3. $R(\gamma)$ の成分を次のように二つに分ける. $R(\gamma)=R_+(\gamma)\amalg R_-(\gamma)$, ここで, $R_+(\gamma)$(resp. $R_-(\gamma)$) は caonical orientation が ∂M の向きと一致している (resp. 逆である) 成分の集まり. このとき, $\chi(R_+(\gamma))=\chi(R_-(\gamma))$ であることを要請する.

なお, sutured manifold は元々 Gabai により導入されたものであり, Floer ホモロジーが定義されている balanced sutured 3-manifold はそれより狭いクラスである.

4. $\hat{HFK}(K)$ は Maslov 次数 (ホモロジカル次数) と Alexander 次数の二つの $\mathbb{Z}$ 次数 $\hat{HFK}(K) = \oplus_{(d,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \hat{HFK}_d(K,i)$ をもち, Alexander 多項式を圏化する. $KHM(K)$, $KHI(K)$ はカノニカル $\mathbb{Z}_2$ 次数と Alexander 次数の二つの次数 $KHM(K) = \oplus_{(d,i)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}} KHM_d(K,i)$, $KHI(K) = \oplus_{(d,i)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}} KHI_d(K,i)$ を持ち, Alexander 多項式を圏化する. *41 すなわち,

$$\sum_i \chi(\hat{HFK}(K))t^i = \sum_i \chi(KHM(K,i))t^i = \sum_i \chi(KHI(K,i))t^i = \Delta_K(t)$$

が成り立つ [125][95][93].

sutured Floer ホモロジーの間の同型

$$SFH(M,\gamma) \cong SHM(M,\gamma) \cong_{\mathbb{C}} SHI(M,\gamma)$$

($\cong_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ をテンソルすると同型の略記) およびその特別な場合として, $\hat{HF}(Y) \cong \tilde{HM}(Y) \cong_{\mathbb{C}} I^{\#}(Y)$ や $\hat{HFK}(K) \cong KHM(K) \cong_{\mathbb{C}} KHI(K)$ が予想されているが, 未解決である.

♠ 1.4.4 分岐被覆の Floer ホモロジー

結び目や曲面コボルディズムの分岐被覆に, 適切な (同変)Floer 理論を適用して, 結び目ホモロジー理論を作ることができる. Heegaaard Floer ホモロジー Ozsváth–Szabó [129] は $\hat{HF}(\Sigma_2(K);\mathbb{F}_2)$ を調べ, スケイン完全列や, reduced Khovanov ホモロジーからのスペクトル系列を構成した. Manolescu–Owens [112] は 二重分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ の Heegaard Floer d 不変量 (Froyshov 不変量の HF 対応物) を調べ, Jabuka [68] は素数べき次の巡回分岐被覆 $\Sigma_{p^n}(K)$ (p: 素数) に拡張した. これらはコンコーダンス準同型 $\delta_{p^n} : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ を与える. Hendricks–Lipshitz–Sarker [60][61] は Lie 群 G について同変な Lagrangian intersection Floer 理論を展開し, 特に $\mathbb{Z}_2$ 同変 Heegaard Floer 理論を二重分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ に適用したもの $\hat{HF}^*_{\mathbb{Z}_2}(\Sigma_2(K))$ を調べた.

後述する Baraglia–Hekmati, 筆者–谷口の研究はこれらの理論の SW 対応物と見ることができるものであるが, 現時点で HF サイドよりも理論展開, 計算が進んでいる部分がある. また, 分岐被覆の involution を, SW configuration にひねった持ち上げ方でリフトした作用を用いる real SW 理論という理論から得られる結び目ホモロジー理論を展開したものとして, 今野–宮澤–谷口 [82][83] がある.

♠ 1.4.5 特異インスタントン Floer ホモロジー

Donaldson 不変量の構造定理, インスタントン版の adjunction 不等式, 特に, Kronheimer–Mrowka による Milnor 予想の最初の証明では, 閉 4 次元多様体とそれにうめ込まれた曲面のペア (X,Σ) に対するバージョンの Donaldson 不変量の考察が重要であった. これは, 曲面に沿って特異性を持つインスタントンの数え上げにより定義された. これの TQFT 化として, Kronheimer–Mrowka は, knot に沿って特異性を持つ接続を使い, 特異インスタントン Floer ホモロジー $I^{\#}(Y,K), I^{\natural}(Y,K)$ を導入した [91]. これは, 複素係数でインスタントン knot Floer ホモロジーと同型となることが証明された [90]. また, S^1 同変版特異インスタントン Floer ホモロジーが Daemi–Scaduto により導入された [30].

1.5 コンタクト元と transverse/Legendrian knot 元

いくつかの Floer ホモロジーに共通する性質として, 閉コンタクト 3 次元多様体 (Y,ξ) に対しては, $-Y$ の Floer ホモロジーに値を持つコンタクト元が定義される. 例えば, monopole Floer コンタクト元 $c_{HM}(\xi) \in \check{HM}_{[\xi]}(-Y,\mathfrak{s}_\xi)/\pm 1, \widetilde{HM}_{[\xi]}(-Y,\mathfrak{s}_\xi)/\pm 1$ [84], Heegaard Floer コンタクト元, $c_{HF}(\xi) \in HF^+(-Y,\mathfrak{s}_\xi)/\pm 1, \hat{HF}(-Y,\mathfrak{s}_\xi)/\pm 1$ [128] , ECH コンタクト元 $c_{ECH}(\xi) \in ECH(Y)$ はその例である. Honda–Kazez–Matić[63] は $c_{HF}(\xi)$ の別構成を与えた. これらは, Taubes の同型 $HM = ECH$([146] から始まる 5 編の論文), Colin–Ghiggini–Honda の同型 $ECH = HF$ ([23] から始まる一連の論文) の下で写り合うことも証明されている.

また, Honda–Kazez–Matić, [62], Baldwin–Sivek [4][5] は, convex な境界を持つ境界つきコンタクト 3 次元多様体 (sutured contact 3-manifold)(M,γ,ξ)(ここで sutureγ は dividing set とする) に対して定まる sutured Heegaard/モノポール/インスタントン Floer ホモロジーの元を与えた

$$EH(M,\gamma,\xi) \in SFH(-M,-\gamma), \quad \psi(M,\gamma,\xi) \in \underline{\boldsymbol{SHM}}(-M,-\gamma) \quad ,\theta(M,\gamma,\xi) \in \underline{\boldsymbol{SHI}}(-M,-\gamma)$$

また, コンタクト元の naturality とよばれる性質が知られている. これはしかるべきクラスのシンプレクティックコボルディズムに対して, そのコボルディズム写像は, 一方の境界のコンタクト元をもう一方の境界のコンタクト元に写すというものである. 例えば, モノポール Floer 理論では, strong symplectic cobordism $(W,\omega) : (Y_0,\xi_0) \to (Y_1,\xi_1)$ に対し, $W : -Y_1 \to -Y_0$ とみなした下で, $\check{HM}(W,\mathfrak{s}_\omega)(c(\xi_1)) = c(\xi_0)$ が成り立つ. これは Mrowka–Rollin[118] が Kronheimer–Mrowka 不変量 (SW 不変量の, 境界にコンタクト構造を持つ 4 次元多様体に対する変種) に対する naturality を示す際に用いた「コーンの拡大」の手法を用いて, Echeverria[32] により示された. 他の理論のコンタクト元の naturality については Echeverria[32] に書かれている文献を参照.

いくつかの結び目ホモロジーにおいては, Legendrian, transverse knot に対し, その結び目ホモロジー群の元が定まるという共通の性質がある. これは上述したコンタクト元の結び目版と見なせる. transverse link の不変量であって trasnverse アイソトピーの下で不変なものは Legendrian link の不変量であって negative stabilization と Legendrian アイソトピーの下で不変なものと等価であったことを思い出そう. ここで紹介する不変量はいずれもそのようなものであるので, transverse link 不変量の場合のみを書くことにする.

*41 インスタントン/モノポールではホモロジカル $\mathbb{Z}$ 次数を復元する方法は知られていないが, もちろんホモロジカル $\mathbb{Z}_2$ 次数だけで Euler 数は定義できる.

- Plamenevskaya が定式化した Khovanov ホモロジーの元としての transverse knot 不変量 [133] と Wu[155] によるその $\mathfrak{sl}_n$Khovanov–Rozansky への一般化 $\psi_n(\mathcal{T}) \in KhR_n(m(\mathcal{T}))$. Khovanov ホモトピー版などの変種と発展については Lipshitz–Ng–Sarkar [105], Collari [24] などを参照. Gabriel Montes de Oca [116] は Plamenevskaya 不変量の odd Khovanov ホモロジー版を構成した. Hayden–Sundberg [55] では, Plamenevskaya 不変量の, 正の ascending コボルディズムの元での naturality が証明され, また, 4-ball 内の exotic surface を検出した.
- Heegaard knot Floer ホモロジーの元として定まる Legendrian, transverse knot 不変量には, zsvath–Szabo–Thurston[131] による Grid 不変量 (ただし (S^3, ξ_{std}) のみ) とよばれる grid diagram を用いる定式化, Lisca–Ozsváth–Stipsicz–Szabó による, LOSS 不変量 [106] という二つの定式化があったが, Baldwin–Vela-Vick–Vértesi は Braid 不変量 [9] というまた一つの定式化を与え, さらにこれら 3 つの定式化の等価性を示した. 今のところ, LOSS 不変量, Braid 不変量には $HFK(-Y, L)$ に値を持つものと $HFK(-Y, -L)$ に値を持つものの 2 タイプがある (ただし $HFK(-Y, L)$ と $HFK(-Y, -L)$ は同型ではある).

$$\hat{\mathfrak{T}}^{Grid}(Y,\xi,K) = \hat{\mathfrak{T}}^{LOSS}(Y,\xi,K) = \hat{\mathfrak{T}}^{Braid}(Y,\xi,K) \in H\hat{F}K(-Y,L)$$

$$\mathfrak{T}^{Grid-}(Y,\xi,K) = \mathfrak{T}^{LOSS-}(Y,\xi,K) = \mathfrak{T}^{Braid-}(Y,\xi,K) \in HFK^-(-Y,L)$$

$$\hat{\mathfrak{T}}_-^{Grid}(Y,\xi,K) = \hat{\mathfrak{T}}_-^{Braid}(Y,\xi,K) \in H\hat{F}K(-Y,-L)$$

$$\mathfrak{T}_-^{Grid-}(Y,\xi,K) = \mathfrak{T}_-^{-Braid}(Y,\xi,K) \in HFK^-(-Y,-L)$$

以下, これらをまとめて, $\hat{\mathfrak{T}}$, $\mathfrak{T}^-$, $\hat{\mathfrak{T}}_-$, $\mathfrak{T}_-^-$ と書くことにする. また, Braid 不変量は, K がファイバー絡み目であり, B がそれについてブレイドであるとき, $\hat{\mathfrak{T}}(B \cup K) \neq 0$ という非消滅定理を持つ [147]. Juhász–Miller–Zemke [74] では Braid 不変量のあるクラスの ascending コボルディズムの元での naturality が証明され, それを用いて 4-ball 内の exotic surface を検出した (Khovanov よりこちらの方が先だったが, 例は異なる). 2022 年の Binns–Day[16] では Braid 不変量を一要素として用いて knot Floer ホモロジーのランクが 8 以下の絡み目の分類がなされた.

- モノポール knot Floer 理論にも Legendrian, transverse knot 不変量. $\mathfrak{T}_M(K) \in \underline{KHI}(-Y, K, p)$ がある. これは Baldwin–Sivek[6] により構成された.
- インスタントン knot Floer 理論にも Legendrian, transverse knot 不変量 $\mathfrak{T}_I(K) \in KHI(-Y, K)$ がある. これも Baldwin–Sivek[8] により構成され, Khovanoh ホモロジーが三葉結び目を detect することの証明に使われた.
- Kang[76] が定式化した, 分岐被覆の Hendrics–Lipshitz–Sarkar $\mathbb{Z}_2$ 同変 Heegaard Floer コホモロジーに値を持つ pointed transverse knot $p \in \mathcal{T} \subset (S^3, \xi_{std})$ の不変量.

$$c(\xi_{\mathcal{T}}) = c(\Sigma_2(\mathcal{T}), \widetilde{\xi}) \in \hat{HF}^*_{\mathbb{Z}_p}(\Sigma_2(\mathcal{T}), p)$$

これは $\mathcal{T}$ の transverse based isotopy 類の不変量であることが示された.

1.6 結び目ホモロジーの間の種々のスペクトル系列

- reduced Khovanov ホモロジーから 2 重分岐被覆の $\hat{HF}$ へのスペクトル系列 ($\mathbb{F}_2$ 係数).

$$E_2 = \overline{Kh}(m(K)) \Rightarrow \hat{HF}(\Sigma_2(K))$$

これは, Ozsváth-Szabó[129] によるものである. スペクトル系列の構成は, 2 重分岐被覆の $\hat{HF}$ の skein exact triangle の技術の応用である. のちに, $\widetilde{HM}(\Sigma_2(K))$ を用いたこのスペクトル系列の SW 対応物が Bloom[17] により定式化された. また, ある種の Bar–Natan ホモロジー $E_2 = \widetilde{BN}^2_{**}(m(L))$ から 2 重分岐被覆の involutive monopole Floer ホモロジー $\widetilde{HMI}(\Sigma(L))$ に収束するスペクトル系列が F.Lin により構成された [104].

- reduced Khovanov ホモロジーから reduced 特異インスタントン Floer ホモロジー $I^\natural$ へのスペクトル系列 ($\mathbb{Z}$ 係数)

$$E_2 = \overline{Kh}(m(K)) \Rightarrow I^\natural(K).$$

これは, Kronheimer–Mrowka [90] によるもので, 上の Ozsváth-Szabó による 2 重分岐被覆の $\hat{HF}$ へのスペクトル系列のアイディアに触発されたものである. このスペクトル系列の帰結として, reduced Khovanov ホモロジーのランクは $I^\natural$ のランク以上であることがわかる. これを, $I^\natural(K)$ がインスタントン knot Floer ホモロジー $SHI(K)$ と $\mathbb{Q}$ 上同型であること, knot Floer ホモロジー $SHI(K)$ が 1 次元であるのは unknot に限り, その他の knot では 2 次元以上であることと組み合わせて, Kronheimer–Mrowka は 「(reduced) Khovanov ホモロジーが unknot を detect する」という有名な結果を示した. [*42] このスペクトル系列 $(+\alpha)$ を用いて, Khovanov ホモロジーがその他のいくつかの結び目を detect することも示された. また, Kronheimer–Mrowka は Bar-Natan 理論版のスペクトル系列も構成した [92].

[*42] なお, (reduced でない)Khovanov ホモロジーも unknot を detect することがこのことから従う. 実際, $\mathrm{rank}Kh(U) = 2$ であり, $\mathrm{rank}Kh(K) > 2$ であるとすると, exact triangle

$$\to Kh(K) \to \overline{Kh}(K) \to \overline{Kh}(K) \to$$

より, $2\mathrm{rank}\overline{Kh}(K) \geq \mathrm{rank}Kh(K) > 2$ より $\mathrm{rank}\overline{Kh}(K) > 1$ となるからである. 従って結び目 $K \subset S^3$ に対し $\mathrm{rank}Kh(K) = 2$ と $K = U$ は同値である.

- Baston–Seed link splitting スペクトル系列 [13] というものもある．これは, 絡み目の Khovanov ホモロジーから, その成分の disjoint union の Khovanov ホモロジーに収束するスペクトル系列で, これを, Khovanov ホモロジーが unknot を detect するという Kronheimer–Mrowka の結果と, 絡み目の Khovanov homology は $A_l = \mathbb{F}_2[X_1,\dots,X_l]/(X_1^2,\dots,X_l^2)$ 加群構造まで見る (l: 絡み目の成分数) と, l 成分 unknot を detect するという Hedden–Ni の結果 [58] と組み合わせることで, Khovanov ホモロジーが unlink を detect することを検出した. Hedden–Ni の議論のポイントは Ozsváth-Szabó スペクトル系列 [129] 全体が A_l 加群構造を持つことである.
- Dowlin スペクトル系列 [31]．これは reduced Khovanov ホモロジーから δ 次数付き Heegaard knot Floer ホモロジーへの $\mathbb{Q}$ 係数上のスペクトル系列.
$$E_0 = \overline{Kh}(K) \Rightarrow H\hat{F}K(m(K))$$
これは特に $\operatorname{rank}\overline{Kh}(K) \geq \operatorname{rank} H\hat{F}K(K)$ であるという Rasmussen の予想 [135] を証明している．さらにこれを用いて Khovanov ホモロジーが unknot を含むいくつかの knot を detect するという結果の再証明が与えられた.
- Lee スペクトル系列
$$E_2 = Kh(K) \Rightarrow Kh_{Lee}(K)$$
は, Rasmussen 不変量の元々の定義に用いられた．絡み目 L の成分数が $|L|$ であるとき, Lee ホモロジーのランクは $2^{|L|}$ であり, 結び目の場合 2 である．このスペクトル系列の E_∞ 項は例えば $\mathbb{Q}$ 係数では, ある $s(K) \in 2\mathbb{Z}$ に対し, $E_\infty^{i,j} = \mathbb{Q}_{0,s(K)-1} \oplus \mathbb{Q}_{0,s(K)+1}$ という形となり, この $s(K)$ が Rasmussen 不変量である.
Gornik, Lewark, Lobb, Wu([108][109][156][157] [100]) は, Lee スペクトル系列の $\mathfrak{sl}_n$Khovanov-Rozansky ホモロジーへの一般化を次のように定式化した: ポテンシャル $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ が n 次の monic 多項式のとき, $\mathfrak{sl}_n$Khovanov-Rozansky ホモロジーの変種 $KhR_{\partial w}$ が定義されるのであった．さらに, ポテンシャル ∂w が分離的 (separable), すなわち, n 個の相異なる根を持つとき,
$$E_1 = KhR_n(K) \Rightarrow gr^j KhR^i_\partial(K)$$
というスペクトル系列が存在し，かつ $gr^j KhR^i_{\partial w}(K)$ はランク n であり，その生成元の次数は $(i,j) = (0, j_1(K)), \cdots, (0, j_n(K))$ という形であることを示した．$n = 2$ の場合が Lee スペクトル系列である．また, Lewark–Lobb の [100] では, ∂w の根 α を一つ選ぶごとに $\overline{KhR}_{\partial w,\alpha}$ というホモロジーが定義され, これは常に 1 次元で,
$$E_2 = \overline{KhR}_n^{i,j} \Rightarrow gr^j \overline{KhR}^i_{\partial w}$$
という reduced 版のスペクトル系列が定式化された．これを用いて Rasmussen 不変量の一般化であるスライス-トーラス不変量 $s_{\partial w,\alpha} : \mathcal{C} \to \frac{1}{2(n-1)}\mathbb{Z}$ が定義される.
- Rasmussen が構成した, reduced HOMFLY-PT ホモロジーから reduced $\mathfrak{sl}_n$Khovanov-Rozansky ホモロジーへのスペクトル系列 [136]
$$E_1 = \overline{KhR}_\infty(K) \Rightarrow \overline{KhR}_n(K).$$
(Chandeler–Gorsky, [22] も参照.) Rasmussen いわく, このスペクトル系列は, ある意味 Lee のスペクトル系列の一般化である．また, このスペクトル系列の帰結として, 各結び目 $K \subset S^3$ に対し, 十分大きな全ての n に対し,
$$\overline{KhR}_n^{I,J}(K) \cong \bigoplus_{\substack{i+nj=I,\\ (k-j)/2=J}} \overline{KhR}_\infty^{i,j,k}(K)$$
が成り立つことを示した.

1.7 スライス-トーラス不変量

ここまでで多種多様な結び目ホモロジー理論があることを見たが, そこから, さまざまなコンコーダンス不変量が得られている．その中でも 4-ball 種数の下界を与え, かつ Bennequin 型不等式, 結び目の連結和についての加法性などの共通の性質を満たす, スライス-トーラス不変量とよばれるクラスのコンコーダンス不変量は最もシンプルなクラスであると考えられる. スライス-トーラス不変量という概念は Livingstone[107] に従って Lewark [99] によって導入された.

定義 1.6. $\mathbb{R}$ 値コンコーダンス不変量
$$y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$
であって, 次の条件を満たすものをスライス-トーラス不変量とよぶ.

1. (スライス条件)
$$y(K) \leq g_4(K)$$
2. (トーラス条件) $p, q > 0$ coprime に対するトーラス結び目に対して $y(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$
3. (加法性)
$$y(K_0 \# K_1) = y(K_0) + y(K_1)$$

を満たすものである.

$\diamondsuit$

トーラス条件は, slice–Bennequin 不等式

$$sl(\mathcal{T}) \leq 2y(K) - 1$$

に置き換えても等価である．ここで, $\mathcal{T} \subset (S^3, \xi_{std})$ は knot type が K である任意の transverse knot である．このことの証明には trasnverse Markov 定理を用いる (たとえば Lewark の phD thesis [98] をみよ.)．また, knot type が K である任意の Legendrian knot$\mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std})$ に対し

$$tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| \leq 2y(K) - 1$$

が成り立つことは, 上述の transverse knot の slice–Bennequin 不等式と trasnverse push–off により直ちに従う．

ここまで出てきたいくつかの不等式をまとめると

$$\frac{sl(\mathcal{T})+1}{2}, \frac{tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| + 1}{2} \leq (\forall \text{ スライス-トーラス不変量})(K) \leq g_4(K) \leq g_3(K), u(K)$$

となる．ここで, $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std})$ はそれぞれ knot type が K である任意の transverse knot, Legendrian knot である．[*43]

現在知られているスライストーラス不変量の例として,

- Heegaard knot Floer ホモロジーから構成される Ozsváth–Szabo の不変量 $\tau \in \mathbb{Z}$. これが最初に見つかったスライストーラス不変量である．元々は Heegaard knot Floer チェイン複体の Alexander フィルトレーションの情報を用いて定義された．[131] の Appendix A によると
$$\tau(K) = -\max\{i | \exists x \in HFK^-(-S^3, K, i) s.t. U^j x \neq 0 \forall j \geq 0\}$$
という特徴づけがある．
- Rasmussen 不変量 (の半分)$s/2 \in \mathbb{Z}$. Rasmussen 不変量は Khovanov ホモロジーから Lee ホモロジーへのスペクトル系列を用いて構成されるのだった．Rasmussen がこの不変量を導入し, 解析的手法を用いない Moilnor 予想の証明を与えたことは, センセーショナルな出来事であった．なお, Rasmussen は $\tau = s/2$ を予想したが, 後に反例が与えられた．そのような最初のものとして, Hedden–Ording [59] により, いくつかの (n,t) に対し, トーラス結び目 $T_{2,2n+1}$ の t-twisted positive Whitehead double $D_+(T_{2,2n+1}, t)$ は, $s/2 = 1 \neq 0 = \tau$ を満たすことが示された．$\tau = s/2$ が成り立つ結び目のクラスはいろいろあり, 例えば, 交点数 10 以下の全ての結び目や, quasipositive knot$\tau = s/2 = \frac{\overline{sl}+1}{2}$, alternating knot$\tau = s/2 = -\frac{\sigma(K)}{2}$ などはそうである ([59] をみよ) より一般に, squeezed knot [38] というクラスの結び目に対しては, スライストーラス不変量の値は全て一致することが示されている．
- Lewark–Lobb の [100] で一般化されて導入された, $sl(n)$Khovanov-Rozansky ホモロジーと次数 n でモニックかつ分離的 (根が全て相違) なポテンシャル関数 $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ とその一つの根 α から構成される Rasmussen 型不変量 $s_{n,\partial w} \in \frac{1}{n-1}\mathbb{Z}$.
- Z. Li [101] は, モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーのマイナスフレーバー $\underline{KHM}^-$, $\underline{KHI}^-$ を導入し, それを用いてスライス-トーラス不変量 τ_M, τ_I を構成した．一方, Baldwin–Sivek [7] は閉 3 次元多様体の Floer ホモロジー $I^\#, \widetilde{HM}$ を Dehn 手術に適用したものを用いて, スライス-トーラス不変量 $\tau_I^\#, \tau_M^\#$ を構成した (モノポール版の構成は書かれていないが Ghosh–Z.Li–Wong [47] のいうように同様である)．これらについては, Ghosh–Z.Li–Wong [47] では $\tau_I = \tau_I^\#$, $\tau^{\mathbb{F}_2} = \tau_M = \tau_M^\#$ が示された．
- Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi [28] が同変特異インスタントンホモロジーから構成した不変量 $\tilde{s}$. 以前に Kronheimer–Mrowka が特異インスタントン Floer 理論 $I^\#$(およびそれに接続のホロノミーの情報を持った局所係数の情報を付与したもの) を用いて, $s^\#$ というコンコーダンス不変量を導入し, これが Rasmussen 不変量 s と一致すると主張したが, 議論に誤りが見つかり, Gong[50] は $s^\#$ は連結和に対する加法性が成り立たない例を見つけ (従って $s^\#$ はスライス-トーラス不変量ではない), またトーラス結び目に対する値も s とは異なることを示した．その後 Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi が導入した $\tilde{s}$ はスライス-トーラス不変量であり, $s^\#$ との差について $2\tilde{s}(K) - s(K) \in \{-1, 0, 1\}$ を満たすことが示されている．
- 佐藤–佐野 [143] は, Rasmussen 不変量を, PID とその素元の組 (R, c) に一般化した不変量 $\tilde{ss}_c$ を定式化した．特に体 $\mathbb{K}$ 係数の Rasmussen 不変量を $(R, c) = (\mathbb{K}[h], h)$ の場合として含んでいる．
- そして, この予稿の主題である [IT2] で筆者–谷口が $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten Floer コホモロジーを用いて導入した不変量 $q_M \in \mathbb{Z}$,

が知られている．Baldwin–Sivek [7], Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi [28] によると $\tau_I^\# = \tau$ および $\tau = \tilde{s}$ が予想されているが, まだ証明されていない．

♠ 1.7.1 その他のトピック

結び目ホモロジーから構成される様々な非スライス-トーラスなコンコーダンス不変量 $\nu', \nu, \nu^+, \epsilon$ などや, そのコンコーダンス群に関する応用などを紹介したかったが, 紙面の都合上省略する．また, D^4 とその境界としての S^3 をより一般の境界付き 4 次元多様体や 3 次元多様体にした場合の考察, 例えば, H-種数の評価なども最近盛んであるが今回はあまり取り上げなかった．

2 筆者–谷口 [67] の主結果: $\mathbb{Z}_2$ 同変 SWFloer 理論を用いた新しい結び目ホモロジー

[67] で筆者–谷口は $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten Floer 理論を用いて, 新しい結び目ホモロジー群, および, 新しいスライス-トーラス不変量 q_M を導入した．

[*43] その他の Bennequin 型不等式として HOMFLY–PT 多項式を使うもの, HOMFLY–PT ホモロジーを使うもの, Kauffman 多項式を使うもの, Khovanov ホモロジーを使うものなどがある．Ng の [120] にまとまっている．

2.1 SW Floer 安定ホモトピー型とその同変版

まず, Manolescu[110] が導入した, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の位置付けを説明したい. Seiberg–Witten 不変量は元々は閉 4 次元多様体の整数値不変量であった. Floer が導入した, 無限次元版 Morse ホモロジー, すなわち, Floer ホモロジーの枠組みにおいて, Seiberg–Witten 不変量の (3+1) TQFT 化として, Seiberg–Witten モノポール Floer ホモロジーが構成された.

一方, 別の方向性の展開として, 古田が 10/8 不等式の証明の際に導入した Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似の方法 [43] により, Seiberg–Witten 不変量のホモトピカルな精密化として, Bauer–Furuta 不変量 [14] が構成できる. これは, $b_1(X) = 0$*44である $Spin^c$ 閉 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ に対し,

$$BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{M-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{N+\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X)-\sigma(X)}{8}})^+ \to (\mathbb{R}^M \oplus \mathbb{C}^N)^+, \quad M, N >> 1$$

という, 基点付き S^1 同変安定ホモトピー写像である.

しばしば, 十分大きな整数 M, N を省略して $BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X)-\sigma(X)}{8}})^+ \to S^0$ のように書くことにする. S^1 作用は Seiberg–Witten 方程式の持つゲージ対称性のうちの, ちょうど S^1 分だけある定数ゲージ変換に由来する.

Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, この二方向の Seiberg–Witten 不変量の展開のかけ合わせに当たるものである. すなわち, Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, モノポール Floer ホモロジーのホモトピカルな精密化であり, 同時に, Bauer–Furuta 不変量の (3+1) TQFT 化である. フォーマルに述べると, Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面を object とし, その間の $Spin^c$ コボルディズムを射とする $3+1$ コボルディズム圏から, S^1 同変 Spanier–Whitehead 圏へのモノイダル関手を与える. *45である. これは特に, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $(Y, \mathfrak{s})$ に対し, その Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型とよばれる「空間」(より正確には基点付き S^1 ホモトピー型の formal desuspension)$SWF(Y, \mathfrak{s})$ を与え, $Spin^c$ コボルディズム $(W, \mathfrak{s}_W) : (Y_0, \mathfrak{s}_0) \to (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ に対しては, 相対 Bauer–Furuta 不変量とよばれる基点付き S^1 同変安定ホモトピー写像

$$BF(W, \mathfrak{s}_W) : \Sigma^{\mathbb{R}^{-b^+(W)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W)-\sigma(W)}{8}}} SWF(Y_0, \mathfrak{s}_0) \to SWF(Y_1, \mathfrak{s}_1)$$

を与える. ここでもやはり両辺には十分大きな整数 M, N に対する $id_{\mathbb{R}^M}$ $id_{\mathbb{C}^N}$ によるサスペンションが本当はあるが, 先ほどの Bauer–Furuta 不変量のようにこの書き方ではそれを省略している. *46

後に, Lidman–Manolescu[103] により, しかるべき (S^1 同変) ホモロジーをとることでモノポール Floer ホモロジーを再現することが示された. *47

$$\tilde{H}_*^{S^1}(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong H\check{M}_*(Y, \mathfrak{s}), \quad \tilde{H}_*^{S^1, coBorel}(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong H\hat{M}_*(Y, \mathfrak{s}), \tilde{H}_*^{S^1, tate}(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong H\bar{M}_*(Y, \mathfrak{s}),$$

$$\tilde{H}_*(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong \widetilde{HM}_*(Y, \mathfrak{s})$$

Floer ホモトピー型 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ の構成は, 大きく分けて次の 4 ステップからなる.

1. Y 上に Riemann 計量と $Spin^c$ 構造を固定し, Chern–Simons–Dirac 汎関数の negative gradient flow 方程式=$\mathbb{R} \times Y$ 上の Seiberg–Witten 方程式を有限次元近似することで, 有限次元多様体上の S^1 同変な力学系を得る.
2. S^1 同変 Conley 指数理論により, この力学系から, 基点付き S^1 ホモトピー型 $\mathcal{I}_{-\lambda}^{\lambda}(Y, \mathfrak{s}, g)$ を得る. これは, 一般には, 有限次元近似の精度を表す実数値パラメータ λ および Riemann 計量に依存する. しかし, これらのデータを動かすとき, $\mathcal{I}_{-\lambda}^{\lambda}(Y, \mathfrak{s}, g)$ のズレは S^1 作用込みで, $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の何回かのサスペンション分だけである.
3. 有限次元近似の精度を表す実数値パラメータ λ への依存性を相殺するように, formal desuspension を行うことで, 空間 $SWF(Y, \mathfrak{s}, g)$ を得る.
4. Riemann 計量への依存性を相殺するように, さらに formal desuspension を行うことで, 空間 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ を得る. ここでの formal desuspension $\Sigma^{\mathbb{C}^{-n(Y,\mathfrak{s},g)}}$ は, $(Y, \mathfrak{s})$ を境界に持つ 4 次元コンパクト $Spin^c$ 多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ をひとつとり, それの適切な位相不変量と Dirac 作用素の Atiyah–Patodi–Singer 指数の差により与えられる.

ここで, 空間 X の formal desuspension といったとき, 考えたいのは $\Sigma^{\mathbb{R}^{-m} \oplus \mathbb{C}^{-n}} X$ のような suspension の逆操作であるが, そのようなものを幾何学的に構成するわけではなく, (X, m, n) という空間と数の組のことである, と宣言するだけである. ここでの S^1 同変 Spanier–Whitehead 圏はそのような組を object とするものとして定義される. このような組のホモロジーを, $\tilde{H}_*(X, m, n) = \tilde{H}_{*+m+2n}(X)$ のように定義する. これは, サスペンション同型 $\tilde{H}_*(\Sigma^{\mathbb{R}} X) \cong \tilde{H}_{*-1}(X)$ から逆算して, (X, m, n) が X の $-m-2n$ 回のサスペンションであるかのように振る舞うよう定義しているのである.

2.2 結び目コホモロジー群

Manolescu による Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成は, 小さな修正を除き, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $(Y, \mathfrak{s})$ にコンパクト群 Γ の作用がある場合に同変に行うことができる. これが可能であることはおそらく多くの専門家は認識していたであろうが, 実行されたのは比較的最近であり, Baraglia–Hekmati [12] による. 注意すべきこととして次の二点が挙げられる.

---

*44 $b_1(X) > 0$ の場合の Bauer–Furuta 不変量は, Picard トーラス $T^{b_1(X)}$ 上の族として定式化されるがここでは簡単のため $b_1(X) = 0$ とした.

*45 直積コボルディズム $[0,1] \times Y]$ に $[0,1]$ 方向に不変な $Spin^c$ 構造を与えたものに対する相対 Bauer–Furuta 不変量が恒等写像に S^1 同変安定ホモトピックであることは, 長らく未証明であったが, Sasahira–Stoffregen の未発表のドラフトにおいて証明されたことがアナウンスされ, 筆者-谷口はその原稿を送っていただいた.

*46 $b_1 > 0$ への拡張としては, Kronheimer–Manolescu[96], Khandhawit–J.Lin–Sasahira[77][?KLS18'], Sasahira–Stoffregen [144] などがある.

*47 コボルディズム写像の対応はまだ証明されていない.

1. 先ほど説明した Floer ホモトピー型 $SWF(Y,\mathfrak{s})$ の構成の 4 つ目のステップにおいて, $(Y,\mathfrak{s})$ を境界に持つ 4 次元コンパクト $Spin^c$ 多様体 $(X,\mathfrak{s}_X)$ をひとつとるということをしたが, これが Γ 作用込みで行えるかは非自明である．この問題を回避するため, 計量依存の Floer ホモトピー型 $SWF(Y,\mathfrak{s},g)$ を構成するにとどめ, そのコホモロジーを定義するときに, 次数のシフトを同様に考え, 不変性はこのコホモロジーに対してだけ示す．言い換えると, Spanier–Whitehead 圏の object として $(Y,\mathfrak{s})$ の計量に非依存な不変量を定式化することは諦める．
2. $(Y,\mathfrak{s})$ にコンパクト群 Γ の作用がある場合, SW 方程式に由来する S^1 作用と, 多様体への Γ 作用が, SW 方程式の configuration に持ち上げる際に「混ざって」, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は一般には

$$1 \to S^1 \to \Gamma_{\mathfrak{s}} \to \Gamma \to 1$$

というある中心拡大 $\Gamma_{\mathfrak{s}}$ への作用が定まるということである．

基本的なのは $\Gamma=\mathbb{Z}_p$ の場合である．ここでは, p は素数である．実はこの場合, 中心拡大は実は自明であることが示せる．すなわち, $\Gamma_{\mathfrak{s}} \cong S^1\times\mathbb{Z}_p$ である．

Baraglia–Hekmati が主に考察したのは, $S^1\times\mathbb{Z}_p$ 同変コホモロジー

$$\tilde{H}^{*+2n(Y,\mathfrak{s},g)}_{S^1\times\mathbb{Z}_p}(SWF(Y,\mathfrak{s},g);\mathbb{F}_p)$$

である．上で注意したように,「計量に非依存な同変 Floer ホモトピー型」を定義することはなされていないのであるが, あたかもそのようなもの $S^1\times\mathbb{Z}_p \curvearrowright SWF(Y,\mathfrak{s})$ があるかのような表記を用いても混同のおそれはないのでそうすることにする．このことを踏まえた上で, $(Y,\mathfrak{s})=(\Sigma_p(K),\mathfrak{s}_0)$ のとき, このコホモロジー群を

$$\tilde{H}^*_{S^1\times\mathbb{Z}_p}(SWF(Y,\mathfrak{s}))$$

と書くことにする．

これは,

$$H^*(B(S^1\times\mathbb{Z}_p);\mathbb{F}_p)=\begin{cases}\mathbb{F}_2[U,Q]\\ \mathbb{F}_p[U,S,R]/R^2\end{cases}$$

上の加群である．$\mathbb{Z}_p$ 作用付きの 3 次元多様体として基本的なのは, 結び目 $K\subset S^3$ に沿った $\mathbb{Z}_p$ 分岐被覆 $\Sigma_p(K)$ である．

この場合を考察することにより, $\theta^{(p)}(K)$ というコンコーダンス不変量の構成 [10] およびそれを用いた Milnor 予想の再証明 [11] がなされた．ただし, Baraglia–Hekmati による計算は, 主にスペクトル系列と HF=HM(Heegaard Floer ホモロジーという, モノポールホモロジーとの同型が知られている別の Floer ホモロジー) を経由するもので, 多変数多項式環上の加群を扱っていることも相まって, やや煩雑である．

一方, [67] で筆者らにより見出されたことは, S^1 作用を忘れて $\mathbb{Z}_2$ 同変コホモロジーを考えるだけでも面白いということである特に, 新しいスライストーラス不変量が定義でき, Milnor 予想を再証明することができる．特筆すべきこととして, スペクトル系列や HF=HM を使う代わりに, 次のトリックを用いる．

1. Freedman–Quinn による 4 次元多様体にはめ込まれた曲面のホモトピー分類の結果を用いるこれは, Kronheimer や Daemi–Scaduto により, 特異インスタントン理論の文脈で用いられていた．
2. コンタクト構造, シンプレクティック構造を用いる．より具体的には, [66] で筆者–谷口が構成したホモトピカルなコンタクト不変量の同変版として, transverse knot 不変量を導入し, それを用いる．

それでは, 新しい結び目コホモロジー群を導入しよう．$K\subset S^3$ を結び目とする．

$$\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)):=\tilde{H}^{*+2n(\Sigma_2(K),\mathfrak{s}_0,g)}_{\mathbb{Z}_2}(SWF(\Sigma_2(K),\mathfrak{s}_0,g);\mathbb{F}_2)$$

と定義する．ここで, $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(\Sigma)$ 上の $\mathbb{Z}_2$ 不変な $Spin^c$ 構造の同型類の集合 $Spin^c(\Sigma_2(K))^{\mathbb{Z}_2}$ は 1 元集合であり, その元を $\mathfrak{s}_0$ と書いた．このコホモロジー群は, 環

$$H^*(B\mathbb{Z}_2;\mathbb{F}_2)=\mathbb{F}_2[Q]$$

上の加群である．なお, この理論は Heegaard Floer 理論における Hendricks–Lipshitz–Sarker の理論 [60][61] の SW 理論的対応物と見ることができる．

♠ 2.2.1 ランク 1 定理とその証明

まずは, 新しい結び目コホモロジー群 $\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K))$ の基本的な性質として, 任意の結び目 $K\subset S^3$ に対して, このコホモロジー群は $\mathbb{F}_2[Q]$ 加群としてランク 1 であることを証明する．この結果をランク 1 定理とよぶことにしよう．

定理 2.1. 任意の結び目 $K\subset S^3$ に対して

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}_2[Q]}\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K))=1$$

が成り立つ．

この定理の証明は, 新しく導入する不変量 $q_M(K)$ のコボルディズム不等式の証明と同時に行う．

2.3　スライス-トーラス不変量 q_M

不変量 $q_M(K)$ の定義は次である．スライス-トーラス性の証明は後述する．

定義 2.2. 結び目 $K \subset S^3$ に対し,

$$q_M(K) := \min\{i | x \in \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(-K)), Q^n x \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\} - \frac{3}{4}\sigma(K)$$

と定義する．

すなわち, $\mathbb{Z}_2$ 同変 Floer コホモロジー群 $\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(-K))$ の「Q タワーの一番下」のコホモロジー次数を, 結び目符号数により補正したものが q_M である．この定義では, K ではなくそのコンコーダンス逆 $-K$(あるいはこのコホモロジー群は向きによらないので K のミラーにしても同じである) の Floer コホモロジー群を使っていることに注意する．コンタクト, シンプレクティック構造はこの定義の時点ではまだ用いていない．コンタクト, シンプレクティック構造を用いるのはトーラス結び目 (より広く, シンプレクティック曲面の境界になっている transverse knot) に対してこの不変量の値を決定するところである．

♠ 2.3.1　例: quasi-alternating knot

計算例を挙げる．$\Sigma_2(K)$ が $\mathbb{F}_2$ 係数で L-space であるような結び目, 特に, quasi-alternating knot に対しては, Floer コホモロジーを $\sigma(K)$ だけで完全に決定することができる．quasi-alternating knot に対しては, $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ が L-space であるという結果は [129] による．[129]quasi-alternating knot の定義を復習しておく．

定義 2.3. quasi-alternating 絡み目の集合 Q は, 次を満たす最小の絡み目の集合である．

- 自明結び目は Q に属する．
- 絡み目 L が射影図 D であって次を満たす交点 c を持つならば, L は Q に属する．
  1. c の両方の smoothing L_0 および L_∞ は Q に属する．
  2. $$\det(L) = \det(L_0) + \det(L_\infty)$$

♢

正スカラー曲率計量を持つ有理ホモロジー 3 球面は L-space であることが知られているので, 以下の定理は, 分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ が正スカラー曲率計量を持つ obstruction を与えていると見ることができる．Rolfsen table の交点数 9 以下の結び目 85 個のうち, 3 個を除いて全てが quasi-alternating であるので, 例は豊富であるといえよう．

定理 2.4. $K \subset S^3$ を $\Sigma_2(K)$ が L-space であるような結び目とする (quasi-alternating knot はこれを満たす)．このとき,

$$\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)) = \mathbb{F}_2[Q]_{-\frac{\sigma(K)}{4}}$$

であり (ここで右下の数は $1 \in \mathbb{F}_2[Q]$ の $\mathbb{Q}$ 次数を表す), 特に,

$$q_M(K) = -\frac{\sigma(K)}{2}$$

である．

証明.
$\Sigma_2(K)$ が L-space であることは, 非同変な reduced コホモロジーが 1 次元, すなわち, $\tilde{H}^*(SWF(K)) \cong \mathbb{F}_2$ であるということと同値であることが知られている．証明のポイントは $\mathbb{Z}_2$ ファイブレーション

$$\mathbb{Z}_2 \to SWF(K) \wedge (E\mathbb{Z}_2)_+ \to SWF(K) \wedge_{\mathbb{Z}_2} (E\mathbb{Z}_2)_+$$

に対する Thom–Gysin 完全列

$$\cdots \to \tilde{H}^{*-1}_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)) \xrightarrow{Q} \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)) \to \tilde{H}^*(SWF(K)) \to \cdots$$

と Baraglia–Hekmati の結果 [12] 系 6.3 より $\tilde{H}^*(SWF(K)) \cong \mathbb{F}_2$ の $\mathrm{gr}^{\mathbb{Q}}$ が $\sigma(K)$ を使って書けることである． □

定理 2.5. q_M は整数値スライス-トーラス不変量である．すなわち次が成り立つ．

1. 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $q_M(K)$ は整数である．
2. (コンコーダンス不変性) 二つの結び目 $K, K' \subset S^3$ がコンコーダントならば, $q_M(K) = q_M(K')$ が成り立つ．
3. (スライス条件) 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $q_M(K) \leq g_4(K)$ が成り立つ．
4. (トーラス条件) p, q を互いに素な正の整数とするとき, トーラス結び目 $T_{p,q}$ に対し $q_M(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ が成り立つ．
5. (加法性) 任意の二つの結び目 $K, K' \subset S^3$ に対し $q_M(K\#K') = q_M(K') + q_M(K')$ が成り立つ．

証明. 整数値であることは定義から容易に確かめられる．加法性の証明は省略する (Sasahira–Stoffregen により最近証明された SW Floer ホモトピー型の連結和公式 $SWF(Y\#Y', \mathfrak{s}\#\mathfrak{s}') = SWF(Y, \mathfrak{s}) \wedge SWF(Y', \mathfrak{s}')$ の $\mathbb{Z}_2$ 同変版を考えることがポイントの一つである)．残りの結果は次節で示す．コンコーダンス不変性とスライス条件は, 次節のコボルディズム不等式の特別な場合である．トーラス条件は次節の adjunction 等式の特別な場合であり, この証明でコンタクト, シンプレクティック構造を用いる． □

注.

2.4 コボルディズム不等式, 特にコンコーダンス不変性と g_4 の下からの評価

定理 2.6. $K_0, K_1 \subset S^3$ を結び目とし, $S \looparrowright [0,1] \times S^3$ を normally immersed surface コボルディズム $K_0 \to K_1$ であって, 種数 g, s_+ 個の正の immersed points, s_- 個の負の immersed points を持つものとする. このとき,

$$q_M(K_1) \leq q_M(K_0) + g + s_+$$

が成り立つ.

証明. 証明は 4 つのステップからなり, その途中でランク 1 定理を証明する. この議論は, Daemi–Scaduto [29] が Kronheimer[85], Freedman–Quinn[40] の結果に基づき特異インスタントン理論で行ったものの類似である.

1. normally immersed surface cobordism $S \looparrowright [0,1] \times S^3$ に対し, Bauer–Furuta 不変量 BF_S を定義する. これは, $\overline{\mathbb{C}P^2}$ を連結和して特異点を解消することによりなされる.
2. Q で局所化された Floer コホモロジー上に Bauer–Furuta 不変量から誘導されるコボルディズム写像 $BF_S^{*,loc}$ が, $Q^{\pm}$ の掛け算を除いて, S をホモトピーで取り替えても不変であることを示す. ここでは, Freedmann–Quinn の次の結果を用いる:
   定理 2.7. (Freedmann–Quinn [40]). 二つの normally immersed コボルディズム $S_0, S_1 \looparrowright [0,1] \times S^3$ が, 境界を固定してホモトピックであると仮定する. このとき S_0 と S_1 は, $[0,1] \times S^3$ の ambient アイソトピー, positive ツイストムーブ, negative ツイストムーブ, finger ムーブの 4 つのムーブでうつり合う.

   よって, S_0 と S_1 がこれら 4 つのムーブで関係している場合に $BF^*_{S_0} \overset{\text{up to } Q^{\pm}}{=} BF^*_{S_1}$ であることをチェックすれば十分であり, これは SW 方程式の解析とホモトピー論で確かめられる.
3. ランク 1 定理, すなわち, 任意の knot $K \subset S^3$ に対し $\mathrm{rank}_{\mathbb{F}_2[Q]} \tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)) = 1$ を示す. crossing change により, unknot への種数 0 の normally immersed コボルディズム $S : K \to U$ が構成できる.

   $$Q^{-1}\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K)) \underset{BF_S^{*,loc}}{\overset{BF_{-S}^{*,loc}}{\rightleftarrows}} Q^{-1}\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(U))$$

   というコボルディズム写像が誘導される. 合成コボルディズム $S \cup (-S) : U \to U$, $(-S) \cup S : K \to K$ は種数が 0 であるから product コボルディズム $[0,1] \times U$ $[0,1] \times K$ にホトピックであるから, 前のステップより合成 $BF^{*,loc}_{-S\cup S} = BF^{*,loc}_S \circ BF^{*,loc}_{-S}$, $BF^{*,loc}_{S\cup -S} = BF^{*,loc}_{-S} \circ BF^{*,loc}_S$ は up to $Q^{\pm}$ の掛け算で恒等写像に一致する (ここで, product コボルディズムに対する Bauer–Furuta 不変量が恒等写像であるという Sasahira–Stoffregen の結果の同変版を用いた). よって, $\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(U))$ と $\tilde{H}^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K))$ の $\mathbb{F}_2[Q]$ 上のランクは等しくなければならず, 前者が $\mathbb{F}_2[Q]$ に同型であることは直接確かめられるので, ランク 1 定理が従う.
4. コボルディズム不等式と同じ設定の下で, $BF_S^{*,loc} \neq 0$ かつ, Floer コホモロジーの free part $H^*_{\mathbb{Z}_2}(SWF(K))/(Q-torsion) \cong \mathbb{F}_2[Q]$ 上に Bauer–Furuta 不変量から誘導されるコボルディズム写像 $BF_S^{*,free}$ は

   $$BF_S^{*,free} = Q^{q_M(K_1) - q_M(K_0) + g + s_+}$$

   で与えられる. よって, 右辺の Q のべきはゼロ以上でなくてはならず, コボルディズム不等式が従う.
   $BF_S^{*,loc} \neq 0$ の証明は, 前のステップの種数があるバージョンと思うことができる. $S \cup (-S) : U \to U$ は $[0,1] \times U \#_{2g} T^2$ とホモトピックであり, 逆の合成 $-S \cup S : K \to K$ は $[0,1] \times K \#_{2g} T^2$ とホモトピックであることと連結和公式, BF_{T^2} の計算を使うと, 前のステップと同様にして証明できる. $BF_S^{*,free} = Q^{q_M(K_1) - q_M(K_0) + g + s_+}$ の計算は, コホモロジーの次数を見ればわかる. □

2.5 adjunction 等式, 特にトーラス結び目に対する計算

定理 2.8. $S \subset (D^4, \omega_{std})$ をシンプレクティック曲面であって, $\mathcal{T} := \partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse knot であるものとする. このとき,

$$q_M(\mathcal{T}) = g(S)$$

が成り立つ.

証明には, 筆者–谷口 [67] の二つの新しい結果を用いる. 一つ目は, 弱シンプレクティック充填のその中のシンプレクティック曲面に沿った分岐被覆が $\mathbb{Z}_2$ 不変な弱シンプレクティック充填の構造を持つという結果で, これは微分幾何的な議論である. 二つ目は, $\mathbb{Z}_2$ 同変コンタクト不変量 (=安定ホモトピー論的 transverse knot 不変量) を導入し, その基本的な性質, 合成則と非消滅定理を証明することである.

♠ 2.5.1 分岐被覆上の $\mathbb{Z}_2$ 不変な弱シンプレクティック充填構造

(Y, ξ) をコンタクト $\mathbb{Z}HS^3$, $\mathcal{T} \subset (Y, \xi = \mathrm{Ker}\lambda)$ を transverse 絡み目とする. このとき, $\mathbb{Z}_n$ 分岐被覆 $\Sigma_n(\mathcal{T})$ 上の $\mathbb{Z}_n$ 不変コンタクト構造 $\tilde{\xi} = \mathrm{Ker}\tilde{\lambda}$ であって, 射影 $\pi : \Sigma_n(\mathcal{T}) \to Y$ による $\mathcal{T}$ の逆像 $\widetilde{\mathcal{T}}$ のある近傍の外で $\tilde{\lambda}$ が引き戻し $\pi^*\lambda$ に一致するものが Gonzalo[51], Plamenevskaya[134] により構成されていた. [67] では筆者–谷口はさらに次の結果を示した.

定理 2.9. $S \subset (D_4, \omega_{std})$ をシンプレクティック曲面であって, 境界 $\mathcal{T} = \partial S \subset (Y, \xi)$ が transverse knot であるものとする. このとき, 分岐被覆 $\Sigma_2(S)$ は $(\Sigma_2(\mathcal{T}), \tilde{\xi}_{std})$ の弱シンプレクティック充填の構造 $\tilde{\omega}_{std}$ を持つ. □

[67] ではより一般に, D^4 よりも広いクラスの弱シンプレクティック充填に対して, $\mathbb{Z}_n$ 分岐被覆が定まるようなしかるべき設定の下で, 同様の結果を示したがそれはここでは述べない. 証明のポイントは, シンプレクティック形式 ω を射影 π で引き戻すだけでは, $\pi^{-1}(S)$ の近傍でシンプレクティック構造にならない (非退化性が成りたたなくなる) ので, しかるべくそれを改変することである.

♠ 2.5.2 $\mathcal{C}$ =transverse knot 不変量=$\mathbb{Z}_2$ 同変コンタクト不変量と貼り合わせ公式, 非消滅定理
[66] で導入された安定ホモトピー版コンタクト不変量は, 与えられたコンタクト有理ホモロジー球面 (Y,ξ) に対し,

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}(Y,\xi): S^0 \to \Sigma^{d_3(Y,\xi)+\frac{1}{2}} SWF(-Y,\mathfrak{s}_\xi)$$

という基点付き (非同変) 安定ホモトピー類が定まる, というものであった. その構成は, 多様体 $[0,\infty)\times Y$ に, $[1,\infty)\times Y$ 上ではコーン状に広がっていく概 Kähler 構造を与え, $\{0\}\times Y$ の近くでは直積状になるように計量を拡張し, その上で Atiyah–Patodi–Singer 境界条件つきで, Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似を行うというものであった. また, 境界にコンタクト構造が与えられた $b_3=0$ のコンパクト 4 次元多様体 (X,ξ) であって, その上の $Spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ と同型 $\mathfrak{s}|_{\partial X}\to\mathfrak{s}_\xi$ が与えられたものに対して [64] で筆者がそれ以前に構成していた, 球面の安定ホモトピー群に値を持つ不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})\in\pi^{st}_{d(X,\mathfrak{s},\xi)}(S^0)/\pm 1$ を, $(X,\mathfrak{s})$ の Bauer-Furuta 不変量とのペアリングにより復元する. すなわち, $Y=\partial X$ とすると, 次の可換図式がある.

$$\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, "\mathcal{C}"] \arrow[dr, "\Psi_{X,\xi,\mathfrak{s}}"'] & \Sigma^{d_3(\xi)+\frac{1}{2}} SWF(-Y,\mathfrak{s}_\xi) \arrow[d, "BF_{X,\mathfrak{s}}"] \\
 & S^{-d(X,\xi,\mathfrak{s})}
\end{tikzcd}$$

ここで, $d(X,\xi,\mathfrak{s})\in\mathbb{Z}$ はこの設定での SW モジュライ空間の virtual dimension とよばれる整数である. この可換図式は, $X\cup([1,\infty)\times\partial X)$ を X と $[1,\infty)\times\partial X$ という二つの部分に切り分けるときの貼り合わせ公式である. また, X が ξ の弱シンプレクティック充填の構造を持つ場合には, $d(X,\xi,\mathfrak{s})=0$ かつ $\Psi(X,\mathfrak{s},\xi)=\pm id$ であることが筆者により示されていた.
今, Y 上の $\mathbb{Z}_2$ 作用がコンタクト構造 ξ を保つとする. このとき, $\mathcal{C}$ の構成, 議論を $\mathbb{Z}_2$ 同変に行うことができ, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピー類を与える. transverse knot $K\subset(Y,\xi)$ に対しては, Gonzalo[51], Plamenevskaya[134] の構成により, 分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ は $\mathbb{Z}_2$ 不変なコンタクト構造 $\tilde{\xi}$ を持つ. これを考えることで, $\mathcal{C}$ は transverse knot 不変量とみなすことができる. さらに, $\Psi(\Sigma_2(S),\mathfrak{s}_{\tilde{\omega}})$ は $\pm id$ に $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピックであることが示せる. よって $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピー可換図式

$$\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, "\mathcal{C}"] \arrow[dr, "\pm id"'] & \Sigma^{d_3(\tilde{\xi})+\frac{1}{2}} SWF(-K) \arrow[d, "BF_S"] \\
 & SWF(-U)=S^0
\end{tikzcd}$$

を得る. (曲面 S を自明結び目からの surface コボルディズム $S:U\to K$ および, $S:-K\to -U$ と同一視している. $SWF(-U)=S^0$ は直接確かめられる.) よって,

$$\mathcal{C}^* BF_S^*(1)=1\in\mathbb{F}_2[Q]$$

が成り立つ[*48]. ここで, $\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}_2$ 同編であることより $\mathcal{C}^*$ は $\mathbb{F}_2[Q]$ 線形であるから, この等式は, $BF_S^*(1)$ が, Q-torsion でなく, かつ, Q で割れないことを意味する. すなわち, $BF_S^*(1)$ は「Q タワーの一番下」を実現している. これのコホモロジー次数を求めれば, q_M が決定されるというのは, q_M は「Q タワーの一番下」の次数を補正したものであるという定義式から明らかである. 結果的には求めたかった等式 $q_M(K)=g(S)$ が得られる. □

3 筆者–佐野–佐藤–谷口 [65] の主結果: q_M と既存のスライス-トーラス不変量の比較

不変量 q_M は既存のスライス-トーラス不変量と一致するだろうか? 筆者–佐野–佐藤–谷口 [65] の次の結果はこの疑問に否定的に答えた.

定理 3.1. (筆者–佐野–佐藤–谷口 [65]). s を Rasmussen 不変量, τ を Ozsváth–Szabó 不変量, $s_{\partial\omega}$ を, 任意の分離的ポテンシャル ∂w, 根 α に対する ${}_N$Rasmussen 不変量, $\tau^\#$ を Baldwin–Sevek のインスタントン τ 不変量 $\tilde{s}$ を Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi 不変量, $\tilde{ss}_c$ を任意の PID R および素元 c に対する佐野–佐藤の Rasmussen 型不変量とする. このとき, 結び目 9_{42} に対して次が成り立つ.

$$q_M(9_{42})=-1,\quad \tau(9_{42})=\tau^\#(9_{42})=\tilde{s}(9_{42})=s(9_{42})=\tilde{ss}_c=s_{\partial\omega,\alpha}(9_{42})$$

証明. $q_M(9_{42})=-1$ は, Greene[52] の結果より, $\Sigma_2(9_{42})$ は $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space である (ただし, 9_{42} は quasi-alternating でないことに注意) から, $q_M=-\frac{\sigma}{2}$ で与えられる. [*49]
$\tau=\tau^\#=\tilde{s}=0$ に対する議論は並行しているので, τ の場合を説明する. 使うのは次の事実である.

[*48] 「計量非依存な SW Floer 安定ホモトピー型」は本当は定式化していなかったのであるが, 目的のためにはこの Floer コホモロジー上の等式だけあれば十分であるのでそのことは問題にならない.

[*49] Greene の論文では $\Sigma_2(9_{42})$ は $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space であることの証明が省略されていたので, [65] では, Ozsváth–Szabó の $\widehat{HF}(\sigma_2(K))$ に対する skein exact triangle [129] を用いた別証明を与えた.

1. Ozsváth–Szabó correction term とよばれる $\mathbb{Z}HS^3$ に対する不変量 $d(Y)$ であって連結和に対する加法性 $d(Y\#Y') = d(Y) + d(Y')$, 特に $d(-Y) = d(Y)$ を満たすものが存在する．(ここでは $d(\Sigma(2,3,5)) = 1$ という規格化を採用する)
2. Y を $\mathbb{Z}HS^3$ とする．ある滑らかなコンパクト有向 4 次元多様体 X であって $b^+(X) = 0$ かつ $\partial X = Y$ であるものが存在するとする．このとき, Ozsváth–Szabó correction term $d(Y)$ は $d(Y) \geq 0$ を満たす.([124] 系 9.8) [*50] 特に ($d(-Y) = -d(Y)$ より) あるコンパクト有向 4 次元多様体 X_+, X_- であって, $b^+(X_-) = 0$ かつ $b^-(X_+) = 0$ かつ $\partial X_+ = \partial X_- = Y$ ものが存在するとするならば, $d(Y) = 0$ である．(後者の主張は $d(-Y) = d(Y)$ であるという事実を用いると前者の主張から従う.)
3. 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $\tau(K) > 0$ ならば $d(S^3_1(K)) < 0$ が成り立つ．特に, $d(S^3_1(K)) = 0$ ならば $\tau(K) = 0$ である．

$K = 9_{42}$ に対しては, $Y = S^3_1(K)$ に対し, Kirby 計算により具体的に X_+, X_- を構成することができ, $d(S^3_1(K)) = 0$, 従って, $\tau(K) = 0$ が従う．$\tau^\#, \tilde{s}$ に対してはインスタントン Froyshov 不変量を Ozsváth–Szabó correction term$d$ の代わりに用いると対応する性質が知られており, 議論は同様である．

次に, $\tilde{ss}_c(9_{42}) = s(9_{42}) = 0$ を示す．$(R,c) = (\mathbb{Z}[H], H)$ の場合に $\tilde{ss}_c = 0$ を直接計算で示すことができ, 佐藤–佐野 [143] の理論により, このことから全ての PID とその素元の組 (R,c) に対して $\tilde{ss}_c = 0$ であることが従い, 特に, 全ての体係数で Rasmussen 不変量がゼロであることがわかる．

次に, 任意の分離的ポテンシャル ∂w, 根 α に対する $_n$ 版 Rasmussen 不変量 $s_{\partial w,\alpha}(9_{42}) = 0$ を示す．$\mathfrak{sl}_2$ の場合は全て Rasmussen 不変量に一致することが知られており, この場合は先ほど示したので $n \geq 3$ を考えればよい．$n \geq 3$ を一斉に扱うポイントは, (reduced)HOMFLY-PT ホモロジーを考察することである．9_{42} の reduced HOMFLY-PT ホモロジー $\overline{KhR}_\infty(9_{42})$ を計算すると, $n \geq 3$ 以上だと reduced HOMFLY-PT ホモロジー $\overline{KhR}_\infty(9_{42})$ から reduced $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozanski ホモロジー $\overline{KhR}_n(9_{42})$ へのスペクトル系列では次数の条件より微分は発生せず, $\overline{KhR}_\infty(9_{42}) \cong \overline{KhR}_n(9_{42})$ であることがわかる．$(\mathfrak{sl}_n, \partial w, \alpha)$ 版 Lee スペクトル系列

$$\overline{KhR}_n(9_{42}) \Rightarrow \overline{KhR}_{\partial w,\alpha}(9_{42})$$

は最初の微分で Δ 次数がゼロである一つの生成元以外が全て消える (高次の微分は次数の理由ですべてゼロなので, さもなくば reduced ∂ w Lee 理論 $\overline{KhR}_{\partial w}(9_{42})$ が 1 次元にならずおかしい)．その残った一つの生成元は q 次数が 0 なので定義から $s_{\partial w,\alpha}(9_{42}) = 0$ となる．

注． 交点数 9 以下の prime knot[*51]は全部で 85 個あり, [65] ではその全てに対して q_M を計算した．実際, $8_{19}, 9_{42}, 9_{46}$ 以外は quasi-alternating であるから, $q_M = -\frac{\sigma}{2}$ で与えられる．$8_{19} = T_{3,4}$ であり, $\Sigma(8_{19}) = \Sigma(2,3,4)$ は Milnor の結果によると正スカラー曲率計量を持つので, これは L-space である．9_{42} が $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space であることは上で見た通りである．よって, これらに対しても $q_M = -\frac{\sigma}{2}$ で与えられる．9_{46} はスライス結び目であるから, $q_M(9_{46}) = 0$ である．なお, 交点数 10 以下の prime knot は全部で 250 個あり, そのうち現在まだ決定できていないのは $q_M(10_{132})$ と $q_M(10_{136})$ のみである．

3.1 終わりに

捉え難い非線形な対象, 例えば多様体をはじめとする非線形な空間, 非線形な写像の一部の情報を, デジタルな情報, 数や線形代数, 加群の理論に落とし込んで解析するというのは, 微分積分学, 表現論, 代数的トポロジーをはじめ, さまざまな数学の根底にある考え方である．コボルディズム圏から加群の圏への関手である TQFT も, そのような枠組みの一つである．$(3+1, 1+1)$ TQFT とでもよぶべき結び目ホモロジー理論は, 3, 4 次元の多様体やその上の幾何構造, 結び目といった非線形な対象を, それが持つ豊かな情報を反映した, 計算可能な代数的データ, コンピュータで扱えるような組み合わせ的情報に落とし込むことを可能にする枠組みであり, 現段階で最も具体的に調べることができる TQFT の例を供給している．さまざまな結び目ホモロジーは, 付随するコンコーダンス不変量や transverse/Legendre 元を持つなどの共通する性質もあれば, 相違点もある．筆者らの研究成果の紹介の他に本稿が目指したことは, 結び目に対する古典的なアプローチから現代的なアプローチへの変遷と, さまざまな TQFT 型不変量が互いに刺激し合いながら発展している様という二つの軸で結び目理論の展開を, 4 次元的な視点およびシンプレクティック・コンタクト構造の視点から描き出すことであった．今後も結び目ホモロジーの研究を通して, 3, 4 次元の多様体やその上の幾何構造, 結び目といった対象の理解, 分類が進んでいくことは間違いないであろう．今後はひょっとすると, さまざまな結び目ホモロジーや TQFT を見渡すような大局的視点で, 分類理論や統一理論が発展していくのかもしれないし, あるいは QFT の故郷である物理学にも何かフィードバックをもたらすということもあるかもしれない．期待は尽きないが, ここで筆を置くことにする．

[*50] Heegaard Floer 理論では, d は $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $d(Y, \mathfrak{s})$ に一般化されている．さらに次の結果が成り立つ, $(Y_0, \mathfrak{s}_0), (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $Spin^c$ $\mathbb{Q}HS^3$, $(W, \mathfrak{s}_W) : (Y_0, \mathfrak{s}_0) \to (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $Spin^c$ コボルディズムであって, $b^+(W) = 0$ であるものとする．このとき,

$$d(Y_1, \mathfrak{s}_1) - d(Y_0, \mathfrak{s}_0) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4}$$

が成り立つ．今, $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$ を S^3 とし, $(Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $\mathbb{Z}HS^3$(このとき $Spin^c$ 構造は一意) Y とすると,

$$d(Y) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4}$$

となり, W の交差形式は負定値ユニモジュラーかつ, $\{c_1(\mathfrak{s}_W)\}_{\mathfrak{s}_W \in Spin^c(W)}$ は特性ベクトル全体に一致する．よって, Elkies の定理 (負定値ユニモジュラー形式 Q に対し $\max_{\xi:char} Q(\xi) + \mathrm{rank}(Q) \geq 0$ が成り立つ) よりある $s_W \in Spin^c(W)$ に対し

$$d(Y) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4} \geq 0$$

が成り立つ．このことから上で述べた性質が従う．

[*51] 非自明な連結和分解を持たない結び目のこと

参考文献

[1] Mohammed Abouzaid and Ivan Smith, *Khovanov homology from Floer cohomology*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 1, 1–79. MR3867999

[2] Mina Aganagic, *Knot categorification from mirror symmetry part I: Coherent sheaves*, Adv. Theor. Math. Phys. **28** (2024), no. 4, 1151–1239. MR4819555

[3] Selman Akbulut and Rostislav Matveyev, *Exotic structures and adjunction inequality*, Turkish J. Math. **21** (1997), no. 1, 47–53. MR1456158

[4] John A. Baldwin and Steven Sivek, *A contact invariant in sutured monopole homology*, Forum Math. Sigma **4** (2016), Paper No. e12, 82. MR3510331

[5] ———, *Instanton Floer homology and contact structures*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 939–978. MR3477339

[6] ———, *Invariants of Legendrian and transverse knots in monopole knot homology*, J. Symplectic Geom. **16** (2018), no. 4, 959–1000. MR3917725

[7] ———, *Framed instanton homology and concordance*, J. Topol. **14** (2021), no. 4, 1113–1175. MR4332488

[8] ———, *Khovanov homology detects the trefoils*, Duke Math. J. **171** (2022), no. 4, 885–956. MR4393789

[9] John A. Baldwin, David Shea Vela-Vick, and Vera Vértesi, *On the equivalence of Legendrian and transverse invariants in knot Floer homology*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 2, 925–974. MR3070518

[10] David Baraglia, *Knot concordance invariants from Seiberg-Witten theory and slice genus bounds in 4-manifolds*, 2022.

[11] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Brieskorn spheres, cyclic group actions and the Milnor conjecture*, 2022.

[12] ———, *Equivariant Seiberg-Witten-Floer cohomology*, Algebr. Geom. Topol. **24** (2024), no. 1, 493–554.

[13] Joshua Batson and Cotton Seed, *A link-splitting spectral sequence in Khovanov homology*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 5, 801–841. MR3332892

[14] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298

[15] Stefan Behrens, Boldizsár Kalmár, Min Hoon Kim, Mark Powell, and Arunima Ray (eds.), *The disc embedding theorem*, Oxford University Press, Oxford, 2021. MR4519498

[16] Fraser Binns and Subhankar Dey, *Rank bounds in link floer homology and detection results* (2022), available at `arXiv:2201.03048`.

[17] Jonathan M. Bloom, *A link surgery spectral sequence in monopole Floer homology*, Adv. Math. **226** (2011), no. 4, 3216–3281. MR2764887

[18] Michel Boileau and Stepan Orevkov, *Quasi-positivité d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 9, 825–830. MR1836094

[19] Michel Boileau and Claude Weber, *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Enseign. Math. (2) **30** (1984), no. 3-4, ??–??.

[20] Sabin Cautis and Joel Kamnitzer, *Knot homology via derived categories of coherent sheaves. I. The $\mathfrak{sl}(2)$-case*, Duke Math. J. **142** (2008), no. 3, 511–588. MR2411561

[21] ———, *Knot homology via derived categories of coherent sheaves. II. $\mathfrak{sl}_m$ case*, Invent. Math. **174** (2008), no. 1, 165–232. MR2430980

[22] Alex Chandler and Eugene Gorsky, *Structures in homfly-pt homology* (2022), available at `arXiv:2209.13058`.

[23] Vincent Colin, Paolo Ghiggini, and Ko Honda, *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions I*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **139** (2024), 13–187. MR4750569

[24] Carlo Collari, *Transverse invariants from Khovanov-type homologies*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 1, 1950012, 37. MR3910954

[25] Louis Crane and Igor B. Frenkel, *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, 1994, pp. 5136–5154. Topology and physics. MR1295461

[26] Aliakbar Daemi and Mike Miller Eismeier, *Instantons and rational homology spheres*, 2022.

[27] Aliakbar Daemi, Nobuo Iida, and Christopher Scaduto, *Rank three instantons, representations and sutures*, 2024.

[28] Aliakbar Daemi, Hayato Imori, Kouki Sato, Christopher Scaduto, and Masaki Taniguchi, *Instantons, special cycles, and knot concordance*, 2022.

[29] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto, *Chern-Simons functional, singular instantons, and the four-dimensional clasp number*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **26** (2024), no. 6, 2127–2190. MR4742808

[30] ———, *Equivariant aspects of singular instanton Floer homology*, Geom. Topol. **28** (2024), no. 9, 4057–4190. MR4845451

[31] Nathan Dowlin, *A spectral sequence from Khovanov homology to knot Floer homology*, J. Amer. Math. Soc. **37** (2024), no. 4, 951–1010. MR4777638

[32] Mariano Echeverria, *Naturality of the contact invariant in monopole Floer homology under strong symplectic cobordisms*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 4, 1795–1875. MR4127085

[33] Michael Ehrig, Daniel Tubbenhauer, and Paul Wedrich, *Functoriality of colored link homologies*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **117** (2018), no. 5, 996–1040. MR3877770

[34] David Eisenbud and Walter Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 110, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985. MR817982

[35] John B. Etnyre, *Legendrian and transversal knots*, Handbook of knot theory, 2005, pp. 105–185. MR2179261

[36] John B. Etnyre and Marco Golla, *Symplectic hats*, J. Topol. **15** (2022), no. 4, 2216–2269. MR4584589

[37] Peter Feller, *The degree of the Alexander polynomial is an upper bound for the topological slice genus*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 3, 1763–1771. MR3523068

[38] Peter Feller, Lukas Lewark, and Andrew Lobb, *Squeezed knots*, 2022.

[39] Ralph H. Fox and John W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka Math. J. **3** (1966), 257–267. MR211392

[40] Michael H Freedman and Frank Quinn, *Topology of 4-manifolds (pms-39)*, Princeton University Press, 1990.

[41] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246. MR776477

[42] Stefan Friedl and Peter Teichner, *New topologically slice knots*, Geom. Topol. **9** (2005), 2129–2158. MR2209368

[43] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478

[44] Siddhartha Gadgil and Dheeraj Kulkarni, *Relative symplectic caps, 4-genus and fibered knots*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **126** (2016), no. 2, 261–275. MR3489165

[45] Stavros Garoufalidis and Peter Teichner, *On knots with trivial Alexander polynomial*, J. Differential Geom. **67** (2004), no. 1, 167–193. MR2153483

[46] Hansjörg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2397738

[47] Sudipta Ghosh, Zhenkun Li, and C.-M. Michael Wong, *On the tau invariants in instanton and monopole Floer theories*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12346, 53. MR4821358

[48] Robert E. Gompf, *Smooth concordance of topologically slice knots*, Topology **25** (1986), no. 3, 353–373. MR842430

[49] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR1707327

[50] Sherry Gong, *On the Kronheimer-Mrowka concordance invariant*, J. Topol. **14** (2021), no. 1, 1–28. MR4186131

[51] Jesús Gonzalo, *Branched covers and contact structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), no. 2, 347–352. MR902554

[52] Joshua Evan Greene, *A spanning tree model for the heegaard floer homology of a branched double-cover*, Journal of Topology **6** (2013), no. 2, 525–567.

[53] Sergei Gukov, Albert Schwarz, and Cumrun Vafa, *Khovanov-Rozansky homology and topological strings*, Lett. Math. Phys. **74** (2005), no. 1, 53–74.

[54] Kyle Hayden, *Quasipositive links and Stein surfaces*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 3, 1441–1477. MR4268165

[55] Kyle Hayden and Isaac Sundberg, *Khovanov homology and exotic surfaces in the 4-ball*, J. Reine Angew. Math. **809** (2024), 217–246. MR4726569

[56] Matthew Hedden, *Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 5, 617–629. MR2646650

[57] Matthew Hedden, Charles Livingston, and Daniel Ruberman, *Topologically slice knots with nontrivial Alexander polynomial*, Adv. Math. **231** (2012), no. 2, 913–939. MR2955197

[58] Matthew Hedden and Yi Ni, *Khovanov module and the detection of unlinks*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 5, 3027–3076. MR3190305

[59] Matthew Hedden and Philip Ording, *The Ozsváth-Szabó and Rasmussen concordance invariants are not equal*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 2, 441–453. MR2405163

[60] Kristen Hendricks, Robert Lipshitz, and Sucharit Sarkar, *A flexible construction of equivariant Floer homology and applications*, J. Topol. **9** (2016), no. 4, 1153–1236. MR3620455

[61] ———, *A simplicial construction of G-equivariant Floer homology*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **121** (2020), no. 6, 1798–1866. MR4201124

[62] Ko Honda, William H. Kazez, and Gordana Matić, *The contact invariant in sutured Floer homology*, Invent. Math. **176** (2009), no. 3, 637–676. MR2501299

[63] ———, *On the contact class in Heegaard Floer homology*, J. Differential Geom. **83** (2009), no. 2, 289–311. MR2577470

[64] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta type refinement of Kronheimer-Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary* (2019), available at `arXiv:1906.07938`.

[65] Nobuo Iida, Taketo Sano, Kouki Sato, and Masaki Taniguchi, *On the slice-torus invariant q_m from $\mathbb{Z}_2$-equivariant seiberg–witten floer cohomology*, 2025.

[66] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant* (2020), available at `arXiv:2010.02132`.

[67] ———, *Monopoles and transverse knots*, 2024.

[68] Stanislav Jabuka, *Concordance invariants from higher order covers*, Topology Appl. **159** (2012), no. 10-11, 2694–2710. MR2923439

[69] Vaughan F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111. MR766964

[70] András Juhász, *Holomorphic discs and sutured manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1429–1457. MR2253454

[71] ———, *Floer homology and surface decompositions*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 1, 299–350. MR2390347

[72] ———, *Cobordisms of sutured manifolds and the functoriality of link Floer homology*, Adv. Math. **299** (2016), 940–1038. MR3519484

[73] András Juhász, Maggie Miller, and Ian Zemke, *Transverse invariants and exotic surfaces in the 4-ball*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 6, 2963–3012. MR4347309

[74] ———, *Transverse invariants and exotic surfaces in the 4-ball*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 6, 2963–3012. MR4347309

[75] András Juhász, Dylan Thurston, and Ian Zemke, *Naturality and mapping class groups in Heegard Floer homology*, Mem. Amer. Math. Soc. **273** (2021), no. 1338, v+174. MR4337438

[76] Sungkyung Kang, *A transverse knot invariant from z2-equivariant heegaard floer cohomology*, 2018.

[77] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516

[78] Mikhail Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426. MR1740682

[79] Mikhail Khovanov and Robert Lipshitz, *Categorical lifting of the Jones polynomial: a survey*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **60** (2023), no. 4, 483–506. MR4642116

[80] Mikhail Khovanov and Lev Rozansky, *Matrix factorizations and link homology*, Fund. Math. **199** (2008), no. 1, 1–91. MR2391017

[81] ———, *Matrix factorizations and link homology. II*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 3, 1387–1425. MR2421131

[82] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi, *Involutions, knots, and floer k-theory*, 2021.

[83] ———, *Involutions, links, and Floer cohomologies*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12340, 47. MR4821360

[84] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 457–546. MR2299739

[85] P. B. Kronheimer, *An obstruction to removing intersection points in immersed surfaces*, Topology **36** (1997), no. 4, 931–962. MR1432428

[86] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces. I*, Topology **32** (1993), no. 4, 773–826. MR1241873

[87] ———, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808. MR1306022

[88] ———, *Embedded surfaces and the structure of Donaldson's polynomial invariants*, J. Differential Geom. **41** (1995), no. 3, 573–734. MR1338483

[89] ———, *Gauge theory for embedded surfaces. II*, Topology **34** (1995), no. 1, 37–97. MR1308489

[90] ———, *Khovanov homology is an unknot-detector*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **113** (2011), 97–208. MR2805599

[91] ———, *Knot homology groups from instantons*, J. Topol. **4** (2011), no. 4, 835–918. MR2860345

[92] ———, *Instantons and Bar-Natan homology*, Compos. Math. **157** (2021), no. 3, 484–528. MR4236193

[93] Peter Kronheimer and Tom Mrowka, *Instanton Floer homology and the Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), no. 3, 1715–1738. MR2683750

[94] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043

[95] ———, *Knots, sutures, and excision*, J. Differential Geom. **84** (2010), no. 2, 301–364. MR2652464

[96] Peter B. Kronheimer and Ciprian, *Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations*, 2002.

[97] Aaron D. Lauda and Joshua Sussan, *An invitation to categorification*, Notices Amer. Math. Soc. **69** (2022), no. 1, 11–21. MR4353348

[98] Lukas Lewark, *Khovanov-Rozansky homologies, knotted weighted webs and the slice genus*, Ph.D. Thesis, 2013.

[99] ———, *Rasmussen's spectral sequences and the $\mathfrak{sl}_N$-concordance invariants*, Adv. Math. **260** (2014), 59–83. MR3209349

[100] Lukas Lewark and Andrew Lobb, *New quantum obstructions to sliceness*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **112** (2016), no. 1, 81–114. MR3458146

[101] Zhenkun Li, *Knot homologies in monopole and instanton theories via sutures*, J. Symplectic Geom. **19** (2021), no. 6, 1339–1420. MR4450625

[102] W. B. Raymond Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1472978

[103] Tye Lidman and Ciprian Manolescu, *The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies*, Astérisque **399** (2018), vii+220. MR3818611

[104] Francesco Lin, *Bar-Natan's deformation of Khovanov homology and involutive monopole Floer homology*, Math. Ann. **373** (2019), no. 1-2, 489–516. MR3968878

[105] Robert Lipshitz, Lenhard Ng, and Sucharit Sarkar, *On transverse invariants from Khovanov homology*, Quantum Topol. **6** (2015), no. 3, 475–513. MR3392962

[106] Paolo Lisca, Peter Ozsváth, András I. Stipsicz, and Zoltán Szabó, *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **11** (2009), no. 6, 1307–1363. MR2557137

[107] Charles Livingston, *Computations of the Ozsváth-Szabó knot concordance invariant*, Geom. Topol. **8** (2004), 735–742. MR2057779

[108] Andrew Lobb, *A slice genus lower bound from* sl(n) *Khovanov-Rozansky homology*, Adv. Math. **222** (2009), no. 4, 1220–1276. MR2554935

[109] ———, *A note on Gornik's perturbation of Khovanov-Rozansky homology*, Algebr. Geom. Topol. **12** (2012), no. 1, 293–305. MR2916277

[110] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$*, Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550

[111] ———, *Link homology theories from symplectic geometry*, Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 363–416. MR2313538

[112] Ciprian Manolescu and Brendan Owens, *A concordance invariant from the Floer homology of double branched covers*, Int. Math. Res. Not. IMRN **20** (2007), Art. ID rnm077, 21. MR2363303

[113] Ciprian Manolescu, Peter Ozsváth, and Sucharit Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 633–660. MR2480614

[114] Duncan McCoy, *Alternating knots with unknotting number one*, Adv. Math. **305** (2017), 757–802. MR3570147

[115] John Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. No. 61, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. MR239612

[116] Gabriel Montes de Oca, *An Odd Analog of Plamenevskaya's Invariant of Transverse Knots*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)–University of Oregon. MR4187426

[117] Scott Morrison, Kevin Walker, and Paul Wedrich, *Invariants of 4-manifolds from Khovanov-Rozansky link homology*, Geom. Topol. **26** (2022), no. 8, 3367–3420. MR4562565

[118] Tomasz Mrowka and Yann Rollin, *Legendrian knots and monopoles*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1–69. MR2199446

[119] Hitoshi Murakami, Tomotada Ohtsuki, and Shuji Yamada, *Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs*, Enseign. Math. (2) **44** (1998), no. 3-4, 325–360. MR1659228

[120] Lenhard Ng, *A skein approach to Bennequin-type inequalities*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), Art. ID rnn116, 18. MR2448088

[121] Yi Ni, *Knot Floer homology detects fibred knots*, Invent. Math. **170** (2007), no. 3, 577–608. MR2357503

[122] S. Yu. Orevkov and V. V. Shevchishin, *Markov theorem for transversal links*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no. 7, 905–913. MR2017961

[123] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *The symplectic Thom conjecture*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 93–124. MR1745017

[124] ———, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261. MR1957829

[125] ———, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004), no. 1, 58–116. MR2065507

[126] ———, *Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1159–1245. MR2113020

[127] ———, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1027–1158. MR2113019

[128] ———, *Heegaard Floer homology and contact structures*, Duke Math. J. **129** (2005), no. 1, 39–61. MR2153455

[129] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *On the Heegaard Floer homology of branched double-covers*, Advances in Mathematics **194** (2005), no. 1, 1–33.

[130] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks, link invariants and the multi-variable Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 2, 615–692. MR2443092

[131] Peter Ozsváth, Zoltán Szabó, and Dylan Thurston, *Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 2, 941–980. MR2403802

[132] Elena Pavelescu, *Braiding knots in contact 3-manifolds*, Pacific J. Math. **253** (2011), no. 2, 475–487. MR2878820

[133] Olga Plamenevskaya, *Transverse knots and Khovanov homology*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 4, 571–586. MR2250492

[134] ———, *Transverse knots, branched double covers and Heegaard Floer contact invariants*, J. Symplectic Geom. **4** (2006), no. 2, 149–170. MR2275002

[135] Jacob Rasmussen, *Knot polynomials and knot homologies*, Geometry and topology of manifolds, 2005, pp. 261–280. MR2189938

[136] ———, *Some differentials on Khovanov-Rozansky homology*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 6, 3031–3104. MR3447099

[137] Jacob Andrew Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003. Thesis (Ph.D.)–Harvard University. MR2704683

[138] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of* 3*-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597. MR1091619

[139] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26. MR1036112

[140] Lee Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), no. 2, 191–202. MR683760

[141] ———, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 1, 51–59. MR1193540

[142] ———, *Positive links are strongly quasipositive*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), 1999, pp. 555–562. MR1734423

[143] Taketo Sano and Kouki Sato, *A family of slice-torus invariants from the divisibility of reduced Lee classes*, arXiv preprint arXiv:2211.02494 (2022).

[144] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-Witten Floer spectra for* $b_1 > 0$, 2021.

[145] Paul Seidel and Ivan Smith, *A link invariant from the symplectic geometry of nilpotent slices*, Duke Math. J. **134** (2006), no. 3, 453–514. MR2254624

[146] Clifford Henry Taubes, *Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology I*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 5, 2497–2581. MR2746723

[147] Lev Tovstopyat-Nelip, *On the transverse invariant and braid dynamics*, J. Symplectic Geom. **22** (2024), no. 4, 817–846. MR4819512

[148] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), no. 3, 527–553. MR939474

[149] Ben Webster, *Knot invariants and higher representation theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **250** (2017), no. 1191, v+141. MR3709726

[150] Edward Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 4, 661–692. MR683171

[151] ———, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR990772

[152] ———, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796. MR1306021

[153] ———, *Fivebranes and knots*, Quantum Topol. **3** (2012), no. 1, 1–137. MR2852941

[154] Nancy Court Wrinkle, *The Markov theorem for transverse knots*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002. Thesis (Ph.D.)–Columbia University. MR2703285

[155] Hao Wu, *Braids, transversal links and the Khovanov-Rozansky theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 7, 3365–3389. MR2386230

[156] ———, *On the quantum filtration of the Khovanov-Rozansky cohomology*, Adv. Math. **221** (2009), no. 1, 54–139. MR2509322

[157] ———, *Generic deformations of the colored* $\mathfrak{sl}(N)$*-homology for links*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 4, 2037–2106. MR2826932

knot Floer homology における二種類の位数と Upsilon torsion invariant

姫野　圭佑　(広島大学先進理工系科学研究科数学プログラム D2)*

概　要

S^3 内の結び目に対し，minus knot Floer homology と unoriented knot Floer homology は $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持つ．ねじれ部分加群を消すために必要な U の作用の最小回数を考えることで knot Floer torsion order Ord, unoriented knot Floer torsion order Ord′ という非負整数値結び目不変量をそれぞれ取り出すことができる．本講演では，与えられた (unoriented) order を実現する双曲的結び目が存在することを紹介する．計算は二つの不変量を統合した不変量である Upsilon torsion invariant を用いた．

1. 導入と主結果

$\mathbb{F}_2$ を位数 2 の有限体とし，$\mathbb{F}_2[U]$ を変数を U とした $\mathbb{F}_2$ 係数一変数多項式環とする．一般に，$\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群 M には，U に関するねじれ部分加群 $\mathrm{Tor}(M) := \{x \in M \mid U^n \cdot x = 0 \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ が定まり，$\mathrm{Ord}(M) := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid U^n \cdot \mathrm{Tor}(M) = \{0\}\}$ と *torsion order* を定めることができる．$\mathrm{Tor}(M) = \{0\} \iff \mathrm{Ord}(M) = 0$ に注意.

K を S^3 内の結び目とする．この K に対して，*minus knot Floer homology* $\mathrm{HFK}^-(K)$ [17] と *unoriented knot Floer homology* $\mathrm{HFK}'(K)$ [16] が定義され，ともに $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持つ．上の話から，*knot Floer torsion order* $\mathrm{Ord}(K)$ と *unoriented knot Floer torson order* $\mathrm{Ord}'(K)$ を

$$\mathrm{Ord}(K) := \mathrm{Ord}(\mathrm{HFK}^-(K))$$
$$\mathrm{Ord}'(K) := \mathrm{Ord}(\mathrm{HFK}'(K))$$

で定めることができる．これらはともに非負整数値の結び目不変量である．

注意 1. O を unknot とすると，$\mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(O)) = \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}'(O)) = \{0\}$ なので $\mathrm{Ord}(O) = \mathrm{Ord}'(O) = 0$ である．逆に，$\mathrm{HFK}^-(K)$ は unknot を detect することから [18]，$\mathrm{Ord}(K) = 0$ ならば $K = O$ が分かる．$\mathrm{HFK}'(K)$ についても同様に，少し議論をすると，$\mathrm{Ord}'(K) = 0$ ならば $K = O$ が分かる．つまり，$\mathrm{Ord}(K) = 0 \iff \mathrm{Ord}'(K) = 0 \iff K = O$ である．

$\mathrm{Ord}(K)$ は [7] で導入され，結び目コボルディズムとの関連を調べている．また，$\mathrm{Ord}'(K)$ は，$\mathrm{Ord}(K)$ の向きづけ不可能版として [3] で導入され，向きづけ不可能結び目コボルディズムとの関連が調べらている．詳細は，副節 2.1, 2.2 で紹介する．

不変量の実現問題に着目する，つまり，与えられた不変量を実現する結び目が存在するか，存在するならどのようなものかを考えたい．$\mathrm{Ord}(K)$, $\mathrm{Ord}'(K)$ に関しては次の結果がある．

命題 1 ([3, 7])**.** $T_{p,q}$ を (p, q)–torus knot とする．

- $\mathrm{Ord}(T_{p,q}) = \min\{p, q\} - 1$,

*e-mail: himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

- $\mathrm{Ord}'(T_{p,p+1}) = \left\lfloor \dfrac{p}{2} \right\rfloor$.

注意 2. 一般の torus knot に対する Ord' の公式はまだ与えられていない.

したがって，任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_1) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_2) = N$ をみたす結び目 K_1, K_2 は torus knot として実現できる．では，双曲的結び目ではどうかというのが本研究の主結果である.

定理 1. 任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_1) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_2) = N$ をみたす双曲的結び目 K_1, K_2 がそれぞれ無限個存在する.

この定理を確かめるために，ある twisted torus knot の族に対して *Upsilon torsion invariant* $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ [1] を計算した．詳細は次の節で与えるが，$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ は $\mathrm{Ord}(K)$, $\mathrm{Ord}'(K)$ の情報を持った不変量である．$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ が一致するような結び目の組は簡単に見つかる．例えば，torus knot の族 $\{K_{p,pk+1}\}_{k=1}^{\infty}$ はすべて $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ が一致する．また，非自明な alternating knot (もっと広く *Floer thin knot*) に対してもすべて $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ が一致することが簡単に分かる．そして，今回の計算により副産物として次を得た.

系 1. $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ が一致する Floer thin でない双曲的結び目が無限に存在する.

残された問題もある.

問題 1. $M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = M$ かつ $\mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？もう少し弱く，$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = \mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？

今のところ経験的には $\mathrm{Ord}'(K) \leq \mathrm{Ord}(K)$ が成立するのでは無いかと思っているのだが，証明には至っていない．また，非自明な alternating knot K に対して，$\mathrm{Ord}(K) = \mathrm{Ord}'(K) = 1$ が成立するが，それ以外に $\mathrm{Ord}(K) = \mathrm{Ord}'(K)$ が成立する結び目は知らない.

本稿の内容は [4] に基づく.

2. knot Floer homology, torsion order, Upsilon torsion invariant

この節では torsion order と Upsilon torsion invariant について簡単に紹介する．そのためには knot Floer homology の知識が必要だが，全てを述べるにはページが足りないため省略する．knot Floer homology の詳細は，例えば [5, 13, 17] を参照されたい.

2.1. torsion order $\mathrm{Ord}(K)$

前述した通り，結び目 $K \subset S^3$ から minus knot Floer homology $\mathrm{HFK}^-(K)$ が得られる．これは $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持ち，$\mathrm{HFK}^-(K) \cong \mathbb{F}_2[U] \oplus \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(K))$ と分解できる．繰り返しになるが,

$$\mathrm{Ord}(K) = \min\{n \mid U^n \cdot \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(K)) = \{0\}\}$$

である.

例 1. 図 2.1 の左は $(3,4)$–torus knot $T_{3,4}$ の minus knot Floer *complex* $\mathrm{CFK}^-(T_{3,4})$ を表す．点が $\mathbb{F}_2$ 上の生成元であり，矢印が微分を表す (例えば，$\partial b = Ua$)．この complex の homology を考えると,

$$\mathrm{HFK}^-(T_{3,4}) = \mathbb{F}_2[U]\langle e\rangle \oplus \langle a, c \mid Ua = 0,\ U^2 c = 0\rangle$$

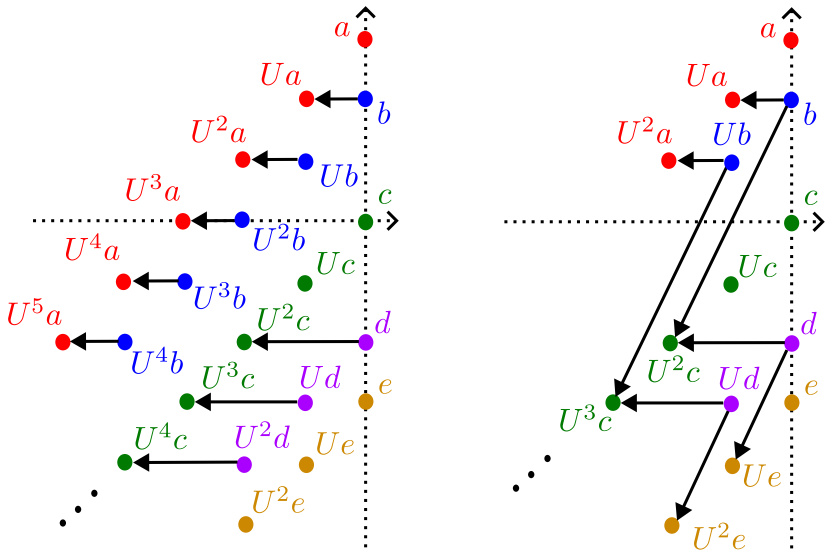


図 1: (左) $\mathrm{CFK}^-(T_{3,4})$. (右) $\mathrm{CFK}'(T_{3,4})$.

を得る．したがって，$\mathrm{Ord}(T_{3,4}) = 2$ である ($c \neq 0$ を消すのに U^2 が必要).

Ord が導入された [7] では，cobordism map (例えば [21]) を活用して次のことが示された: S を K_0 から K_1 へのコボルディズムで極大点が M 個 のものとする．このとき，$\mathrm{Ord}(K_0) \leq \max\{M, \mathrm{Ord}(K_1)\} + 2g(S)$ が成立する．さらに，この系として，$\mathrm{Ord}(K) \leq \mathrm{bridge}(K) - 1$ も得られる．

2.2. unoriented torsion order $\mathrm{Ord}'(K)$

例 2. 図 2.1 の右は $(3,4)$–torus knot $T_{3,4}$ の unoriented knot Floer *complex* $\mathrm{CFK}'(T_{3,4})$ を表す．再び，点が $\mathbb{F}_2$ 上の生成元であり，矢印が微分を表す (例えば，$\partial b = Ua + U^2c$). この complex の homology を考えると $\mathrm{HFK}'(T_{3,4})$ を得られ，

$$\mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(T_{3,4})) = \{0, a + Uc, Uc + e, a + e\}$$

となる ($\mathbb{F}_2$ 係数であることに注意．例えば，$U(a + Uc) = Ua + U^2c = 2 \cdot Ua = 0$ となる)．したがって，$\mathrm{Ord}'(T_{3,4}) = 1$ である．

Ord' が導入された [3] では次のことが示された: S' を K_0 から K_1 への**向きづけ不可能な**コボルディズムで極大点が M 個のものとする．このとき，$\mathrm{Ord}'(K_0) \leq \max\{M, \mathrm{Ord}'(K_1)\} + \gamma(S')$ が成立する ($\gamma(S')$ は S' の crosscap の個数，向きづけ不可能種数とも呼ばれる).

2.3. Upsilon torsion invariant

結び目 K に対し，関数 $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}} \colon [0,2] \to \mathbb{R}$ が定義できる [1]．これを *Upsilon torsion invariant* と呼ぶ．これは以下の性質を持つ:

1. $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ は連続かつ区分線形，
2. $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(2-t) = \Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t)$, $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(0) = \Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(2) = 0$,
3. $\frac{d}{dt}\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(0) = \mathrm{Ord}(K)$, $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(1) = \mathrm{Ord}'(K)$,

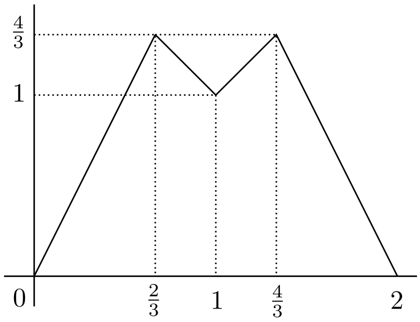


図 2: $T_{3,4}$ の Upsilon torsion invariant.

4. $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ から計算可能.

性質 3 より，Upsilon torsion invariant は Ord と Ord$'$ の一般化になっていると言える.

例 3. 図 3 は，$\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_{T_{3,4}}$ のグラフである．原点付近の傾きが 2 で $\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_{T_{3,4}}(1)=1$ であることは，$\mathrm{Ord}(T_{3,4})=2$, $\mathrm{Ord}'(T_{3,4})=1$ であることと対応している.

$\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_{K}$ の細かい定義は省略するが，具体的な計算例を例 4 で与える.

3. 主結果の概要

定理 1 の証明の概要を述べる．$T(p,q;2,1)$ を，(p,q)–torus knot の隣り合った二本のひもを追加で 1 回右手系フルツイストした twisted torus knot とする.

命題 2. $p\geq 4,\ k\geq 1$ のとき，$K=T(p,pk+1;2,1)$ に対して，

$$\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_K(t)=\begin{cases}(p-1)t & (0\leq t\leq \frac{2}{p})\\ 2-t & (\frac{2}{p}\leq t\leq \frac{2}{p-2})\\ (p-3)t & (\frac{2}{p-2}\leq t\leq \frac{4}{p})\\ 2m+(-m-1)t & (\frac{2m}{p}\leq t\leq \frac{2m}{p-1},\ m=2,\dots,\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor)\\ (p-2-m)t & (\frac{2m}{p-1}\leq t\leq \frac{2(m+1)}{p},\ m=2,\dots,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1)\end{cases}$$

が成立する.

$\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_K(t)$ は $t=1$ で対称的なので， $0\leq t\leq 1$ のみ考えれば十分である．この計算は非常に煩雑なので，のちに具体例を挙げるのみにとどめておく (例 4)．Upsilon torsion invariant の性質より次を得る.

系 2. twisted torus knot $K=T(p,pk+1;2,1)$ $(p\geq 4, k\geq 1)$ は次を満たす:

- $\mathrm{Ord}(K)=p-1$,
- $\mathrm{Ord}'(K)=\lfloor\frac{p-2}{2}\rfloor$.

注意 3. $p=2,3$ でも $\mathrm{Ord}(K)=p-1$ は成立する．しかしこのとき，$\mathrm{Ord}'(K)=1$ である.

さらに，次の命題は講演では詳細は述べていなかったが，ここで示しておく.

命題 3. $p\geq 5$ のとき，$K=T(p,pk+1;2,1)$ $(k\geq 1)$ は hyperbolic knot.

証明. まず，$K = T(p, pk+1; 2, 1)$ が torus knot であるのは，$p = 2, 3$ のときのみである [11]．したがって，今考えている結び目は torus knot ではない．

K が satellite knot であると仮定して矛盾を導く．ここで，K は tunnel number 1 の L–space knot であり [20]，companion は torus knot $T_{r,s}$ $(1 < r < s)$ とできる [14]．

一方，[6] より，pattern は positive n-braid の閉包であり，[14] の構成からその braid は，

$$\beta = \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$$

と表せる．ただし，$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ は positive Artin generator で i は $n-1$ 次の置換である．

主張 1. $\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$ の閉包は，$(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs+1}$ の閉包と同値．

アルゴリズムを与える．二つの braid β_1 と β_2 の閉包が同値なとき，$\beta_1 \sim \beta_2$ と表すことにし，$F = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$ とおく．つまり，$\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F \sim \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} F$ を示したい．

以下，word といったら空語も含む．$\sigma_i \cdot W \cdot F \sim W \cdot \sigma_i \cdot F$ であることに注意 ($i = 1, \ldots, n-1$, W は任意の word)．また，$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$) にも注意．

まず，$\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F = U_1 \sigma_1 U_2 F \sim \sigma_1 U_2 U_1 F$ とできる (U_1, U_2 は σ_1 を含まない word)．ここで，$U_2 U_1 = V_1 \sigma_2 V_2$ (V_1, V_2 は σ_1, σ_2 を含まない word) とでき，

$$\begin{aligned} \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F &\sim \sigma_1 U_2 U_1 F \\ &= \sigma_1 V_1 \sigma_2 V_2 F \\ &\sim V_1 \sigma_1 \sigma_2 V_2 F \\ &\sim \sigma_1 \sigma_2 V_2 V_1 F \end{aligned}$$

となる．

次に，$V_2 V_1 = R_1 \sigma_3 R_2$ (R_1, R_2 は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を含まない word) とでき，

$$\begin{aligned} \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F &\sim \sigma_1 \sigma_2 V_2 V_1 F \\ &= \sigma_1 \sigma_2 R_1 \sigma_3 R_2 F \\ &\sim R_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R_2 F \\ &\sim \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R_2 R_1 F \end{aligned}$$

となる．

以上を繰り返すことで，主張が示される． □

したがって今，K は torus knot $T_{r,s}$ の $(n, nrs+1)$–cable である．[12] より，そのような twisted torus knot は $T(4, 4k+1; 2, 1)$ のみ，つまり $p = 4$ に限られる (Alexander 多項式を見るとわかる)．今，$p \geq 5$ としているので矛盾．

□

注意 4. 証明にあるように，$p = 2, 3, 4$ のとき $K = T(p, pk+1; 2, 1)$ は hyperbolic knot でない．実際，$T(2, 2k+1; 2, 1) = T_{2,2k+3}$，$T(3, 3k+1; 2, 1) = T_{3,3k+2}$ であり，$T(4, 4k+1; 2, 1)$ は $T_{2,2k+1}$ の $(2, 4k+1)$-cable である．

注意 5. 上の証明では，実際は，tunnel number one, fully positive braid ([6] の意味) が satellite ならば cable knot であることを述べている．[12] の Question 1.2 で，ある条件を満たす twisted torus knot が satellite ならば cable か？という問いが与えられており，上はそのことに部分的に答えている．

これらを用いて，定理 1 の証明を与える．

定理 1 の証明. まず，$\mathrm{Ord}'(K_1)$ の方は上の twisted torus knot のみで示せる: $K_1 = T(2N+3,(2N+3)k+1;2,1)$ $(k \geq 1)$ とすると，$\mathrm{Ord}'(K_1) = N$ かつ K_1 は hyperbolic.

次に $\mathrm{Ord}(K_0) = N$ について考える．

- $N \geq 4$ のとき，$K_0 = T(N+1,(N+1)k+1;2,1)$ $(k \geq 1)$ とすると，$\mathrm{Ord}(K_0) = N$ かつ K_0 は hyperbolic.
- 一般に $\mathrm{Ord}(K) \leq \mathrm{br}(K)-1$ なので [7]，2-bridge hyperbolic knot K_0 は $\mathrm{Ord}(K_0) = 1$ (実際には alternating hyperbolic knot で良い).
- $K_0 = T(3,4;2,s)$ $(s \geq 2)$ は L–space knot [20] で，[9] より $\mathrm{Ord}(K_0) = 2$. $T(3,4;2,s)$ が torus knot もしくは satellite knot であるのは $|s| = 1$ のときのみ [10][11]．したがって，K_0 は hyperbolic.
- $K_0 = [(2,1,3,2)^{2n+1},-1,2,1,1,2]$ $(n \geq 1)$ は hyperbolic [2] で $\mathrm{Ord}(K_0) = 3$ [9].

□

さて，命題 2 の計算は以下の事実を活用して計算される:

- $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ は $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ から計算可能 [1].
- L–space knot K の $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は，その Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ から計算可能 (L–space knot は lens space surgery を持つ結び目の Heegaard Floer 理論的な一般化).
- $T(p,pk+1;2,1)$ $(p \geq 4, k \geq 1)$ は L–space knot [20].
- $T(p,pk+1;2,1)$ $(p \geq 4, k \geq 1)$ の Alexander 多項式は [15] の公式がある．

最後に具体的な計算例を挙げる．

例 4. $K = T(5,6;2,1)$ の Upsilon torsion invariant $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ を計算する．まず，$\Delta_K(t) = 1-t+t^5-t^6+t^7-t^8+t^{10}-t^{11}+t^{12}-t^{14}+t^{15}-t^{16}+t^{17}-t^{21}+t^{22}$ であり，指数の差を見ると $1,4,1,1,1,2,1,1,2,1,1,1,4,1$ となっている．したがって，$\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は図 4 のようになる．

$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ の変数 $t \in [0,2]$ を決め，座標 (u,v) の生成元 x に $\mathbb{R}$-filtration level $\mathrm{FL}(x)$ を $\mathrm{FL}(x) = tv+(2-t)u$ で与える．filtered base change ($\mathrm{FL}(a) \geq \mathrm{FL}(b)$ かつ a,b の homological grading が一致しているときに，$a \mapsto a+b$ とすること) で chain complex を “孤立頂点” と “線分型” に分割する．このとき，$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = \max\{$線分型の filtration level 差$\}$ である [1].

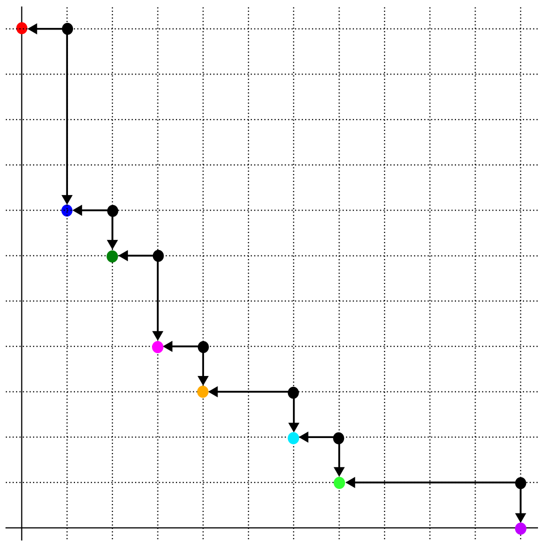


図 3: $\mathrm{CFK}^\infty(T(5,6;2,1))$ (の基本領域). 矢印の “長さ”を左上から読むと，指数の差の列 1,4,1,1,1,2,1,1,2,1,1,1,4,1 と一致している．

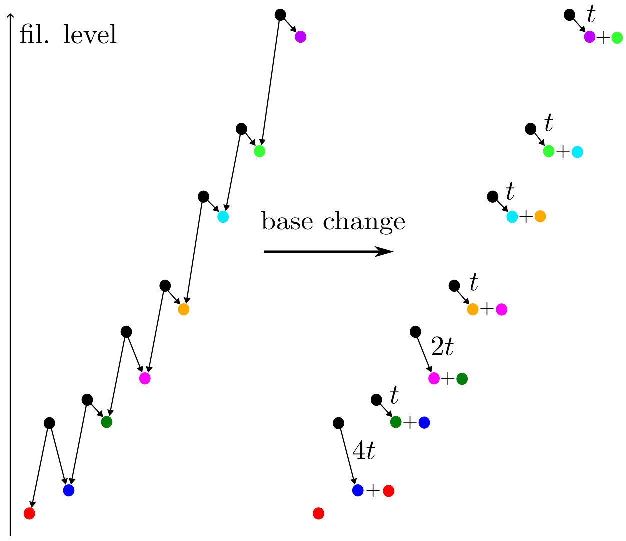


図 4: $0 \le t \le \frac{2}{5}$ におけるfiltered base change の様子.ラベルは filtration level 差.

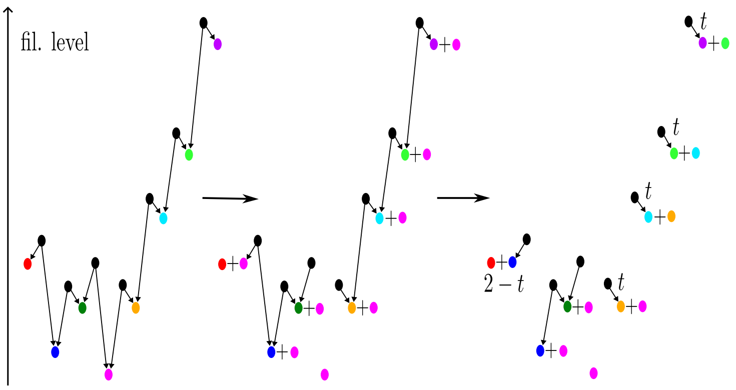


図 5: $\frac{4}{5} \leq t \leq 1$ のときの base change.

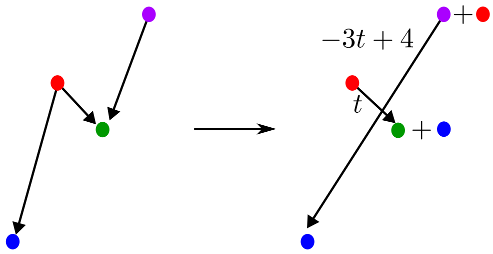


図 6: “N 型” complex の処理 (上二つの点の色はここで新しく設定した).

- $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$ のとき．chain complex と filtered base change は図 4 のようにできる．したがって，$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = 4t$.
- $\frac{4}{5} \leq t \leq 1$ のとき．まず，図 4 のように base change 行う．
  次に “N 型” complex を図 4 のように処理する．
  以上より，$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = -3t + 4$ となる．

他の場合も同様にして，

$$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = \begin{cases} 4t & (0 \leq t \leq \frac{2}{5}) \\ 2-t & (\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}) \\ 2t & (\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{5}) \\ -3t+4 & (\frac{4}{5} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

を得る．図 4 はそのグラフである．

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」において講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に感謝申し上げます．

参考文献

[1] Samantha Allen and Charles Livingston, *An Upsilon torsion function for knot Floer homology*, to appear, Math. Research Letters. arXiv:2208.04768.

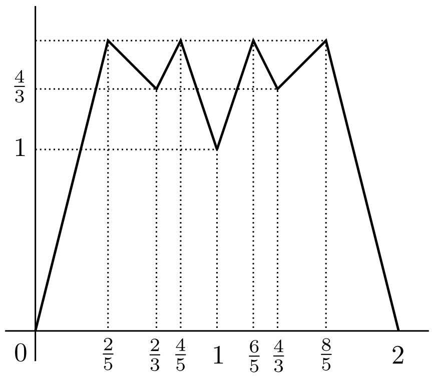


図 7: $\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_{T(5,6;2,1)}(t)$ のグラフ.

[2] Kenneth Baker and Marc Kegel, *Census L-space knots are braid positive, except for one that is not*, Algebr. Geom. Topol. **24** (2024), no.1, 569–586.

[3] Sherry Gong and Marco Marengon, *Nonorientable link cobordisms and torsion order in Floer homologies*, Algebr. Geom. Topol. **23** (2023), no.6, 2627–2672.

[4] Keisuke Himeno and Masakazu Teragaito, *Hyperbolic knots with arbitrarily large torsion order in knot Floer homology*, preprint. arXiv:2412.20652.

[5] Jennifer Hom, *A survey on Heegaard Floer homology and concordance*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no.2, 1740015, 24 pp.

[6] Tetsuya Ito, *Satellite fully positive braid links are braided satellite of fully positive braid links*, preprint. arXiv:2402.01129.

[7] András Juhász, Maggie Miller and Ian Zemke, *Knot cobordisms, bridge index, and torsion in Floer homology*, J. Topol. **13** (2020), no.4, 1701–1724.

[8] David Krcatovich, *The reduced knot Floer complex*, Topology Appl. **194** (2015), 171–201.

[9] Siddhi Krishna and Hugh Morton, *Twist positivity, L–space knots, and concordance*, preprint. arXiv:2211.17109.

[10] Sangyop Lee, *Satellite knots obtained by twisting torus knots: hyperbolicity of twisted torus knots*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2018), no.3, 785–815.

[11] Sangyop Lee, *Positively twisted torus knots which are torus knots*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 3, 1950023, 13 pp.

[12] Sangyop Lee, *Cable knots obtained by positively twisting torus knots*, J. Knot Theory Ramifications **32** (2023), no. 3, Paper No. 2350018, 15 pp.

[13] Ciprian Manolescu, *An introduction to knot Floer homology*, Physics and mathematics of link homology, Contemp. Math., **680** Centre Rech. Math. Proc. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, 99–135.

[14] Kanji Morimoto and Makoto Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. **289** (1991), no. 1, 143–167.

[15] Hugh Morton, *The Alexander polynomial of a torus knot with twists*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no.8, 1037–1047.

[16] Peter Ozsváth, András Stipsicz and Zoltán Szabó, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, Adv. Math. **315** (2017), 366–426.

[17] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004), no.1, 58–116.

[18] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol. **8** (2004), 311–334.

[19] Horst Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954), 245–288.

[20] Faramarz Vafaee, *On the knot Floer homology of twisted torus knots*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. **15**, 6516–6537.

[21] Ian Zemke, *Link cobordisms and functoriality in link Floer homology*, J. Topol. **12** (2019), no. 1, 94–220.

Iwakiri–Satoh 2-knot に対する カンドルコサイクル不変量

京都大学数理解析研究所 M2 植田 雄大

1 導入

球面 S^2 の 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への滑らかな埋め込みの像を 2 次元結び目 (2-knot) と呼ぶ．2 次元結び目に対して, 1 次元結び目 (1-knot) と同様に, 結び目の補空間の基本群から有限群への準同型写像の個数が不変量として古典的に用いられてきた．その後, 1980 年代にカンドルが導入されて, 結び目の基本カンドルから有限カンドルへ準同型写像の個数であるカンドル彩色数という不変量が上記の不変量の精密化として導入された．さらに, 1990 年代に Carter, Jelsovsky, Kamada, Langford, Saito [1, 2] によってカンドルのコサイクルを用いてカンドル彩色数の精密化であるカンドルコサイクル不変量が定義された.

一方, 2011 年に Iwakiri, Satoh [5] は 2 つの 1 次元結び目から 2 次元結び目を得る次のような構成法を与えている．2 つの枠付き有向結び目 K, K' に対して, $\mathbb{R}^3$ へ標準的に埋め込まれた球面 S^2 上に描かれた K' の図式の管状近傍を (K のタングル図式) $\times S^1$ に置き換えて, K' の図式の交点の近傍を図 2.1 のモーションピクチャが表す図式に置き換えることによって構成される 2 次元結び目を岩切–佐藤の 2 次元結び目 (Iwakiri–Satoh 2-knot) といい, $F(K, K')$ で表す．$F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量は K の不変量と K' の不変量を用いて表示されることが期待される.

本稿では, 4 面体カンドル Q_4 に対する Iwakiri–Satoh 2-knot$F(K, K')$ のコサイクル不変量の値が K のコサイクル不変量と K, K' の枠を用いて表されることを示した (定理 3.1)．K, K' の枠をそれぞれ $f_K, f_{K'}$ で表すとする．例えば, $f_K, f_{K'}$ のいずれかが 3 で割り切れる場合, Q_4 に対する $F(K, K')$ のコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ は Q_4 の非自明なコホモロジー類を与えるある 3-コサイクル $\phi_2 : Q_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を用いたとき,

$$\Phi_{\phi_2}(F(K, K'), C) = f_{K'} \cdot f_K \cdot \{\Psi^*_{\phi_2}(K, C) + \Psi_{\psi_1}(K, C)\} \ \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

と表されるという定理を得た．ただし, ψ_1 は Q_4 の非自明なコホモロジー類を与える 2-コサイクル, Ψ, Ψ^* はそれぞれ結び目のコサイクル不変量, 結び目のシャドーコサイクル不変量を表すとする．先行研究の Iwakiri, Satoh[5] では,「X の元の語」が定める写像 $H_2(X) \to H_3(X)$ を用いて $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量を表示しているが, 本論文では 4 面体カンドル Q_4 について, その双対写像 $H^3(Q_4) \to H^2(Q_4)$ を具体的に計算して $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量の具体的な表示を求めている.

2 定義

2.1 Iwakiri–Satoh 2-knot

K, K' を枠付き有向結び目とし, その枠 (framing) を $f_K, f_{K'}$ で表す. D を K から 1 点の近傍を取り除いた $[0,1]^2$ 上の black board framing が f_K となる 1-タングル図式, D' を K' の二次元球面 S^2 上の black board framing が $f_{K'}$ となる図式とする. $\mathbb{R}^3$ に標準的に埋め込まれた S^2 に D' が描かれているとする. D' の管状近傍を $D \times S^1$ に置き換え, D' の交点の近傍を図 2.1 のように置き換える. この部分の図式は D の 2 つの連結和について片方の D をもう一方の D の中を通すようなモーションピクチャによって表されるものである. このようにしてできる 2-knot の図式で 2-knot $F(K, K')$ を定め, これを **Iwakiri–Satoh 2-knot** と呼ぶことにする. この Iwakiri–Satoh 2-knot は Iwakiri, Satoh [5] によって定義された.

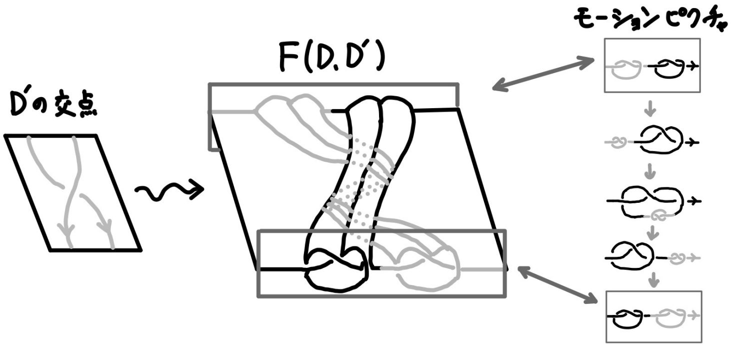


図 2.1　$F(K, K')$ の交点における変形

2.2 カンドル・カンドルコサイクル不変量

集合 X とその二項演算 $* : X \times X \to X$ が以下の 3 条件を満たすとき組 $(X, *)$ を**カンドル**と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.
- 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \to X$, $S_y(x) = x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

正 4 面体の頂点の集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ に対し, S_x を x を中心に 120 度回転させる写像と定めるとカンドルとなる. このカンドルを **4 面体カンドル**と言い, Q_4 で表す.

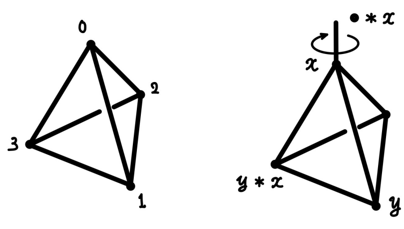


図 2.2　4 面体カンドル Q_4 の定義

D_K を結び目 K の図式, X をカンドルとする．写像 $C : \{D_K\text{の弧}\} \to X$ が D_K の X **彩色**であるとは, 任意の交点で図 2.3 の左図の状況を満たすことである．D_K の X 彩色全体を $\mathrm{Col}_X(D_K)$ と表す．$\mathrm{Col}_X(D_K)$ の位数は, D_K の取り方によらずに定まるためことが知られており, これを K の X **彩色数**といい, $\#\mathrm{Col}_X(K)$ で表す.

同様に D_F を結び目 F の図式とする．写像 $C : \{D_F\text{のシート}\} \to X$ が図 2.3 の中図の状況を満たすとき X **彩色**という．$\mathrm{Col}_X(D_F)$ と $\#\mathrm{Col}_X(F)$ も同様に定義される.

また, D_K を結び目 K の図式とする．写像 $C : \{D_K\text{の弧}\} \sqcup \{\mathbb{R}^2 - D_K\text{の連結な領域}\} \to X$ が**シャドー X 彩色**であるとは, C の定義域を $\{D_K\text{の弧}\}$ に制限した写像が X 彩色であり, $\mathbb{R}^2 - D_K$ の領域に対して図 2.3 の右図の状況を満たすことを言う．シャドー X 彩色は X 彩色と $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与える元を定めると唯 1 つに決定されることが知られている.

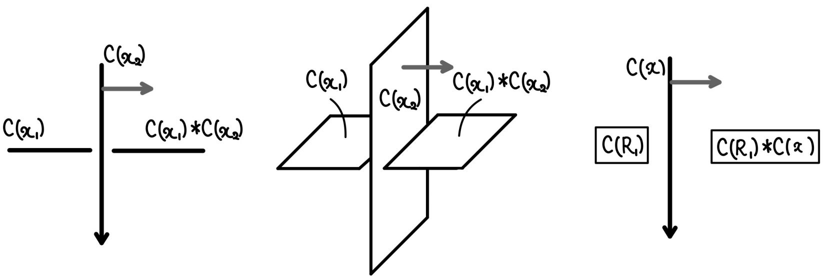


図 2.3　彩色条件

X をカンドル, A をアーベル群とする (演算は和でかく)．写像 $\psi : X^2 \to A$ が **2-コサイクル**であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $\psi(x,x) = 0$, $\psi(x,y) + \psi(x*y,z) = \psi(x,z) + \psi(x*z, y*z)$ を満たすことである．また, 写像 $\phi : X^3 \to A$ が **3-コサイクル**であるとは, 任意の $x, y, z, w \in X$ に対して, $\phi(x,x,y) = \phi(x,y,y) = 0$, $\phi(x,y,w) + \phi(x*y,z,w) + \phi(x*w, y*w, z*w) = \phi(x,z,w) + \phi(x*z, y*z, w) + \phi(x,y,z)$ を満たすことである.

Q_4 を四面体カンドルとする．ψ_1 を $H^2_Q(Q_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明なコホモロジーを与える 2-コサイクルとする (arXiv 上の [2] の第 2 版)．また, $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ に対する普遍係数定理は以下のようになる.

$$\mathrm{Ext}(H_2(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_3(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\mathrm{Ext}(H_2(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元を与える元の $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における像を ϕ_3 とおく. $\mathrm{Hom}(H_3(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので位数 4 の元の $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_1 とおく．また, 位数 2 の元で, 「別の元の 2 倍」にならない元を取り, その $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_2 とおく.

例として, $\phi_1 : Q_4^3 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 1 つ固定して具体的に記述すると次のようになる.

$$\Big((\phi_1(0,i,j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(1,i,j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(2,i,j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(3,i,j))_{i,j=0,1,2,3}\Big)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right)$$

本稿では他のコサイクル $\psi_1 : Q_4^2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \phi_2 : Q_4^3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \phi_3 : Q_4^3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ も同様に具体的に 1 つ固定しておくことにする.

X を有限カンドル, A をアーベル群とし, 演算を積で書く. 結び目 K の図式を D_K, D_K の X 彩色を C, X の 2-cocycle を ψ とする. D_K の交点に対して図 2.4 のようにウェイト $W_\psi(\mathrm{x}, C)$ を与える.

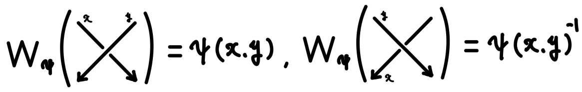


図 2.4　1 次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\psi(D_K; C) := \prod_{\mathrm{x}: D_K \text{の交点}} W_\psi(\mathrm{x}, C)$ とおく. さらに, $\Psi_\psi(K) := \sum_{C \in \mathrm{Col}_X(K)} \Psi_\psi(D_K; C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られており, これを結び目 K の**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ [1, 2].

同様に, 2 次元結び目 F の図式を D_F, D_F の X 彩色を C, X の 3-cocycle を ϕ とする. D_F の 3 重点に対して図 2.5 のようにウェイト $W_\phi(t, C)$ を与える.

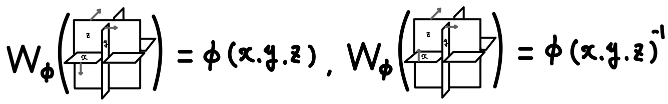


図 2.5　2 次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Phi_\phi(D_F; C) := \prod_{t: D_F \text{の 3 重点}} W_\phi(t, C)$ とおく. さらに, $\Phi_\phi(F) := \sum_{C \in \mathrm{Col}_X(F)} \Phi_\phi(D_F; C)$ とおくと, これは 2 次元結び目の不変量であることが知られておりこれを 2 次元結び目 F の**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ [1, 2].

結び目 K の図式を D_K, D_K のシャドー X 彩色を C, C によって $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与えられる元を x_0, X の 3-cocycle を ϕ とする. D_K の交点に対して図 2.6 のようにウェイト $W_\phi(\mathrm{x}^*, C)$ を与える.

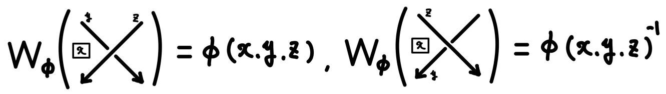


図 2.6　シャドーコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C) := \prod_{\mathrm{x}^*: D_K \text{の交点}} W_\phi(\mathrm{x}^*, C)$ とおく. さらに,$\Psi_\phi^{x_0}(K) := \sum_{C \in \mathrm{Col}_X(K)} \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られておりこれを結び目 K の**シャドーコサイクル不変量**と呼ぶ [4]. また, X が Q_4 の場合, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ が非有界領域へ与えられる元によらないことが知られているため, $\Psi_\phi^*(D_K; C) := \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$, $\Psi_\phi^*(K) := \Psi_\phi^{x_0}(K)$ と書くことにする.

3　主結果

この節では, Iwakiri–Satoh 2-knot $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ を K のカンドルコサイクル不変量 $\Psi_\psi(K, C)$ や K のシャドーコサイクル不変量 $\Psi_\phi^*(K, C)$ などを用いて具体的に表示する式を示す. ただし, $C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)$ に対し, $\Psi_\psi(K, C)$ で C で彩色された K のカンドルコサイクル不変量を表し, $\Psi_\phi^*(K, C)$ で C で彩色された K のシャドーコサイクル不変量を表す. また, $\iota_2\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 2 倍写像とする. また, Q_4 の 2-コサイクル ψ_1, Q_4 の 3-コサイクル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を第 2 節で固定したものとする.

定理 3.1. K, K' を枠付き有向結び目とし, その枠を $f_K, f_{K'}$, $F(K, K')$ を Iwakiri–Satoh 2-knot とする. カンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ について $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ の場合, 以下が成り立つ.

(1) $f_K \notin 3\mathbb{Z}$ かつ $f_{K'} \notin 3\mathbb{Z}$ のとき

$$\Phi_\phi(F(K, K')) = 4 \ \in \mathbb{Z}[A]$$

(2) $f_K \in 3\mathbb{Z}$ または $f_{K'} \in 3\mathbb{Z}$ のとき

$$\Phi_\phi(F(K, K')) =$$
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} \cdot \{f_K \cdot \Psi^*_{\phi_1}(K, C) + \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K, C))\} & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}] \ (\text{if } \phi = \phi_1) \\ \displaystyle\sum_{C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} \cdot f_K \cdot \{\Psi^*_{\phi_2}(K, C) + \Psi_{\psi_1}(K, C)\} & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \ (\text{if } \phi = \phi_2) \\ \#\mathrm{Col}_{Q_4}(K) & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \ (\text{if } \phi = \phi_3) \end{cases}$$

$f_K \notin 3\mathbb{Z}$ かつ $f_{K'} \notin 3\mathbb{Z}$ のとき, $F(K, K')$ は自明な Q_4 彩色のみであることからカンドルコサイクル不変量は彩色数と等しく 4 である. また, $f_K \in 3\mathbb{Z}$ または $f_{K'} \in 3\mathbb{Z}$ のとき, $F(K, K')$ は非自明な Q_4 彩色を許容するが, K' 由来の情報は $f_{K'}$ のみであることから K' の knot type にはよらないことがわかる.

例 3.2. K を $f_K = m$ であるトーラス結び目 $T(2, 2n+3)$, K' を $f_{K'} = l$ である自明結び目とし, $F := F(K, K')$ で定める. この $F(K, K')$ に対して, Q_4 の 3-コサイクル ϕ_1 を用いたカンドルコサイクル不変量 $\Phi_{\phi_1}(F(K, K'))$ を定理を用いて計算する. ただし, ϕ_1 の終域は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{1, t, t^2, t^3\}$, ψ_1 の終域は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, t\}$ とかくことにする.

$n \notin 3\mathbb{Z}$ のとき, K は自明な彩色しか持たない. $n \in 3\mathbb{Z}$ のとき, $\#\mathrm{Col}_{Q_4}(K) = 16$ で, 内 4 つが自明な彩色である. $C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)$ について, C が自明な彩色なとき,$\Psi^*_{\phi_1}(K, C) = 1$, $\Psi_{\psi_1}(K, C) = 1$ であり, C が非自明な彩色なとき,$\Psi^*_{\phi_1}(K, C) = t^{(-1)^n}$, $\Psi_{\psi_1}(K, C) = t = t^{(-1)^n}$ である. よって, 以下のように計算できる.

$$\Phi_{\phi_1}(F(K, K')) = \begin{cases} 4 + 12t^{(-1)^n \cdot (m+2) \cdot l} & (n \in 3\mathbb{Z} \text{ かつ } ml \in 3\mathbb{Z}) \\ 4 & (n \notin 3\mathbb{Z} \text{ または } ml \notin 3\mathbb{Z}) \end{cases}$$

また, 以下のことが知られている.

注意 3.3. Iwakiri–Satoh 2-knot は deform-spun knot である [5] .

注意 3.4. roll-spun knot は Iwakiri–Satoh 2-knot である [5] .

このことから, 今回の主定理の系として roll-spun knot の 4 面体カンドルに対するコサイクル不変量の具体的な表示を求めることができる.

4 定理 3.1 の証明

簡単のため $f_K = 0$ の場合についてのみ示す.

4.1 定理の証明: 方針

まず, $\tilde{C} \in \mathrm{Col}_{Q_4}(F(K,K'))$ を 1 つとる. このとき, K' の球面上図式 D' の交点に対応する $F(K,K')$ の部分的な図式 X について考える (図 2.1). X のモーションピクチャの最初と最後には D' の上方弧と下方弧それぞれに対応する 1-タングル D の連結和が現れる. そこに $\tilde{C}$ から誘導される D の彩色 C_1, C_2, C_3, C_4 が現れる. Iwakiri–Satoh 2-knot の構成法から $C_2 = C_3$ であり, 4 面体カンドル Q_4 の彩色であることから $C_1 = C_4$ であることが示される (後述の Step A). K' が結び目であることから $\tilde{C}$ から誘導される D の彩色 C が唯一つ決まるため, カンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K,K'),\tilde{C})$ は図式 X に現れる 3 重点の重みの和 $\Phi_\phi(\mathrm{X},C)$ を $f_{K'}$ 倍することで得られる.

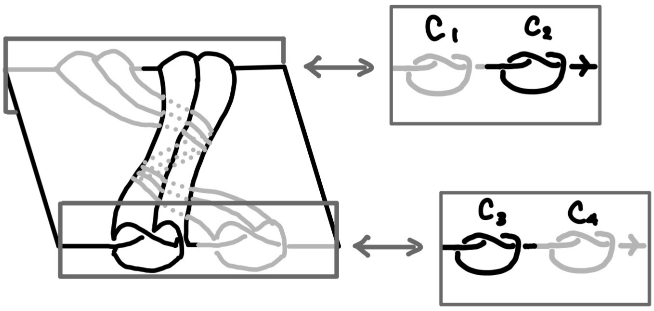


図 4.1 $\tilde{C}$ から誘導される D の彩色

一方, $\Phi_\phi(\mathrm{X},C)$ の 3 重点について考える. D の 2 つの連結和について, 中に通す "小さい" 図式を $\underline{D}$, もう一方の "大きい" 図式を $\overline{D}$ と書くことにする. モーションピクチャにおいて $\underline{D}$ が $\overline{D}$ の弧の上を通る場合と下をくぐる場合に分ける. 弧の上を通る場合はそのモーションピクチャでできる部分的な図式の 3 重点がちょうどシャドーコサイクル不変量の計算と対応する. また, 下をくぐる場合は計算すると 3-コサイクル ϕ と K の彩色 C によって定まる 2-コサイクルを用いたカンドルコサイクル不変量になることがわかる (後述の Step B).

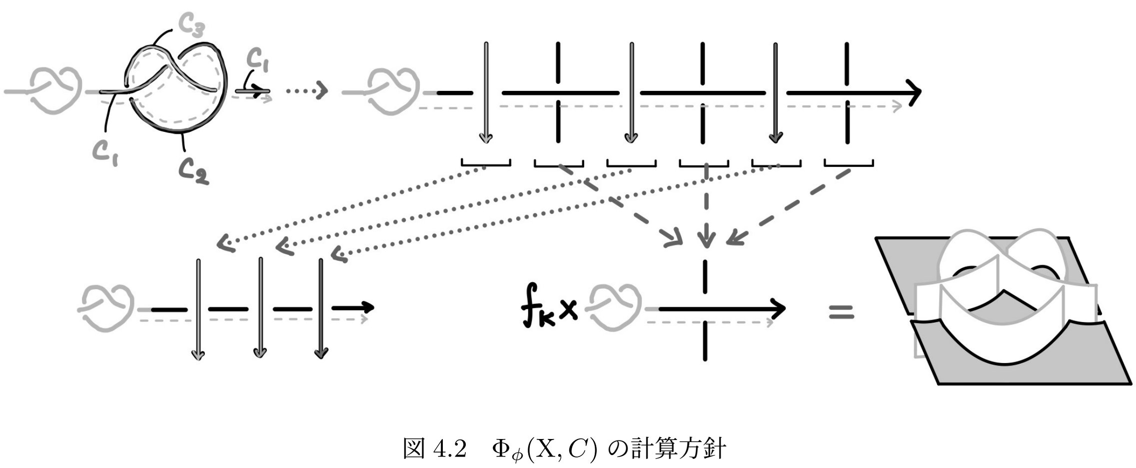


図 4.2 $\Phi_\phi(\mathrm{X},C)$ の計算方針

以上より, $\tilde{C} \in \mathrm{Col}_{Q_4}(F(K,K'))$ を 1 つとると

$$\begin{aligned}\Phi_\phi(F(K,K'),\tilde{C}) &= f_{K'} \cdot \Phi_\phi(\mathrm{X},C)\\ &= f_{K'} \cdot \{f_K \cdot \Psi_\phi^*(K,C) + \Psi_\psi(K,C)\}\end{aligned}$$

の形で書くことができる. 最後に 3-コサイクル ϕ と K の彩色 C を用いて構成する 2-コサイクル ψ_C^ϕ が具体的にどのように記述されるかを計算することで定理が得られる (後述の Step B).

4.2 定理の証明:Step A

この節では, 図 4.1 において $C_1 = C_4$ であることを証明する.

Q_4 を 4 面体カンドルとし, $W(Q_4)$ を Q_4 の元の語の集合とし, 元を $x \in Q_4$ に対して $c_x \in W(Q_4)$ と表すとする.

$W(Q_4)$ の Q_4 への作用を $a \in Q_4$, $w = c_{x_1}^{\epsilon_1} c_{x_2}^{\epsilon_2} \cdots c_{x_n}^{\epsilon_n} \in W(Q_4)$ に対して

$a \cdot w = (\cdots((a *^{\epsilon_1} x_1) *^{\epsilon_2} x_2) \cdots *^{\epsilon_n} x_n)$ と定める.

また, 有向 1-タングル図式の始点からひもに沿って上方弧に現れる色を用いて $C = {c_1}^{\epsilon_1} {c_2}^{\epsilon_2} \cdots {c_n}^{\epsilon_n} \in W(Q_4)$ であるととらえておく.

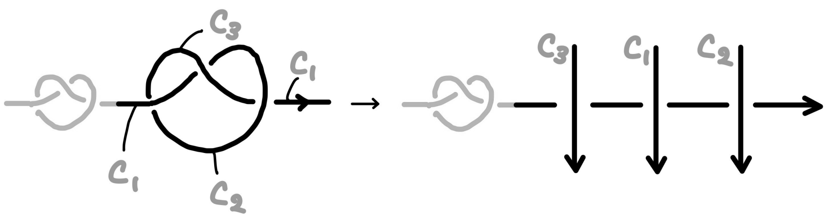


図 4.3　彩色 C の Q_4 の文字列としてのとらえ方

$\{S_x \mid x \in X\}$ で生成される群をカンドル X の**内部自己同型群**といい, $\mathrm{Inn}(X)$ とかく. $\mathrm{Inn}(Q_4)$ は 4 次交代群 $\mathfrak{A}_4$ と同型であることが知られている.

命題 4.1. Q_4 を 4 面体カンドルとし, K を枠付き有向結び目とする. 任意の $C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)$ に対して, 写像 $S_C \colon Q_4 \to Q_4$ を $S_C(x) = x \cdot C$ で定めると, この写像は恒等写像である.

証明. 以下の可換図式を考える. ただし, $Q(K)$ で K の基本カンドル, $\mathfrak{A}_4$ は 4 次交代群とする.

$$\begin{array}{ccccc} Q(K) & \longrightarrow & \pi_1(S^3 - K) & \longrightarrow & H_1(S^3-K) \simeq \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle C}\big\downarrow & & {\scriptstyle C}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ Q_4 & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_4^{ab} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{array}$$

彩色 $C : Q(K) \to Q_4$ を $C : \pi_1(S^3 - K) \to \mathrm{Inn}(Q_4)$ へ拡張すると標準ロンジチュード $l \in \pi_1(S^3 - K)$ の C での行先は $C(l) = S_C$ となり, メリディアン $m \in \pi_1(S^3 - K)$ の C での行先はある $* \in Q_4$ 用いて $C(m) = S_*$ となる. また, $C(l)$ を $\mathrm{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4 \to \mathfrak{A}_4^{ab}$ で送ると, $C(l) \mapsto 0$ である. $l, m \in \pi_1(S^3 - K)$ は可換なため, $C(l), C(m) \in \mathrm{Inn}(Q_4)$ は可換であることから, $C(l) \mapsto 0$ かつ $C(l), C(m) \in \mathrm{Inn}(Q_4)$ は可換を満たす $C(l) \in \mathrm{Inn}(Q_4)$ は $C(l) = \mathrm{id}_{Q_4}$ である. したがって $S_C = \mathrm{id}_{Q_4}$ である. ∎

以降, $\mathrm{Col}_{Q_4}(F(K,K'))$ と $\mathrm{Col}_{Q_4}(K)$ を同一視して $\mathrm{Col}_{Q_4}(F(K,K'))$ と $\mathrm{Col}_{Q_4}(K)$ の元はともに C で表す.

4.3 定理の証明:Step B

この節では 3-コサイクル ϕ と K の彩色 C を用いて構成する写像 ψ_C^ϕ を定義し, ψ_C^ϕ が 2-コサイクルであることと ψ_C^ϕ の具体的な表示について述べる.

$\phi\colon X^3 \to A$ を X の 3-cocycle とし, $C = {c_1}^{\epsilon_1}{c_2}^{\epsilon_2}\cdots{c_n}^{\epsilon_n}$ を $\overline{D}$ の彩色とする. $\psi_C^\phi\colon X^2 \to A$ を $\psi_C^\phi(x,y) = -\sum_{1\le i\le n}\epsilon_i\phi(\tilde{x_i},\tilde{y_i},c_i)$ と定める. ただし,

$$x_i\colon = (...((x *^{\epsilon_1} c_1) *^{\epsilon_2} c_2)\cdots *^{\epsilon_i} c_i \ (0 \le i \le n)$$

$$\tilde{x_i}\colon = \begin{cases} x_{i-1} & \epsilon_i = 1 \\ x_i & \epsilon_i = -1 \end{cases}$$

これは, ある $\underline{D}$ の交点に彩色によって x, y が与えられているとき, その交点が C で彩色された $\overline{D}$ の上方弧の下を通り抜けるときにできる 3 重点に対するコサイクルによるウェイトを合計した値を $\psi_C^\phi(x,y)$ となるように ψ_C^ϕ を定めている.

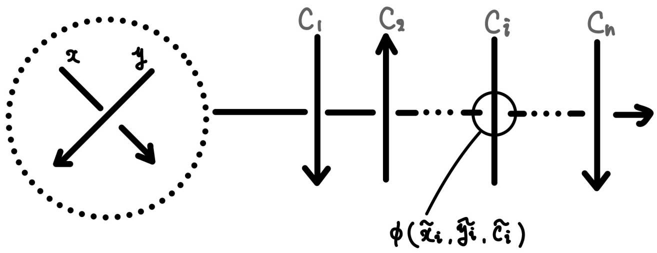


図 4.4 ψ_C^ϕ の定義

補題 4.2. $f_K = 0$ のとき, ψ_C^ϕ は 2-コサイクル

証明. 2-コサイクル条件を確かめればよい. 実際, $\psi_C^\phi(x,x) = 0$ であり,

$$\begin{aligned} &\psi_C^\phi(x,y) - \psi_C^\phi(x,z) + \psi_C^\phi(x*y,z) - \psi_C^\phi(x*z,y*z) \\ =& \sum_{1\le i\le n}(\phi(x_{i-1},y_{i-1},z_{i-1}) - \phi(x_i,y_i,z_i)) \\ =& \phi(x_0,y_0,z_0) - \phi(x_n,y_n,z_n) = 0 \end{aligned}$$

である. ■

$[\psi_C^\phi] \in H_Q^2(Q_4;A)$ は $[\psi_C^\phi] = 0$ または $[\psi_C^\phi] = [\psi_1]$ であり, ϕ と C によって決定される. これを計算するために, $C(l) \in \mathrm{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4$ を考える. $C = {c_1}^{\epsilon_1}{c_2}^{\epsilon_2}\cdots{c_n}^{\epsilon_n}$ に対して, 命題 4.1 より, $C(l) = S_{c_n}^{\epsilon_n}\circ\cdots\circ S_{c_2}^{\epsilon_2}\circ S_{c_1}^{\epsilon_1} = \mathrm{id}_{Q_4}$ であることから, $\mathfrak{A}_4$ のケーリーグラフにおいて $C(l)$ は始点と終点を単位元とする閉じた道として見ることができる. ただし, $\mathfrak{A}_4 = \langle S_0, S_1 \mid S_0^3 = S_1^3 = 1, S_1S_0S_1 = S_0S_1S_0\rangle$ で, $S_2 = S_0^{-1}S_1S_0, S_3 = S_1^{-1}S_0S_1$ として $C(l)$ を S_0, S_1 のみを用いて表すことで閉じた道としてとらえるものとする. これにより, $C(l)$ を単位元を始点終点とする三角形および四角形を 1 回だけ回る閉じた道に分解することで計算を行う.

$\psi_1, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ を第 2 節で定めたにある Q_4 のコサイクルとする. また, $\iota_2\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 2 倍写像とする. ψ_C^ϕ について具体的に計算することで以下のことがわかる.

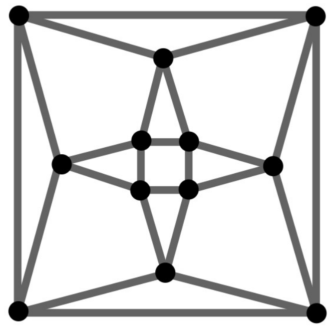


図 4.5　$\mathfrak{A}_4$ のケーリーグラフ

命題 4.3. $f_K = 0$ のとき, ψ_C^{ϕ} について $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ に場合に計算すると以下のようになる.

$$\psi_C^{\phi}(x,y) = \begin{cases} \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K,C)\cdot\psi_1(x,y)) & \phi = \phi_1 \\ 0 & \phi = \phi_2, \phi_3 \end{cases}$$

証明. 三角形および四角形を 1 回だけ回る閉じた道について具体的に計算を行う.

・$\phi = \phi_1$ の場合

四角形を 1 回だけ回る閉じた道のとき $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\psi_1)$ である. よって, $C(l)$ が囲う四角形の数が奇数個のとき, $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\psi_1)$ であり, $C(l)$ が囲う四角形の数が偶数個のとき, $\psi_C^{\phi_1} = 0$ である. 一方, $C(l)$ が囲う四角形の数が奇数個のとき $\Psi_{\psi_1}(K,C) = 1$ であり, 偶数個のとき, $\Psi_{\psi_1}(K,C) = 0$ であることも同様にして計算でき, $\psi_C^{\phi_1}$ の非自明性と $\Psi_{\psi_1}(K,C)$ の非自明性が同値であることが確認できる. まとめると $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K,C)\cdot\psi_1)$ を得る.

・$\phi = \phi_2$ の場合

三角形を 1 回だけ回る閉じた道のとき $\psi_C^{\phi_2} = \psi_1$ である. $C(l)$ が囲う三角形の数が奇数個のとき, $\psi_C^{\phi_2} = \psi_1$ であり, $C(l)$ が囲う三角形の数が偶数個のとき, $\psi_C^{\phi_2} = 0$ である. $C(l)$ が囲う三角形の数の偶奇は f_K の偶奇に対応しており, $f_K = 0$ であることから $\psi_C^{\phi_2} = 0$.

・$\phi = \phi_3$ の場合

常に $\psi_C^{\phi_3} = 0$ である. ■

謝辞

本研究集会にて講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます. また, 本研究に関して様々な助言をくださった大槻知忠先生, 佐藤進先生, 石川勝巳先生, 和田康載先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156.

[2] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[3] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, M.Saito, *Quandle homology groups, their Betti numbers, and virtual knots*, J.Pure Appl.Algebla **157** (2001) 135-155.

[4] J.S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology and cocycle knot invariants*, J.Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–358.

[5] M.Iwakiri, S.Satoh, *Quandle cocycle invariants of roll-spun knots*, RIMS kokyuroku **1766** (2011) 30-37.

[6] H.Takeda, *The cocycle invariant of twist spun knots for the tetrahedral quandle*, Master thesis, Kyoto University, (2008).

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
Email address: uedayd@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\mathbb{R}^4$ に自明に埋め込まれた射影平面上の曲面ブレイド

津野玄親（大阪大学理学研究科修士 2 年）

1 導入

m-**ブレイド** (m-**braid**) とは，閉区間 $I=[-1,1]$ と 2 次元円板 D^2 の直積 $D^2\times I$ に適切に埋め込まれた 1 次元多様体 β で，射影 $\mathrm{pr}_2 : D^2\times I\to I$ の β への制限写像 $\mathrm{pr}_2|_\beta : \beta\to I$ が m 次の被覆写像をなすものである．

B^2 上の m-**ブレイド状曲面** (m-**braided surface**) とは，2 つの 2 次元円板 B^2 と D^2 の直積 $D^2\times B^2$ に適切に埋め込まれた 2 次元多様体 S で，射影 $\mathrm{pr}_2 : D^2\times B^2\to B^2$ の S への制限写像 $\mathrm{pr}_2|_S : S\to B^2$ が m 次の分岐被覆写像をなすものである．

ブレイド状曲面が導入されたのは Rudolph[5] によるものである．ブレイド状曲面の特殊なクラスに**曲面ブレイド** (**surface-braid**) と呼ばれるものがあり，これは Viro によって導入された．以上は全て 2 次元円板 B^2 の上の分岐被覆曲面である．分岐被覆空間の底を取り換えたバリエーションとしては，まず Kamada[1] によって球面 S^2 上の分岐被覆曲面である **2 次元閉ブレイド** (**closed 2-dimensional braid**) が導入された．また Nakamura[3] によってトーラス T^2 についての類似 T^2 **上の 2 次元ブレイド** (**2-dimensional braid over** T^2) が，またさらに [4] によって一般の向きづけられた曲面結び目 F の上の分岐被覆曲面が研究されている．

これまでは底空間を向き付け不可能な曲面としたバリエーションはあまり研究がされていなかったようである．本講演では底空間を $\mathbb{R}^4$ に自明に埋め込まれた射影平面としたバリエーションを取り扱う予定であったが，予定を変更して，底空間を Möbius の帯 Mb とした対象である Mb 上のブレイド状曲面について紹介する．

2 先行研究

2.1 ブレイド状曲面

m を正の整数とし，D^2, B^2 を 2 次元円板，$\mathrm{pr}_2 : D^2\times B^2\to B^2$ を射影とする．

定義 2.1.1. $D^2\times B^2$ に適切に埋め込まれた曲面 S が次の (1)，(2) を満たすとき，m 次の**ブレイド状曲面** (**braided surface**) であると言う．

(1) 制限写像 $\mathrm{pr}_2|_S : S\to B^2$ が m 次の分岐被覆写像であり，
(2) 境界 ∂S がソリッドトーラス $D^2\times\partial B^2$ 内の閉ブレイドである

S を m 次のブレイド状曲面とする．分岐被覆写像 $\mathrm{pr}_2|_S$ の分岐点を，S の**分岐点** (**branch point**) と呼ぶ．全ての分岐点 p で，

$$\#(S\cap D^2\times\{p\})=m-1$$

が成り立つとき，S は**シンプル** (**simple**) であると言う．以下本稿では，シンプルなブレイド状曲面のみを考える．

$D^2\times B^2$ を B^2 上の自明な D^2 束とみなす．

定義 2.1.2. S と S' を B^2 上の 2 つの m-ブレイド状曲面とする．次の条件が成り立つとき，S と S' は**同値**

(equivalent) であると言う．

- $D^2 \times B^2$ のファイバーを保つアイソトピー $\{h_u\}_{u\in[0,1]}$ によって S と S' が移りあう．

2.2 ブレイド状曲面のチャート

本稿でグラフと書けば，それは多重辺および頂点を持たない辺 (フープ) の存在を許し，また各辺は集合として両端の頂点を含んでいるとする．

定義 2.2.1. 正方形 $B^2 = I \times I$ 上のグラフ $\Gamma = (V, E)$ は以下を満たすとき**チャート (chart)** と呼ばれる．

(1) 任意の辺 $e \in E$ は $\mathrm{int}\, e \cap \partial B^2 = \varnothing$ を満たし，向きを持ち，また $\{1, \ldots, m-1\}$ の元をラベルとして持つ．
(2) 任意の頂点 $v \in V$ は以下の 4 通りのいずれかである．
  (i) $\mathrm{int}B^2$ 内の 1 価頂点．
  (ii) $\mathrm{int}B^2$ 内の 4 価頂点で，局所的には 2 本の線分の交点のように見える点．ただし接続する 4 辺は $|i-j| > 1$ を満たす 2 種類のラベルによってラベル付けされ，対角線上にある 2 辺は同じ向きを持つ．
  (iii) $\mathrm{int}B^2$ 内の 6 価頂点 v で，v に接続する 6 辺が次を満たすような点；
  「連続する 3 辺が v に入る向き，残りの 3 辺が v から出る向きを持ち，各辺は $|i-j| = 1$ を満たすラベル i, j によって，隣り合うどの 2 辺のラベルも相異なるようにラベル付けられている．」
  (iv) ∂B^2 上の 1 価頂点．

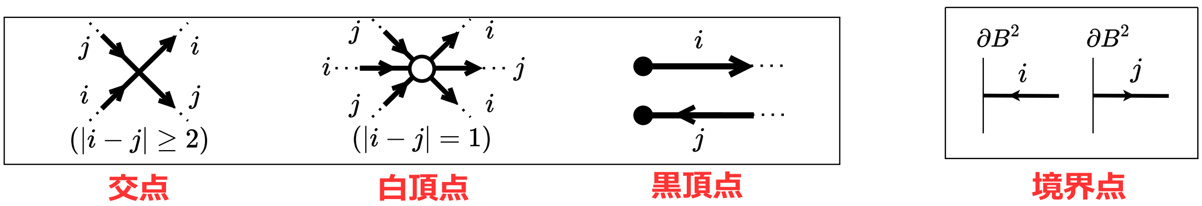


図 1: Γ の頂点

(i) の頂点を**黒頂点 (black vertex)**，(iii) の頂点を**白頂点 (white vertex)** と呼び，それぞれ図 1 のように黒い点，白い点を打って表す．また (ii) の頂点を**交点 (crossing)**，(iv) の頂点を**境界点 (boundary point)** と呼ぶ．

2.3 チャートからのブレイド状曲面の構成

チャート $\Gamma \subset B^2$ から $D^2 \times B^2$ に適切に埋め込まれた曲面 $S(\Gamma)$ を構成することを考える．チャート Γ に対して，**Γ に沿った分割** $B^2 = N_V \cup N_E \cup X_\Gamma$ とは，以下のような分割を言う．

- 黒頂点，交点，白頂点全体からなる集合の B^2 における正則近傍を N_V とし，$X_V = \mathrm{cl}(B^2 \setminus N_V)$ とおく．
- 各辺 $e \in E$ について $N(e)$ を $e \cap X_V$ の X_V における正則近傍とする．このとき $N(e)$ は $e \cap X_V$ 上の I 束である．各ファイバーの座標を，e の方向を向いて左手側に -1，右手側に $+1$ が置かれるように定める．
- $N_E = \bigcup_{e \in E} N(e)$ とする．
- $X_\Gamma = \mathrm{cl}(B^2 \setminus (N_V \cup N_E))$ とする．

Γ に沿った分割 $N_V \cup N_E \cup X_\Gamma$ を任意に取って固定する．曲面 $S(\Gamma)$ を以下で定める．

(第一段)　$S(\mathit{\Gamma})$ の $D^2 \times X_{\mathit{\Gamma}}$ への制限を $S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times X_{\mathit{\Gamma}} = Q_m \times X_{\mathit{\Gamma}}$ で定める．

(第二段)　$S(\mathit{\Gamma})$ の $D^2 \times N_E$ への制限を次で定める．$J \subset N_E$ を辺 e の正則近傍 $N(e) \subset N_E$ に含まれるファイバーとする．ここで辺 e は一意に決まる．i を e のラベルとする．このとき $S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times J$ は円柱 $D^2 \times J$ に適切に埋め込まれたブレイドで，ブレイド群 B_m の第 i 標準生成元 σ_i を表す．

(第三段)　$S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times N_V$ を次で定義する．$N \subset N_V$ が白頂点または交点の正則近傍であるとき，$\ell = S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times \partial N$ は自明な閉ブレイドになる．このとき N 上の分岐点を持たないブレイド状曲面 $T(\ell)$ で，$\partial T(\ell) = \ell$ を満たすものが存在するから，

$$S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times N = T(\ell)$$

と定義する．

$N \subset N_V$ が黒頂点の正則近傍であるとき，頂点から出ている辺のラベルを i とすると，$\ell = S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times \partial N$ は $\sigma_i^{\pm 1}$ の閉包に等しい．このとき N 上の分岐点を 1 つだけ持つブレイド状曲面 $C(\ell)$ で，$\partial C(\ell) = \ell$ を満たすものが存在するから，

$$S(\mathit{\Gamma}) \cap D^2 \times N = C(\ell)$$

と定義する．

以上で，$D^2 \times B^2$ 内に適切に埋め込まれた曲面 $S(\mathit{\Gamma})$ を構成できた．この曲面は明らかに B^2 上のブレイド状曲面である．

補題 2.3.1. (S. Kamada, 1996[2]). $S(\mathit{\Gamma})$ は $\mathit{\Gamma}$ から同値の意味で一意に定まる．

この $S(\mathit{\Gamma})$ のことを $\mathit{\Gamma}$ **から定まるブレイド状曲面**と呼ぶ．また，次の事実が従う．

補題 2.3.2. (S. Kamada, 1996[2]). 任意のブレイド状曲面 S に対し，チャート $\mathit{\Gamma}$ であって，$S(\mathit{\Gamma})$ と S が弱同値であるようなものが存在する．

3　Möbius の帯上のブレイド状曲面

この節を通して I は閉区間 $[-1,1]$ を表すとする．D^2, B^2 をともに正方形 $I \times I$ の意味で用い，D^2 の点を $P = (X,Y)$ で，B^2 の点を $p = (x,y)$ で表す．D^2 の鏡映変換 $(X,Y) \mapsto (-X,Y)$ を r_X と書く．$r_X(Q_m) = Q_m$ に注意しておく．

3.1　Möbius の帯

正方形 $B^2 = I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$ について，$\partial_y B^2 := I \times \partial I, \partial_x B^2 := \partial I \times I$ とおき，$\partial_y B^2$ を**上下対辺**，$\partial_x B^2$ を**左右対辺**と呼ぶ．このとき $\partial B^2 = \partial_y B^2 \cup \partial_x B^2$ である．

$\partial_y B^2 = I \times \{\pm 1\}$ の各点 (x,ϵ) で $(x,\epsilon) \sim (-x,-\epsilon)$ が成り立つような最弱の同値関係 $\sim$ で B^2 を割った空間 $B^2/\sim$ を **Möbius の帯 (Möbius band)** と呼び，Mb と書いて表す．商写像 $B^2 \to \mathrm{Mb}$ を π で表し，$\pi(\partial_y B^2)$ を I_0 と書くことにする．

4-立方体 $D^2 \times B^2 = (I \times I) \times (I \times I)$ の商空間で，$D^2 \times \partial_y B^2$ の各点 $((X,Y),(x,\epsilon))$ に対し，$(X,Y),(x,\epsilon) \sim (-X,Y),(-x,-\epsilon)$ が成り立つような最弱の同値関係 $\sim$ で $D^2 \times B^2$ を割った空間を $D^2 \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Mb} := D^2 \times B^2/\sim$ と書く．商写像 $D^2 \times B^2 \to D^2 \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Mb}$ を $\mathit{\Pi}$ と表す．$D^2 \mathbin{\widetilde{\times}} \mathrm{Mb}$ において $D^2 \times I_0$ 内の任意の点

$$\mathit{\Pi}((X,Y),(x,1)) = \mathit{\Pi}((-X,Y),(-x,-1)) \tag{3.1}$$

を 2 点

$$((X,Y),(x,1)) \neq ((-X,Y),(-x,-1)) \tag{3.2}$$

に分ければ $D^2 \times B^2$ が得られる．この操作を $D^2 \times I_0$ **に沿った裁断 (cutting along** $D^2 \times I_0$**)** と言う．

3.2 Mb 上のブレイド状曲面と Möbius 型ブレイド状曲面

定義 3.2.1. $D^2 \widetilde{\times} \mathrm{Mb}$ に適切に埋め込まれた曲面 S が次数 m の Mb **上のブレイド状曲面**であるとは，次の (1), (2) を満たすことを言う．

(1) 射影 $\mathrm{pr}_2 : D^2 \widetilde{\times} \mathrm{Mb} \to \mathrm{Mb}$ の制限写像 $\mathrm{pr}_2|_S : S \to \mathrm{Mb}$ が m 次の分岐被覆写像である．
(2) 境界 ∂S が $D^2 \times \partial\mathrm{Mb}$ 内の閉ブレイドである．

次数 m の Mb 上のブレイド状曲面のことを Mb 上の m-ブレイド状曲面とも呼ぶ．

定義 3.2.2. S と S' を Mb 上の 2 つの m-ブレイド状曲面とする．S と S' が**同値 (equivalent)** であるとは，$D^2 \widetilde{\times} \mathrm{Mb}$ のファイバーを保つアイソトピー $\{h_u\}_{u\in[0,1]}$ によって S と S' が移り合うことを言う．

以下必要ならば Mb 上のブレイド状曲面を少し変形して，分岐被覆空間の分岐点が I_0 上に存在しないようにする．Mb 上のブレイド状曲面 S を $D^2 \times I_0$ に沿って裁断することで，B^2 上のブレイド状曲面 $\mathrm{cut}_{I_0}(S)$ が得られる．

定義 3.2.3. B^2 上の m-ブレイド状曲面 S が **Möbius 型 (Möbius-type)** であるとは，$X, Y, x \in I, \epsilon \in \{\pm 1\}$ で (X, Y, x, ϵ) と書かれる点が S に含まれるならば，$(-X, Y, -x, -\epsilon) \in S$ も成り立っていることを言う．

4 Möbius 型チャート表示

4.1 Möbius 型チャート

定義 4.1.1. チャート $\Gamma = (V, E)$ が次の条件を満たすとき，チャート Γ は **Möbius 型**であるという．

(i) $(-x, -1) \in V \iff (x, 1) \in V$.
(ii) (i) の点 $a_- = (-x, -1), a_+ = (x, 1)$ に接続する辺をそれぞれ e_-, e_+ とする．このとき e_- が a_- に入る向きを持つならば e_+ は a_+ から出る向きを持ち，e_- が a_- から出る向きを持つならば e_+ は a_+ に入る向きを持つ．また一方のラベルが i であれば，他方のラベルは $m - i$ である．

上の定義の (i) の点の組を Γ の対蹠点の組と呼ぶ．

4.2 Möbius 型チャートと Möbius 型ブレイド状曲面の対応

Möbius 型ブレイド状曲面と Möbius 型チャートの定義から次の結果が得られる．

主結果 1. 次が成り立つ．

(1) 分岐点が I_0 上に無い Mb 上のブレイド状曲面 S を $D^2 \times I_0$ に沿って裁断して得られる B^2 上のブレイド状曲面 $\mathrm{cut}_{I_0}(S)$ は Möbius 型である．逆に，B^2 上の Möbius 型ブレイド状曲面 S' を Π を通して貼り合わせると Mb 上のブレイド状曲面 $\Pi(S')$ が得られる．また，これらの対応は一対一である．
(2) チャート Γ が Möbius 型であるとき，ブレイド状曲面 $S(\Gamma)$ は Möbius 型ブレイド状曲面と弱同値である．

(3) 任意の Möbius 型ブレイド状曲面 S に対し，Möbius 型チャート Γ であって，

$$S(\Gamma) \simeq S$$

を満たすものが存在する．

Möbius 型チャート Γ から主結果 1(2)，(1) に従って得られる Mb 上のブレイド状曲面 $\Pi(S(\Gamma))$ を $S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma)$ と書くことにする．

5 Möbius 型チャート変形

5.1 Möbius 型チャート変形と MC 同値

Möbius 型チャート Γ の変形で，以下の操作およびその逆操作を施して Möbius 型チャートを得ることを **Möbius 型チャート変形 (chart move of Möbius-type)** と呼ぶ．

(CI)： $\mathrm{int}B^2$ の任意の小円板 E で黒頂点を含まないものについて E 上のチャートを自由に書き換える．

(CII)： 黒頂点と交点が辺で繋がっているとき，図 2 左 → 右のようにして交点を解消する，およびその逆操作．

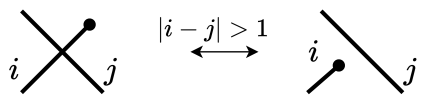


図 2: CII

(CIII)： 黒頂点と白頂点が中辺でない辺で繋がっているとき，図 3 左 → 右のようにして白頂点を解消する，およびその逆操作．ここで中辺とは，白頂点に入る 3 辺のうちの真ん中の辺，または白頂点から出る 3 辺のうちの真ん中の辺を言う．

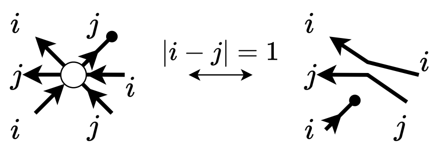


図 3: CIII

(∂_xI)： 境界バブルの削除および追加．(図 4)

(∂_xII)： $\partial_x B^2$ の近くでの交点の削除および追加．(図 5)

(∂_xIII)： $\partial_x B^2$ の近くでの白頂点の削除および追加．(図 6)

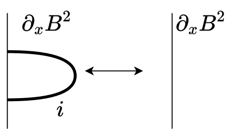


図 4: ∂_xI

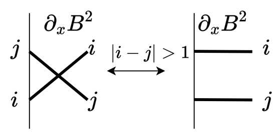


図 5: ∂_xII

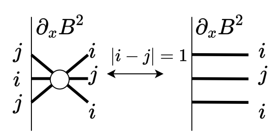


図 6: ∂_xIII

(idI)： 黒頂点を持たず，上下対辺の同一視で貼り合う 2 つの円板領域 E_-, E_+ 内のチャートを任意に取り変える操作．(図 7)

(idII)： 上下対辺を跨いで黒頂点を動かす操作．(図 8)

定義 5.1.1. ふたつの Möbius 型チャート Γ, Γ' が有限回の Möbius 型チャート変形で移り合うとき，両者は **MC 同値 (MC-equivalent)** であると言う．

ただし $\bar{\imath} = m - i$

ただし $\begin{cases} \bar{\imath} = m - i, \bar{\jmath} = m - j \\ |i - j| > 1 \end{cases}$　　ただし $\begin{cases} \bar{\imath} = m - i, \bar{\jmath} = m - j \\ |i - j| = 1 \end{cases}$

図 7: idI 変形の例

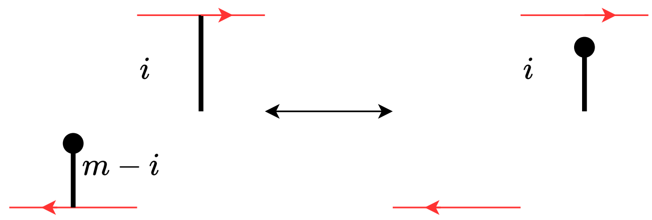


図 8: idII

主結果 2. Γ, Γ' を MC 同値な Möbius 型チャートとする．このとき 2 つの Mb 上のブレイド状曲面 $S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma)$, $S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma')$ は弱同値である．

定義 5.1.2. Möbius 型チャートが**標準形 (standard)** であるとは，チャートが平行辺 (図 9) と右境界ネスト (図 10) のみから成ることを言う．

図 9: 平行辺

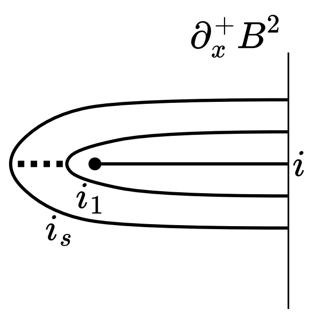


図 10: 右境界ネスト

主結果 3. 任意の Möbius 型チャートは標準形チャートに変形できる．このときの右境界ネストの数は黒頂点数

に等しい．

証明. 任意の Möbius 型チャート Γ を段階に分けて変形する．

(第一段)　変形 (1) を対蹠点が減るように繰り返し用いて対蹠点を削除する．

(第二段)　∂II，∂III，(2)，(3) を頂点数が減るように繰り返し用いて白頂点，交点を削除する．また CI 変形でバブル (図 11) を，∂I 変形で境界バブル (図 12) をそれぞれ消去する．

(第三段)　$\{-1\} \times I$ 上の境界点どうしを結ぶ辺を左境界アークと呼ぶ．対蹠点，交点，白頂点が削除されたの

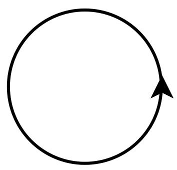


図 11: バブル

図 12: 境界バブル

で，$\{+1\} \times I$ と $B^2 \setminus \Gamma$ 上の単純曲線で結ぶことができる左境界アークが存在する．その単純曲線に沿って変形 (4) を行い，左境界アークを 2 本の平行辺に置き換える．(図 13) この変形は対蹠点，交点，白頂点を生じない．

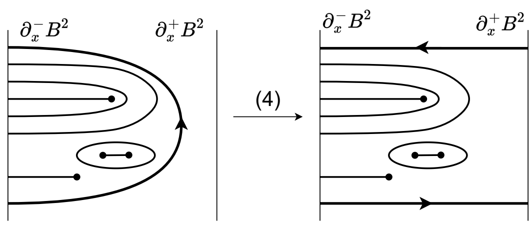


図 13: 第三段の左境界アーク解消

(第四段)　図 14，図 15 左の部分グラフをそれぞれオーバルネスト，左境界ネストと呼ぶ．第三段を境界ネストを成さない左境界アークがなくなるまで繰り返せば，任意のオーバルネストおよび左境界ネストは $\partial_x^+ B^2$ と単純曲線で結べる．この曲線に沿って変形 (5) を行い，オーバルネストを 2 つの右境界ネストへ，左境界ネストを平行辺と右境界ネストへとそれぞれ変換する．

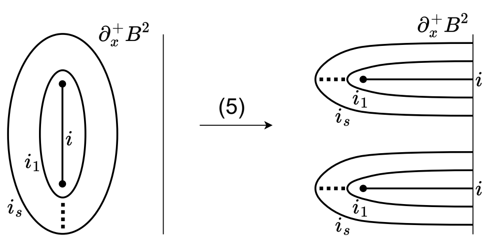


図 14: オーバルネスト解消

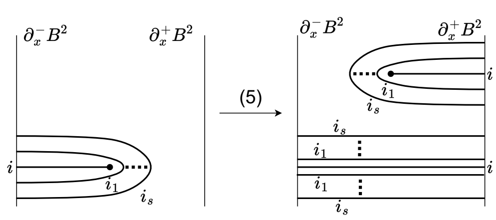


図 15: 境界ネスト解消

(第五段)　右境界ネストを成さない右境界アークを内側のものから順に (4) で変形して，右境界ネストの辺に変換する．

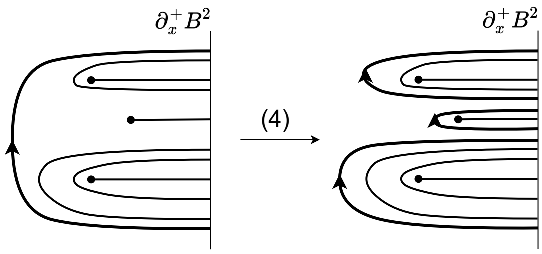


図 16: 第五段の右境界アーク解消

以上で標準形チャートが得られる. □

謝辞

本研究集会で講演の機会を与えてくださった谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

本研究に関して様々な助言をくださった鎌田聖一先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] Seiichi Kamada, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, Topology **33** (1994), no. 1, 113–122. MR1259518

[2] ———, *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 4, 517–529. MR1406718

[3] Inasa Nakamura, *Surface links which are coverings over the standard torus*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 3, 1497–1540. MR2821433

[4] ———, *Satellites of an oriented surface link and their local moves*, Topology Appl. **164** (2014), 113–124. MR3160466

[5] Lee Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 1, 1–37. MR699004

曲面結び目の Crossed Module について

三木　亮介（大阪大学大学院理学研究科 M2）[*]

概 要

Crossed module は Whitehead により導入されたホモトピーと相性の良い道具であり、圏をなすことが知られている。J. F. Martins は crossed module 間の射の数を用いてコンパクト多様体の不変量を定義した。また彼は曲面結び目の外部に対する crossed module を考察し、バンド付きのモーション・ピクチャーを用いた不変量の計算法を確立した。本講演では、この計算法について説明し、いくつかの曲面結び目に計算を行った結果を紹介する。

1 Crossed Module

定義 1.1. （crossed module）**crossed module** は 2 つの群 G と E、群準同型 $\partial : E \to G$、そして群 G の E への左作用 $\triangleright$ の 4 つ組 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ で、次の条件を満たすものである。

(1) $\partial(X \triangleright a) = X\partial(a)X^{-1} (\forall X \in G, \forall a \in E)$

(2) $\partial(a) \triangleright b = aba^{-1} (\forall a, b \in E)$

また G を base group、E を principal group という。

crossed module の基本的な例は fundamental crossed module である。

例 1.1. (M, N) を弧状連結な空間対とし基点 $*$ を N 内にとるとする。
$\partial : \pi_2(M, N, *) \to \pi_1(N, *)$ を境界写像、$\pi_1(N, *)$ の $\pi_2(M, N, *)$ への作用 $\triangleright$ を図 1 で与えられる作用とする。

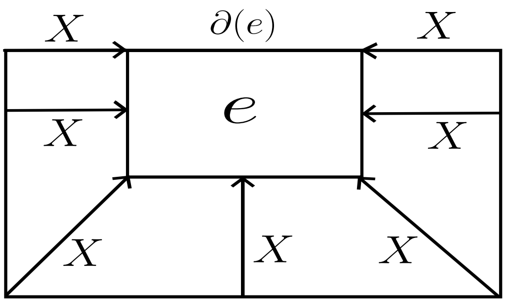


図 1：$\pi_1(N, *)$ の $\pi_2(M, N, *)$ への作用

このとき、$(\pi_1(N, *), \pi_2(M, N, *), \partial, \triangleright)$ は crossed module になり、$\Pi_2(M, N, *)$ と書く。これは $(M, N, *)$ 上の **fundamental crossed module** と呼ばれる。

[*]e-mail： u504176e@ecs.osaka-u.ac.jp

例 1.2. G を群、E を G の正規部分群とし、$\partial : E \to G$ を包含写像、$\triangleright$ を $X \triangleright a = XaX^{-1}(\forall X \in G, \forall a \in E)$ で定める。このとき、$(G, E, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

例 1.3. G を群、 $\partial : G \to \mathrm{Aut(G)}$ を $g \mapsto \partial(g)$ (ここで $\partial(g)(x) = gxg^{-1}(\forall x \in G)$) で定める境界写像とし、$\triangleright$ を $\phi \triangleright g = \phi(g)(\forall \phi \in \mathrm{Aut(G)}, \forall g \in G)$ で定める。このとき、$(\mathrm{Aut(G)}, G, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

また、crossed module は圏を成すことが知られている。この圏における射は次の様に与えられる。

定義 1.2. $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ と $\mathcal{G}' = (G', E', \partial', \triangleright')$ を crossed module とする。
crossed module の成す圏における射 $F = (\phi, \psi) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ は群準同型 $\phi : G \to G'$ と群準同型 $\psi : E \to E'$ の組で次の条件を満たすものとして与えられる。
(1) $\phi \circ \partial = \partial' \circ \psi$;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "\phi"] \\ E' \arrow[r, "\partial'"'] & G' \end{tikzcd}$$

(2) $\phi(X) \triangleright' \psi(a) = \psi(X \triangleright a) \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

2 先行研究

この節では、本研究の契機となった J.F.Martins [1], [2] によってなされた結果を述べる。

2.1 crossed module invariant

[1] の主定理として Martins は次の有理数値の不変量を構成した。

定理 2.1. M をコンパクトな連結多様体とし M のハンドル分解を固定する。ここで、M の固定したハンドル分解において 0-ハンドルは唯一つであると仮定し、この 0-ハンドル内に基点 $*$ を取る。$M^{(1)}$ を M の全ての 0、1-ハンドルから成るハンドル体とする。$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする (ここで"finite"は群 G,E が有限群であることを意味する)。このとき、

$$I_{\mathcal{G}}(M) := \frac{\#\mathrm{Hom}(\Pi_2(M, M^{(1)}, *), \mathcal{G})}{(\#E)^{b_1(M^{(1)})}}$$

は有限であり、M のハンドル分解に依存せず、M のホモトピー不変量である。
この不変量を M の **crossed module invariant** という。

2.2 crossed module invariant の曲面結び目外部への応用

Martin は [1] でこの crossed module invariant を曲面結び目・絡み目外部に適用し、向き付け可能なケースにおいて計算法を確立した。

Σ を $S^4 = D^4_- \cup S^3 \times [-2, 2] \cup D^4_+$（$D^4_-, D^4_+$ は 4 次元球体）内の曲面絡み目で $S^3 \times [-2, 2]$ 内にあると仮定する。また、M を Σ の外部とする。

$h: S^3 \times [-2,2] \to [-2,2]$ を高さ関数と考え、Σ を動かし $h|_\Sigma$ がモース関数となるようにし、Σ にハンドル分解を与えて固定する。Σ のハンドル分解は M のハンドル分解を誘導する。このとき、D^4_- が 4 次元 0-ハンドル、D^4_+ が 4 次元 4-ハンドルになる。4 次元 1、2、3-ハンドルに関しては下の様に対応し、同時に取り付けが行われることが知られている（[3]、[4]）。

$$\Sigma \text{ の 2 次元 0-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 1-ハンドル}$$

$$\Sigma \text{ の 2 次元 1-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 2-ハンドル}$$

$$\Sigma \text{ の 2 次元 2-ハンドル} \longleftrightarrow M \text{ の 4 次元 3-ハンドル}$$

Σ の各ハンドルはモーション・ピクチャーにおいて図 2 の様に対応し、それぞれ「birth of circles」、「saddle points」、「death of circles」と呼ばれる。

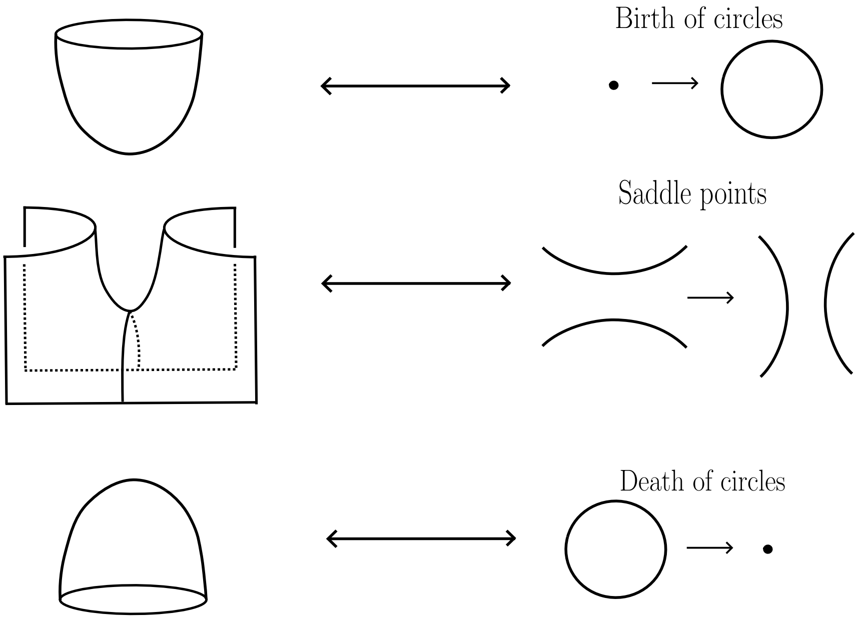


図 2：Σ の各ハンドルとそのモーション・ピクチャー

また曲面絡み目に対しては次の定理がよく知られている。

定理 2.2. 任意の S^4 内の曲面絡み目を全同位で変形し、全ての極小点 (birth of circles) が $t=-1$、全ての鞍点 (saddle point) が $t=0$、全ての極大点 (death of circles) が $t=1$ にあるようにできる。

以降、曲面絡み目はこの定理の条件を満たすとする。$M^{(1)}$ を M の全ての 0、1-ハンドルから成るハンドル体とする。

saddle point はバンドで記録でき、便宜上バンドのコアに向きと名前を与えておく（図 3 上)。

バンドは $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元を表すことができる。ここで境界である $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元 $\partial(e)$ には右手系に向きをとる（図 3 左下)。

境界 $\partial(e)$ に関する条件は、saddle point 通過前のアークから読み取ることができる。例えば、図 3 右下の様なケースでは $\partial(e) = Y^{-1}X$ となる。ここで X, Y は対応する名のアークのメリディアンを右手系に回る $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元を表す。

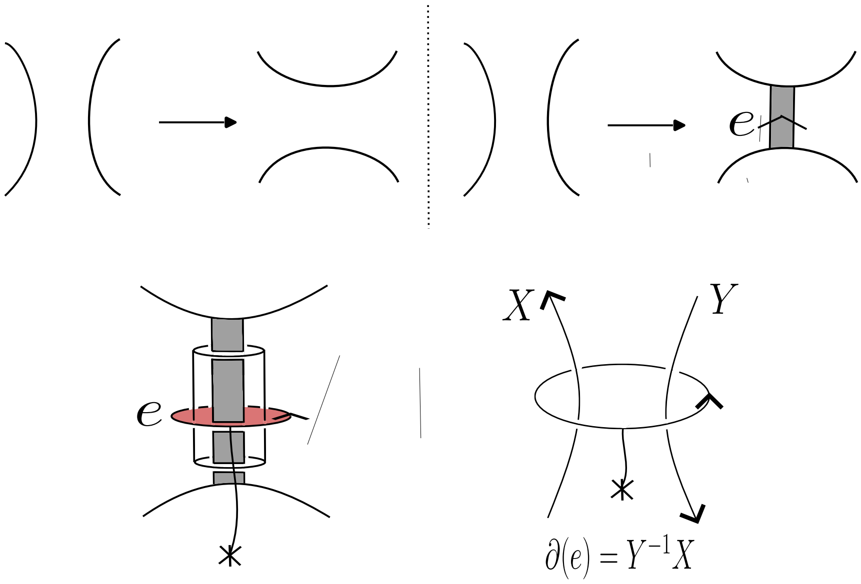


図 3：saddle point とバンド

また次が成立する。

命題 2.1. バンドで代表される $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元、アークで代表される $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元の間には次の様な関係が入る。

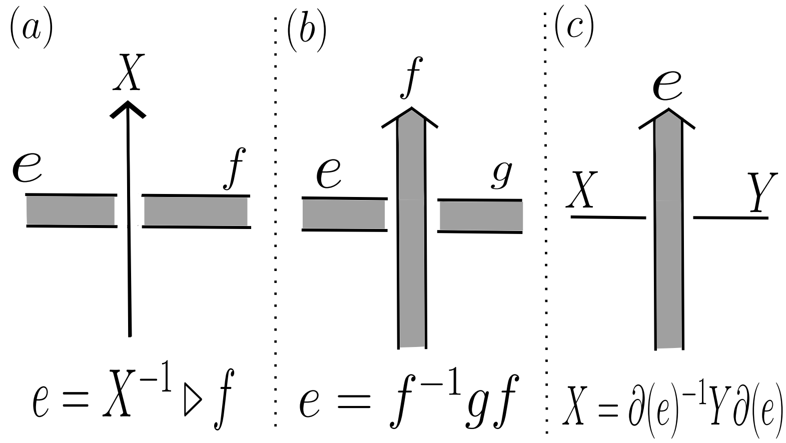


図 4：バンドとアークで代表される元の間の関係

(証明). CW 複体 N に基点 $*$ をとり、N 内の 2-cell C にも基点 $*'$ をとる。$*$ から $*'$ を結ぶ N 内の道を 2 つとり γ_1、γ_2 とする。γ_1、γ_2 は $\pi_2(N^2, N^1, *)$ の元 C_{γ_1}、C_{γ_2} を定める。この時、基底を変換する作用の定義より $C_{\gamma_1} = (\gamma_1\gamma_2^{-1}) \triangleright C_{\gamma_2}$ が成立する。
(a) については、上記の事実よりこのケースにおいては $C_{\gamma_1} \cong e$、$C_{\gamma_2} \cong f$、$\gamma_1\gamma_2^{-1} \cong X^{-1}$ であるので成立する。
(b) については、$\gamma_1\gamma_2^{-1} \cong \partial(f)^{-1}$ と crossed module の定義より、$e = \partial(f)^{-1} \triangleright g = f^{-1}gf$。
(c) については、Wirtinger 関係式を適用すればよい。 □

M の 4 次元 3-ハンドルは $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式を導入する。

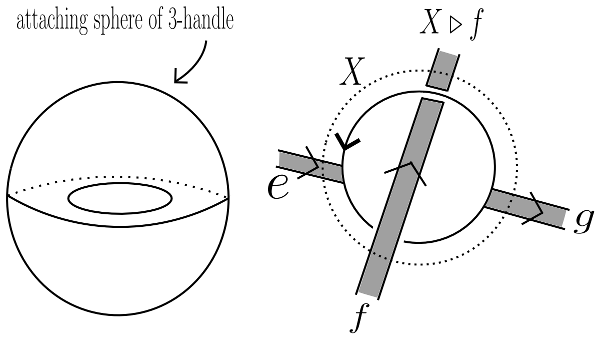
図 5 左の球面は 4 次元 3-ハンドルの attaching sphere を表している。attaching sphere 内の円周は death of circles で消える結び目である。

例えば、図 5 右の様に attaching sphere とバンドが交わっている様な状況を考える。点で書かれた円周は attaching sphere を表す。
関係式の求め方は次の様になる。

まず、バンドが代表する $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元で、attaching sphere から出る向きのものに指数 $+1$ を、attaching sphere に入る向きのものに指数 -1 を与える。

次に反時計周りにそれらの元を掛け合わせ得られた元を W とするとき、関係式として $W = 1$ が生じる。

この求め方は、4 次元 3-ハンドルの attaching sphere が、attaching sphere と交わるバンドの代表する $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元の積とホモトピックであることから従う。



$$e^{-1}f^{-1}g(X \triangleright f) = 1$$

図 5：$\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式

$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。

$I_{\mathcal{G}}(M)$ の分子は境界の条件と関係式を満たす G, E の元の組の数で与えられる。また $M^{(1)}$ の各ハンドルをコアに潰すことで、$M^{(1)}$ とホモトピー同値なブーケが得られるので、$b_1(M^{(1)}) =$ (ブーケにおける S^1 の数) = (1-ハンドルの数) = (birth of circles で生じる circle の数) が成立する。よって分母は $(\#E)^{(birth\ of\ circles\ \text{で生じる}\ circle\ \text{の数})}$ で与えられる。

2.2.1 具体例

計算の具体例を挙げておく。$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。
バンドを抜いた図が元のモーション・ピクチャーである。

例 2.1. Σ : spun trefoil
図 6 はバンド付きの spun trefoil のモーション・ピクチャーである。図 7 は別のモーション・ピクチャーであり、自明な絡み目から suddle point が同時に起こる、つまりバンドが同時に取り付く様子を描いている。これらは、異なるモーション・ピクチャーだが同一の曲面を表す。

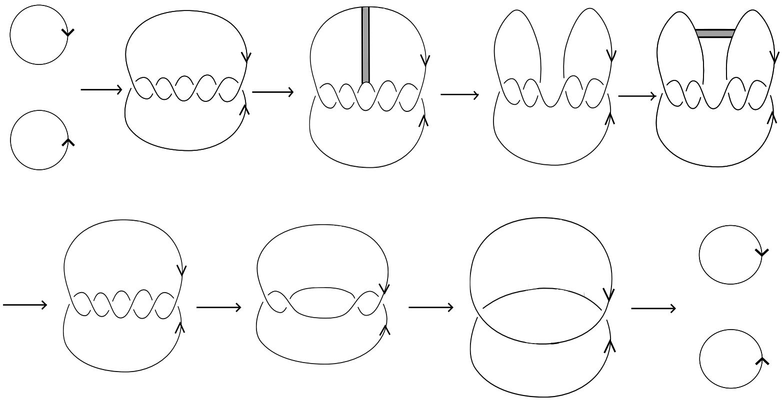
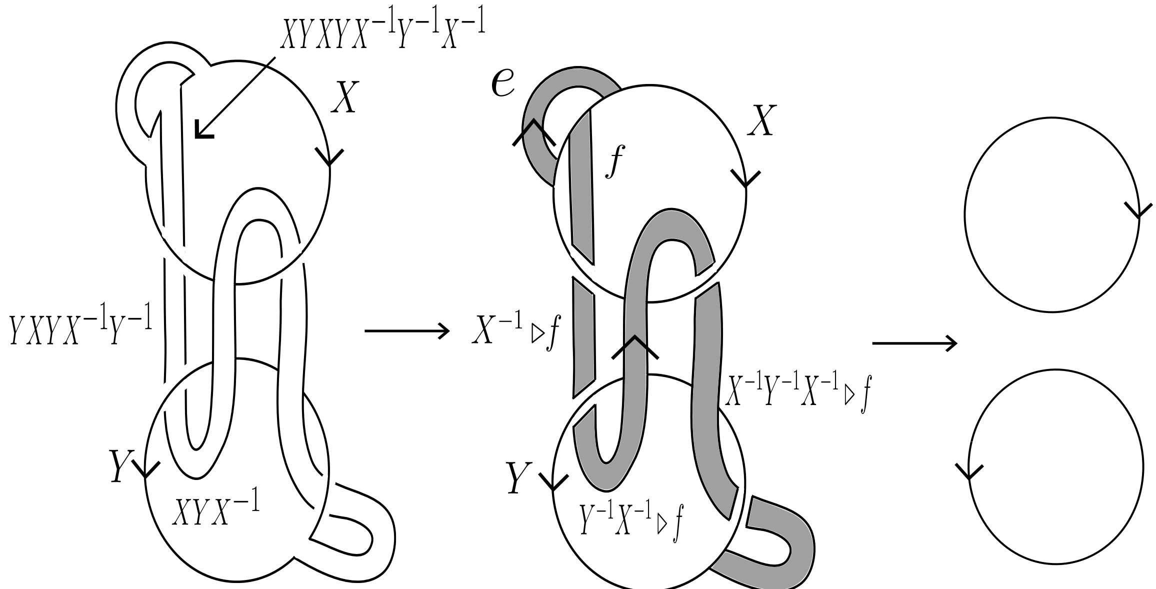


図 6：spun trefoil のバンド付きモーション・ピクチャー（0）



$$I_{\mathcal{G}}(M) = \frac{\#\left\{ (X,Y,e,f) \in G^2 \times E^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial(e) = XYXY^{-1}X^{-1}Y^{-1} \quad , \quad \partial(f) = 1 \\ (X^{-1} \triangleright f)(Y^{-1}X^{-1} \triangleright f)^{-1}(X^{-1}Y^{-1}X^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right\}}{(\#E)^2}$$

図 7：spun trefoil のバンド付きモーション・ピクチャー（1）

3 主結果

主結果について述べる。ここでは記号の簡略化のため、S^4 内の曲面絡み目 Σ に対し、外部の $I_{\mathcal{G}}$ を $I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ と表す。$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。

[1], [2] では、Martins により $I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ の計算例が 2 つほど挙げられている。本研究における主結果の 1 つとして、吉川 [5] の分類表を用い、分類表に現れる全ての向きつけ可能な曲面絡み目に対し計算公式を獲得した。次ページからの表が計算結果である。表の左が曲面の表記であり、これは吉川の分類表と対応した表記である。

Σ	$I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma)$
$6_1^{0,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=Y^{-1}X^{-1}YX \ ,\ \partial(f)=1\\ f(Y\triangleright f)^{-1}=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
8_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX \ ,\ \partial(f)=1\\ f^{-1}(Y\triangleright f)(XY\triangleright f)^{-1}=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$8_1^{1,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f,g,h)\in G^2\times E^4 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=X^{-1}YXY^{-1} \ ,\ \partial(f)=1\\ \partial(g)=X^{-1}Y^{-1}XY \ ,\ \partial(h)=1\\ f(X\triangleright f)^{-1}h(Y\triangleright h)^{-1}=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
9_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=YX^{-1}YXY^{-1}X^{-1} \ ,\ \partial(f)=1\\ f^{-1}(Y^{-1}\triangleright f)(XY^{-1}\triangleright f)^{-1}=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$9_1^{0,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=1 \ ,\ \partial(f)=Y^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX\\ e(Y\triangleright e)^{-1}(XY\triangleright e)(Y^{-1}XY\triangleright e)^{-1}=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
10_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=1 \ ,\ \partial(f)=YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}\\ (X\triangleright e)(YX\triangleright e)^{-1}(X^{-1}YX\triangleright e)(Y^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)^{-1}(XY^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
10_2	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l}\partial(e)=XYXY^{-1}X^{-1}Y^{-1} \ ,\ \partial(f)=Y^{-1}X^{-2}YX^2\\ f^{-1}(A\triangleright f)(Y^{-1}X^{-1}\triangleright e)^{-1}(\partial(c)^{-1}B^{-1}\partial(c)^{-1}B^{-1}\triangleright c)c^{-1}(B^{-1}\triangleright f)c=1\end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$ ここで、$A=Y^{-1}X^{-1}\partial(e)^{-1}XYXY^{-1}X^{-1}\partial(e)XY$ $B=\partial(f)^{-1}XYX^{-1}\partial(f)$ $c=f^{-1}(Y^{-1}X^{-1}\triangleright e)f$

Σ	$I^{e}_{\mathcal{G}}(\Sigma)$
10_3	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=X^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}Y\ \ ,\ \ \partial(f)=YX^{-1}Y^{-1}X^{-1}YX \\ f^{-1}(X\triangleright f)(\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\triangleright f)^{-1}(X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\triangleright f)(Y\triangleright f)\partial(e)^{-1}A\partial(e)C\triangleright e)^{-1}(C\triangleright e)e^{-1}=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$ ここで、$A=X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$ $B=X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$ $C=\partial(e)^{-1}B\partial(e)$
10^1_1	$\#\left\{(X,Y,e,f,g,h)\in G^2\times E^4 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=1\ \ ,\ \ \partial(f)=Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX \\ \partial(g)=1\ \ ,\ \ \partial(h)=X^{-1}Y^{-1}X^{-1}YXY \\ (XY\triangleright e)(Y\triangleright e)^{-1}e(Y\triangleright g)(XY\triangleright g)^{-1}(YXY\triangleright g)=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$10^{0,1}_1$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=YXYX^{-1}Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}X\ \ ,\ \ \partial(f)=1 \\ f^{-1}(X\triangleright f)(X^{-1}Y^{-1}\triangleright f)^{-1}(Y^{-1}\triangleright f)=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$10^{0,1}_2$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=1\ \ ,\ \ \partial(f)=YX^2Y^{-1}X^{-2} \\ e(X^{-2}\triangleright e)^{-1}=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$10^{1,1}_1$	$\#\left\{(X,Y,e,f,g,h)\in G^2\times E^4 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=XYX^{-1}Y^{-1}\ \ ,\ \ \partial(f)=XYXY^{-1}X^{-2} \\ \partial(g)=X^2YX^{-1}Y^{-1}X^{-1}\ \ ,\ \ \partial(h)=YXY^{-1}X^{-1} \\ h^{-1}(Y\triangleright h)(Y^{-1}\triangleright g)g^{-1}(XY^{-1}\triangleright e)^{-1}(Y^{-1}\triangleright e)f^{-1}(X^{-1}\triangleright f)=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^2$
$10^{0,0,1}_1$	$\#\left\{(X,Y,Z,e,f)\in G^3\times E^2 \,\middle\vert\, \begin{array}{l} \partial(e)=YZ^{-1}Y^{-1}ZXYX^{-1}Y^{-1}\ \ ,\ \ \partial(f)=1 \\ (Y^{-1}\triangleright f)(X^{-1}Y^{-1}\triangleright f)^{-1}=1\ \ ,\ \ (Y^{-1}\triangleright f)^{-1}(ZY^{-1}\triangleright f)=1 \end{array}\right\}\Big/(\#E)^3$

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」での講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口 祥司先生、丹下稜斗先生に厚く感謝申し上げげます。

参考文献

[1] João Faria Martins. The fundamental crossed module of the complement of a knotted surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 361, No. 9, pp. 4593–4630, 2009.

[2] João Faria Martins. On 2-dimensional homotopy invariants of complements of knotted surfaces. *arXiv preprint math/0507239*, 2005.

[3] Robert E Gompf and András I Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*, Vol. 20. American Mathematical Society, 2023.

[4] Scott Carter, Seiichi Kamada, and Masahico Saito. *Surfaces in 4-space*, Vol. 142. Springer Berlin, Heidelberg, 2004.

[5] Katsuyuki Yoshikawa. An enumeration of surfaces in four-space. *Osaka Journal of Mathematics*, Vol. 31, No. 3, pp. 497 – 522, 1994.

2 プラット 2 次元結び目のアレキサンダー多項式

安田順平 *（大阪大学理学研究科博士 3 年）

概要

2 次元結び目とは 4 次元空間へ（滑らかに）埋め込まれた 2 次元球面である。またブレイドの高次元化として 2 次元ブレイドがある。全ての 2 次元結び目は、2 次元ブレイドのプラット閉包によって得られる。特に、次数 4 の 2 次元ブレイドから得られる 2 次元結び目を 2 プラット 2 次元結び目と呼ぶ。このクラスは 2 橋結び目の高次元化と見做せる。本講演では、2 プラット 2 次元結び目の性質と標準形を紹介し、標準形からアレキサンダー多項式を計算する公式を与える。

1 導入

2 橋結び目とは $\mathbb{R}^3$ の標準的な高さ関数に関して（全同位変形により）極大点の個数が 2 つ以下とできる結び目である。2 橋結び目は図 1 にあるような有理数による Conway 標準形 $K(a/p)$ で表示することが可能である。ここで、$p > 0$ は奇数であり p と a は互いに素な整数であり、$a_1, \ldots, a_n$ は奇数個の整数であって以下のように a/p の連分数分解を与えるものである：

$$a/p \;=\; [a_1, \ldots, a_n] \;:=\; \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \frac{1}{a_m}}}.$$

そして 2 橋結び目は次の定理によって完全分類が与えられている。

定理 1.1 ([7])**.** 次は同値である。

(1) 2 橋結び目 $K(a/p)$ と $K(b/q)$ は同値である。
(2) $p = q$ および $a \equiv b^{\pm 1} \pmod p$ を満たす。

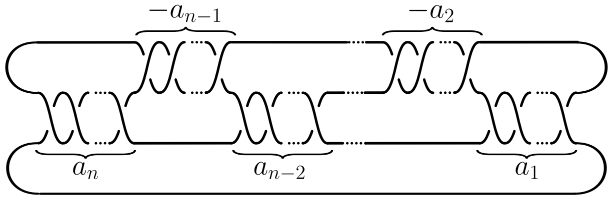


図 1　2 橋結び目 $K(a/p)$ の Conway 標準形

本講演では、2 橋結び目の曲面結び目への高次元化について議論を行う。

* E-mail: u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

2 スパン 2 次元結び目

4 次元空間内に滑らかに埋め込まれた有向閉曲面の非交和を曲面絡み目といい、連結な曲面絡み目を曲面結び目という。また 2 次元球面と同相な曲面絡み目を 2 次元結び目という。この章では 2 次元結び目の典型例として、スパン 2 次元結び目 [1] を導入する。また次の定義は Gordon[3] によるものである。S^n と $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ を同一視する。S^3 内の結び目 K と点 $* \in K$ について、S^3 における $*$ の十分小さい開近傍 N を取り除いて得られる $B^3 = S^3 \setminus N$ 内のタングルを k とする。このとき、結び目 K のスパン 2 次元結び目 $\sigma(K)$ を次で定める：

$$(S^4, \sigma(K)) = \partial(B^3 \times D^2, k \times D^2).$$

スパン 2 次元結び目の性質を以下に掲げる。

命題 2.1 ([1]). スパン 2 次元結び目 $\sigma(K)$ の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \sigma(K))$ は K の結び目群と同型である。

この命題から、特にスパン 2 次元結び目 $\sigma(K)$ のアレキサンダー多項式 $\Delta_{\sigma(K)}(t)$ は K のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ と一致していることが分かる。

命題 2.2 (Marumoto (cf. [8])). スパン 2 次元結び目は負のもろて型である、すなわち $\sigma(K)! = -\sigma(K)$ が成り立つ。より一般に、リボン 2 次元結び目は負のもろて型である。

命題 2.3 ([3]). 結び目 K, K' に対して次が成り立つ。

(1) $\sigma(-K) = -\sigma(K) = \sigma(K)$.
(2) $\sigma(K \sharp K') = \sigma(K) \sharp \sigma(K')$.

結び目 K として素な結び目を考える。すると上記の事実から次の定理が得られる。

定理 2.4. 素な結び目 K と K' に対して次は同値である。

(1) スパン 2 次元結び目 σK と $\sigma K'$ は同値である。
(2) K と K' は弱同値である [*1]。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 2 つのスパン 2 次元結び目 σK と $\sigma K'$ が同値であるとする。このときそれぞれの結び目群は同型である。スパン 2 次元結び目において、σK の結び目群と K の結び目群は同型である [1]。そして Gordon-Luecke [4] の定理より K と K は弱同値である。

(2) $\Rightarrow$ (1): 2 つの素な結び目 K と K' が弱同値であるとき、それらのスパン 2 次元結び目 σK と $\sigma K'$ も弱同値である。また命題 2.2 と命題 2.3 を合わせると σK は可逆かつ負のもろて型であるから、σK と $\sigma K'$ は同値である。 □

素でない結び目に対しては定理 2.4 は一般に成り立たない。実際に、K を三葉結び目とするとき $K_1 = K \sharp K$ と $K_2 = K \sharp (-K)$ は弱同値でないが、スパン 2 次元結び目 σK_1 と σK_2 は同値な 2 次元結び目である [3, 6]。2 橋結び目は素な結び目であるので次の系を得る。

[*1] 2 つの結び目が弱同値であるとは、向きを保つとは限らない $\mathbb{R}^3$ の同相写像で移り合うときをいう。特に、K と K' が弱同値であるとき K' は $K, K!, -K, -K!$ のいずれかと同値である。

系 2.5. 次は同値である。

(1) スパン 2 次元結び目 $\sigma K(a/p)$ と $\sigma K(b/q)$ は同値である。
(2) $p = q$ および $a \equiv \pm b^{\pm 1} \pmod p$ が成り立つ。

2 橋結び目 $K(a/p)$ から得られるスパン 2 次元結び目は図 2 にあるバンド付き絡み目表示を持つ。ここで $a_1, \ldots, a_n$ は a/p の連分数分解 $[a_1, \ldots, a_n] = a/p$ である。

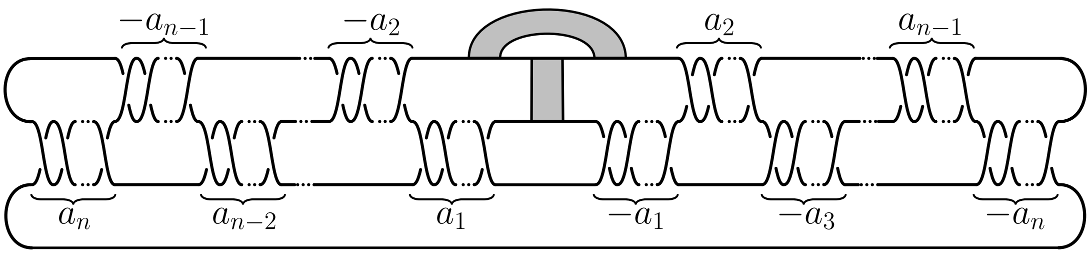


図 2　2 橋結び目のスパン 2 次元結び目 $\sigma(K(a/p))$ のバンド付き絡み目表示

3　2 次元ブレイドのプラット閉包と m プラット曲面絡み目

D^2 を 2 次元円板, $I = [0, 1]$ を閉区間、$m > 0$ を正の整数とする。また D^2 内の異なる m 個の内点からなる部分集合を X_m とおき固定する。4 次元球体 $D^2 \times B^2$ の第二成分への射影を $\mathrm{pr}_2 : D^2 \times B^2 \to B^2$ とする。このとき $D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた曲面 S が次数 m の **2 次元ブレイド** [5, 9] であるとは、S への制限写像 $\mathrm{pr}_2|_S : S \to B^2$ が次数 m の（単純な）分岐被覆写像となり、$\partial S = X_m \times \partial B^2$ を満たすことをいう。

次数 $2m$ の 2 次元ブレイド S を考える。このとき、境界 ∂S は $\partial(D^2 \times B^2) = S^3$ 内の $2m$ 成分からなる自明な絡み目である。そこで m 個のアニュラスを ∂S へ自明に貼り合わせることで、曲面絡み目を構成することができる。これを 2 次元ブレイドの**プラット閉包** [10] という。本稿では、次数 $2m$ の 2 次元ブレイドから得られる曲面絡み目を m **プラット**曲面絡み目と呼ぶ。

定理 3.1 ([10])**.** 全ての向き付け可能な曲面絡み目はある 2 次元ブレイドのプラット閉包と全同位である。

1 プラット曲面絡み目は自明な 2 次元結び目、または自明かつ向き付け不可能な曲面結び目のいずれかである [10]。そこで、本稿では 2 プラット曲面結び目について考える。

4　主結果

有理数 a/p に対して、曲面絡み目 $F(a/p)$ を図 3 のバンド付き絡み目表示によって定義する。ここで $a_1, \ldots, a_n$ は a/p の連分数展開 $[a_1, \ldots, a_n] = a/p$ である。

有理タングルの分類定理 [2] より、$F(a/p)$ の定義は連分数表示に依らない。また $F(a/p)$ は 2 橋結び目 $K(a/p)$ のスパン 2 次元結び目のバンド付き表示（図 2）における中央のバンドを半捻りすることで得られる曲面絡み目である。このとき、2 プラット曲面結び目

定理 4.1. 2 プラット 2 次元結び目 F に対してある有理数 a/p が存在して F と $F(a/p)$ は同値である。逆に、任意の有理数 a/p に対して、$F(a/p)$ は 2 プラット曲面絡み目である。

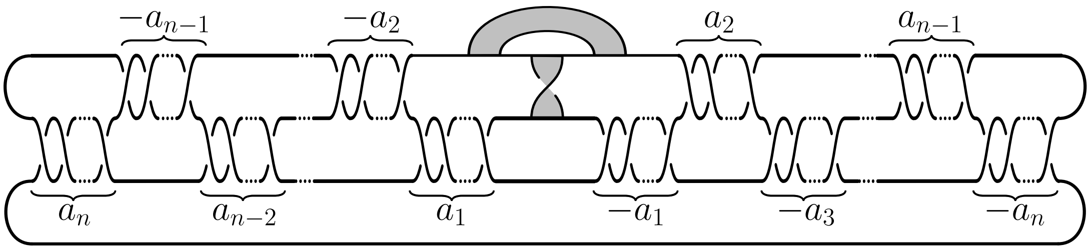


図 3　曲面絡み目 $F(a/p)$ のバンド付き絡み目表示

命題 4.2. $p \geq 1$ と互いに素な整数 a, b が $a \equiv b \pmod p$ を満たすとき、2 プラット曲面絡み目 $F(a/p)$ と $F(b/p)$ は同値な 2 次元結び目である。

補題 4.3. p が奇数であるとき、2 プラット曲面絡み目 $F((a/p))$ は 2 次元結び目である。また p が偶数であるとき、$F(a/p)$ は S^2 とクラインの壺からなる 2 成分曲面絡み目である。

本稿では 2 プラット 2 次元結び目に注目する。そこで p は 1 以上の奇数とし、命題 4.2 により a は偶数であると仮定してよい。このとき 2 プラット 2 次元結び目の結び目群について次の表示を得る。

定理 4.4. 奇数 $p > 0$ と互いに素な偶数 a に対して、符号 ε_i（$i = 0, \ldots, p-1$）を $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor}$ で定める。ここで $\lfloor x \rfloor$ は床関数（x 以下の最大の整数）である。このとき、2 プラット 2 次元結び目 $F(a, p)$ の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F(a, p))$ は次の Wirtinger 表示を持つ：

$$\left\langle x, y \,\middle|\, w^{-1}ywx^{-1} = 1 \right\rangle, \quad w = x^{\varepsilon_1}y^{\varepsilon_2} \ldots x^{\varepsilon_{q-2}}y^{\varepsilon_{q-1}}.$$

この群表示をもとに Fox の自由微分を行うことで、次が得られる。

定理 4.5. 奇数 $p > 0$ と互いに素な偶数 a に対して、2 プラット 2 次元結び目 $F = F(p, a)$ のアレキサンダー多項式 $\Delta_F(t)$ は以下の公式により与えられる。

$$\Delta_F(t) \doteq \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k t^{\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i\right)}, \quad \varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{ia}{p} \rfloor}.$$

ここで $\doteq$ は両辺のローラン多項式が $\pm t^k \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の差を除いて等しいことを意味している。

系 4.6. 2 つの異なる奇数 p, q とそれぞれに互いに素な整数 a, b を考える。このとき $F(p, a)$ と $F(q, b)$ は 2 次元結び目として同値ではない。

Proof. $\det(\sigma(K)) = \Delta_{F(a/p)}(-1) = p$ より従う。 □

5　今後の展望

2 プラット 2 次元結び目に関する問題を述べる。まず 2 プラット 2 次元結び目の分類問題についてである。例えば 2 橋結び目 $K(2/5)$ と $K(3/5)$ は分類定理より同値な結び目であることが分かる。一方で、2 プラット 2 次元結び目 $F_1 = F(2/5)$ と $F_2 = F(3/5) = F(-2/5)$ に対してアレキサンダー多項式を考えると、それぞれ

$$\Delta_{F_1}(t) \doteq t^2 - 2t + 2, \quad \Delta_{F_2}(t) \doteq 2t^2 - 2t + 1$$

となり、同値な 2 次元結び目でないことが分かる。一般に次の事実が成り立つ。

補題 5.1. 2 プラット 2 次元結び目 $F(a/p)$ に対して次が成り立つ：

$$\Delta_{F(-a/p)}(t) \doteq \Delta_{F(a/p)}(t^{-1}).$$

さらに、$1 \leq p \leq 1000$ を満たす 2 プラット 2 次元結び目 $F(a/p)$ に対してアレキサンダー多項式を計算することにより、次の問題が得れられる。

問題 5.2. 次は同値であるか。

(1) 2 プラット 2 次元結び目 $F(a/p)$ と $F(b/q)$ は同値である。
(2) $p = q$ および $a \equiv b$ (mod$p$) が成り立つ。

命題 4.2 より (2)⇒(1) は成り立っており、系 4.6 により (1)⇒$p = q$ までは判明している。2 橋結び目では同じアレキサンダー多項式を持つ同値でない例が多く存在する。そのため、この予想がアレキサンダー多項式のみで決定される可能性があることは興味深い点である。

またコンピュータ計算によって次の問題も得られている。

問題 5.3. 2 プラット 2 次元結び目のアレキサンダー多項式は reciprocal でない、すなわち $\Delta_{F(a/p)}(t)$ と $\Delta_{F(a/p)}(t^{-1})$ はアレキサンダー多項式として異なっているか。

スパン 2 次元結び目のアレキサンダー多項式は常に reciprocal であることが知られている。そのため予想 5.3 が成り立つとき、2 プラット 2 次元結び目かつスパン 2 次元結び目であるものは自明な 2 次元結び目に限られることが分かる。

謝辞

本研究集会にて講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生に感謝申し上げます。また本研究に関して様々な助言を下さった鎌田聖一先生、金信泰造先生、作間誠先生に感謝申し上げます。本研究は科研費 (課題番号:22J20494) の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Emil Artin. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):174–177, 1925.

[2] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 329–358. Pergamon, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1970.

[3] C. McA. Gordon. A note on spun knots. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 58:361–362, 1976.

[4] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(2):371–415, 1989.

[5] Seiichi Kamada. Surfaces in $\mathbf{R}^4$ of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.

[6] D. Roseman. The spun square knot is the spun granny knot. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 20(2):49–55, 1975.

[7] H. Schubert. Über eine numerische knoteninvariante. *Math. Z.*, (61):245–288, 1954.

[8] Shin'ichi Suzuki. Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 4(3):241–371, 1976.

[9] O.Ya. Viro. Lecture given at osaka city university. September 1990.

[10] Jumpei Yasuda. A plat form presentation for surface-links. *to appear in Osaka J. Math., available at arXiv:2105.08634*.

ツイストスパン結び目のツイストスパン結び目について

福田瑞季 (東北大学・MathAM-OIL) *

概要

n 次元結び目から $n+1$ 次元結び目を構成する方法として Zeeman によるツイストスピニングが知られており，ツイストスピニングを繰り返し行うことで 1 次元の結び目から任意の次元の結び目を作ることができる．本稿では 1 次元の結び目に対し 2 回のツイストスピニングで得られるツイストスパン結び目のツイストスパン結び目，つまり 3 次元結び目，について自明であるための十分条件と非自明であるための十分条件をそれぞれ与えることができたので紹介する．証明ではタングルの回転数に着目しながら，Pao の branched twist spin に対する Gluck twist の結果から自明性を，orbifold の基本群の性質から非自明性を，それぞれ考察する．本研究は慶應義塾大学の石川昌治 氏との共同研究である．

1 導入

n 次元結び目とは $n+2$ 次元球面に滑らかに埋め込まれた n 次元球面をいう．多様体の幾何構造の分類において，結び目の分類は盛んに研究されてきた．例えば，1 次元結び目が素なファイバーであるとき，そのモノドロミーは (1) 周期的， (2) 擬 (pseudo) アノソフ， (3) 可約の 3 つに分類され，それぞれ (1) ザイフェルト多様体，(2) 双曲多様体，(3) それらを境界のトーラスで貼り合わせた多様体と対応している．一方で，高次元の結び目補空間上のファイブレーションにおけるモノドロミーの分類というのはほとんど進められていない．

具体的な高次元の結び目のクラスとして，スパン結び目やツイストスパン結び目が挙げられる（詳しい定義は 1.1 節を参照されたい）．これらの結び目は次元が 1 低い結び目からスピニングやツイストスピニングと呼ばれる手法を用いて構成され，低い次元の結び目

* mizuki.fukuda.d2@tohoku.ac.jp

の性質を使って高い次元の結び目の性質を調べることができる．特に 1 次元結び目は性質がよくわかっているクラスが多く，そこから得られるスパン結び目やツイストスパン結び目の性質はよく知られている．

更に大きな 2 次元結び目のクラスとして，S^4 上の S^1 作用で不変な branched twist spin という 2 次元結び目が Pao によって構成された [7]．Branched twist spin は，スパン結び目を除いて，S^1 作用から自然にその補空間にファイブレーションを構成できるためファイバー結び目であり，そのモノドロミーは周期的である．逆に周期的なモノドロミーを持つ 2 次元ファイバー結び目は branched twist spin であることが知られている [8]．

本稿ではツイストスパン結び目のファイバーと次元が 1 低い結び目に沿った分岐被覆の関係に着目し，1 次元結び目に対しツイストスピニングを 2 回行って得られる 3 次元結び目について考察を行う．

1.1 ツイストスパン結び目

この節では Zeeman によるツイストスピニングとそれによって得られるツイストスパン結び目の性質について述べる．

$K \subset S^{n+2}$ を n 次元結び目とし，K 上の点 p を一つ固定する．点 p の S^{n+2} 内で非常に小さい閉近傍 D_p^{n+2} を取る．このとき，D_p^{n+2} には適切に埋め込まれた K の一部が存在するのでそれを K_- と書くことにすると，D_p^{n+2} は $K_- \times B^2$ と微分同相である．また，$(S^{n+2}, K) \setminus \mathrm{Int}(D_p^{n+2}, K_-)$ を (D^{n+2}, K_+) と書く．この分解を用いて，2 つの $n+3$ 次元多様体 X と Y を

$$
\begin{aligned}
X =&\partial(D_p^{n+2}, K_-) \times D^2, \\
Y =&(D^{n+2}, K_+) \times \partial D^2,
\end{aligned}
$$

で定義する．正の整数 m に対し，X と Y を写像

$$
f_m((x,\phi),\theta) = ((x, \phi + m\theta), \theta) \quad ((x,\phi) \in \partial D^3, \theta \in \partial D^2)
$$

で貼り合わせる手法を m ツイストスピニングという．ここで ϕ は赤道の偏角であり，x は K_- の点， θ は ∂D^2 の曲座標である．

ツイストスピニングによって得られる多様体 $X \cup_{f_m} Y$ について次が知られている．

定理 1.1 (Zeeman [10])**.** 任意の整数 m に対して，$X \cup_{f_m} Y$ は S^{n+3} と微分同相である．さらに，$(K_- \times D^2) \cup_{f_m} (K_+ \times \partial D^2)$ は S^{n+1} と微分同相である．

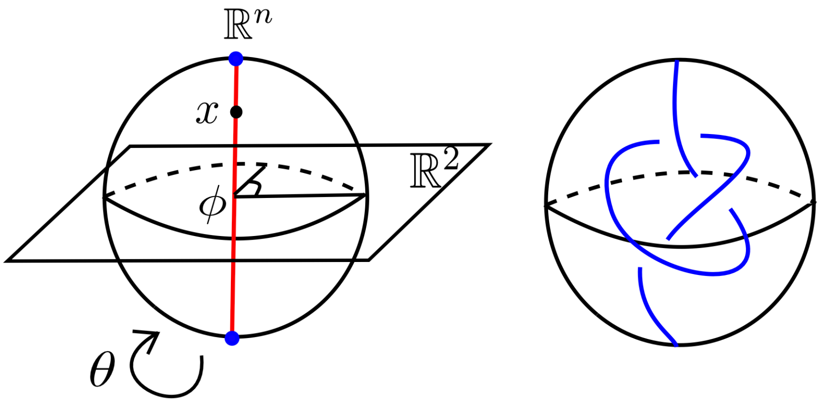


図 1 (D_p^{n+2}, K_-)（左）と (D^{n+2}, K_+)（右）

定義 1.2. 定理 1.4 によって得られる $(K_- \times D^2) \cup_{f_m} (K_+ \times \partial D^2)$ を K の m ツイストスパン結び目といい，$\tau_m(K)$ と書く．

注意 1.3. (1) $m = 0$ の場合は Artin によるスパン結び目と一致する．
(2) m が負の場合も同様に m ツイストスパン結び目を構成できるが，簡単のため非負整数のみを扱う．

次節で紹介する定理 1.7 によりツイストスパン結び目の自明性について次が従う．

定理 1.4 (Zeeman [10])**.** $\tau_m(K)$ を K の m ツイストスパン結び目とする．$\tau_m(K)$ が自明な 2 次元結び目であるための十分条件は次のどちらかを満たすことである．

(1) K が自明な 1 次元結び目である．
(2) $m = 1$.

1.2 Branched twist spin

この節では 2 次元結び目に限定し，ツイストスパン結び目の一般化の 1 つとして知られる branched twist spin に関して定義と説明を述べる．

K を 1 次元結び目とし，正の整数 m と k に対し，m ツイストスパン結び目 $\tau_m(K)$ に沿った k 重分岐被覆

$$(M^4, \tau_{m,k}(K)) \to (S^4, \tau_m(K))$$

を考える．

定理 1.5 (Fintushel [6], Pao [7]). m と k が互いに素ならば M は S^4 と微分同相である.

定理 1.5 により，分岐被覆写像による分岐点の集合の逆像 $\tau_{m,k}(K)$) は 2 次元結び目と捉えることができる.

定義 1.6. 上記 $\tau_{m,k}(K)$ を K の (m,k)-branched twist spin という.

$k=1$ のとき，1 重分岐被覆は恒等写像なので，$\tau_{m,k}(K)$ は m ツイストスパン結び目である.

ツイストスパン結び目および branched twist spin に対し次の 2 つの定理が成り立つ.

定理 1.7 (Zeeman [10], Pao [7]). m を 1 以上とする．このとき，$\tau_{m,k}(K)$ はファイバー結び目であり，そのファイバーは K に沿った S^3 の m 重分岐被覆から 3 次元開球体を 1 つ取り除いたものである．特にそのモノドロミーは周期的で，分岐被覆のシートを k 枚ずらすものである.

定理 1.8 (F. [3]). $G(\tau_{m,k}(K)))$ を $\tau_{m,k}(K))$ の結び目群とし, K の結び目群の Wirtinger 表示を $\langle x_1,\dots,x_l \mid r_1,\dots,r_l\rangle$ とする．このとき,

$$G(\tau_{m,k}(K))) \cong \langle x_1,\dots,x_l,h \mid r_1,\dots,r_l, x_1hx_1^{-1}h^{-1},\dots x_lhx_l^{-1}h^{-1}, x_1^m h^\beta\rangle. \quad (1.1)$$

ただし，β は $k\beta \equiv 1 \pmod m$ を満たす整数である.

1.3 オービフォールド群

本節ではオービフォールドとその基本群について簡単に説明する．詳細は [2, 9] を参照されたい.

連結で可分な距離空間で，局所的に $\mathbb{R}^n$ を有限群の作用で割った商空間と同相になるとき，その距離空間を n オービフォールドといい，特に 3 オービフォールドが円周の非交和のみを分岐軌跡にもつとき cyclic type という．連結な分岐軌跡の位数は一定である.

基底空間 が S^3 で 1 次元結び目 L を位数 m の分岐軌跡としてもつ cyclic type の 3 オービフォールドを $\mathcal{O}(L,m)$ と書く．この $\mathcal{O}(L,m)$ の基本群 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m))$ を，$\mathcal{O}(L,m)$ の普遍被覆の Deck 変換群として定義する．すなわち,

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m)) \cong \langle x_1,\dots,x_l \mid r_1,\dots,r_l, x_1^m\rangle \quad (1.2)$$

である．ここで $\langle x_1,\ldots,x_l \mid r_1,\ldots,r_l\rangle$ は $G(K)$ の Wirtinger 表示である．

2 主結果

本章では 1 次元結び目に対して 2 回ツイストスピニングを行って得られる 3 次元結び目について得られた結果を紹介する．

定理 2.1 (F.-石川)**.** K を 1 次元結び目とし，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ を K の m_1 ツイストスパン結び目の m_2 ツイストスパン結び目とする．また，$m=\gcd(m_1,m_2)$ とする．$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ が自明であるための十分条件は次のどちらかを満たすことである．

(1) K が自明な 1 次元結び目．
(2) $m=1$.

証明の概要． 定理 1.4 の (1) より，K が自明な n 次元結び目の場合，任意の整数 m に対して m ツイストスパン結び目は自明な $n+1$ 次元結び目である．この考察を 2 回使うことにより，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は自明な 3 次元結び目であることがわかる．

次に K が非自明で $m=1$ の場合を考える．このとき，定理 1.7 によって，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ はファイバー結び目で，そのファイバー は $\tau_{m_1}(K)$ に沿った S^4 の m_2 重分岐被覆から 4 次元開球体を 1 つ取り除いたものである．ここで，Pao の結果から τ_{m_1} に沿った S^4 の m_2 重分岐被覆は S^4 になることに注意すると，ファイバーは 4 次元閉球体となる．したがって $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は自明な 3 次元結び目である． □

定理 2.2 (F.-石川)**.** K を 1 次元結び目とし，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ を K の m_1 ツイストスパン結び目の m_2 ツイストスパン結び目とする．また $m=\gcd(m_1,m_2)\neq 1$ とする．$Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ が自明ならば，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は非自明な 3 次元結び目である．ここで $Z(G)$ は群 G の中心を表す．

定理 2.2 の証明のために 2 つ補題を用いる．

補題 2.3 (cf. [5])**.** $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ の結び目群 $G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ は次の表示を持つ．

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))\cong\left\langle x_1,\ldots,x_l,h_1,h_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} r_1,\ldots,r_l,\\ x_ih_jx_i^{-1}h_j^{-1},\\ x_1^{m_j}h_j,\quad j=1,2\end{array}\right\rangle.$$

補題 2.4 (cf. [5])**.** $m=\gcd(m_1,m_2)$ に対し，$Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ が自明と仮定する．こ

のとき，

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))/Z(G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))) \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)). \tag{2.1}$$

定理 2.2 の証明の概要． 自明な結び目の結び目群は $\mathbb{Z}$ と同型なので，$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ が $\mathbb{Z}$ と同型でないことを示す．仮定から $Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)))$ は自明であるので補題 2.4 より，

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))/Z(G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))) \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)) \tag{2.2}$$

が成り立つ．また仮定から $m = \gcd(m_1, m_2)$ は 2 以上なので $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ は非自明な群である．したがって，$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ はアーベル群ではない．特に $\mathbb{Z}$ と同型でないので，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は非自明な 3 次元結び目である． $\square$

参考文献

[1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flachen im* R^4, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1926), 47–72.

[2] M. Boileau and J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.

[3] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, Osaka. J. Math. **54**, no.4, (2017), 679–688.

[4] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, Rev. Mat. Complut., (2024). https://doi.org/10.1007/s13163-024-00504-6

[5] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Twist spun knots of twist spun knots of classical knots*, arXiv:2409.00650, to appear in Dalat University Journal of Science.

[6] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[7] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[8] S.P. Plotnick, *Equivariant intersection forms, knots in* S^4*, and rotations in 2-spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 543–575.

[9] W. P. Thurston, The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Lecture Notes, Princeton (1977).

[10] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.

カンドルのオイラー標数 *

甲斐涼哉 (大阪公立大学) †, 田丸博士 (大阪公立大学) ‡

概要

結び目理論で不変量として導入されたカンドルは，対称空間の一般化とみなすことができる．近年では対称空間論の手法をカンドルに応用する研究が行われている．対称空間のオイラー標数は自然な群作用で計算でき，それを一般化してカンドルにオイラー標数を定義する．また，カンドルのオイラー標数が持つ位相空間のオイラー標数と似た性質をいくつか紹介する．この講演の内容は田丸博士氏との共同研究に基づく．

1 イントロダクション

オイラー標数は古典的な位相不変量のひとつである．その定義はホモロジー群を通して Betti 数の交代和として与えられる．一方で，Hopf と Samelson [1] は，コンパクト Lie 群の等質空間のオイラー標数は，極大トーラスの作用の固定点の数と一致することを示した．特に，各点に点対称が定義された空間である対称空間の場合には，その点対称から自然に導かれる群作用を用いて，オイラー標数が計算できる．

カンドルは結び目理論で導入された代数系で，結び目の射影図の Reidemeister 移動に対応した公理を持つ．一方で，対称空間の点対称はカンドルの公理を満たし，したがって対称空間はカンドルとなる．言い換えると，カンドルは対称空間の位相を忘れて，つまり，対称空間を離散化して点対称の性質のみに着目した代数系とも言える．

本研究では，対称空間論の視点からカンドルにオイラー標数を定義する．つまり，カンドル構造から自然に群作用が定まるが，その作用を用いてカンドルオイラー標数の定義を与える．特に，連結コンパクト Riemann 対称空間の場合には，今回定義するカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と一致する．また，いくつかのカンドルに対するオイラー標数の計算結果も与え，さらに，位相空間のオイラー標数と似たいくつかの性質を見る．

本稿は [4] に基づく．

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものである．

† E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

‡ E-mail:tamaru@omu.ac.jp

2 準備

まず，カンドル [3] の定義を与える．カンドル構造を二項演算で与えることも多いが，ここでは対称空間の考え方に基づいて，各点に写像を与えることで定義する．集合 X 上の写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X,X)$ と書く．

定義 2.1 ([3])**.** 空でない集合 X と写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X,X)$ ($s_x := s(x)$ と書く) の組 (X,s) が次の 3 条件を満たすとき**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x(x) = x$,
2. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x : X \to X$ は全単射,
3. 任意の $x, y \in X$ に対して，$s_y \circ s_x = s_{s_y(x)} \circ s_y$.

この定義は，集合 X 上の二項演算 $\triangleleft$ を，$x \triangleleft y := s_y(x)$ で定義すると，二項演算による (右分配則を仮定した) カンドルの定義と一致する．対称空間 X の点 x における点対称を s_x とすると，写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X,X)$ によって X 上のカンドル構造が定まる [5]．以下，対称空間とは限らないカンドルに対しても，写像 $s_x : X \to X$ を x における**点対称**と呼ぶ．カンドル $(X, s^X), (Y, s^Y)$ に対して，写像 $f : X \to Y$ が任意の $x \in X$ に対して，$f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ を満たすとき，f を**カンドル準同型**という．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型があるとき，二つのカンドルは**同型**であるという．

カンドル X に対して，X 上のカンドル同型全体の集合 $\mathrm{Aut}(X)$ は，写像の合成によって群となり，X の**自己同型群**という．自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**等質**であるという．特に，カンドルの公理から，点対称はカンドル同型である．カンドル X の点対称たち $\{s_x\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Inn}(X)$ を**内部自己同型群**という．内部自己同型 $\mathrm{Inn}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**代数的連結**であるという．代数的連結なカンドルは等質である．次の群作用を用いてカンドルにオイラー標数を定義する．

定義 2.2. カンドル X に対して，$\{s_x \circ s_y \mid x, y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Dis}(X)$ を ***displacement* 群**という．

displacement 群は transvection group などとも呼ばれ，様々な良い性質を持つことが知られている．詳細は [2] などを参照せよ．displacement 群の作用を用いて，カンドルのオイラー標数を次で定義する．

定義 2.3. カンドル X の**カンドルオイラー標数** $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X)$ を次で定義する：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g,X) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

ここで，$\#A$ は集合 A の濃度，$\mathrm{Fix}(g,X)$ は g の作用の X における固定点集合を表す．

3　対称空間のカンドルオイラー標数

まず典型的な具体例として n 次元球面を考える.

例 3.1. 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ は次で定義される点対称 s によって対称空間となる:

$$s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x.$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．このとき，内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(S^n)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は以下の通りである：

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \ \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

ここで，$\mathrm{Dis}(S^n)$ の元 g は，次元に応じて以下の形の元に $\mathrm{Dis}(X)$ 内で共役である：

$$g \sim_{\text{共役}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 偶数}, \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 奇数}, \end{cases} \quad (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)).$$

一般的な θ_i をとると，S^n 上の固定点の数は，n が偶数のときは 2 個，n が奇数のときは固定点が 0 個となることがわかる．固定点の数は共役で不変なので，g の固定点の数も同じである．よって，球面のカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と等しい.

この例を一般化することで，コンパクト Riemann 対称空間のカンドルオイラー標数は，位相空間としてのオイラー標数に一致することがわかる．その鍵となるのは次の Hopf と Samelson の結果 [1] である．位相空間 X のオイラー標数を $\chi^{\mathrm{Top}}(X)$ と書く.

命題 3.2 ([1], [6])**.** M をコンパクト Lie 群 G の等質空間とする．また，T を G の極大トーラスとして，その生成元 t_0 を取る．このとき，次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T, M) = \#\mathrm{Fix}(t_0, M).$$

χ^{Qdle} をオイラー標数と呼ぶ理由は次の定理が成り立つからである.

定理 3.3. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X に対して，

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X).$$

4 カンドルオイラー標数の例

この節では，具体的なカンドルに対する計算例を紹介する．

例 4.1. X を空でない集合する．X 上の点対称を $s_x := \mathrm{id}$ で定義する．このとき，(X, s) を**自明カンドル**といい，カンドルオイラー標数は X の濃度 $\#X$ と一致する．実際，自明カンドルの displacement 群は自明群であることから従う．

例 4.2. 自然数 $n > 2$ に対して，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の点対称を $s_x(y) := 2x - y$ と定義し，$R_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, s)$ を**二面体カンドル**という．R_n の各点を正 n 角形の頂点とみなすと，円周 S^1 の離散部分カンドルとみなせる．R_n のカンドルオイラー標数は，円周の位相空間としてのオイラー標数と同じく 0 となる．実際，$s_0 \circ s_1$ は固定点を持たない．

例 4.3. 群 G と群の自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，G 上の点対称を $s_x(y) := \sigma(yx^{-1})x$ で定義し，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) = (G, \sigma)$ を**一般化 *Alexander* カンドル**という．$\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ が非自明，つまり σ が恒等写像でないとき，カンドルオイラー標数は 0 となる．実際，任意の $g, x \in G$ に対して，

$$s_g \circ s_e(x) = g\sigma(g)^{-1}x$$

が成り立つことから従う．ただし，e は G の単位元を表す．

注意 4.4. 一般化 Alexander カンドルは等質カンドルである．また，任意の等質カンドルは，ある一般化 Alexander カンドルからの全射カンドル準同型を持つ．カンドルのオイラー標数は，非自明なカンドルが一般化 Alexander カンドルであるかの判定条件を与えている．

例 4.5. 群 G 上の点対称を $s_x(y) := xy^{-1}x$ で定義し，$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$ を G 上の**コアカンドル**という．一般に，コアカンドルとしての点対称によって，Lie 群は対称空間とみなされる．$\mathrm{Core}(G)$ が非自明カンドルのとき，つまり，G が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいくつかの直積と同型でないとき，カンドルオイラー標数は非自明な連結コンパクト Lie 群のオイラー標数と同じく 0 になる．実際，G がアーベル群の場合は，一般化 Alexander カンドルの場合の特別な場合である．G が非可換群の場合は，任意の $g, h, x \in G$ に対して，

$$s_{g^{-1}h^{-1}} \circ s_1^{-1} \circ s_h \circ s_{g^{-1}}^{-1}(x) = x[g, h]$$

が成り立つことから従う．

ここまでは，$\chi^{\mathrm{Qdle}} = 0$ となる例を挙げたが，$\chi^{\mathrm{Qdle}} \neq 0$ となる例も存在する．

例 4.6. n 次元球面 S^n の離散部分カンドル $DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ を**離散** n-**球面**とよぶ．ここで，$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．離散 n-球面のカンドルオイラー標数は

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数}, \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数}. \end{cases}$$

5　カンドルオイラー標数の性質

この節では，カンドルオイラー標数の一般的性質として，位相空間のオイラー標数に似た性質を紹介する．

$X_1 = (X_1, s^1), X_2 = (X_2, s^2)$ をカンドルとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上に

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$ を X_1 と X_2 の**直積カンドル**という．キネットの公式から，CW 複体の直積のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の積となることが知られている．カンドルのオイラー標数についても同様に次が成り立つ．

定理 5.1. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

また，直和集合 $X_1 \sqcup X_2$ 上に

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s^i_x(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 = (X_1 \sqcup X_2, s)$ を X_1 と X_2 の *interaction-free union* という．位相空間の直和のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の和になることが知られている．interaction-free union のカンドルオイラー標数は，オイラー標数の和によって上から評価できる．

定理 5.2. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

定理 5.2 の不等式で，等号が成り立たない例を $\mathrm{Inn}(X)$ がアーベル群であるような等質カンドルで構成することができる．

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」での講演機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に
感謝申し上げます．また，講演後に有益なコメントをくださいました方々に感謝いたします．

参考文献

[1] Hopf, H., Samelson, H.: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. Commentarii Mathematici Helvetici **13**, 240–251 (1941).

[2] Hulpke, A., Stanovský, D., Vojtěchovský, P.: Connected quandles and transitive groups. Journal of Pure and Applied Algebra **220**(2), 735–758 (2016).

[3] Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle. Journal of Pure and Applied Algebra **23**(1), 37–65 (1982).

[4] Kai, R., Tamaru, H.: On the Euler characteristics for quandles (2024). arXiv.2411.08319

[5] Loos, O.: Symmetric Spaces. I: General Theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969)

[6] Püttmann, T.: Homogeneity rank and atoms of actions. Annals of Global Analysis and Geometry **22**(4), 375–399 (2002).

ラックの G 族に付随しない多重群ラックの構成

新井克典[1]

1 空間曲面

空間曲面とは $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ に埋め込まれたコンパクト曲面のことである. 本稿では, 特に断らない限り空間曲面は (i) 有向曲面であり, (ii) 各連結成分は境界を持ち, 2 次元閉円板ではないものとする. 2 つの空間曲面 F と F' が同値であるとは F と F' が S^3 内で全同位であることをいい, F と F' が同値であることを $F \cong F'$ と書く.

図 1 の対応により, 空間 3 価グラフの図式 D から空間曲面 $F(D)$ が得られる. すなわち, $\mathbb{R}^2$ 上で D の正則近傍 $N(D)$ をとり, D の各交差の近傍で図 1 の右端のように $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つのバンドに取り換える. さらに $\mathbb{R}^2$ の向きから誘導される向きを与えることで $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ 内に空間曲面 $F(D)$ が得られる. 任意の空間曲面 F に対し, ある空間 3 価グラフの図式 D

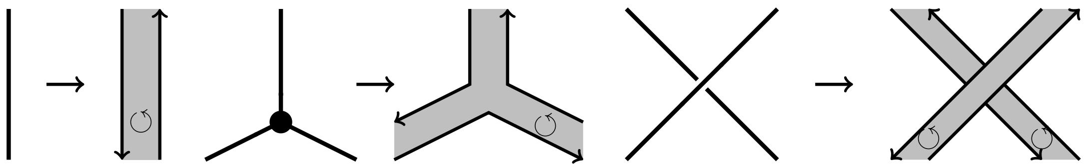


Figure 1: 空間 3 価グラフの図式から空間曲面を構成する方法

が存在して $F \cong F(D)$ を満たす (cf. [6,8]). 空間曲面 F の図式とは $F \cong F(D)$ を満たす空間 3 価グラフの図式 D のことをいう.

空間 3 価グラフの図式のY 向きとは, 各頂点において入次数と出次数が 0 でない向き, すなわち, 各頂点周りで沈点や湧点を持たない向きのことをいう (図 2). すべての空間 3

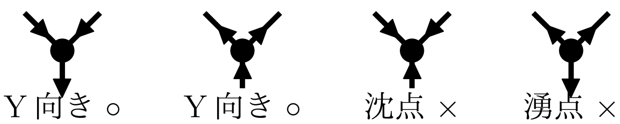


Figure 2: 頂点周りでの向き

価グラフの図式は, すくなくとも 1 つの Y 向きをもつ. Y 向きを 1 つ与えられた空間 3 価グラフの図式のことを Y 向き付けられた図式と呼ぶことにする.

空間曲面の図式に対して, 次の Reidemeister 型の定理が成り立つ.

Theorem 1.1 ([8])**.** *F と F' を空間曲面とし, D と D' をそれぞれ F と F' の Y 向き付けられた図式とする. このとき, $F \cong F'$ であることと D と D' が有向 R2-, R3-変形, Y 向き付けられた R5-, R6-変形 (図 3) と $S^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.*

[1]u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

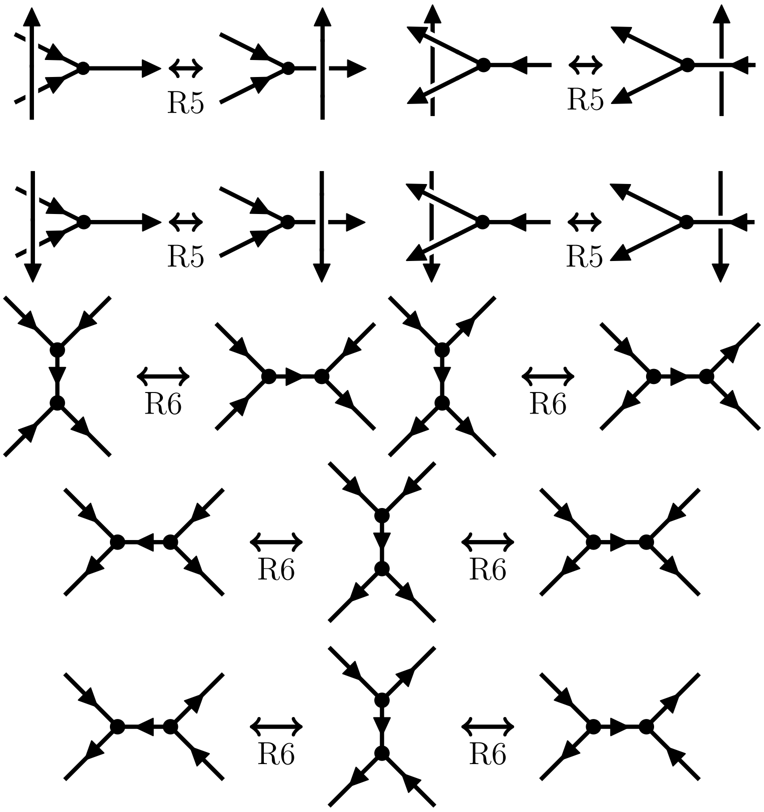


Figure 3: Y 向き付けられた R5-, R6-変形

2　多重群ラック

Definition 2.1 ([3, 7, 10])**.** R を空でない集合, $\triangleleft : R \times R \to R$ を R 上の二項演算とする. 組 $(R, \triangleleft)$ がラックであるとは, 次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう.

(i) 任意の $y \in R$ に対して, $S_y : R \to R,\ x \mapsto x \triangleleft y$, は全単射である.

(ii) 任意の $x, y, z \in R$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ を満たす.

本稿では式を簡略化するため, ラック $(R, \triangleleft)$ の任意の元 x, y に対して, $x \triangleleft y$ を x^y と書くこともある.

Example 2.2. G を群とする. G 上の二項演算 $\triangleleft : G \times G \to G$ を $x \triangleleft y = y^{-1}xy$ $(x, y \in G)$ で定義する. このとき, $\mathrm{Conj}(G) := (G, \triangleleft)$ はラックである. ラック $\mathrm{Conj}(G)$ を共役ラックと呼ぶ.

Example 2.3. G を群とし, N を G の正規部分群とする. 共役ラック $\mathrm{Conj}(G) := (G, \triangleleft)$ を考え, $\triangleleft$ から誘導される N 上の二項演算も同様に $\triangleleft$ と書くことにする. このとき, $\mathrm{Conj}(N) := (N, \triangleleft)$ も共役ラックである. ここで $G \times N$ 上の二項演算 $* : (G \times N) \times (G \times N) \to G \times N$ を $(x, y) * (z, w) = (x^{zw}, y^{zw})$ $((x, y), (z, w) \in G \times N)$ で定めると, $\mathrm{Conj}(G) \times \mathrm{Conj}(N) := (G \times N, *)$ はラックとなる.

Definition 2.4 ([6])**.** $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を群の族とし, 各群 G_λ の単位元を e_λ とおく. 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と X 上の二項演算の組 $* : X \times X \to X$ の組 $(X, *)$ が多重群ラックであるとは次の条件 (i)–(iii) を満たすことをいう.

(i) 任意の $\lambda \in \Lambda$, 任意の $x \in X$, 任意の $g, h \in G_\lambda$ に対して, $x * (gh) = (x * g) * h$ かつ $x * e_\lambda = x$ を満たす.

(ii) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.

(iii) 任意の $\lambda \in \Lambda$, 任意の $x \in X$, 任意の $g, h \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $g * x, h * x \in G_\mu$ かつ $(gh) * x = (g * x)(h * x)$ を満たす.

Example 2.5. $(R, \triangleleft)$ をラックとする. このとき,

$$n := \min \left\{ k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid 任意の\, x, y \in R\, に対して, S_y^k(x) = x \right\}$$

とおく. ただし, 最小値が存在しない場合は $n = \infty$ と定める. $R \times \mathbb{Z}_n = \bigsqcup_{x \in R} (\{x\} \times \mathbb{Z}_n)$ は次の演算で多重群ラックとなる.

$$(x, i) * (y, j) = (S_y^j(x), i),\ (x, i)(x, j) = (x, i + j).$$

$(X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, *)$ を多重群ラックとし, D を空間曲面の Y 向き付けられた図式とする. D の弧全体の集合を $\mathrm{Arc}(D)$ とおく. D の X 彩色とは, 写像 $\mathrm{Arc}(D) \to X$ で各交差と各頂点において図 4 の条件を満たすものをいう. D の X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ とおく.

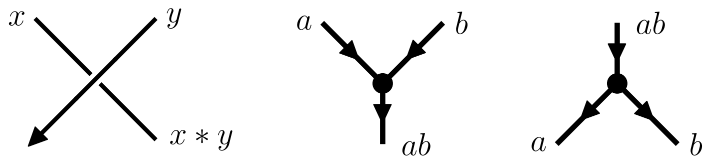


Figure 4: X 彩色条件 $(x, y \in X,\ a, b \in G_\lambda)$

Theorem 2.6 ([6])**.** X を多重群ラックとし, D, D' を空間曲面の Y 向き付けられた図式とする. このとき, $F(D) \cong F(D')$ ならば $\mathrm{Col}_X(D)$ と $\mathrm{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, $|\mathrm{Col}_X(D)|$ は D の Y 向きの選び方に依らず, $F(D)$ の不変量である.

Problem 2.7 (cf. [12])**.** 次の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラック $(X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, *)$ は存在するか.

$(\star)$ ある空間曲面の Y 向き付けられたある図式 $D = D_1 \sharp D_2$ に対して, ある X 彩色 C が存在して, $C(\alpha) \notin \{e_\lambda \in G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を満たすものが存在する. ここで, α は図 5 で表される弧である.

[12] では, 非自明な結び目 K の結び目カンドル $Q(K)$ (または結び目 n カンドル $Q_n(K)$) に対して, Example 2.5 の方法で得られる多重群ラックの $\mathbb{Z}$ (または $\mathbb{Z}_n$) によるアーベル拡大が性質 $(\star)$ を満たす多重群ラックであることを示した (詳しくは [1, 2, 7, 9, 10, 11] を参照せよ).

本稿では, 有限非可換群の非交和上の多重群ラックの構成法を与える.

Definition 2.8 ([5])**.** G を群とし, e を G の単位元とする. 集合 X と X 上の二項演算の族 $\{*^g : X \times X \to X\}_{g \in G}$ の組 $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ がラックの G 族であるとは次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう.

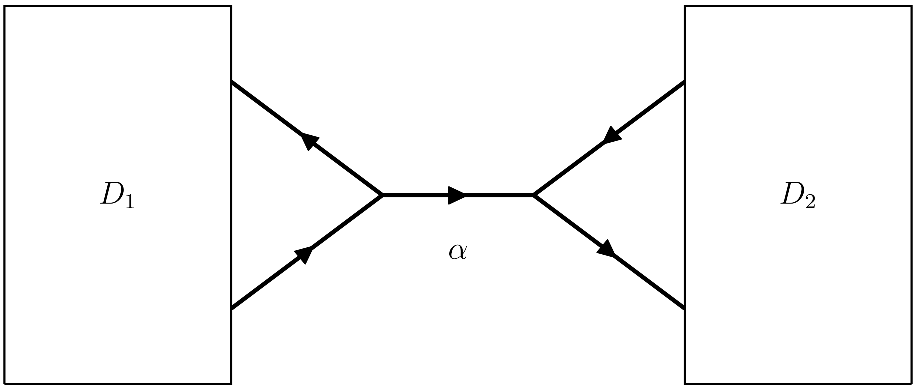


Figure 5: $D = D_1 \sharp D_2$

(i) 任意の $x, y \in X$, 任意の $g, h \in G$ に対して, $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$ かつ $x *^e y = x$ を満たす.

(ii) 任意の $x, y, z \in X$, 任意の $g, h \in G$ に対して, $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$ を満たす.

Example 2.9. $X = \mathbb{Z}_3$, $G = S_3 \cong \langle a, x \mid a^3 = x^2 = e, xax = a^2 \rangle$ とする. $g \in G$ に対して, $*^g : X \times X \to X$ を次で定義する.

$$i *^g j = \begin{cases} 2j - i & (g = x, ax, a^2x) \\ i & (\text{上記以外}) \end{cases}.$$

このとき, $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ はラックの G 族である.

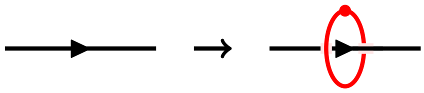
ラックの G 族から多重群ラックを構成する方法が知られている.

Proposition 2.10 ([4, 6])**.** $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ をラックの G 族とする. このとき, $X \times G = \bigsqcup_{x \in X} (\{x\} \times G)$ は次の演算で多重群ラックとなる.

$$(x, g) * (y, h) = (x *^h y, h^{-1}gh), \ (x, g)(x, h) = (x, gh).$$

多重群ラック $X \times G$ をラックの G 族 $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ に付随する多重群ラックという.

Proposition 2.11. *D を図 5 の Y 向き付けられた図式とする. 任意のラックの G 族 $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ に対して, $X \times G$ をラックの G 族 $\left(X, \{*^g\}_{g \in G}\right)$ に付随する多重群ラックを考える. D の任意の $X \times G$ 彩色 C に対して, ある $x \in X$ が存在して, $C(\alpha) = (x, e)$ を満たす.*

Proof. 写像 $\phi : \mathrm{Arc}(D) \to \pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))})$, , を考える.
このとき, ある群準同型 $f : \pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))}) \to G$ が唯一つ存在して, $\mathrm{pr}_2 \circ C = f \circ \phi$ を満たす. ここで, $\mathrm{pr}_2 : X \times G \to G$ は $\mathrm{pr}_2(x, g) = g$ で定義される写像である. いま, $\phi(\alpha)$ は $\pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))})$ の単位元であるので, $\mathrm{pr}_2 \circ C(\alpha) = f \circ \phi(\alpha) = e$ が成り立つ. 従って, ある $x \in X$ が存在して, $C(\alpha) = (x, e)$ を満たす. $\square$

Remark 2.12. Proposition 2.11 より, すべてのラックの G 族に対して, それに付随する多重群ラックは Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たさない.

3　主結果

有限非可換群の非交和上の多重群ラックの構成法を与える．

Theorem 3.1 (主結果 1)**.** $\left(X, \{*^g\}_{g\in G}\right)$ をラックの G 族とし, N を G の正規部分群とする．このとき, $X \times (G \ltimes N) = \bigsqcup_{x\in X} (\{x\} \times (G \ltimes N))$ は次の演算で多重群ラックとなる．

$$(x,(g_1,n_1)) * (y,(g_2,n_2)) = (x *^{g_2 n_2} y, (g_1^{g_2 n_2}, n_1^{g_2 n_2})), (x,(g_1,n_1))(x,(g_2,n_2)) = (x,(g_1 g_2, n_1^{g_1} n_2)).$$

ここで, $g^h := h^{-1}gh$ $(g, h \in G)$ である．

Proof. 直接計算で示すことができる． □

Theorem 3.2 (主結果 2)**.** Theorem 3.1 において, $N \curvearrowleft G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ は Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たす．

Proof. $N \curvearrowleft G$ が非自明なとき, このとき, ある $A \in G$ とある $B \in N$ が存在して, $[A, B] := ABA^{-1}B^{-1} \neq e$ を満たす．いま, 図 6 の Y 向き付けられた図式と $X \times (G \ltimes N)$ 彩色 C を考える．このとき, $C(\alpha) = ([A, B]^{-1}, [A, B]) \neq (e, e) \in G \ltimes N$ である．よって Problem 2.7

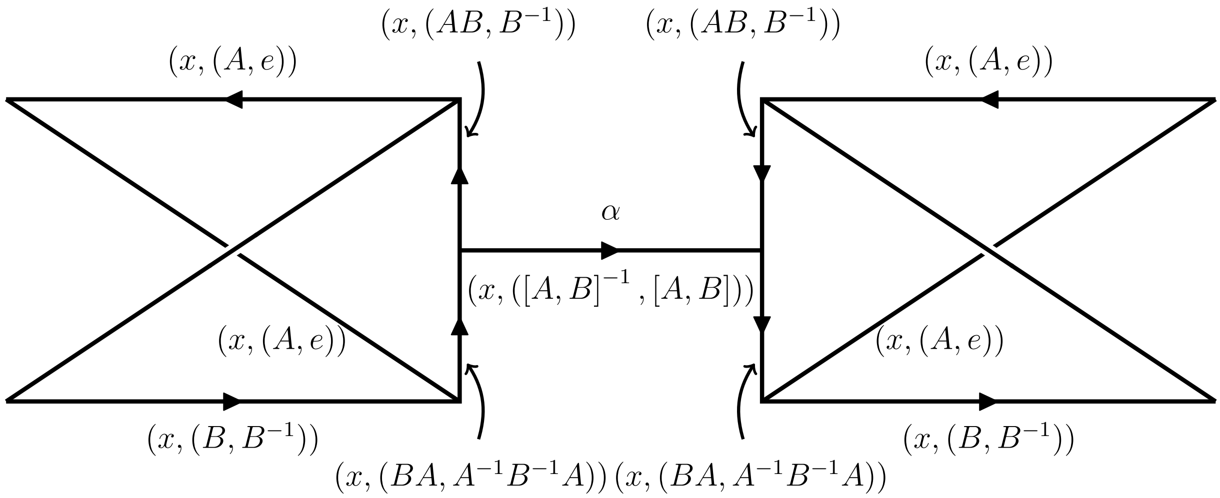


Figure 6: D と $X \times (G \ltimes N)$ 彩色 C

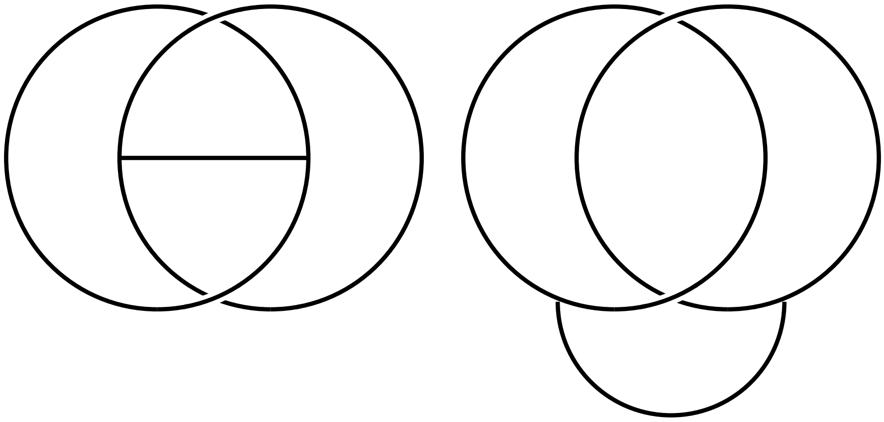
の性質 $(\star)$ を満たす． □

Corollary 3.3. Theorem 3.1 において, $N \curvearrowleft G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ はどんなラックの G 族にも付随しない多重群ラックである．

Proof. Proposition 2.11 より, ラックの G 族に付随する多重群ラックは性質 $(\star)$ を満たさないことから従う． □

Example 3.4. $\left(X, \{*^g\}_{g\in G}\right)$ を Example 2.9 のラックの G 族とする．いま, $N \langle a \mid a^3 = e \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ を G は正規部分群である．さらに, $a^x = a^2 \neq a$ より, $N \curvearrowleft G$ は非自明である．従って, Theorem 3.1, 3.2 より, $X \times (G \ltimes N)$ は Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラックである．

最後に, ラックの G 族に付随しない多重群ラックによる彩色の具体例を与える．



D_1 D_2

Figure 7: D_1 と D_2

Example 3.5. $\left(X, \{*^g\}_{g\in G}\right)$ を Example 2.9 のラックの G 族とする．いま, $N = G$ として, Theorem 3.1 の方法で得られる多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ を考える．図 7 の D_1, D_2 に Y 向きを 1 つ与え, $X \times (G \ltimes N)$ による彩色を考える．このとき, $\left|\mathrm{Col}_{X\times(G\ltimes N)}(D_1)\right| = 1458$, $\left|\mathrm{Col}_{X\times(G\ltimes N)}(D_2)\right| = 1242$ である．従って, $F(D_1) \ncong F(D_2)$ が成り立つ．

Remark 3.6. Example 3.5 において, ラックの G 族に付随する多重群ラック Y を考えると, $|\mathrm{Col}_Y(D_1)| = |\mathrm{Col}_Y(D_2)|$ である．また, ハンドル体結び目として, $N(F(D_1)) \cong N(F(D_2))$ である．さらに, $\partial(F(D_1)) \cong \partial(F(D_2)) \cong$ L6n1 である．

Acknowledgement

本研究集会での講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

References

[1] S. Carter, A. Ishii, M. Saito, and K. Tanaka, *Homology for quandles with partial group operations*, Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 19–48. MR3613433

[2] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157. MR1954330

[3] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995

[4] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196** (2015), no. part B, 492–500. MR3430992

[5] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, and K. Oshiro, *A G-family of quandles and handlebody-knots*, Illinois J. Math. **57** (2013), no. 3, 817–838. MR3275740

[6] A. Ishii, S. Matsuzaki, and T. Murao, *A multiple group rack and oriented spatial surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 7, 2050046, 20. MR4142996

[7] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121

[8] S. Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32.

[9] S. Matsuzaki and T. Murao, *(co)homology of racks and multiple group racks for compact oriented surfaces in the 3-sphere*, 2023.

[10] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410

[11] K. Tanaka and Y. Taniguchi, *The second quandle homology group of the knot n-quandle*, 2023.

[12] Y. Taniguchi, *Multiple conjugation quandles and G-families of quandles*, Quandles and Symmetric Spaces 2023, 2024, pp. 26–40.

トーラス結び目のトーラス上の自己融合について

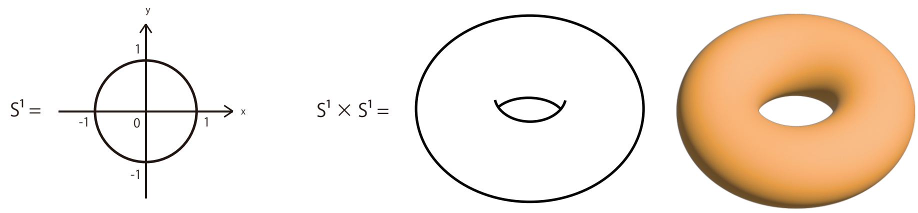
On Self-fusions of Torus Knots on the Torus

長谷川 諒 (甲南大学大学院自然科学研究科)

1. トーラスとトーラス結び目

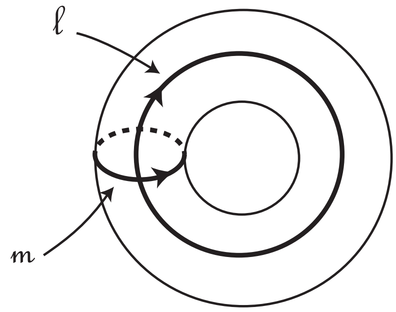
1.1 トーラス

平面上の単位円周を $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$ とし、トーラスを $T = S^1 \times S^1$ として定める。



単位円　　トーラス（無地）　　トーラス（影あり）

1 つの S^1 に対応する閉曲線をロンジチュード ℓ、もう 1 つの S^1 に対応する閉曲線をメリディアン m という。



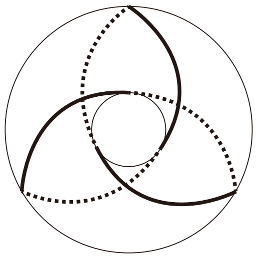
1.2 トーラス結び目

1.2.1 トーラス結び目の定義

(p, q) を負でない整数とし、$\gcd(p, q) = 1$ とする。トーラス上で、ℓ 方向に p 回、m 方向に q 回まわる単純閉曲線を $T(p, q)$ と書き、(p, q) 型のトーラス結び目という。

1.2.2 トーラス結び目の例

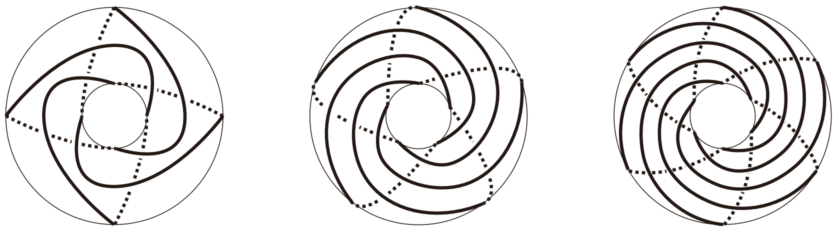
例えば、$T(2, 3)$ は、1 本の紐を、トーラスの表面に、ℓ 方向に 2 回、m 方向に 3 回だけ巻き付けた結び目である。



$T(2,3)$

トーラス結び目の例

同様に、$T(2,3)$ 以外にもさまざまなトーラス結び目があり、例えば、下図の $T(3,4)$ は 1 本の紐を、トーラスの表面に、ℓ 方向に 3 回、m 方向に 4 回だけ巻き付けた結び目である。



$T(3,4)$ $T(4,5)$ $T(5,6)$

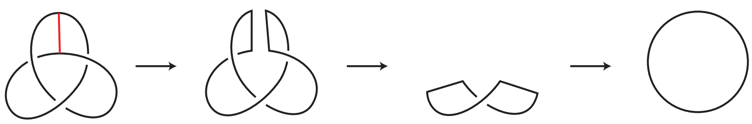
その他のトーラス結び目の例

2. 自己融合

2.1 結び目の自己融合

ある結び目に対して、その結び目と両端点だけで交わる弧に沿って 2 つに分割してつなぎ、新たな結び目または絡み目を作ることを **自己融合** (self-fusion) という。

自己融合をする際、結び目をつなぐ弧 α が必要になる。下図は、3 葉結び目における自己融合の図である。

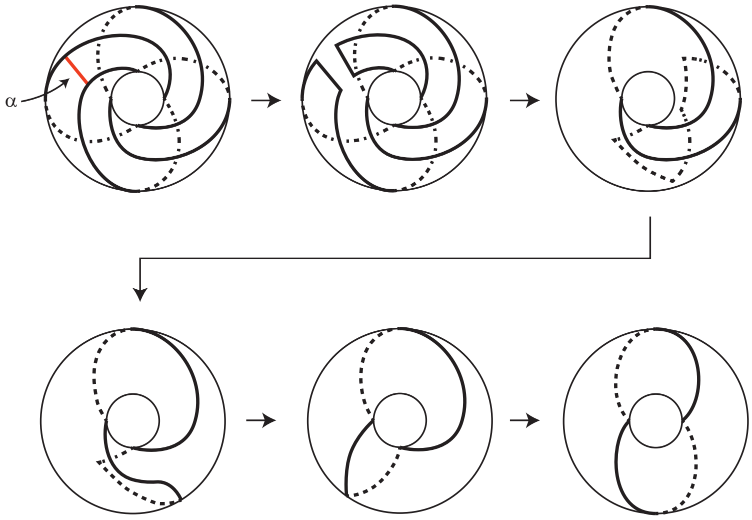


3 葉結び目の自己融合
(バンドのひねりは省略する。)

2.2 トーラス結び目の自己融合

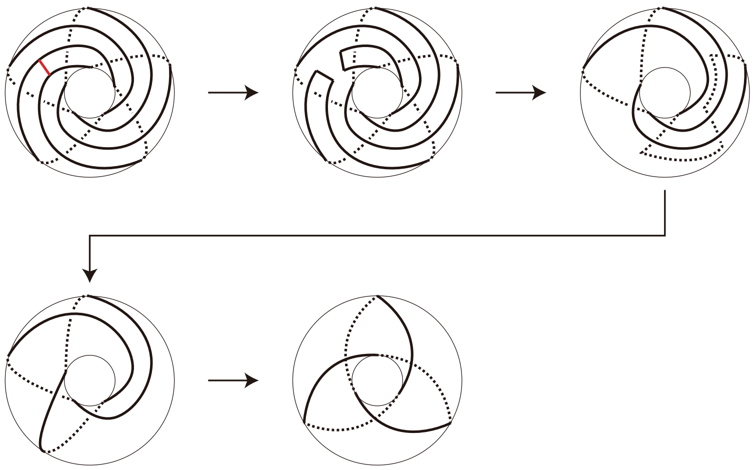
2.2.1 トーラス結び目の自己融合の例

トーラス T 上に描かれたトーラス結び目に対して、T 上で自己融合を行う。すなわち、自己融合を指定する弧 α を T 上にとる。このとき、自己融合された結び目は再びトーラス上に描かれるので、新しいトーラス結び目が得られる。



$T(3,4)$ を自己融合して $T(1,2)$ が得られる

下図は、$T(4,5)$ を自己融合して $T(2,3)$ が得られる例である。



注：α は、メリディアンに沿った弧とする。従って、トーラス結び目の自己融合は α の取り方に依らない。

2.3 $T(p,q)$ から $T(r,s)$ が得られるための必要十分条件

$T(p,q)$ から $T(r,s)$ となる条件として次を示した。

定理 2.3.1

$1 < p$ とする。$T(p,q)$ からトーラス結び目の自己融合で $T(r,s)$ が得られるための必要十分条件は、$ps - qr = \pm 2$, $0 \leq r < p-1$ かつ $\gcd(r,s) = 1$ である。

証明の要点

自己融合を行う T 上の弧を α とする。このとき、α に沿って自己融合を実行し、重なりを少しずら

した結び目を $T(r,s)$ とする。(図 2.3.1)

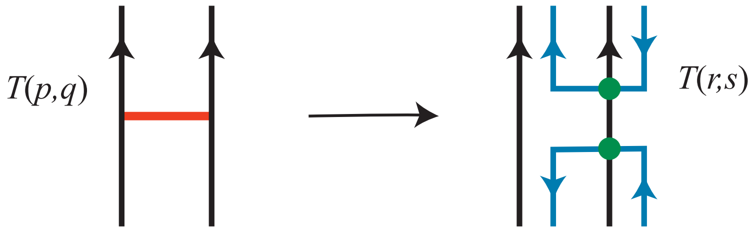


図 2.3.1

上図のように、$T(p,q)$ と $T(r,s)$ は 2 点で交わる。また、2 つのトーラス結び目の代数的交差数は

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

である。従って、$ps - qr = \pm 2$ となる。

3. 自己融合数 $sf(p,q)$

3.1 $sf(p,q)$ の定義と問題設定

これ以降、トーラス結び目 $T(p,q)$ は、すべて $p < q$ とする。なぜなら、$T(p,q)$ と $T(q,p)$ は同値な結び目となるからである。

トーラス結び目の自己融合は、その定義から、1 回の自己融合で p は少なくとも 2 は減少する。従って、有限回の自己融合で、$p = 0$ または 1 となり、自明な結び目が得られ、下記が定義できる。

$sf(p,q)$ の定義

自明な結び目になるための最小の自己融合回数を、$T(p,q)$ の**自己融合数** (Self-fusion number) と言い、$sf(p,q)$ と書く。

このとき、次の問題を考える。

問題 A　与えられた $T(p,q)$ に対して、$sf(p,q)$ を決定せよ。

また、次のような問題設定も考えられる。

問題 B　任意の自然数 $n > 0$ に対して、$sf(p,q) = n$ となる $T(p,q)$ を決定せよ。

3.2 $sf(p,q) = 1$ であるための条件と証明

3.2.1 $sf(p,q) = 1$ である例

$$T(2,3) \to T(0,1) \text{ より、} sf(2,3) = 1$$

$$T(5,7) \to T(1,1) \text{ より、} sf(5,7) = 1$$

$$T(7,12) \to T(1,2) \text{ より、} sf(7,12) = 1$$

3.2.2 $sf(p,q)=1$ であるための条件

$sf(p,q)=1$ であるための条件として、次が得られた。

命題 3.2.1

$1<p<q, \gcd(p,q)=1$ とする。$sf(p,q)=1$ であるための必要十分条件は、$p=2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod p$ である。

証明

$T(p,q)$ から $T(r,s)$ が得られるとすると、定理 2.3.1 より、$ps-qr=\pm 2$ である。$sf(p,q)=1$ とすると、$T(r,s)$ は自明な結び目より、$r=1$ または $s=1$ である。

(I) $r=1$ のとき、$ps-q=\pm 2$ より、$q=ps\pm 2 \quad \therefore q \equiv \pm 2 \pmod p$

(II) $s=1$ のとき、$p-qr=\pm 2$ より、$p=qr\pm 2$

(i) $r=0$ のとき、$p>0$ より、$p=2$

(ii) $r=1$ のとき、$p=q\pm 2$ より、$q \equiv \pm 2 \pmod p$

(iii) $r\geq 2$ のとき、$1<p<q$ より、$p\leq q-1$ であるから、
$p=rq\pm 2 \geq 2q\pm 2=2(q\pm 1)\geq 2p$ よって、$p\geq 2p$ となり不適。

従って、$sf(p,q)=1$ ならば、$p=2$ または $q\equiv \pm 2 \pmod p$ である。
逆に、

(I) $p=2$ のとき、$T(2,q)$ に対して、$\begin{vmatrix} 2 & q \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$ より、
$T(r,s)=T(0,1)$ が得られる。

(II) $q\equiv \pm 2 \pmod p$ のとき、$q=ps\pm 2$ であり、$\begin{vmatrix} p & q \\ 1 & s \end{vmatrix}=\pm 2$ より、
$T(r,s)=T(1,s)$ が得られる。

従って、$p=2$ または $q\equiv \pm 2 \pmod p$ ならば、$T(r,s)$ は自明な結び目となり、$sf(p,q)=1$ である。

$\square$

3.3 $sf(p,q)=2$ であるための条件

3.3.1 $sf(p,q)$ の周期性　$sf(p,q)=2$ であるための条件について考える。そこで、$sf(p,q)$ の周期性について見てみる。以下は、$p=7$ のときの $sf(p,q)$ についての表である。

$sf(p,q)$ の周期性

$p=7$ のとき

q	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	20
$sf(7,q)$	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	22	23	24	25	26	27	29	30	31	32	33	34
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	36	37	38	39	40	41	43	44	45	46	47	48
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3

上記の表から、 mod 7 で周期性をもつことが見てとれる。
一般に、 mod p で周期性をもつことが、次の補題で示される。

補題 3.3.1
$1<p<q<q'$, $\gcd(p,q)=1$ とする。
このとき、$q \equiv q' \pmod p$ ならば、$sf(p,q)=sf(p,q')$ である。

証明
$sf(p,q)=n$ とすると、次のような自己融合列が得られる。

$$T(p,q) \to T(p_1,q_1) \to T(p_2,q_2) \to \cdots \to T(p_n,q_n)$$

ただし、自然数 i に対して、$1<p_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$ であり、$1<p_i<q_i,\quad p_n=0$ または 1 が成り立つ。($p_i<q_i$ の証明は省略する)。
まず、$q' \equiv q \pmod p$ より、$q'=kp+q$ つまり、$q=q'-kp$ であるから、$T(p,q) \to T(p_1,q_1)$ より、

$$\begin{aligned} pq_1 - qp_1 &= \pm 2 \\ pq_1 - (q'-kp)p_1 &= \pm 2 \\ p(kp_1+q_1) - q'p_1 &= \pm 2 \end{aligned}$$

$q_1'=kp_1+q_1$ とおくと、$pq_1'-q'p_1=\pm 2$ であるから、$T(p,q') \to T(p_1,q_1')$ が得られる。
次に、$q_1'=kp_1+q_1 \equiv q_1 \pmod{p_1}$ より、同様の議論を用いて $T(p_1,q_1') \to T(p_2,q_2')$ が得られる。これを続けて、

$$T(p,q') \to T(p_1,q_1') \to T(p_2,q_2') \to \cdots \to T(p_{n-1},q_{n-1}') \to T(p_n,q_n')$$

を得る。すなわち、$T(p,q)$ の自己融合列と、$T(p,q')$ の自己融合列の第 1 座標が一致する。
ここで、$1<p<q'$ で $1<p_1$ より $1<p_1<q_1'$ であり、同様に $1<p_i<q_i' \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$, $p_n=0$ または 1 が成り立つから、$sf(p,q')=n$ となる。
従って、$q \equiv q' \pmod p$ ならば、$sf(p,q)=sf(p,q')$ が成り立つ。

□

3.3.2 $sf(p,q)=2$ であるための条件
命題 3.2.1 で $sf(p,q)=1$ であるための必要十分条件を示した。以下で、$sf(p,q)=2$ であるための条件を考察する。
次は、$sf(p,q)=2$ の例である。

$$T(8,11) \to T(2,3) \to T(0,1) \text{ より、} sf(8,11)=2$$

$$T(11,14) \to T(3,4) \to T(1,2) \text{ より、} sf(11,14) = 2$$

$$T(12,19) \to T(2,3) \to T(0,1) \text{ より、} sf(12,19) = 2$$

p が偶数の場合、次の結果が得られた。

定理 3.3.2

$1 < p < q < 2p,\ \gcd(p,q) = 1,\ p$ は偶数とする。このとき、

$sf(p,q) = 2$ であるための必要十分条件は、$q = \dfrac{3}{2}\,p \pm 1$ である。

証明

p は偶数より、$p = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ とする。

$T(p,q)$ から $T(r,s)$ が得られるとすると、定理 2.3.1 より $ps - qr = \pm 2$ である。$sf(p,q) = 2$ とすると、$sf(r,s) = 1$ であるから、命題 3.2.1 より $r = 2$ または $s \equiv \pm 2 \pmod r$ である。

(I) $r = 2$ のとき、$ps - qr = 2ks - 2q = \pm 2$ より、$q = ks \pm 1$ となる。このとき、$1 < p < q < 2p$ より、$2k < sk \pm 1 < 4k$ であり、$\gcd(r,s) = 1, r = 2$ より、s は奇数。また、$r < s$ より、$2 < s$ である。

(i) $s = 3$ のとき、$q = 3k \pm 1 = \dfrac{3}{2}\,p \pm 1$

(ii) $s \geq 5$ のとき、$sk \pm 1 \geq 5k \pm 1 = 4k + (k \pm 1) \geq 4k$ より不適。

(II) $s \equiv \pm 2 \pmod r$ のとき、$s = mr \pm 2 \quad (m \in \mathbb{Z})$ ここで、r が偶数のとき、s も偶数であるから、$\gcd(r,s) = 1$ に反する。よって、r は奇数となり、

$$\begin{aligned} ps - qr = \pm 2 &\iff 2k(mr \pm 2) - qr = \pm 2 \\ &\iff (2km - q)r = \pm 2 \cdot 2k \pm 2 = 2(\pm 2k \pm 1) \end{aligned}$$

より、$2km - q$ は偶数となるため、整数 n を用いて、$2km - q = 2n$ と表される。故に、$q = 2(km - n)$ より、q は偶数となり、これは $\gcd(p,q) = 1$ に反するため不適。

逆に、$q = \dfrac{3}{2} \cdot 2k \pm 1 = 3k \pm 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ とする。k が奇数ならば、q は偶数となり不適より、$k = 2\ell \quad (\ell \in \mathbb{Z})$ とおける。

$(p,q) = (4\ell, 6\ell \pm 1)$ に対して、$(r,s) = (2,3)$ とおくと、$4\ell \cdot 3 - (6\ell \pm 1) \cdot 2 = \pm 2$ となり、定理 2.3.1 より $T(4\ell, 6\ell \pm 1)$ から $T(2,3)$ が得られる。次に、$(r,s) = (2,3)$ に対して、$(t,u) = (0,1)$ とおくと、$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$ となり、定理 2.3.1 より $T(2,3)$ から $T(0,1)$ が得られる。よって、$T(4\ell, 6\ell \pm 1) \to T(2,3) \to T(0,1)$ となり、$sf(p,q) = 2$ となる。

□

A MULTI-VARIABLE ALEXANDER POLYNOMIAL FOR A FRAMED TRANSVERSE GRAPH

YUANYUAN BAO

Abstract. We propose a definition of the rotation number for a transverse graph diagram. Then we define a multivariable Alexander polynomial for a framed transverse graph (a.k.a ribbon graph). This report is based on a joint work with Zhongtao Wu.

1. The rotation number of a transverse graph diagram

1.1. **A transverse graph.** We consider an oriented connected graph G in S^3 where for each vertex v, there is a disk that separates the incoming and outgoing edges. We call such an orientation a *transverse orientation.* A graph with a transverse orientation is called a *transverse graph.* To our knowledge, the terminology was first used by [2] in their definition of Heegaard Floer homology for graphs.

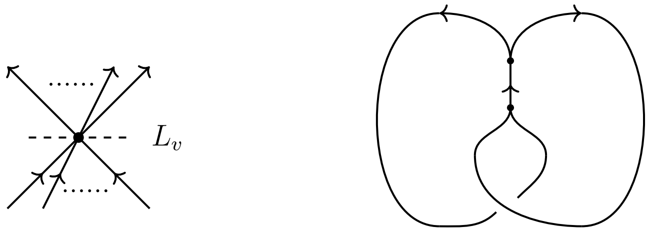


Figure 1. The local picture of a vertex with transverse orientation (left). An oriented trivalent graph without sinks and sources is a transverse graph (right).

Now a diagram D of a transverse graph G on R^2 is a regular projection of G so that

(i) The self-intersections are double points between edges, and at each double point the information of which strand is over and which is under is given.
(ii) Around each vertex v, there is a straight line L_v that separates the edges entering v and the edges leaving v.

If the position of the straight line L_v is clear, it can be omitted in the graph diagram.

Theorem 1.1. *Two diagrams represent the same transverse graph if and only if they can transfer to each other by a finite sequence of moves in Fig. 2.*

For a transverse graph G, let $S^3\backslash G$ denote the complement of G in S^3. **In this report, we consider a transverse graph G for which the meridian of each edge of G represents a non-trivial element in $H_1(S^3\backslash G;\mathbb{Z})$.**

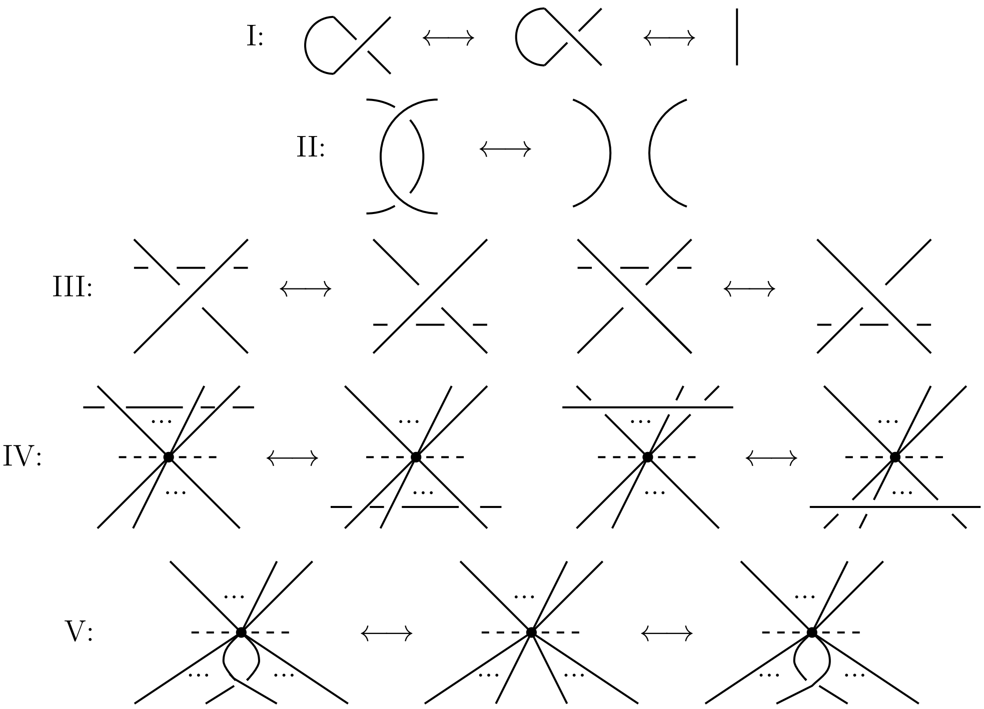


FIGURE 2. Reidemeister moves for transverse graph diagrams. Suppressed orientations of the edges can be added in all compatible ways.

1.2. **Definition of the rotation number for a graph diagram.** For a smooth closed oriented plane curve, the rotation number [10] or Whitney index counts the total number of turns when traveling along the curve. Among many studies, there is a formula which calculates it using information of the regions and the double points of the plane curve. See Theorem 1.3. This formula seems to have been first proposed by Viro [5], and is recently reproved by Wesenberg [9]. Motivated by this formula, we propose a definition of the rotation number for a diagram of a transverse graph.

Let G be a transverse graph in S^3. The first homology group $H_1(S^3\backslash G;\mathbb{Z})$ has a presentation as follows.

(i) *generators* To each edge or loop e of G, we assign a generator, which is the homology class of the oriented meridian of e. We call this element the *color* of e.

(ii) *relators* For any two generators s and t we have a relator $ts = st$. To each vertex v of G, we assign a relator as follows. Suppose the generators corresponding to the incoming (resp. outgoing) edges of v are $s_1, s_2, \cdots, s_k$ (resp. $t_1, t_2, \cdots, t_l$). Then we have a relator $s_1 s_2 \cdots s_k = t_1 t_2 \cdots t_l$.

Consider a connected diagram D of a transverse graph. To each connected component r of $R^2\backslash D$, which we call a *regular region*, we define the color $c(r)$ as follows:

(i) The color of the unique unbounded region is set to be $1 \in H_1(S^3\backslash G;\mathbb{Z})$.

(ii) The colors of the other regions are inductively determined by the rule as exhibited below: when an edge e points upward and its right-hand side region has color $x \in H_1(S^3 \backslash G; \mathbb{Z})$, then the color of its left-hand side region is $x \cdot m_e$, where m_e is the homology class of the meridian of e.

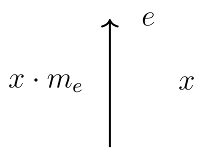


FIGURE 3. The colors of the two regions adjacent to an edge.

For each vertex v of D, we define its color $c(v)$ as follows. Suppose the incoming (resp. outgoing) edges around v are $s_1, s_2, \cdots, s_k$ (resp. $t_1, t_2, \cdots, t_l$), as illustrated in Fig4. Then let x_i (resp. y_j) be the color of the region adjacent to s_i and s_{i+1} (resp. t_j and t_{j+1}) for $1 \leq i \leq k-1$ (resp. $1 \leq j \leq l-1$). If $k = 1$ or $l = 1$, there is no x_i or y_j to define. Let

$$c(v) = \prod_{i=1}^{k-1} x_i^{1/2} \prod_{j=1}^{l-1} y_i^{1/2}.$$

Namely we consider all the regions around v except the two which encounter L_v.

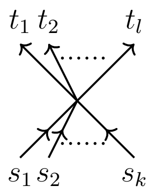


FIGURE 4. A vertex.

For each double point v of D, we regard it as a vertex with indegree 2 and outdegree 2, and define its color as above. Namely

$$c(v) = x^{1/2} y^{1/2},$$

where x is the color of its south corner and y is the color of its north corner.

Lemma 1.2. *Let V be the set of vertices of D, and $X(D)$ be the set of double points of D. After taking the product,* $\prod_{v \in V \cup X(D)} c(v)$ *becomes an element of $H_1(S^3 \backslash G; \mathbb{Z})$.*

Proof. Omitted. □

Theorem 1.3 (Viro, Wesenberg)**.** *Let D be an oriented plane curve on $\mathbb{R}^2$. Then the rotation number $w(D)$ of D can be calculated as*

$$t^{w(D)} = \prod_r c(r) [\prod_v c(v)]^{-1},$$

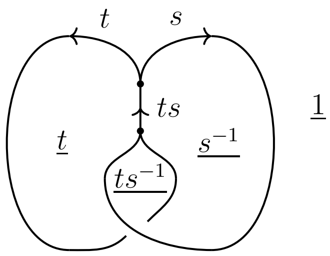


FIGURE 5. A diagram of a trivalent graph.

where r runs through all the component of $R^2\backslash D$ and v runs through all double points of D.

Now we extend the formula above to a transverse graph diagram.

Definition 1.4. Let D be a connected diagram of a transverse graph. We define the *rotation number* of D to be

$$\mathrm{Rot}(D) = \prod_{r\in F(D)} c(r)[\prod_{v\in V\cup X(D)} c(v)]^{-1},$$

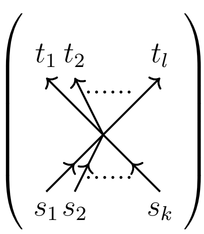
where $F(D)$ is the set of regular regions of D. For a disconnected diagram, its rotation number is defined to be the product of those of its connected components.

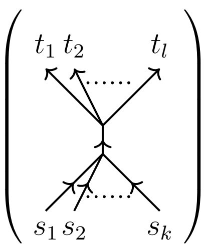
Example 1.5. The rotation number of the diagram D if Fig 5 is calculated as follows. A word with underline indicates the color of the corresponding region. There are four regular regions, two vertices and one crossing. We have $\prod_{r\in F(D)} c(r) = t\cdot s^{-1}\cdot ts^{-1} = t^2s^{-2}$, and $\prod_{v\in V\cup X(D)} c(v)^2 = (ts^{-1})(ts^{-1}) = t^2s^{-2}$. As a result,

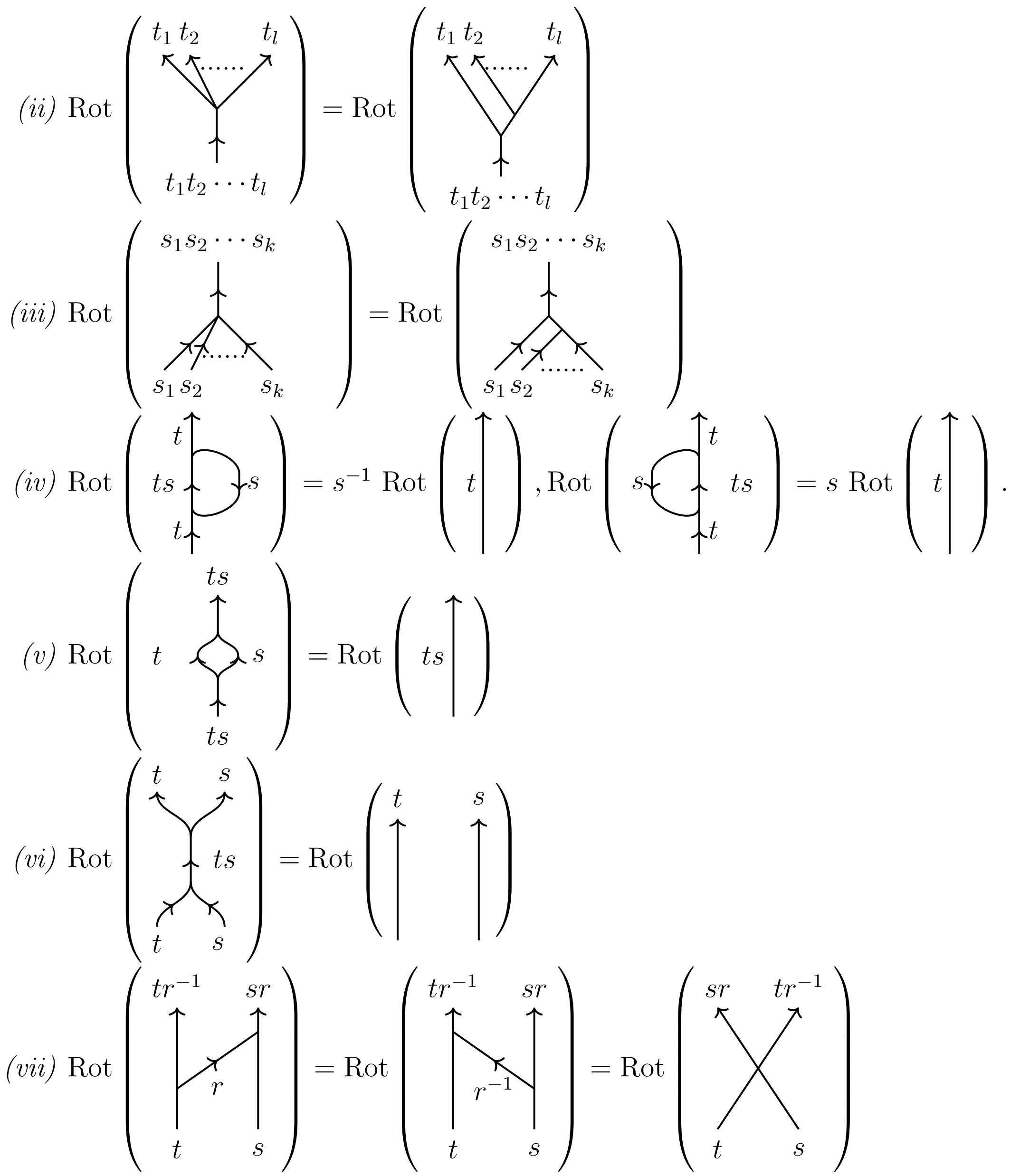
$$\mathrm{Rot}(D) = t^2s^{-2}(ts^{-1})^{-1} = ts^{-1}.$$

1.3. **Properties.** We discuss some properties of $\mathrm{Rot}(D)$.

Proposition 1.6. *Under the given colors, we have the following relations.*

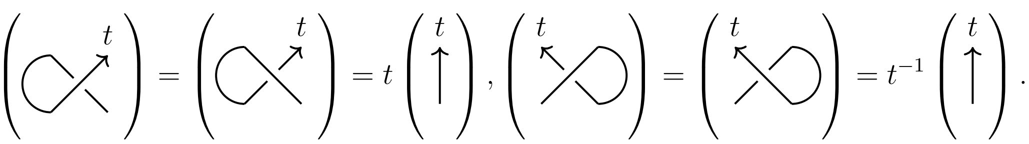
(i) Rot 

= Rot 



Proof. Obvious from the definition. □

Proposition 1.7. *The rotation number of a diagram does not change under moves II∼V in Fig. 2 and its change under move I is as follows.*



Proof. Omitted. □

Remark 1.8. *Two graph diagrams are called regularly homotopic if they are connected by a finite sequence of moves of II, III and IV. Prop. 1.7 tells us that the rotation number* $\mathrm{Rot}(D)$ *is a regular homotopy invariant for a transverse graph. Nikkuni [3] showed that the Wu invariant [8, 7] is a complete regular homotopy invariant for graphs. We expect to clarify the relationship between Wu invariant and* $\mathrm{Rot}(D)$ *in a near future.*

2. A multi-variable Alexander polynomial

2.1. **Kauffman state.** We recall the definition of Kauffman state that we introduced in [1, Definition 2.4]. Suppose D is a connected diagram of a transverse graph. We can obtain a *decorated diagram* (D, δ) by putting a base point δ on an edge of D and drawing a circle around each vertex of D. Then we define

(i) $\mathrm{Cr}(D)$: denotes the set of crossings, including the types and which are the double points of the diagram and the type which are the intersection points around each vertex between the incoming edges with the circle.

(ii) $\mathrm{Re}(D)$: denotes the set of regions, including the *regular regions* of R^2 separated by D and the *circle regions* around the vertices. *Marked regions* are the regions adjacent to the base point δ, and the others are called *unmarked regions*.

(iii) Corners: For a crossing of type or , there are four corners around it, and we call them the *north*, *south*, *west*, and *east corners* of the crossing. Around a crossing of type there are three corners, and we call the one inside the circle region the *north* corner, the one on the left of the crossing the *west* corner and the one on the right the *east* corner. Note also that every corner belongs to a unique region in $\mathrm{Re}(D)$.

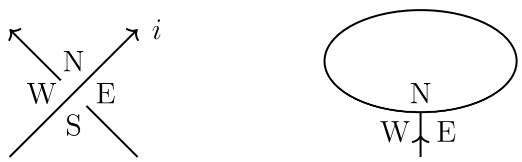


Fig 6 is an example of decorated diagram. Note that each meridian is nontrivial, there are exactly two regions R_u and R_v adjacent to δ. Under the assumption that D is connected, we have $|\,\mathrm{Re}(D)| = |\,\mathrm{Cr}(D)| + 2$. A *Kauffman state*, or simply, a *state* for a decorated diagram (D, δ) is a bijective map

$$s:\ \mathrm{Cr}(D) \to \mathrm{Re}(D) \backslash \{R_u, R_v\},$$

which sends a crossing in $\mathrm{Cr}(D)$ to one of its corners. Let $S(D, \delta)$ denote the set of all states.

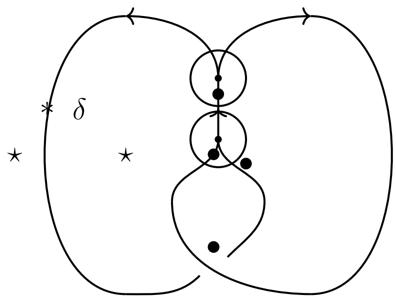


FIGURE 6. There are four regular regions, two circle regions, one crossing of type , three crossings of type . A Kauffman state associated to (D, δ) is marked out by $\bullet$'s .

2.2. **Kauffman state sum.** The aim here is to define a value $\langle D \rangle$, which is the multi-variable version of the Kauffman state sum that we defined in [1].

Definition 2.1. Suppose δ is on an edge with color t, and the colors of the marked regions are x and xt respectively. Define

$$|\delta| = x - xt.$$

Note that all edges have non-trivial colors, we have $|\delta| \neq 0 \in \mathbb{Z}H_1(S^3 \backslash \mathrm{G}; \mathbb{Z})$.

Definition 2.2. Choose a base point δ on an edge. Suppose (D, δ) is a connected decorated diagram with N crossings $C_1, C_2, \cdots, C_N$ in $\mathrm{Cr}(D)$ and $N+2$ regions $R_1, R_2, \cdots, R_{N+2}$ in $\mathrm{Re}(D)$.

(i) Define the local contributions $M_{C_p}^{\triangle}$ and $A_{C_p}^{\triangle}$ associated to each corner $\triangle$ around the crossing C_p as in Fig. 7.

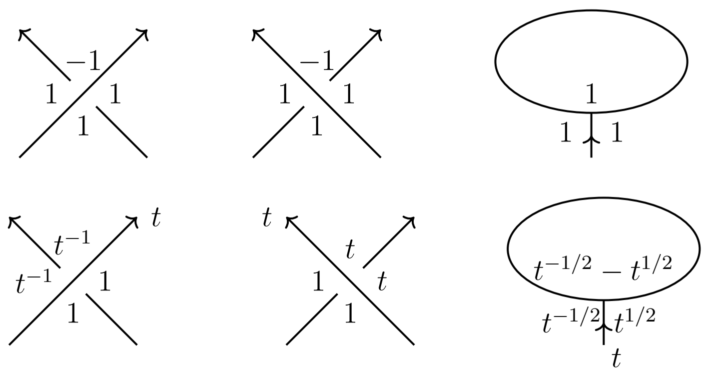


FIGURE 7. The local contributions $M_{C_p}^{\triangle}$ (top) and $A_{C_p}^{\triangle}$ (bottom). Here t indicates the color of the nearby edge.

(ii) For each state $s \in S(D, \delta)$, let

$$M(s) := \prod_{p=1}^{N} M_{C_p}^{s(C_p)},$$

$$A(s) := \prod_{p=1}^{N} A_{C_p}^{s(C_p)}.$$

(iii) The *state sum* is defined as

$$\langle D \rangle := |\delta|^{-1} \sum_{s \in S(D,\delta)} M(s) \cdot A(s). \tag{1}$$

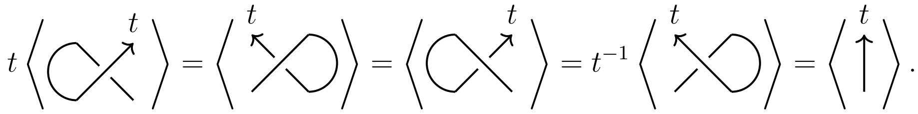
For all the cases that $S(D, \delta) = \emptyset$ or D is disconnected, we let $\langle D \rangle = 0$.

For an MOY graph (G, c), there is a homormorphism $\phi_c : H_1(S^3 \backslash G) \to \mathbb{Z}$ that assigns the oriented meridian of an edge e to $c(e)$. The state sum $\langle D, c \rangle$ defined in [1, Definition 2.11] can be obtained from $\langle D \rangle$ by replacing each element in $H_1(S^3 \backslash G)$ with its image under ϕ_c. In particular $\langle D, c \rangle \neq 0$ implies that $\langle D \rangle \neq 0$.

Proposition 2.3. *The state sum $\langle D \rangle$ does not depend on the choice of the base point δ.*

Proof. Omitted. □

Proposition 2.4. *The state sum $\langle D \rangle$ is invariant under the Reidemeister moves (II) – (V) in Fig. 2, and its variations under Reidemeister move (I) are given as below.*



Proof. Omitted. □

2.3. **A multi-variable Alexander polynomial.** In this part, we present a way of normalizing the state sum so that it becomes an invariant for framed transverse graphs. This work is a generalization of [1, Section 3.2].

Let G be a transverse graph. Recall that a *framing* of G is an embedded compact surface $F \subset S^3$ in which G is sitting as a deformation retract. A *framed graph* is a graph equipped with a framing. More precisely, each vertex of G is replaced by a disk in F where the vertex is the center of the disk, and each edge of G is replaced by a strip $[0, 1] \times [0, 1]$ where $[0, 1] \times \{0, 1\}$ is attached to the boundaries of its adjacent vertex disks and the edge is $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$. It is obvious to see that a framed transverse graph is equivalent with a ribbon graph defined in [4], where a vertex is replaced by a coupon while an edge is replaced by an annulus.

Each graph diagram of G in R^2 has a *blackboard framing*, whose projection in R^2 is the tubular neighborhood of the graph diagram in R^2. Hereafter, a framed transverse graph will be represented by graph diagrams with blackboard framing. For framed transverse graphs, we have the following result.

Lemma 2.5. *Any two graph diagrams for a framed transverse graph can be connected by a sequence of Reidemeister moves in Fig. 8.*

Starting from a framed graph diagram, we hope to construct an appropriate factor that cancels the change of the state sum coming from Reidemeister move (I) in Proposition 2.4 while keeping invariant under the other types of Reidemeister moves.

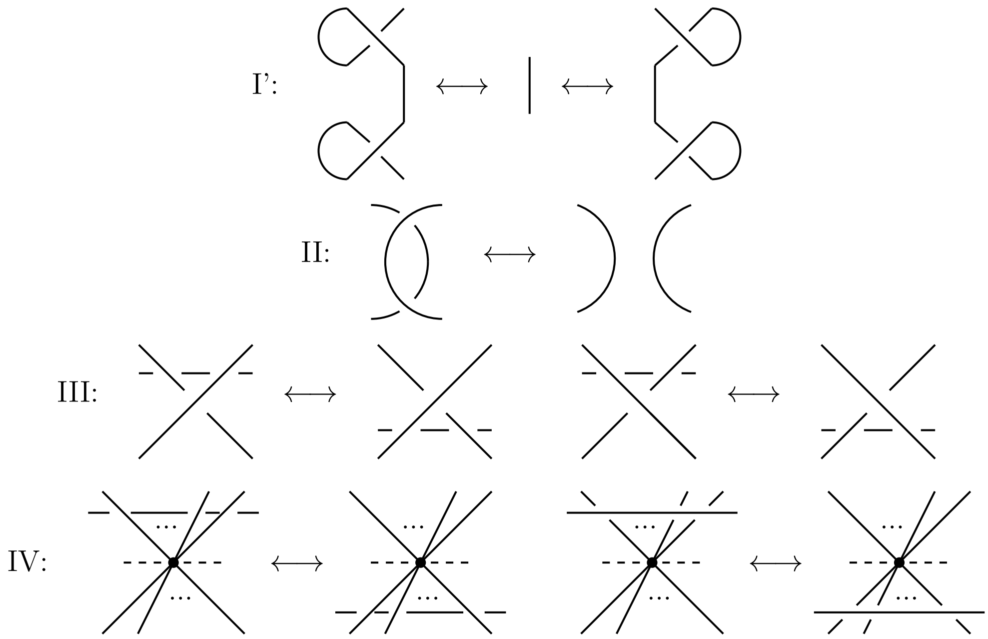


FIGURE 8. Reidemeister moves for framed transverse graph diagrams (ribbon graphs).

From now on, we use the blackboard-bold letters $\mathbb{G}$ and $\mathbb{D}$ to denote a framed trivalent graph and diagram, respectively.

Definition 2.6. For a framed transverse graph diagram $\mathbb{D}$, define the normalized Alexander polynomial by

$$\Delta_{\mathbb{D}} := \mathrm{Rot}(D)^{1/2} \cdot \langle D \rangle. \tag{2}$$

Theorem 2.7. *$\Delta_{\mathbb{D}}$ is a topological invariant of the framed transverse graph $\mathbb{G}$.*

Proof. Since both $\langle D \rangle$ and $\mathrm{Rot}(D)$ are invariant under Reidemeister moves (II, III, IV), it is enough to study their behavior under move (I'). Suppose the graph on the left hand side of (I') is $\mathbb{D}_1$ and the right one is $\mathbb{D}_2$. Then by proposition 2.4 $\langle D_1 \rangle = t^{-1}\langle D_2 \rangle$, where t is the color of the corresponding edge. By Proposition 1.7 we have $\mathrm{Rot}(D_1) = t^2\mathrm{Rot}(D_2)$. Therefore $\Delta_{\mathbb{D}_1} = \Delta_{\mathbb{D}_2}$ under move (I'). □

3. FUTURE STUDIES

There are several questions whose answers remain open to us.

(i) For a graph diagram D of a transverse graph, what is the relation of $\mathrm{Rot}(D)$ and Wu invariant?
(ii) Is $\mathrm{Rot}(D)$ a complete regular homotopy invariant for transverse graphs?
(iii) For a framed trivalent graph without sink or source, what is the relation of $\Delta_{\mathbb{D}}$ and Viro's $gl(1|1)$-Alexander polynomial defined in [6]?
(iv) How to extend the definition of $\mathrm{Rot}(D)$ or even $\Delta_{\mathbb{D}}$ to a graph with sources/sinks?

Acknowledgements We would like to thank Kengo Kawamura for telling me the paper [5], and thank Ryo Nikkuni for suggesting me to see the relation of Wu invariant and Rot(D). The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20K14304.

References

[1] Y. Bao and Z. Wu, *An Alexander polynomial for MOY graphs*, Selecta Math. (N.S.), 26 (2020), pp. Paper No. 32, 44.
[2] S. Harvey and D. O'Donnol, *Heegaard Floer homology of spatial graphs*, Algebr. Geom. Topol., 17 (2017), pp. 1445–1525.
[3] R. Nikkuni, *On the Wu invariants for immersions of a graph into the plane*, Homology Homotopy Appl., 12 (2010), pp. 45–60.
[4] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys., 127 (1990), pp. 1–26.
[5] O. Viro, *First degree invariants of generic curves on surfaces*, U.U.D.M. report, ISSN 1101-3591, (1994).
[6] O. Y. Viro, *Quantum relatives of the Alexander polynomial*, Algebra i Analiz, 18 (2006), pp. 63–157.
[7] W. Wen-tsün, *On the isotopy of a complex in a Euclidean space. I*, Sci. Sinica, 9 (1960), pp. 21–46.
[8] ———, *A theory of imbedding, immersion, and isotopy of polytopes in a euclidean space*, Science Press, Peking, 1965.
[9] D. Wesenberg, *A new formula for rotation number*, arXiv:2010.01422, (2020).
[10] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Compositio Math., 4 (1937), pp. 276–284.

Division of Mathematics & Research Center for Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 6-3-09 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

Email address: yybao@tohoku.ac.jp

A bracket polynomial for the Alexander–Conway polynomial

石井 敦（筑波大学数理物質系）

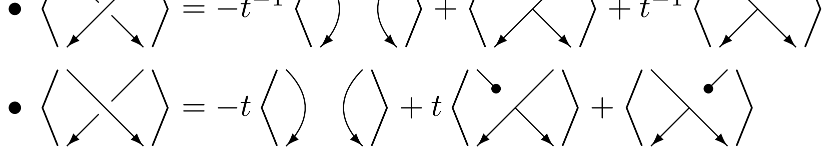
概要

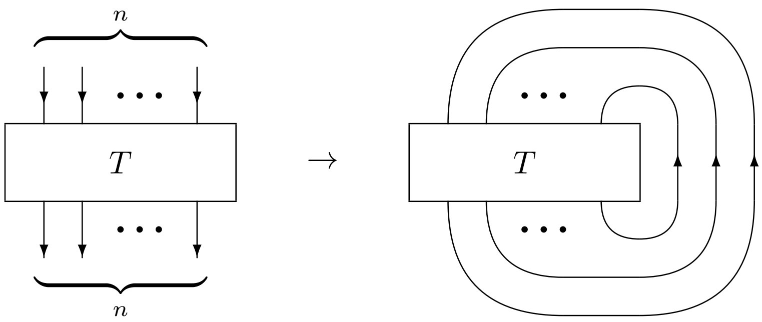
アレクサンダー多項式とジョーンズ多項式はどちらもよく知られた多項式不変量であり、スケイン関係式を用いて簡単に計算して値を求めることができる。ジョーンズ多項式の不変性は、カウフマンブラケットを用いることで初等的に与えることができる。本稿では、アレクサンダー多項式に対しても、初等的に不変性を与えるブラケット多項式を導入する。

1　ブラケット多項式

図 1 の左の絵にあるような、n 個の上端点と n 個の下端点を持つタングルを (n,n)**-タングル**といい、本稿では、端点で上から下に向かう向きを持っているとする。(n,n)-タングルを平行なひもによって閉じることで、タングル T の**閉包** $\widehat{T}$ が得られる。タングル T のダイアグラムが D であった場合、これに平行なひもを加えることで得られるダイアグラムを $\widehat{D}$ で表す。このとき、$\widehat{D}$ は $\widehat{T}$ のダイアグラムになる。タングルはその端点に 1 価頂点を持つが、本稿では、(n,n)-タングルはその内部に、1 価または 3 頂点で入次数 1 の頂点を持ってもよいものとする。(n,n)-タングルはその内部に頂点を持たないとき、**古典的**であるという。

定義 1.1. 向き付けられた $1,3$ 価 (n,n)-タングルダイアグラム D に対して、$\langle D\rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を次で定義する。





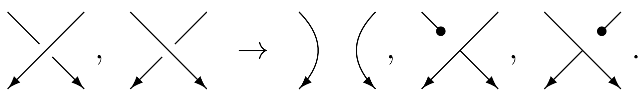
(n,n)-タングル　　$\widehat{T}$

図 1

- 交点を持たないダイアグラム D に対して

$$\langle D\rangle = \begin{cases} 1 & D \text{ はループを含まない} \\ 0 & D \text{ はループを含む} \end{cases}$$

次に、定義 1.1 の $\langle D\rangle$ を状態和公式で与える。これは、$\langle D\rangle$ の well-definedness を与える。ダイアグラム D の交点の集合を $C(D)$ とする。また、交点 χ の符号を $\mathrm{sgn}(\chi)$ で表す。向き付けられた $1,3$ 価 (n,n)-タングルダイアグラム D の**状態** σ とは、$0,1,-1$ の各交点への割り当て、つまり、$C(D)$ から $\{0,1,-1\}$ への写像のことである。ただし、割り当てられた $0,1,-1$ は次のタングルに対応し、この対応によってダイアグラム D のすべての交点を置き換えて得られるダイアグラムを D_σ で表す。



状態 σ に対して、交点 χ の**重み** $\mathrm{wt}(\chi;\sigma)$ を次で定義する。

$$\mathrm{wt}(\chi;\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma(\chi) = \mathrm{sgn}(\chi) \text{ のとき} \\ t^{-\mathrm{sgn}(\chi)} & \sigma(\chi) = -\mathrm{sgn}(\chi) \text{ のとき} \\ -t^{-\mathrm{sgn}(\chi)} & \sigma(\chi) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\langle D\rangle$ の状態和公式は次で与えられる。

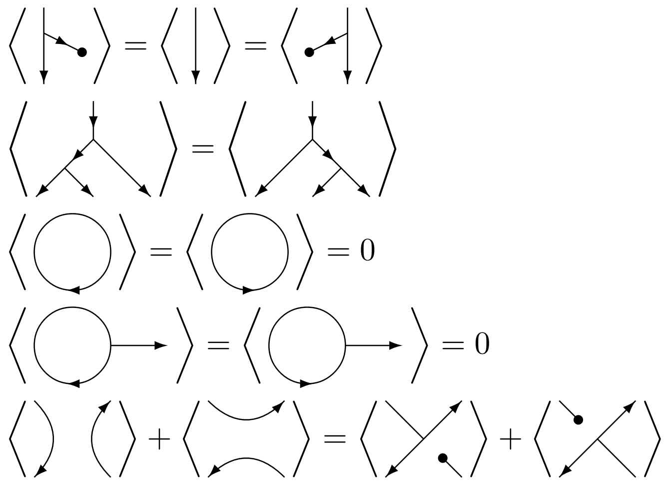
$$\langle D\rangle = \sum_{\sigma:\ D \text{ の状態}} \prod_{\chi\in C(D)} \mathrm{wt}(\chi;\sigma)\delta(D_\sigma), \tag{1}$$

ここで、$\delta(D_\sigma) \in \{0,1\}$ は次で与えられる。

$$\delta(D_\sigma) = \begin{cases} 1 & D_\sigma \text{ はループを含まない} \\ 0 & D_\sigma \text{ はループを含む} \end{cases}$$

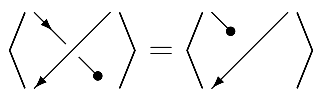
状態和公式 (1) を用いることで次の補題が得られる。

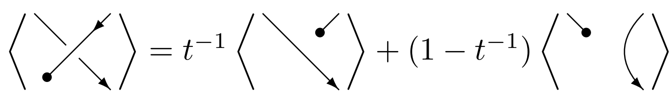
補題 1.2. 次の関係式が成り立つ。

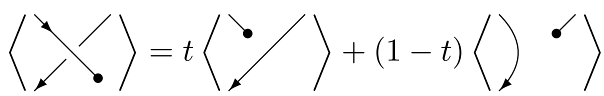


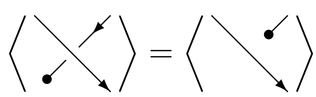
Proof. これらの関係式が交点のないダイアグラムに対して成り立てば、状態和公式 (1) から、一般のダイアグラムに対しても、これらの関係式が成り立つことが分かる。交点のないダイアグラムに対しては、ループの有無に着目することで、これらの関係式が得られる。特に、最後の関係式は、タングルの外側での端点のつながり方に着目することで得られる。 □

補題 1.3. 次の関係式が成り立つ。

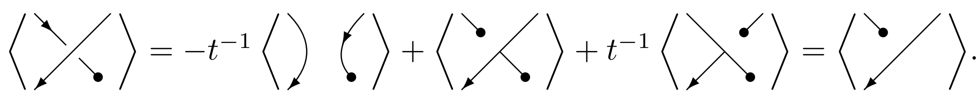
(1) 

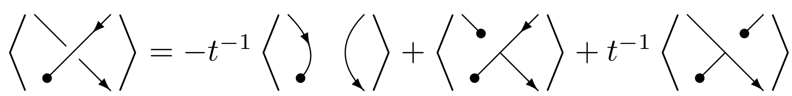
(2) 

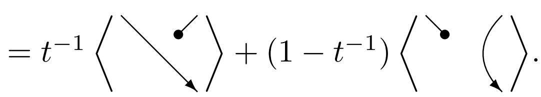
(3) 

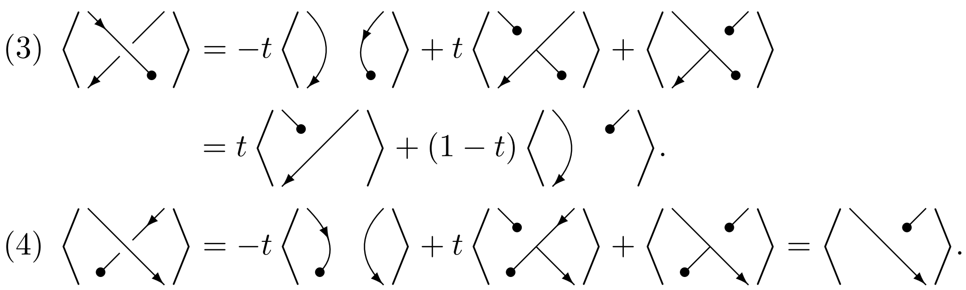
(4) 

Proof. 補題 1.2 より次が成り立つ。

(1) 

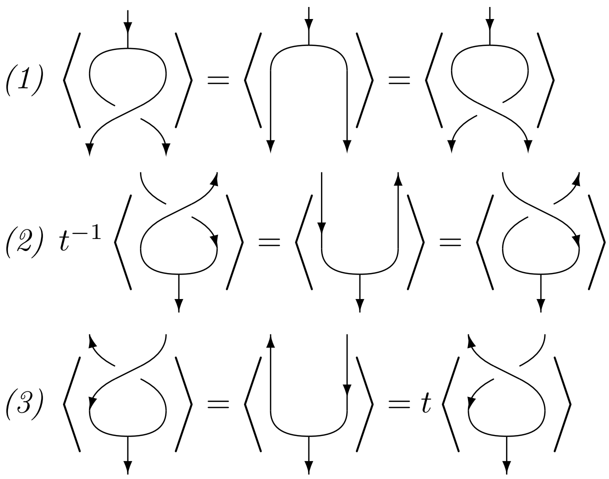
(2) 



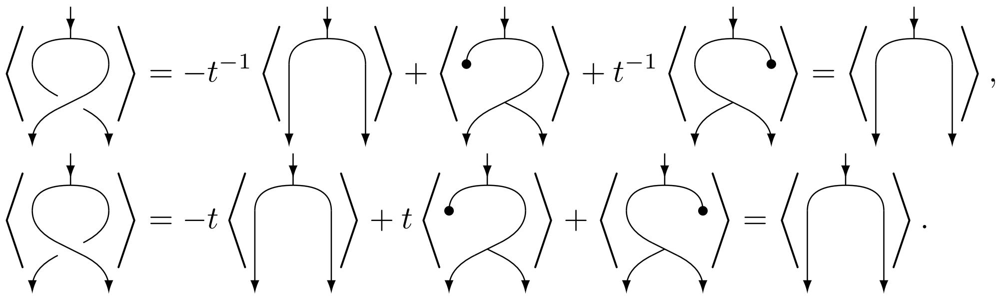


□

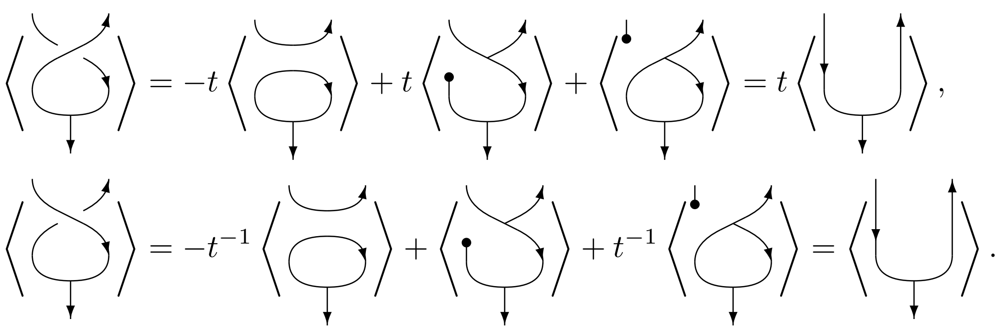
補題 1.4. 次の関係式が成り立つ。



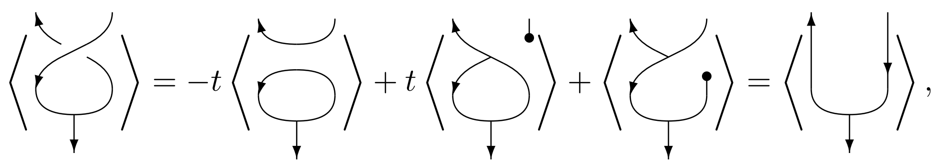
Proof. (1) 補題 1.2 より次が成り立つ。

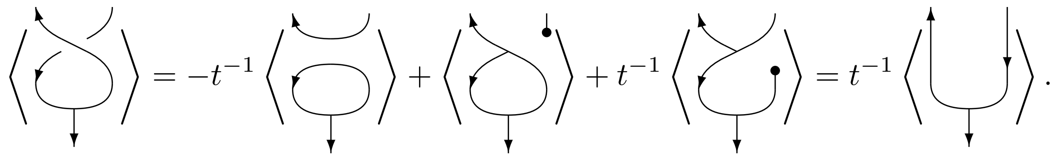


(2) 補題 1.2 より次が成り立つ。



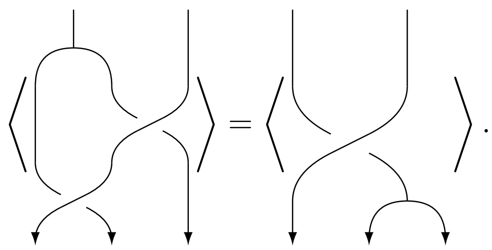
(3) 補題 1.2 より次が成り立つ。



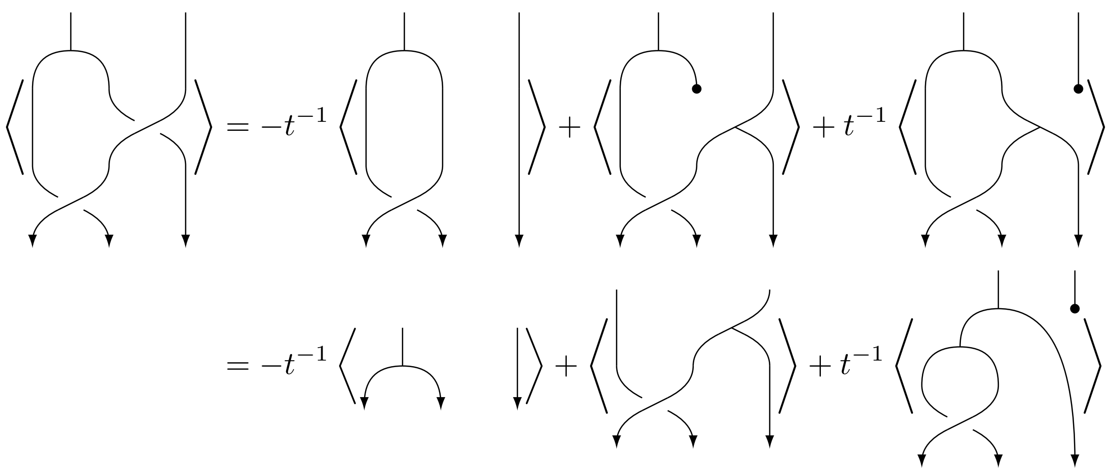


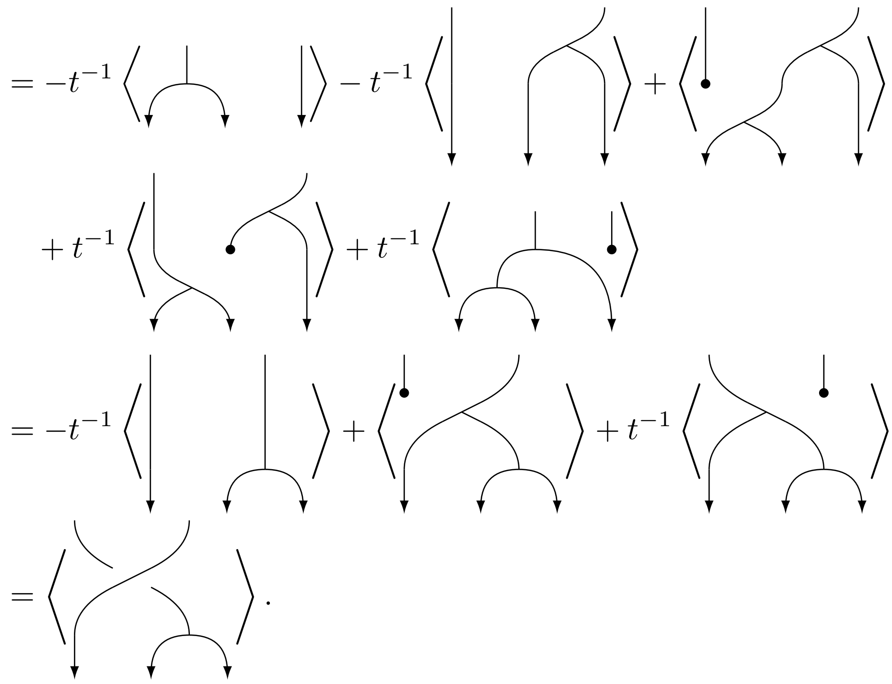
□

補題 1.5. 次の関係式が成り立つ。



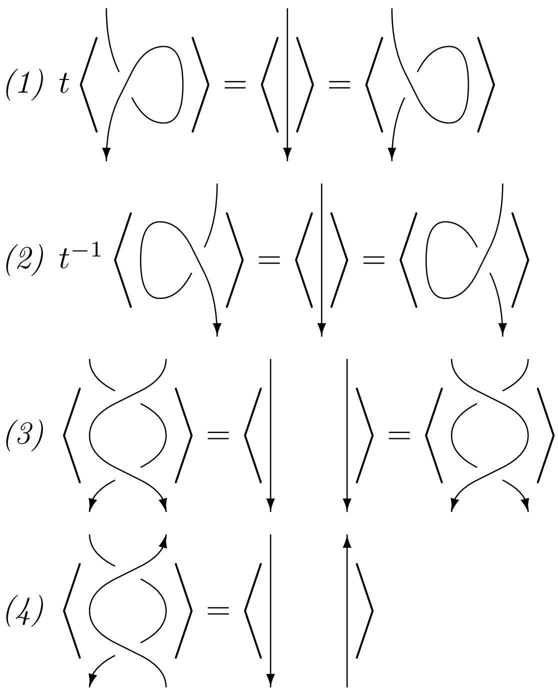
Proof. 補題 1.2 と補題 1.4 より次が成り立つ。

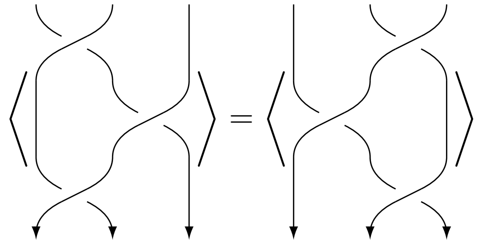




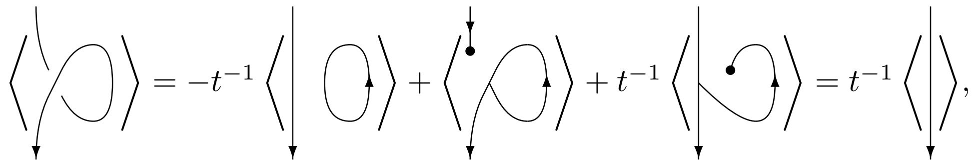
□

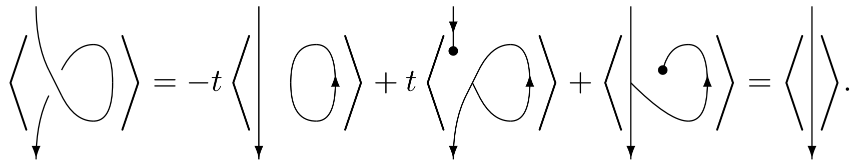
命題 1.6. 次の関係式が成り立つ。

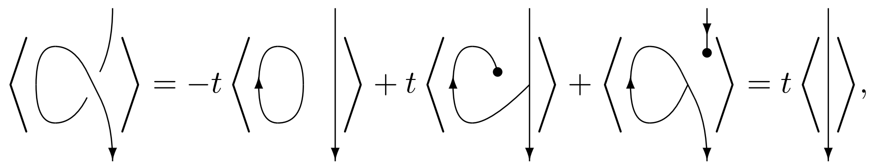


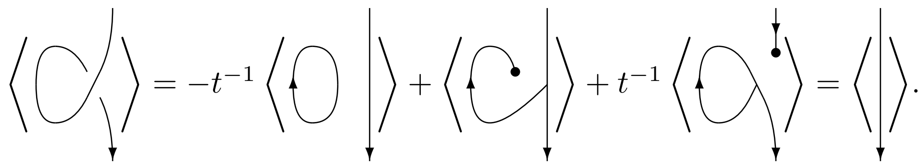
(5) 

Proof. 補題 1.2 より次が成り立つ。

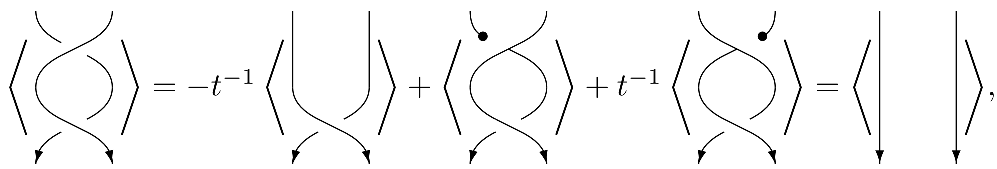
(1) 

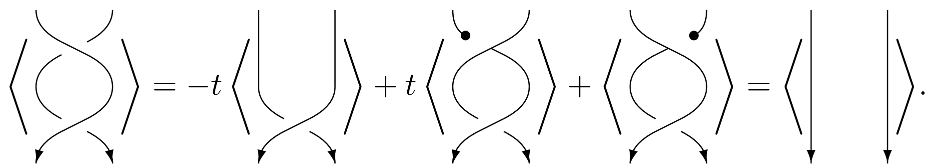


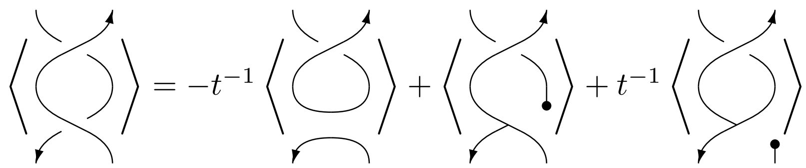
(2) 

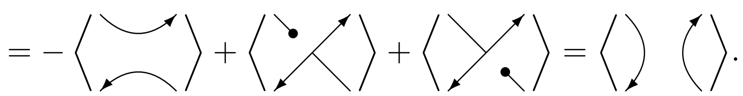


補題 1.2, 補題 1.3, 補題 1.4 より次が成り立つ。

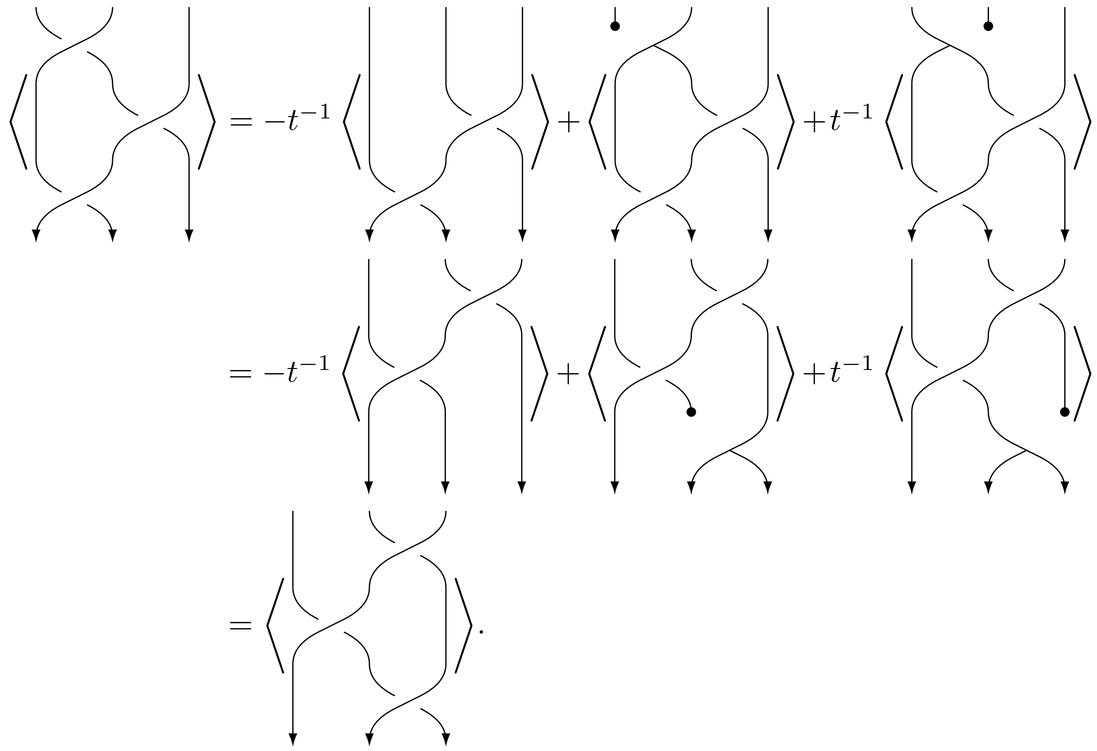
(3) 



(4) 



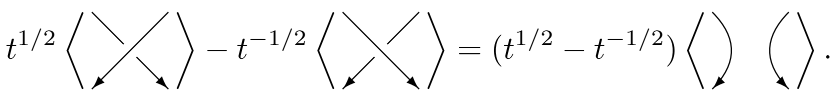
補題 1.3 と補題 1.5 より次が成り立つ。

(5) 

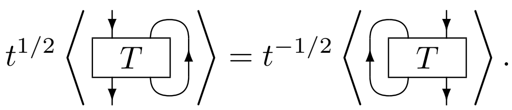
□

2　アレクサンダー・コンウェイ多項式

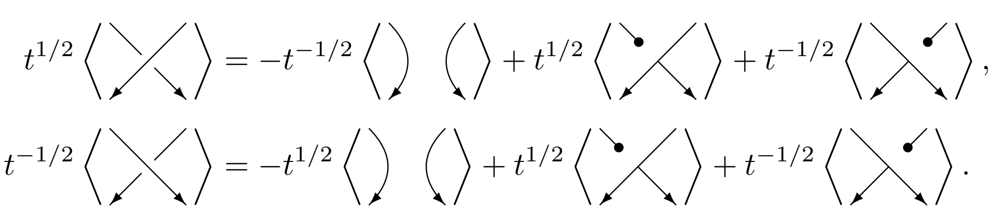
命題 2.1.　*(1)* 次の関係式が成り立つ。



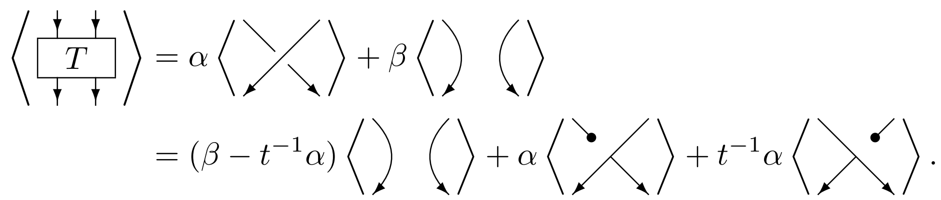
(2) 任意の向き付けられた古典的な $(2,2)$-タングル T に対して、次が成り立つ。



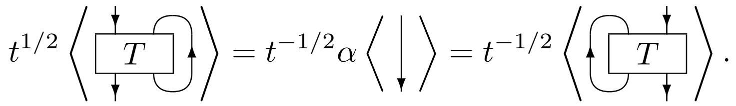
Proof.　(1) 次の等式の差を取ることで、等式が得られる。



(2) (1) の等式と命題 1.6 より、ある $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ が存在して、次が成り立つ。



この等式の左側と右側でタングルを閉じることで、次の等号を得る。



$\square$

D を向き付けられた古典的な (n,n)-タングルのダイアグラムとする。D の**回転数** $\mathrm{rot}(D)$ は、すべての成分で点を移動させたときの接ベクトルの角変化量の総和を 2π で割ったものとして定義する。このとき、$\mathrm{rot}(D) = \mathrm{rot}(\widehat{D}) - n$ が成り立つ。また、D の**ねじれ数** $\mathrm{wr}(D)$ を正交点の数から負交点の数を引いた数として定義する。このとき、$\mathrm{wr}(D) = \mathrm{wr}(\widehat{D})$ が成り立つ。

定理 2.2. D を向き付けられた古典的な (n,n)-タングル T のダイアグラムとする。このとき、

$$t^{\frac{\mathrm{rot}(D)+\mathrm{wr}(D)}{2}}\langle D\rangle$$

は T の不変量である。特に、T が $(1,1)$-タングルである場合、次が成り立つ。

$$\Delta_{\widehat{T}}(t) = t^{\frac{\mathrm{rot}(D)+\mathrm{wr}(D)}{2}}\langle D\rangle.$$

ここで、$\Delta_L(t)$ は向き付けられた絡み目 L のアレクサンダー・コンウェイ多項式である。

Proof. 命題 1.6 より

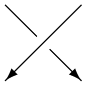
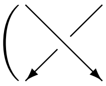
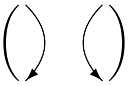
$$t^{\frac{\mathrm{rot}(D)+\mathrm{wr}(D)}{2}}\langle D\rangle$$

はダイアグラム D で表される向き付けられた古典的な (n,n)-タングル T の不変量である。

L を向き付けられた絡み目とし、T を向き付けられた古典的な $(1,1)$-タングルで L を閉包に持つものとする。D を T のダイアグラムとする。このとき、$X(L)$ を次で定義する。

$$X(L) := t^{\frac{\mathrm{rot}(D)+\mathrm{wr}(D)}{2}}\langle D\rangle.$$

命題 2.1 より、$X(L)$ が向き付けられた古典的な $(1,1)$-タングル T の選び方に依らないことが分かる。また、$X(L)$ は次のスケイン関係式をみたす。

$X\Bigg($  $\Bigg) - X\Bigg($  $\Bigg) = (t^{1/2} - t^{-1/2})X\Bigg($  $\Bigg).$

自明な結び目に対して

$$\Delta_{\bigcirc}(t) = 1 = X(\bigcirc)$$

が成り立つことと合わせると、次が得られる。

$$\Delta_L(t) = X(L).$$

したがって、

$$\Delta_{\widehat{T}}(t) = X(\widehat{T}) = t^{\frac{\mathrm{rot}(D)+\mathrm{wr}(D)}{2}}\langle D\rangle.$$

$\square$

3　終わりに

講演では、本稿で紹介したブラケット多項式のねじれ版も紹介しました。これについては参考文献 [1] を参照ください。

参考文献

[1] A. Ishii, *On bracket polynomials for Alexander type invariants*, preprint.

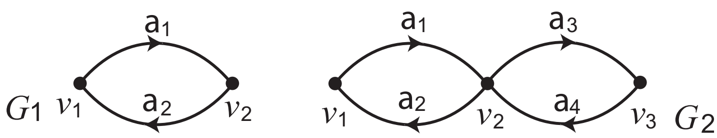
グラフゼータおよびねじれアレクサンダー多項式のいくつかの表示

HIROSHI GODA AND TAKAYUKI MORIFUJI

ABSTRACT. 本講演では行列重み付きグラフのゼータ関数に関する結果と，そこから得られる双曲結び目の体積公式について報告しました．

1. GRAPHS

A digraph $G = (V, A)$ is a pair of a set V and a multiset A, where A consists of ordered pairs $a = (u, v)$ of elements $u, v \in V$. An element of A is called a directed edge or an arc of G. If $a = (u, v)$ is an arc of G, then u is called the tail of a, and v the head of a, denoted



by $\mathfrak{t}(a)$ and $\mathfrak{h}(a)$ respectively. If a sequence $c = (a_1 a_2 \cdots a_\ell)$ satisfies $\mathfrak{h}(a_i) = \mathfrak{t}(a_{i+1})$ for all $i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$, then c is called a path of G, and ℓ is called the length of c, denoted by $|c|$. Further, if $\mathfrak{h}(a_\ell) = \mathfrak{t}(a_1)$, c is said to be closed. Let C be the set of closed paths of G, and C_ℓ the set of closed paths of length ℓ. A prime closed path is a closed path which cannot be written in the form d^k for a shorter $d \in C$. We denote by P the set of prime closed paths of G.

Let $c = (a_1 a_2 \cdots a_\ell) \in C$. The cyclic rearrangement $(a_2 a_3 \cdots a_\ell a_1), (a_3 a_4 \cdots a_1 a_2), \ldots,$ $(a_\ell a_1 \cdots a_{\ell-2} a_{\ell-1})$ of c is also a closed path of lenght ℓ. We write $c \sim d$ if d is a cyclic rearrangement of c. This binary relation $\sim$ is an equivalence relation on C. We call it the cyclic equivalence. Let $[C] = C/\sim$ and $[P] = P/\sim$. An element of $[C]$ ($[P]$ resp.) is called a cycle (prime cycle resp.).

2. IHARA ZETA FUNCTION AND ITS EXPRESSIONS

Definition. The following formal power series

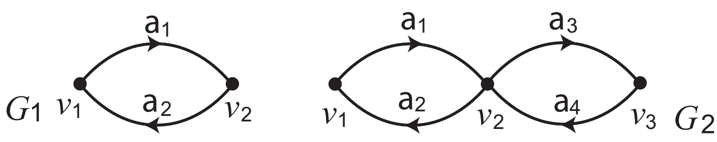
$$Z_G(s) = \prod_{\gamma \in [P_G]} \frac{1}{1 - s^{|\gamma|}}$$

is called the Ihara zeta function of G, denoted by $Z_G(s)$. It is called an Euler product expression.

Example. $Z_{G_1}(s) = \dfrac{1}{1 - s^2}$ $\quad (a_1 a_2) \sim (a_2 a_1)$, $(a_1 a_2 a_1 a_2) = (a_1 a_2)^2$

For G_2, $(a_2 a_1), (a_2 a_1 a_3 a_4), (a_2 a_1 a_3 a_4 a_3 a_4), (a_2 a_1 (a_3 a_4)^3), \ldots, (a_2 a_1 a_3 a_4 a_3 a_4 \cdots a_3 a_4), \ldots\ldots, \infty$.
Thus it might be difficult to calculate $Z_{G_2}(s)$. However we can calculate the zeta function using a matrix as follows.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57K14; Secondary 05C50, 57K10, 57K32.



Definition. Let us consider the map

$$\theta : A \times A \longrightarrow \{0,1\} : (a,a') \mapsto \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}.$$

Then we have the edge matrix of G $M_G(\theta) = (\theta(a,a'))_{a,a' \in A}$.

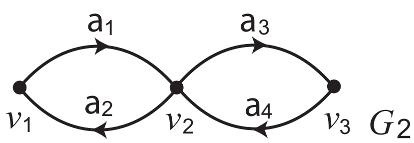
Theorem [Hashimoto].

$$Z_G(s) = \frac{1}{\det(I - sM_G(\theta))}.$$

This expression is called Hashimoto expression.

Example.

$$M_{G_2} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$



$$Z_{G_2}(s) = \frac{1}{1-2s^2}.$$

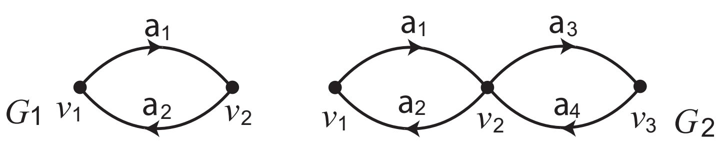
Definition. N_ℓ: the number of closed paths (not necessaily cycles, not necessarily prime) of length ℓ in G.

Theorem.

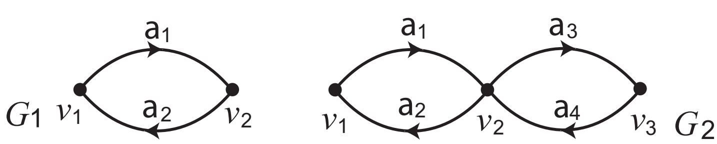
$$Z_G(s) = \exp\left(\sum_{\ell \geq 1} \frac{N_\ell}{\ell} s^\ell\right).$$

This expression is called the exponential expression.

Example.



$$\log Z_{G_1}(s) = \log \frac{1}{1-s^2} = s^2 + \frac{s^4}{2} + \frac{s^6}{3} + \frac{s^8}{4} + \frac{s^{10}}{5} + \cdots$$
$$N_1 = 0,\ N_2 = 2,\ N_3 = 0,\ N_4 = 2,\ N_6 = 2,\ N_8 = 2,\ N_{10} = 2, \cdots$$
$$N_2 : (a_1a_2), (a_2a_1),\ N_4 : (a_1a_2)^2, (a_2a_1)^2,\ N_4 : (a_1a_2)^3, (a_2a_1)^3.$$

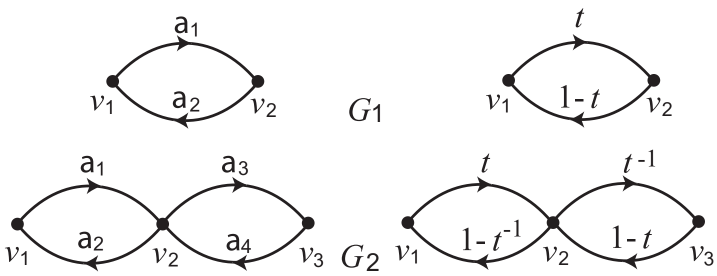


$$\log Z_{G_2}(s) = \log \frac{1}{1-2s^2} = 2s^2 + 2s^4 + \frac{8s^6}{3} + 4s^8 + \frac{32s^{10}}{5} + \cdots$$
$$N_1 = 0,\ N_2 = 4,\ N_3 = 0,\ N_4 = 8,\ N_6 = 16,\ N_8 = 32, \cdots$$
$$N_2 : (a_1a_2), (a_2a_1), (a_3a_4), (a_4a_3),$$
$$N_4 : (a_1a_2)^2, (a_2a_1)^2, (a_3a_4)^2, (a_4a_3)^2, (a_1a_3a_4a_2), (a_3a_4a_2a_1), (a_4a_2a_1a_3), (a_2a_1a_3a_4)$$

3. Weighted zeta functions

Let $G = (V, A)$ be a digraph, and R a commutative $\mathbb{Q}$-algebra. The map $\omega : A \to R$ is called a weight, and (G, ω) is called a weighted digraph.

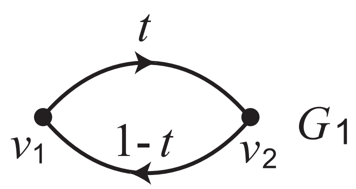
Example. $(G_1, \omega_1) : \omega_1(a_1) = t,\ \omega_1(a_2) = 1 - t.$
$(G_2, \omega_2) : \omega_2(a_1) = t,\ \omega_2(a_2) = 1 - t^{-1},\ \omega_2(a_3) = t^{-1},\ \omega_2(a_4) = 1 - t.$



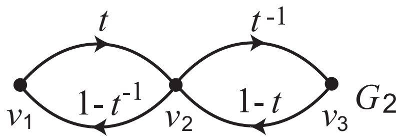
Definition. The matrix A_G is called a weighted adjacency matrix of (G, ω) if $A_G = (a_{uv})_{u,v\in V}$, ($A_{uv}$ is the set of arcs from u to v) , where $a_{uv} = \begin{cases} \sum_{a\in A_{uv}} \omega(a) & \text{if } a = (u,v) \in A_{uv} \\ 0 & \text{if } a = (u,v) \notin A_{uv} \end{cases}$

Example.

$$A_{G_1} \begin{matrix} 0 & t \\ 1\text{-}t & 0 \end{matrix}$$



$$A_{G_2} \begin{matrix} 0 & t & 0 \\ 1\text{-}t^{-1} & 0 & t^{-1} \\ 0 & 1\text{-}t & 0 \end{matrix}$$

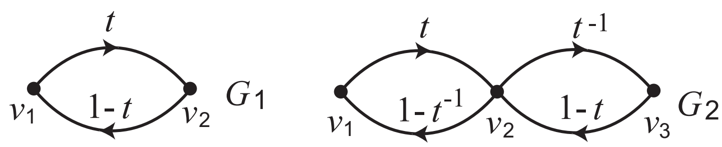


The same thing as in §2 applies to weighted case ! i.e., We may consider the weighted zeta function $Z_G(s; \omega)$.

$$Z_G(s;\omega) = \frac{1}{\det(I - sA_G(\omega))} = \frac{1}{\det(I - sM_G(\omega))}$$

$$= \exp\left(\sum_{\ell\geq 1}\frac{N_\ell(\omega)}{\ell}s^\ell\right).$$

Example. $Z_{G_1}(s;\omega_1) = \dfrac{1}{\det(I - sA_{G_1}(\omega_1))} = \dfrac{1}{1+(-t+t^2)\,s^2},$



$$Z_{G_2}(s;\omega_2) = \frac{1}{\det(I - sA_{G_2}(\omega_2))} = \frac{1}{1+\left(2-t-\frac{1}{t}\right)s^2}$$

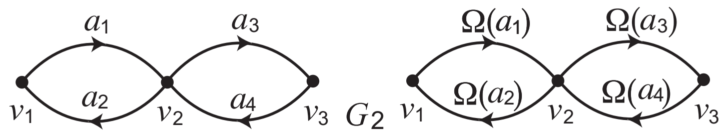
Moreover, we can have the same result as in the 'matrix weight' case. Let :

$$\Theta : A\times A \to \mathrm{Mat}(R) : (a,a') \mapsto \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}\Omega(a').$$

The edge matrix $M_G(\Omega)$ whose (a,a')-entry is the block matrix $\Omega(a')$ for $a' = (v_i', v_j')$, and the adjacency matrix is :

$$A_G(\Omega) = \left(\sum_{a\in A_{uv}}\Omega(a)\right)_{u,v\in V}$$

Example.



$$M_{G_2}(\Omega) = \begin{pmatrix} O & \Omega(a_2) & \Omega(a_3) & O\\ \Omega(a_1) & O & O & O\\ O & O & O & \Omega(a_4)\\ O & \Omega(a_2) & \Omega(a_3) & O\end{pmatrix},\quad A_{G_2}(\Omega) = \begin{pmatrix} O & \Omega(a_1) & O\\ \Omega(a_2) & O & \Omega(a_3)\\ O & \Omega(a_4) & O\end{pmatrix}.$$

Definition. Set :

$$N_\ell(\Omega) = \sum_{c\in C_\ell}\operatorname{tr}\Omega(c).$$

Theorem ([1], [4]).

$$Z_G(s;\Omega) = \prod_{\gamma\in[P_G]}\frac{1}{\det(I - s^{|\gamma|}\Omega(\gamma))} = \frac{1}{\det(I - sM_G(\Omega))}$$
$$= \frac{1}{\det(I - sA_G(\Omega))} = \exp\left(\sum_{\ell\geq 1}\frac{N_\ell(\Omega)}{\ell}s^\ell\right)$$

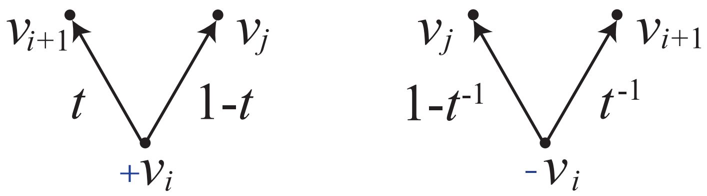
4. The knot graph and the volume of a hyperbolic knot

Let $G_K = (V, A)$ be a knot graph of a knot K. For the detail of the knot graph, see [2]. We define the Alexander weight as follows:

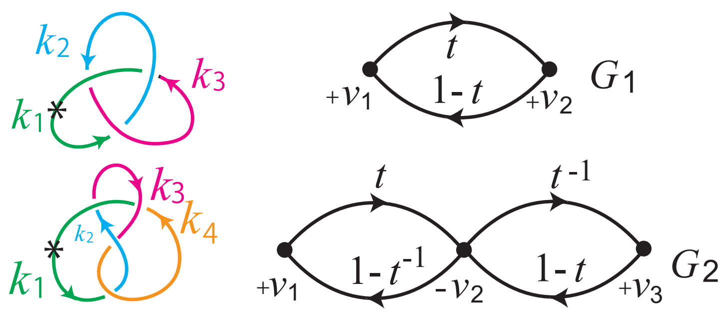
Definition. Let $\omega : A \to R = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ be

$$\omega(a) = \omega(v_i, v_j) = \begin{cases} t^{\mathrm{sign}(v_i)} & \text{if } a = (v_i, v_{i+1}) \\ 1 - t^{\mathrm{sign}(v_i)} & \text{if } a = (v_i, v_j). \end{cases}$$

Then we call the map ω the Alexander weight. See the next figure.



Example. The knot graph for the trefoil is G_1 and it for the figure eight knot is G_2. Suppose ω is the Alexander weight.



Then we have :

$$Z_{G_1}(s;\omega) = \frac{1}{\det(I - sA_{G_1}(\omega_1))} = \frac{1}{1 + (-t + t^2)\, s^2}, \quad Z_{G_1}(1;\omega) = \frac{1}{1 - t + t^2}.$$

$$Z_{G_2}(s;\omega) = \frac{1}{\det(I - sA_{G_2}(\omega_2))} = \frac{1}{1 + \left(2 - t - \frac{1}{t}\right) s^2}, \quad Z_{G_2}(1;\omega) = \frac{1}{-t + 3 - \frac{1}{t}}.$$

Similarly, we have the twisted Alexander polynomial using the matrix weighted zeta function !.

Definition.

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det\left(\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le m-1}}{\det \Phi(x_m - 1)} \left(=: \frac{\Delta^1_{K,\rho}(t)}{\det \Phi(x_m - 1)} \right).$$

Theorem ([4]). Let G_K be the knot graph for a knot K, and suppose that Ω is the twisted Alexander weight for G_K. Then

$$\frac{1}{\Delta^1_{K,\rho}(t)} = Z_{G_K}(1;\Omega) = \prod_{\gamma \in [P_{G_K}]} \frac{1}{\det(I - \Omega(\gamma))} = \frac{1}{\det(I - M_{G_K}(\Omega))}$$

$$= \frac{1}{\det(I - A_{G_K}(\Omega))} = \exp\left(\sum_{\ell \geq 1} \frac{N_\ell(\Omega)}{\ell}\right)$$

Let Ω_n be the twisted Alexander weight for the knot graph G_K of a hyperbolic knot K, which corresponds to the lift of the holonomy representation $\rho_n : \pi_1(E_K) \to \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$. Further, we set $q_k(t) = \mathrm{tr}\,(A_{G_K}(\Omega_n))^k \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$ and

$$\vec{q}(t) = \big(- q_1(t), -1!q_2(t), -2!q_3(t), \ldots, -(d-1)!q_d(t)\big).$$

By using above expressions, we have:

Theorem ([4]). Let K be a hyperbolic knot, and let $\zeta(\neq 1) \in S^1$.

$$\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = 4\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left|\sum_{k=0}^{mn} \frac{B_k(\vec{q}(\zeta))}{k!}\right|,$$

where B_k is the Bell polynomial and m is the number of vertices in the knot graph G_K.

Remark. In the previous work [3], we have obtained a similar formula for a fibered hyperbolic knot.

References

[1] T. Endo, T. Komatsu, N. Konno, H. Mitsuhashi and I. Sato, *The second matrix-weighted zeta function of a graph (in Japanese)*, MSJ Autumn Meeting 2024, Division of Applied Mathematics, Abstract 71–74.

[2] H. Goda, *Twisted Alexander polynomial and Matrix-weighted zeta function*, Kyushu J. Math. 74 (2020), 211–221.

[3] H. Goda and T. Morifuji, *A volume presentation of a fibered knot*, Tohoku Math. J. **76** (2024), 423–443.

[4] H. Goda and T. Morifuji, *Some expressions of graph zetas and the twisted Alexander polynomials, and the knot volume*, preprint.

Department of Mathematics, Tokyo University of Agriculture and Technology, 2-24-16 Naka-cho, Koganei, Tokyo 184-8588, Japan
Email address: goda@cc.tuat.ac.jp

Department of Mathematics, Hiyoshi Campus, Keio University, Yokohama, 223-8521, Japan
Email address: morifuji@keio.jp

バンド手術による絡み目解消経路の特徴付け

お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科　清水 日菜乃

1　アブストラクト

今回は、平行に向き付けられたトーラス絡み目 $T(2,6)$ がバンド手術によって解かれる経路を特徴付ける。この研究は [10, 11] で行われた研究を拡張するものである。

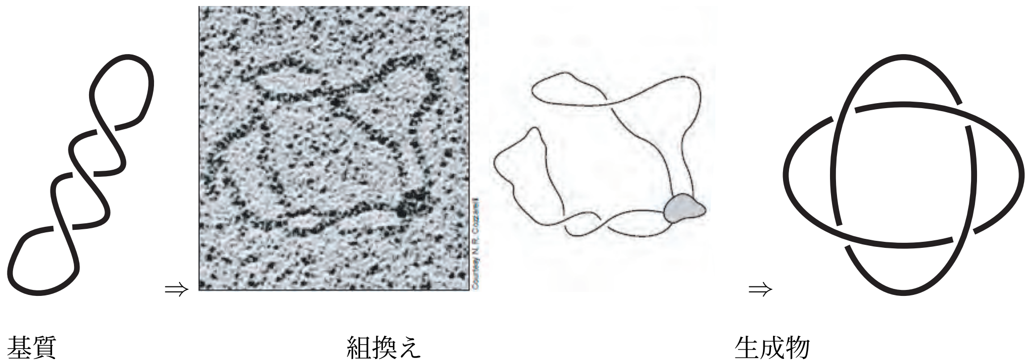
DNA の部位特異的組換え (site-specific recombination) は、向き付けられた結び目・絡み目の向きを保つバンド手術を用いてモデル化される。[1] において、平行に向き付けられたトーラス絡み目 $T(2,2n)$ が部位特異的組換えにより段階的に解かれる様子が観察されている。[10, 11] において、その様子が結び目理論を用いて解明されている。[10, 11] では、DNA の組換えを扱う観点から途中に現れるものは結び目または 2 成分絡み目に限るという制約のもとその特徴付けが行われてきた。DNA 組換えとバンド手術に関する論文は、[2] などがある。

一方、[5] において、渦で作られた 3_1 結び目が繋ぎ換え (reconnection) により解かれる様子が観察されている。繋ぎ換えも組換えと同様に、向きを保つバンド手術を用いてモデル化されるため、[10, 11] の結果が渦結び目・絡み目の研究 [6, 12, 13] に応用されている。渦の繋ぎ換えでは成分数に関する制約を外すことが自然となったため、成分に関する制約を外した上で絡み目が解かれる様子の特徴付けを行うのが今回の研究である。

2　研究の背景

2.1　DNA の組換えによる絡み目解消

DNA の部位特異的組換えは、バンド手術でモデル化されることが知られている。



D.W.Sumners, *Notices of AMS, 42 (1995)*

部位特異的組換えは、特定の部位 (塩基配列) の箇所のみ起こる組換えである。
Grainge et al. (EMBO J. 2007) は XerCD-dif-FtsK は細胞内で得られた DNA 絡み目 (RH 2m-cat (torus link T (2, 2m))) で平行な部位を持つものを、何回かの組換えで解くことを示した。部位の塩基配列を用いて、DNA 絡み目には自然に向きを入れることが出来るため、向きのついた絡み目に対するバンド手術で部位特異的組み換えをモデル化することができる。この実験では組換えが起こる部位 (dif) が 2 つしかないため、絡み目が解かれる過程で現れる成分数は 1 か 2 である。

定義 2.1 (向きを保つバンド手術). L を S^3 の絡み目とする。$b:[0,1]\times[0,1]\to S^3$ を埋め込みで、$b^{-1}(L)=[0,1]\times\{0,1\}$ を満たすものとする。このとき、L_b を L から $b([0,1]\times\{0,1\})$ を取り除き $b(\{0,1\}\times[0,1])$ に変えて得られる絡み目とする。この操作を**バンド手術**という。バンド $b([0,1]\times[0,1])$ 以外の部分の向きが一致するとき、**向きを保つバンド手術**という。

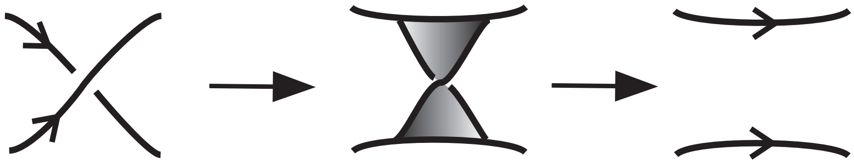


図 1: バンド手術

[10, 11] では、平行な向きを持つ 6_1^2 が最短経路で自明な結び目に解かれる様子の特徴付けが行われている。[10] では、絡み目の交点数が各ステップで下がる場合はただ一つの経路であることが証明されている。[11] では、絡み目の交点数が各ステップで絡み目の交点数が上がらない場合は 9 通りの経路があることが証明されている。この論文では、DNA の組み換えの様子をモデル化しているため、経路に現れるものは結び目または成分数が 2 の絡み目となることが仮定されている。

定理 2.2. *[10] 経路に現れる絡み目の成分数が 2 以下であり、各ステップで絡み目の交点数が下がると仮定したとき、平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる最短経路は図 2 にある唯一つである。*

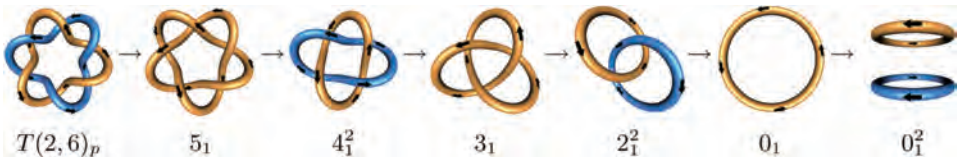


図 2: 定理 2.2 の結果

Shimokawa,K., Ishihara, K., Grainge, I., Sherratt, DJ., *Proc Natl Acad Sci U S A. (2013) Dec 24;110(52):20906-11*

定理 2.3. *[11] 経路に現れる絡み目の成分数が 2 以下であり、各ステップで絡み目の交点数が上がらないと仮定したとき、平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる最短経路は図 3 にある 9 通りである。*

3 渦結び目・絡み目

渦の 3_1 が時間経過で 0_1^2 に解ける様子を観察する実験が行われている。

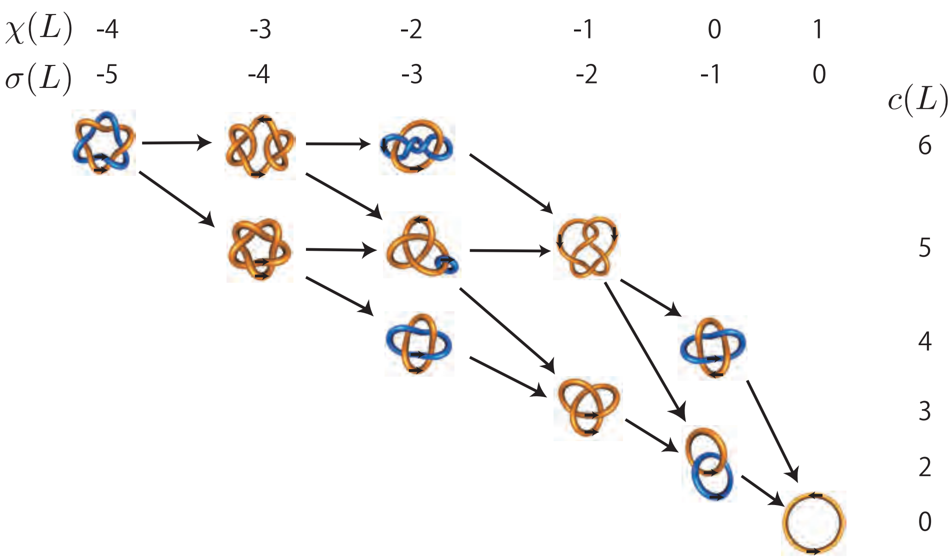
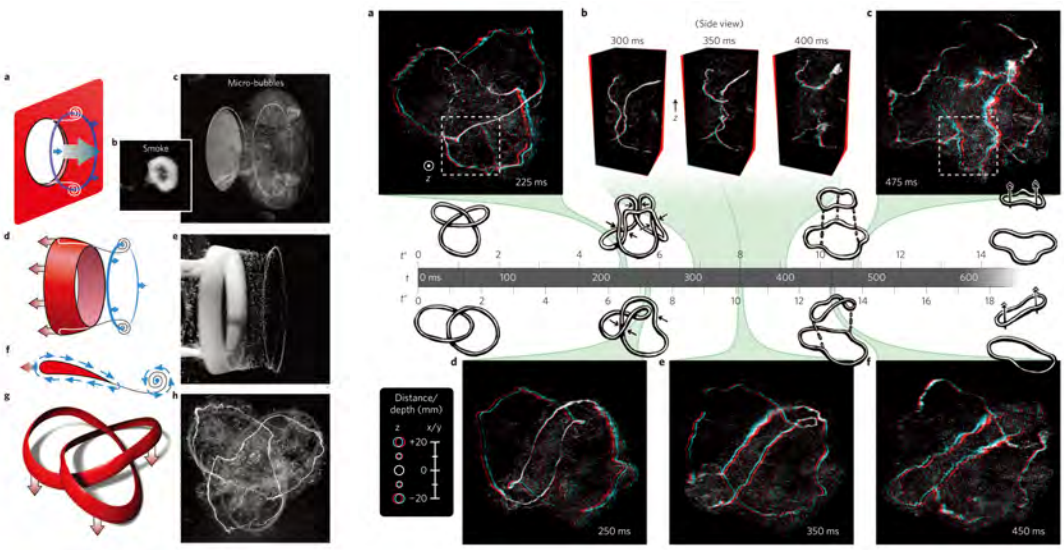


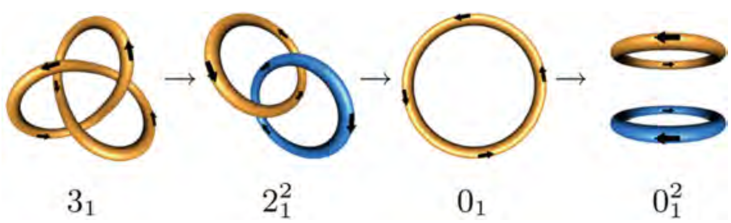
図 3: 定理 2.3 の結果
Stolz, R., Yoshida, M., Brasher, R. et al., *Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification. Sci Rep 7, 12420 (2017)*



“Creation and dynamics of knotted vortices”,

D. Kleckner and W.T.M. Irvine, *Nature Physics* **9**, 253-258 (2013)

渦結び目は繋ぎ換えによって自明な絡み目に解かれる。



渦にも自然に向きが入り、渦の繋ぎ換えも**向きを保つバンド手術**によってモデル化される。

渦絡み目についても、平行な向きを持つ $T(2,6)$ から繋ぎ換えにより自明な結び目が得られる様子のシミュレーション等を用いた研究が [7] などで行われている。渦の絡み目の場合には、成分数に関する制限が無くなる。

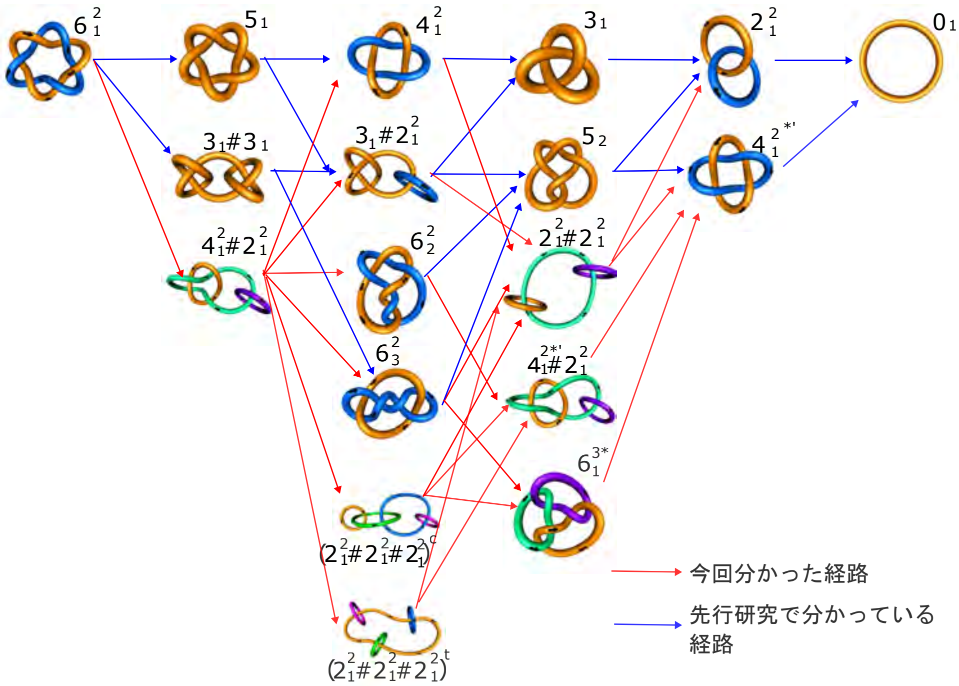


図 4: 主定理の図。左から符号数が $-5,-4,-3,-2,-1,0$ である。

今回は、成分数に関する仮定をなくした上で、平行な向きを持つ 6_1^2 が最短経路で自明な結び目に解かれる様子を特徴付ける。ここでは、各ステップで交点数は増加しないと仮定する。定理 3.1 がこの論文の主定理である。

定理 3.1. 平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる、仮定を満たす最短経路は図 *4* にある 41 通りである。

4 主定理の証明の準備

この章では主定理の証明に用いる補題を準備する。なお、講演では経路に非分離絡み目は現れないと仮定していたが、補題 4.1 によって経路に非分離絡み目は現れないことがわかった。これによって、さらに明確に経路を特徴付けることができた。

補題 4.1. *[8]* L と L_b を向き付けられた絡み目とする。L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとき、次が成り立つ：

$$|\sigma(L)-\sigma(L_b)|+|n(L)-n(L_b)|=1$$

ただし $\sigma(L)$ は L の符号数、$n(L)$ は L の退化次数である。

命題 4.2. 6_1^2 が 0_1 に解かれる最短経路において、現れる絡み目の符号数は $-5,-4,-3,-2,-1,0$ である。

補題 4.3. 向きを保つバンド手術は絡み目の成分数を 1 変化させる。

補題 4.4. 経路に現れる絡み目の成分数は 4 以下である。

証明. $\sigma(6_1^2)=-5, \sigma(0_1)=0$ だから、命題 4.1 より、6_1^2 の絡み目解消の最短経路で現れる絡み目の符号数はそれぞれ $-5,-4,-3,-2,-1,0$ である。また、命題 4.3 より、6_1^2 の絡み目解消の最短経路で現れる絡み目の成分数は $2,1,2,1,2,1$ か $2,1,2,3,2,1$ か $2,3,2,1,2,1$ か $2,3,4,3,2,1$ のいずれかである。 □

補題 4.5. L が分離絡み目のとき、$n(L) \neq 0$ である。

証明. L の分離した成分にそれぞれ連結なザイフェルト曲面を張り、それらをチューブで繋ぎ合わせる。その時、チューブの中心線に対応する S の 1 次元 ホモロジー $H_1(S)$ の生成元 a で、絡み数 $lk(a, a^+)$ が 0 のものが 1 つ増え、A の対角成分に 0 が現れる。これは、A の固有値 0 に対応し、 $n(L) \neq 0$ となる。 □

補題 4.6. 経路に分離絡み目は現れない。

証明. 定理より $|\sigma(L) - \sigma(L_b)| + |n(L) - n(L_b)| = 1$ であり、最短経路だと $|n(L) - n(L_b)| = 0$ となる。$n(6_1^2) = 0$ だから、経路に現れる絡み目はすべて退化次数が 0 である。よって経路に分離絡み目は現れない。 □

補題 4.7. L を成分数が 4 以下で、交点数が 6 以下の非分離絡み目とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $\sigma(L) = -5$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、$L = 6_1^2$ である。
2. $\sigma(L) = -4$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、$L = 5_1, 3_1\#3_1, 2_1^2\#4_1^2$ または 6_3^3 である。
3. $\sigma(L) = -3$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、$L = 4_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 3_1\#2_1^2, (2_1^2\#2_1^2\#2_1^2)^c$ または $(2_1^2\#2_1^2\#2_1^2)^t$ である。
4. $\sigma(L) = -2$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、$L = 3_1, 5_2, 6_2, 6_1^{3'}, 6_1^{3*}, 4_1^2\#2_1^{2'}, 4_1^{2*'}\#2_1^2$ または $2_1^2\#2_1^2$ である。
5. $\sigma(L) = -1$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、$L = 6_1^{2*'}, 6_3^{2*'}, 5_1^2, 4_1^{2*'}, 2_1^2$ または $3_1\#2_1^{2'}$ である。
6. $\sigma(L) = 0$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、$L = 0_1, 4_1, 6_1, 6_1^*, 6_3, 2_1^2\#2_1^{2'}$ または $3_1\#3_1^*$ である。

補題 4.8. *[4]* L を $(c+1)$ 成分の絡み目とする。L_b が L から向きを保つバンド手術で得られる c 成分の絡み目とする。このとき、以下が成り立つ：

$$V(L;\omega) = \eta i V(L_b;\omega) = \pm i^c (i\sqrt{3})^\delta, \quad \eta = \pm 1$$

ならば、

$$i^c V(L;-1) \equiv \eta i^{c-1} V(L_b;-1) \pmod{3^{\delta+1}}$$

が成り立つ。特に、

$$\frac{V(L;\omega)}{V(L_b;\omega)} \in \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

が成り立つ。

補題 4.9. *[3]* $Q(L;x)$ を L の Q 多項式とする。また、$\rho(L) = Q(L;(\sqrt{5}-1)/2)$ とする。L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとき、次が成り立つ：

$$\frac{\rho(L)}{\rho(L_b)} \in \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}.$$

補題 4.10. *[3]* $L = K_1 \cup K_2$ とする。もし $lk(K_1, K_2)$ が偶数のとき、L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとすると、

$$\mathrm{Arf}(L) = \mathrm{Arf}(L_b)$$

が成り立つ。

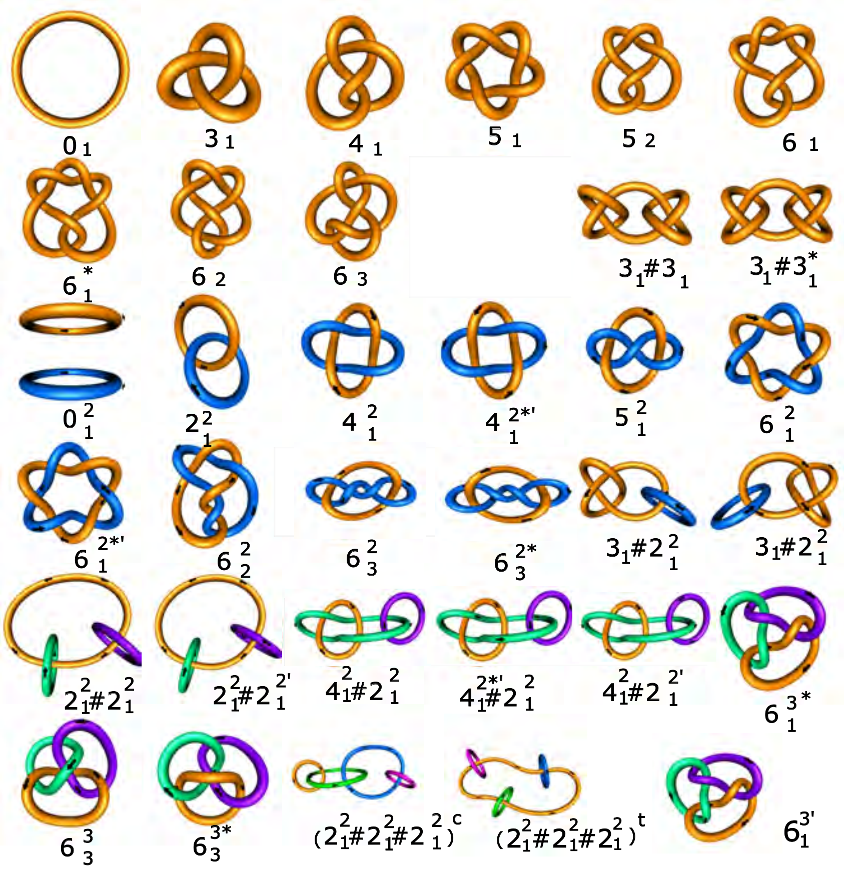


図 5: 今回は、図のような向き付けられた結び目・絡み目の表記を用いる。表記は、[10, 11] に合わせているため、[9] とは異なるものがある。

補題 4.11. *[K.Ishihara (private communication)]* $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \quad L' = K_1 \cup K_2'$ とする。ただし K_i は結び目とする。このとき、K_2 と K_3 に向きを保つバンド手術を行って K_2' ができたとすると、

$$lk(K_1, K_2') = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

が成り立つ。

証明. K_2, K_3 の間に向きを保つバンド手術が存在し、K_2' を得るとき、ライデマイスター変形によってバンドを L の正則図形の領域の内側に取ることができる。このとき L の他の絡み数は変わらないから、

$$lk(K_1, K_2') = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

が成り立つ。 □

5 主定理の証明

5.1 Step 1

この章では、符号数が -5 の絡み目から符号数が -4 の絡み目へのバンド手術を考察する。

命題 5.1. 6_1^2 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -4 の絡み目は、$5_1, 3_1\#3_1, 2_1^2\#4_1^2$ である。

証明. 図 8 のようにバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。 □

命題 5.1 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.2. 6^2_1 と 6^3_3 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. それぞれの各成分を図 6 のようにおく。
このとき $lk(K_1, K_2) = -3, lk(K_1', K_2') = -1, lk(K_2', K_3') = 1, lk(K_3', K_1') = -1$ である。補題 4.11 より、どの 2 成分の間にも向きを保つバンド手術は存在しない。よって、6^2_1 と 6^3_3 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

□

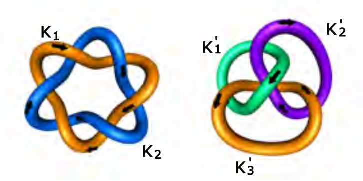


図 6: 6^2_1 と 6^3_3 の成分の名前

5.2 Step 2

ここでは、$4^2_1\#2^2_1$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -3 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.3. $4^2_1\#2^2_1$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -3 の絡み目は、$4^2_1, 6^2_2, 6^2_3, 3_1\#2^2_1$ *or* $2^2_1\#2^2_1\#2^2_1$ である。

証明. 図 8 のようにバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。 □

5.3 Step 3

ここでは、6^2_3 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -2 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.4. 6^2_3 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -2 の絡み目は、$5_2, 2^2_1\#2^2_1, 6^{3*}_1$ である。

証明. それぞれ図 8 のようにバンド手術が存在する。 □

命題 5.4 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.5. 6^2_3 と $3_1, 6_2, 4^2_1\#2^{2'}_1, 4^{2*'}_1\#2^2_1$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. $6_2, 4^2_1\#2^{2'}_1, 4^{2*'}_1\#2^2_1$ について、

$$\frac{V(6^2_3;\omega)}{V(4^2_1\#2^{2'}_1;\omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\},$$

$$\frac{V(6^2_3;\omega)}{V(4^{2*'}_1\#2^2_1;\omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\},$$

$$\frac{\rho(6^2_3)}{\rho(6_2)} = -\sqrt{5} \notin \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}.$$

補題 4.8 と補題 4.9 よりこれらの間に向きを保つバンド手術は存在しない。
3_1 について、$lk(6^2_3) = -2$ だから補題 4.10 が使える。$\mathrm{Arf}(6^2_3) = 0, \mathrm{Arf}(3_1) = 1$ だから、6^2_3 から 3_1 への向きを保つバンド手術は存在しない。 □

5.4 Step 4

ここでは、6_1^{3*} から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -1 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.6. 6_1^{3*} から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -1 の絡み目は $4_1^{2*'}$ である。

証明. 図 8 のように向きを保つバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。 □

命題 5.6 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.7. 6_1^{3*} と $6_1^{2*}, 2_1^2$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. $6_1^{2*}, 2_1^2$ について、

$$\frac{V(6_1^{2*};\omega)}{V(6_1^{3*};\omega)} = i\sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

$$\frac{V(2_1^{2};\omega)}{V(6_1^{3*};\omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

となる。よって、補題 4.8 より 6_1^{3*} と $6_1^{2*}, 2_1^2$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。 □

5.5 Step 5

ここでは、4_1^{2*} から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が 0 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.8. $4_1^{2*'}$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 4 以下で符号数が 0 の絡み目は、0_1 である。

証明. 図 8 のように向きを保つバンド手術が存在する。 □

命題 5.8 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.9. $4_1^{2*'}$ と $4_1, 2_1^2\#2_1^{2'}$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明.

$$\frac{\rho(4_1^{2*'})}{\rho(4_1)} = -\sqrt{5}^{-1} \notin \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}$$

となる。補題 4.9 より $4_1^{2*'}$ と 4_1 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。$2_1^2\#2_1^{2'}$ について、それぞれ各成分を図 7 のようにおく。
このとき $lk(K_1, K_2) = 2, lk(K_1', K_2') = -1,, lk(K_2', K_3') = 1,, lk(K_1', K_2') = 0$ となり、補題 4.11 より、$2_1^2\#2_1^{2'}$ のどの 2 つの成分の間にも $4^{2*'}$ への向きを保つバンド手術は存在しない。
よって、$4_1^{2*'}$ と $2_1^2\#2_1^{2'}$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。 □

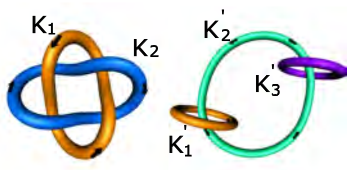
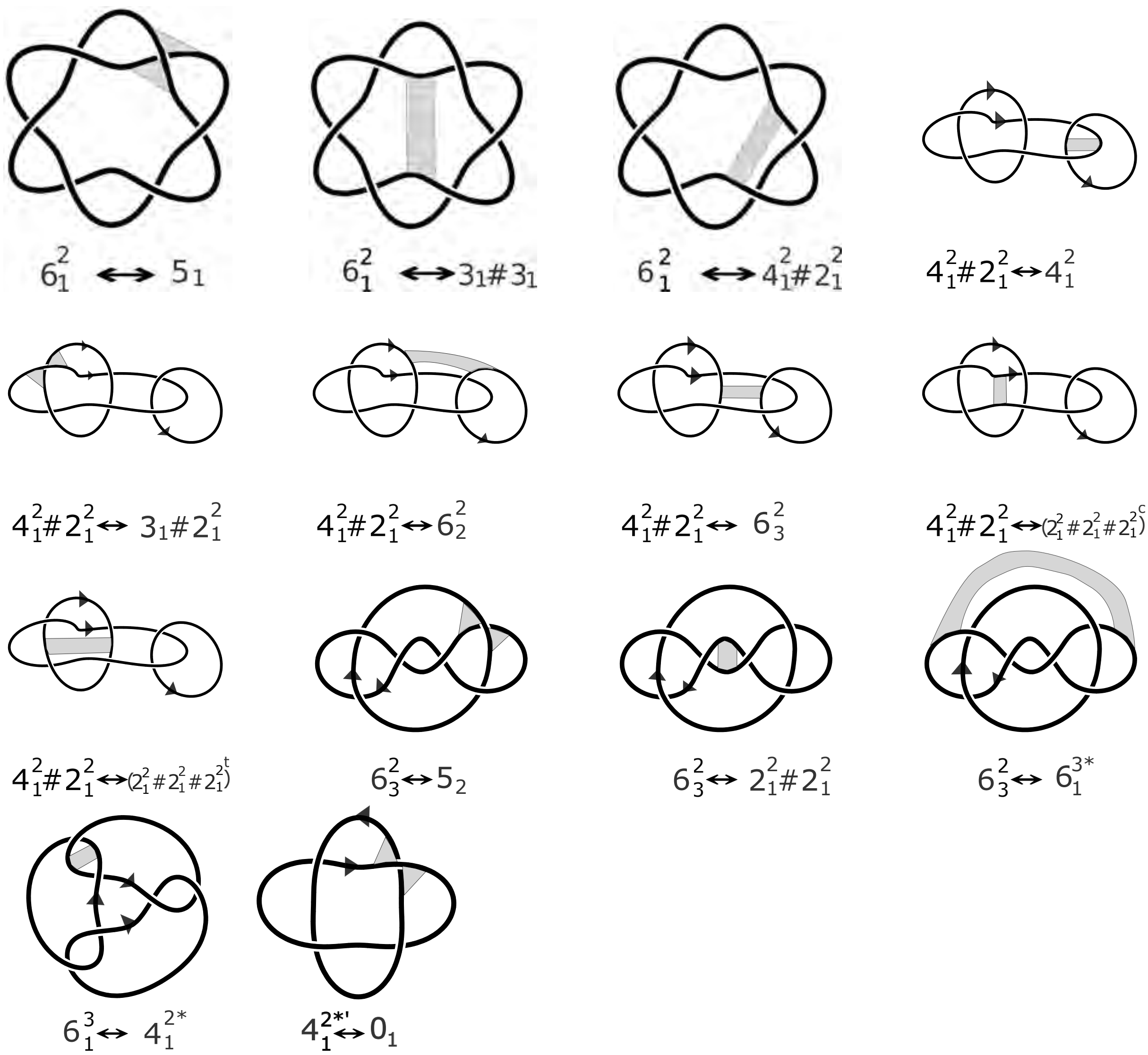


図 7: $4_1^{2*'}$ と $2_1^2\#2_1^2\#2_1^2$ の成分の名前



$6^2_1 \leftrightarrow 5_1$
$6^2_1 \leftrightarrow 3_1\#3_1$
$6^2_1 \leftrightarrow 4^2_1\#2^2_1$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow 4^2_1$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow 3_1\#2^2_1$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow 6^2_2$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow 6^2_3$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow (2^2_1\#2^2_1\#2^2_1)^c$
$4^2_1\#2^2_1 \leftrightarrow (2^2_1\#2^2_1\#2^2_1)^t$
$6^2_3 \leftrightarrow 5_2$
$6^2_3 \leftrightarrow 2^2_1\#2^2_1$
$6^2_3 \leftrightarrow 6^{3*}_1$
$6^3_1 \leftrightarrow 4^{2*}_1$
$4^{2*'}_1 \leftrightarrow 0_1$

図 8: バンドの図

参考文献

[1] I. Grainge, M. Bregu, M. Vazquez, V. Sivanathan, S.C.Ip, and D.J. Sherratt. Unlinking chromosomes catenated *in vivo* by site-specific recombination. *EMBO J*, 26(19):4228–4238, 2007.

[2] Kai Ishihara, Koya Shimokawa, and Mariel Vazquez. *Site-specific recombination modeled as a band surgery: Applications to Xer recombination*, pages 387–401. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.

[3] Taizo Kanenobu. Band surgery on knots and links. *J. Knot Theory Ramifications*, 19(12):1535–1547, 2010.

[4] Taizo Kanenobu. Band surgery on knots and links, II. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21(09):1250086, 2012.

[5] Dustin Kleckner and William T. M. Irvine. Creation and dynamics of knotted vortices. *Nature Physics*, 9(4):253–258, 2013.

[6] Christian E. Laing, Renzo L. Ricca, and De Witt L. Sumners. Conservation of writhe helicity under anti-parallel reconnection. *Scientific Reports*, 5(1):9224, 2015.

[7] Xin Liu, Renzo L. Ricca, and Xin-Fei Li. Minimal unlinking pathways as geodesics in knot polynomial space. *Communications Physics*, 3(1):136, 2020.

[8] Kunio Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117:387–422, 1965.

[9] D. Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2003.

[10] Koya Shimokawa, Kai Ishihara, Ian Grainge, David J. Sherratt, and Mariel Vazquez. FtsK-dependent XerCD-*dif* recombination unlinks replication catenanes in a stepwise manner. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(52):20906–20911, 2013.

[11] Robert Stolz, Masaaki Yoshida, Reuben Brasher, Michelle Flanner, Kai Ishihara, David J. Sherratt, Koya Shimokawa, and Mariel Vazquez. Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification. *Scientific Reports*, 7(1):12420, 2017.

[12] De Witt L Sumners, Irma I Cruz-White, and Renzo L Ricca. Zero helicity of Seifert framed defects. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(29):295203, 2021.

[13] Simone Zuccher and Renzo L. Ricca. Creation of quantum knots and links driven by minimal surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 942:A8, 2022.

Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots – a précis in Japanese –

Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki

Abstract

p を素数とし, K を種数 1 の 2 橋結び目とする. p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3-K)$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ. 加えて, liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在についても論じる. 議論の過程で, ルジャンドル記号を使って素数 p があるルカス型数列を割るための条件も指摘する.

本稿は研究集会「結び目の数理 VII」の報告集記事であり, 内容は論文 [STU25] に基づく.

Contents

1. 導入

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) とその低次元位相幾何学における類似研究 [MTTU17, KMTT18, TTU22, TU24, BTTU23] の文脈において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心がある. この論文では, Mazur の提案 [Maz11, Section 19] に従い, 「逆の方向へ進む」ことを目指す.

π を群とする. 関数 $\chi:\pi\to\mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標であるとは, $\chi=\operatorname{tr}\rho$ となるような $\mathbb{Z}_p$ の拡大体上の SL_2 表現 ρ が存在することをいう. また, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が liminal であるとは, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が絶対既約であり, かつ, そのすべての開近傍は絶対既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) をもつことをいう.

我々の主結果は次のように述べられる.

定理 1.1. *K を S^3 上の種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3-K)$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.*

定理 1.1の証明においては, 指数多様体, Alexander 多項式の巡回終結式, そしてルジャンドル記号を用いる. また, ある Fibonacci 型/Lucas 型数列の性質を示して用いる.

議論は次のように与えられる. Section 2 では, 種数が 1 の 2 橋結び目, すなわち $J(2k,2l)(k,l\in\mathbb{Z}, (k,l)\neq(0,0))$ 型のダブルツイスト結び目の諸性質を再確認し, 既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と可約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標の多様体たちの交点を計算する (**命題** 2.1).

2020 Mathematics Subject Classification Primary 20C12, 57M12; Secondary 57K10, 20E26

Section 3 では, Hensel の補題を繰り返し使うことで, $J(2k,2l)$ が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつことが (i) $p=2$ かつ $r\equiv 1 \bmod 8$, または (ii) $p\neq 2$, かつ k^2l^2-kl の非平方部分 r についてルジャンドル記号 $(\frac{r}{p})=1$ をみたすことと同値であること (**定理** 3.1) を示す. また, 様々な具体例を紹介する. Section 4 では, さらに liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在について考察する (**命題** 4.2).

Section 5 では, 与えられた $m\in\mathbb{Z}$ に対して, $t^2-t+m=(t-a)(t-b)$ と書き, $L_n=a^n+b^n$ によって Lucas 型数列 $(L_n)_n\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ を定める. ある $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して $p\mid L_{2n+1}$ であるとき, $(\frac{4m^2-m}{p})=1$ となることを示し (**命題** 5.1), 具体例を添える. $m=-1$ のとき, $(L,n)_n$ は古典的な Lucas 型となるが, これは 8 の字結び目 $J(2,-2)=4_1$ の Alexander 多項式から生じる場合である.

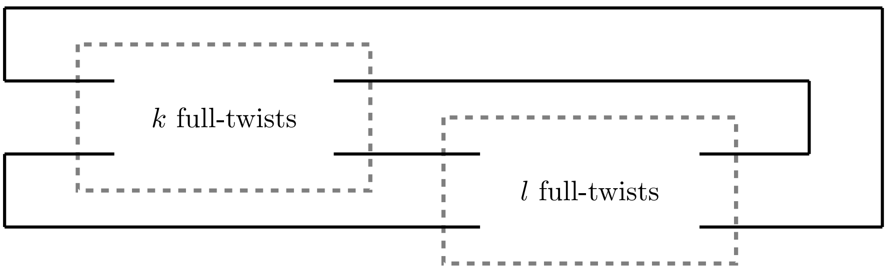
Section 6 では, 結び目 K の巡回被覆 $M_n\to S^3$ の諸性質を思い出し, Alexander 多項式が $\Delta_K(t)=mt^2-(2m-1)t+m$ になるような結び目 K について, $p\mid \#H_1(M_{2n+1})$ であるならば $(\frac{4m^2-m}{p})=1$ であること (**定理** 6.1) を示し, そこから主定理 (**定理** 1.1) を導く.

このような変形可能な指標は Alexander 多項式の零点に対応するということが, Burde と de Rham の研究によって古典的に知られている [Bur67, dR67], また, [HPSP01] も参照のこと). なので, 我々の研究の背景には, 深い文脈が横たわっていると考えられる. さらなる課題や展望については**注意** 6.4で述べる. なお, Burde–de Rham の定理の p 進類似とその数論的な設定への応用が, 第 2 著者らによって与えられている [MTT24].

謝辞 . 研究集会「結び目の数理 VII」の世話人の先生方, また有用な助言をくださった Léo Benard, 三原朋樹, 関真一朗, 丹下基生, Anh T. Tran, 寺嶋郁二, 山口祥司, 吉崎彪雅に感謝します. 本研究の一部は, JSPS 科研費 JP23K12969 の助成を受けたものです.

2. 種数 1 の 2 橋結び目

任意の種数 1 の 2 橋結び目は, 各 $(0,0)\neq(k,l)\in\mathbb{Z}^2$ に対し次の図式によって定義される $J(2k,2l)$ 型のダブルツイスト結び目として実現される. 基本的な参考文献は [Tra18] である.



特に, $J(2,0)$ は自明な結び目, $J(2,2)$ は三葉結び目 3_1, $J(2,-2)$ は 8 の字結び目 4_1 であることが知られている. そのような結び目の群は次のような表示を持つ:

$$\pi:=\pi_1(S^3-J(2k,2l))=\langle a,b\mid w^la=bw^l\rangle.$$

ここで, a,b はメリディアンを表し, $w=(ba^{-1})^k(b^{-1}a)^k$ である.

ザイフェルト行列の 1 つは $V=\begin{pmatrix}k&1\\0&l\end{pmatrix}$ であり, Alexander 多項式は

$$\Delta_{J(2k,2l)}(t)=\det(tV-V^{\perp})=klt^2+(1-2kl)t+kl$$

である.

各 $g\in\pi$ に対し, 写像 $\mathrm{tr}\,g\colon \mathrm{Hom}(\pi,\mathrm{SL}_2\mathbb{C})\to\mathbb{C};\rho\mapsto\mathrm{tr}\,\rho(g)$ を考える. そのとき, $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の共役類は

$$x:=\mathrm{tr}\,a,\quad y:=\mathrm{tr}\,ab^{-1}$$

によってパラメーター付けられる. (これは y は [TU24] のものとは異なるが, 今回の計算においては強い利点がある. 古い方の y は $\operatorname{tr} ab = \operatorname{tr} a \operatorname{tr} b - \operatorname{tr} ab^{-1} = x^2 - y$ をみたす.) さらに, $z := \operatorname{tr} w$ とおく.

非可換な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類は, 次の式で定義される Riley の普遍表現によって代表される.

$$\rho^{\mathrm{R}}(a) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho^{\mathrm{R}}(b) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 2-y & s^{-1} \end{pmatrix},$$

ここで, $x = s + s^{-1}$ であり, x, y は Riley 多項式 $f_{k,l}(x,y) = \Phi_{k,l}(x, y-2) = 0$ をみたす.

既約表現の共役類たちと, $f_{k,l}(x,y) = 0$ かつ $y - 2 \neq 0$ なる点たちの間には, 一対一対応が存在する. $y - 2 = 0$ の各点は可約表現の集合と可換表現の集合の組と対応する.

命題 2.1. $f_{k,l}(x,y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点は $(x,y) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, 2)$ である.

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n 次の第 2 種チェビシェフ多項式 $S_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を

$$S_{n-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \theta \in \mathbb{R}, \sin\theta \neq 0$$

によって定める. この定義は, $S_{-1}(z) = 0$, $S_0(z) = 1$, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $S_{n+1}(z) - zS_n(z) + S_{n-1}(z) = 0$ という条件と同値である. これらの多項式は $S_{-1-n}(z) = -S_{-1+n}(z)$ と $S_{n-1}(\pm 2) = (\pm 1)^{n-1} n$ をみたす.

SL_2 指標の性質に基づく計算によって,

$$z = \operatorname{tr} w = 2 + (y-2)(-x^2 + y + 2)S_{m-1}^2(y)$$

が成り立つ.

[Tra18, Subsection 2.2] により, 既約指標の多様体は

$$f_{k,l}(x,y) = S_l(z) - (1 + (-x^2 + y + 2)S_{k-1}(y)(S_k(y) - S_{k-1}(y))S_{l-1}(z)$$

によって与えられる.

命題 2.1の証明. $y - 2 = 0$ のとき, $z = 2$ であり, $0 = f_{k,l}(x,2) = l - (1 + (-x^2 + 2 + 2)k((k+1) - k))l = 1 - (4 - x^2)kl$ となり, したがって $x = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}$ である. □

注意 2.2. 古いパラメータでは, 交点は $(x,\eta) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, -\frac{1}{kl})$ である. なお, 命題 2.1 は $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid kl$ をみたす任意の代数閉体 $\mathbb{F}$ に対して有効である.

3. Liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標

定理 3.1. $kl \neq 0$ と仮定する. このとき, $J(2k, 2l)$ の群が *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は

i) $p = 2$ かつ $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \bmod 8$, または

ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, かつ $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分 r に対し, ルジャンドル記号 $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$.

ここに $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ に対し, $b^2 \mid a$ をみたす最大の整数を b とするとき, a/b^2 を a の**非平方部分**と呼ぶ. (この用語は別の概念に用いられる場合もあるので注意されたい.) また, $a \in \mathbb{Z}$ の p 上のルジャンドル記号 $(\frac{a}{p}) \in \{0, \pm 1\}$ は以下のように定義される. まず, $p \mid a$ のとき, $(\frac{a}{p}) = 0$ と置く. 次に, $p \nmid a$ と仮定する. もし $a \equiv x^2 \bmod p$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するなら, $(\frac{a}{p}) = 1$ と定める. そうでないとき, $(\frac{a}{p}) = -1$ と定める. 次の補題は Hensel の補題 (cf.[Neu99, Chapter II (4.6)]) の帰結である.

補題 3.2. $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ かつ $p^2 \nmid a$ とする. このとき, $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$ とであるための必要十分条件は.
i) $p = 2$ かつ $a \equiv 1 \bmod 8$, または
ii) $p \neq 2$, $(\frac{a}{p}) = 1$.

証明. (i) $p = 2$ とする. もし $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_2$ なら, $\sqrt{a} = \sum_i b_i 2^i$ かつ $b_i \in \{0, 1\}$ となり, $a \equiv (b_0 + 2b_1 + 4b_2)^2 \equiv b_0^2 + 4b_1(b_0 + b_1)$ となる. すると, 仮定より $4 \nmid a$ のために, $b_0 = 1$ となる. $b_1 = 0, 1$ のいずれの場合にも $a \equiv 1 \bmod 8$ である. 逆に, $a \equiv 1 \bmod 8$ とし, $a = 8b + 1$, $b \in \mathbb{Z}$ とおく. $X^2 - a = 0$ が $\mathbb{Z}_2$ に解 $X = \alpha$ をもつとき, ある $\beta \in \mathbb{Z}_2$ があって $\alpha = 2\beta + 1$ となり, $\alpha^2 - a = (2\beta+1)^2 - (8b+1) = 4(\beta^2 + \beta - 2b)$ となる. 多項式 $Y^2 + Y - 2b \bmod 2$ が $\mathbb{F}_2$ で単根をもつので, Hensel の補題により, $Y^2 + Y - 2b$ は $\mathbb{Z}_2$ に根をもち, よって $X^2 - a$ も $\mathbb{Z}_2$ に根を持つ.

ii) $p \neq 2$ と仮定する. $p \mid a$ のとき, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}_p$ となる. $p \nmid a$ のとき, $X^2 - a$ mop p は $\mathbb{F}_{p^2}$ に 2 つの単根を持ち, それらは Hensel の補題によって $\mathbb{Z}_p$ の 2 次拡大へと持ち上がる. また, 次の 3 つの条件は同値である; $(\frac{a}{p}) = 1$ である, $X^2 - a \bmod p$ の根が $\mathbb{F}_p$ に根を持つ, $X^2 - a$ が $\mathbb{Z}_p$ に根を持つ. このことから結論を得る. □

補題 3.3. $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ の *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と, $\mathbb{Z}_p^2$ 上で $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点との間に 1 対 1 対応がある.

証明. ρ が $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\rho \subset \mathbb{Z}_p$ をみたす liminal 表現であるとき, $\mathrm{tr}\,\rho$ は $\mathbb{Z}_p^2$ において $y - 2 = 0$ 上にある. 加えて, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\rho \equiv \rho' \bmod p^n$ となる既約表現 ρ' があるため, $\mathrm{tr}\,\rho$ は $f_{k,l}(x, y) \equiv 0 \bmod p^n$ 上にある. したがって, $\mathrm{tr}\,\rho$ も $\mathbb{Z}_p^2$ において $f_{k,l}(x, y) = 0$ 上にある.

逆を示す. Section2 の Riley の表現 ρ^{R} は Section2 において, $\mathbb{Z}_p[x, y]$ の 2 次拡大上の表現と見ることができる.

命題 2.1より, $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y-2 = 0$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 内で交点をもつとき, $f_{k,l}(x, 2) = (f_{k,l}(x, y) \bmod (y-2))$ は $\mathbb{Z}_p$ において単根 α をもち, Hensel の補題により $(x, y) = (\alpha, 2)$ の周りの陰関数 $x = x_f(y) \in \mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ が得られる. $x = x_f(y)$ を Riley の表現に代入することで, $\mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ の 2 次拡大における既約表現 $\boldsymbol{\rho}^R$ を得る. このとき, $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho}^R \subset \mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ である .

$\mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ の要素は, p 進単位円盤 $|y-2|_p < 1$ 内の任意の $y \in \mathbb{Z}_p$ において $\mathbb{Z}_p$ に収束することに注意する. $y = 2$ を代入すると, この $\boldsymbol{\rho}^R$ に $y = 2$ を代入すると, 点 $(\alpha, 2)$ に対応する可約表現 ρ が得られ, $\mathrm{tr}\,\rho \subset \mathbb{Z}_p$ となる. 一方, $0 \neq |2-\eta|_p < 1$, つまり, ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $2 \equiv \eta \bmod p^n$ をみたすような $y = \eta \in \mathbb{Z}_p$ を ρ^R に代入すると, 絶対既約表現 ρ_η であって $\mathrm{tr}\,\rho_\eta \subset \mathbb{Z}_p$ をみたすものが得られる. したがって, $\mathrm{tr}\,\rho$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標である. □

定理 3.1の証明. $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ が $\mathbb{Z}_p^2$ に交点を持つための必要十分条件は $p \nmid kl$ かつ $\sqrt{4k^2l^2 - kl} \in \mathbb{Z}_p$ であることなので, **補題** 3.2と**補題** 3.3から定理の主張が得られる. □

例 3.4. 群 $\pi_1(S^3 - J(2, 2l))$ が liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ条件は $(\frac{4l^2-l}{p}) = 1$ となる. 初等的な計算により, 次を得る.

(i) $J(2, 2) = 3_1$ (三葉結び目): $(\frac{3}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \bmod 12$.

(ii) $J(2, -2) = 4_1$ (8 の字結び目): $(\frac{5}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \bmod 5$.

(iii) $J(2, 4)$: $(\frac{14}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1, \pm 9, \pm 25, \pm 5, \pm 11, \pm 13 \bmod 56$.

(iv) $J(2, -4)$: $(\frac{18}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \bmod 8$.

(v) $J(2, 6)$: $p = 2$ or $(\frac{33}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \bmod 33$.

(vi) $J(2, -6)$: $(\frac{39}{p}) = 1$, i.e., $\pm p \equiv 1, 5, 7, 19, 23, 25, 26, 35, 41, 49, 61, 67 \bmod 156$.

証明. $p = 2$ のときの条件は $4l^2 - l \equiv 1 \bmod 8$, すなわち $l \equiv 3 \bmod 8$ となる. 以下, $p \neq 2$ と仮定する.

(i) $l=1$ のとき, $4l^2-l=3$ であり, その条件は $(\frac{3}{p})=1$ となる. $p\equiv 1 \bmod 4$ のとき, 平方剰余の相互法則により, $(\frac{p}{3})=(\frac{3}{p})$ が成り立つ. $x\equiv \pm 1$ ならば $x^2\equiv 1$ であるから, $(\frac{3}{p})=1$ の必要十分条件は $p\equiv 1 \bmod 3$ である. また, $p\equiv -1 \bmod 4$ のとき, $(\frac{p}{3})=-(\frac{3}{p})$ より, $p\equiv -1 \bmod 3$ の必要十分条件は $(\frac{3}{p})=1$ である. したがって, 条件は $p\equiv \pm 1 \bmod 12$ である.

(ii) $l=-1$ のとき, 条件は $(\frac{5}{p})=1$ である. $5\equiv 1 \bmod 4$ より, $(\frac{5}{p})=(\frac{p}{5})$ が成り立つ. $x\equiv \pm 1,\pm 2$ ならば $x^2\equiv \pm 1 \bmod 5$ であるから, 条件は $p\equiv \pm 1 \bmod 5$ である.

(iii) $l=2$ のとき, 条件は $(\frac{14}{p})=(\frac{2}{p})(\frac{7}{p})=1$ である . 第 2 補題によると, $(\frac{2}{p})=1$ をみたすのは $p\equiv \pm 1 \bmod 8$ の場合に限る. $7\equiv 3 \bmod 4$ であり, $x\equiv \pm 1,\pm 2,\pm 3$ ならば $x^2\equiv 1,4,2 \bmod 7$ であることに注意する. $p\equiv 1 \bmod 4$ のとき, $(\frac{7}{p})=(\frac{p}{7})$, so $(\frac{7}{p})=1$ をみたすのは $p\equiv 1,2,4 \bmod 7$ の場合に限る. $p\equiv -1 \bmod 4$ のとき, $(\frac{7}{p})=-(\frac{p}{7})$ となり, $(\frac{7}{p})=1$ の必要十分条件は $p\equiv -1,-2,-4 \bmod 7$ である. したがって, その条件は “$\pm p\equiv \pm 1 \bmod 8$ かつ $\pm p\equiv 1,2,4 \bmod 7$” または “$\pm p\equiv 3 \bmod 8$ $\pm p\equiv 1,2,4 \bmod 7$” (同じ順序での 2 重符号) となり, 結論を導く.

(iv) $l=-2$ のとき, $4l^2-l=18=2\cdot 3^2$ より, 条件は $(\frac{2}{p})=1$ である. 第二補充法則によれば, $(\frac{2}{p})=1$ の必要十分条件は $p\equiv \pm 1 \bmod 8$ である.

(v) $l=3$ のとき, 条件は $1=(\frac{33}{p})=(\frac{3}{p})(\frac{11}{p})=((-1)^{\frac{p-1}{2}})^2(\frac{p}{3})(\frac{p}{11})=(\frac{p}{3})(\frac{p}{11})$ である. $x\equiv \pm 1$ ならば $x^2\equiv 1 \bmod 3$ であるから, $p\equiv 1 \bmod 3$ の必要十分条件は $(\frac{p}{3})=1$ である. $x\equiv \pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5$ ならば $x^2\equiv 1,4,9,5,3 \bmod 11$ であるから, $(\frac{p}{11})=1$ iff $p\equiv 1,4,9,5,3 \bmod 11$ となる. $(\frac{p}{3})$ と $(\frac{p}{11})$ の両方の値は 1 である必要十分条件は $p\equiv 1,4,31,16,25 \bmod 33$ である. 両方の値が -1 となる必要十分条件は $p\equiv 2 \bmod 3$ および $p\equiv 2,6,7,8,10 \bmod 11$ であり, それはすなわち $p\equiv 2,17,29,8,32 \bmod 33$ である. したがって, その条件は $p\equiv 1,2,4,8,16,17,25,29,31,32 \bmod 33$, となり, 結論を導く.

(vi) $l=-3$ のとき, 条件は $(\frac{39}{p})=(\frac{3}{p})(\frac{13}{p})=1$ となる. (i) で見たように, $(\frac{3}{p})=1$ の必要十分条件は $p\equiv \pm 1$, $(\frac{3}{p})=-1$ の必要十分条件は $p\equiv \pm 5 \bmod 12$ である. また, $x\equiv \pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6$ ならば $x^2\equiv 1,4,9,3,12,10 \bmod 13$ であるから, $(\frac{13}{p})=1$ の必要十分条件は $p\equiv \pm 1,\pm 3,\pm 4 \bmod 13$,$(\frac{13}{p})=-1$ は $p\equiv \pm 2,\pm 5,\pm 6 \bmod 13$ である. したがって, $(\frac{39}{p})=1$ の必要十分条件は $\pm p\equiv 1,25,133,49,121,61,41,89,5,125,149,137 \bmod 156$ であるる. □

4. Liminal 表現

いま ρ を $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大上の表現とし, $\overline{\rho}:=\rho \bmod p$ が絶対既約であり, $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\overline{\rho}\subset \mathbb{F}_p$ をみたすとする. このとき, 有限体の Brauer 群は自明であるから, Skolem–Noether の定理により, このような $\mathbb{F}_p$ 上のある表現 $\overline{\rho}'$ と共役である (cf.[Mar16, Subsection 3.5]). さらに, Nyssen の定理 [Nys96, Théorèm 1] により, この $\overline{\rho}'$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の表現 ρ' であって $\mathrm{tr}\rho=\mathrm{tr}\rho'$ を満たすものへと持ち上がり, このような ρ' は共役を除き一意的である.

この議論がそのまま既約指標多様体 $X_{\mathrm{irr}}(S^3-J(2k,2l))=\{f_{f,l}(x,y)=0\}\setminus\{y-2=0\}$ であるザリスキー閉包上の表現に拡張できるかどうかが気になるところである. Nyssen の証明は, 絶対既約性が多元環準同型の全射性と同値であるという事実を用いているので, その結果は剰余可約表現には必ずしも拡張されない. さらに, [KMTT18, Subsection 2.3] に指摘されているように, 結び目群の表現の設定では, 随伴表現の 2 次ホモロジーが消えないという意味で, 変形問題には障害が生じる. 次の問題は繊細である.

問い 4.1. $\mathbb{Z}_p$ 上の liminal 表現が与えられたとき, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現を見つけられるか?

少なくとも次が言える.

命題 4.2. **定理** 3.1の条件のもとで, $p \neq 2$ かつ $(\frac{-kl}{p}) = 1$ であるとき, *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在する.

証明. **補題** 3.3の $\boldsymbol{\rho}^R$ を考え, $s = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ に注意する. **命題** 2.1より, $\sqrt{x^2-4}\,|_{y=2} = \sqrt{\frac{-1}{kl}}$ が成り立つ. $(\frac{-kl}{p}) = 1$ のとき, $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{-1}{kl}} \in \mathbb{Z}_p$ であり, よって, $\boldsymbol{\rho}^R \bmod y-2$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現である. □

5. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列

$m \in \mathbb{Z}$ とし, $t^2 - t + m = (t-a)(t-b)$ と書くと, $a+b=1$, $ab=m$ が成り立つ. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列をそれぞれ $L_n = a^n + b^n$, $F_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}$ と定義する. すると, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1-2m$, $L_{n+2} = L_{n+1} - mL_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} - mF_n$ となり, したがって $L_n, F_n \in \mathbb{Z}$ である.

すると,

$$L_n^2 + (4m-1)F_n^2 = 4m^n \quad \cdots (\star)$$

が得られる. なぜなら, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 1-4m$ より, $(a^n+b^n)^2 + (4m-1)(\frac{a^n-b^n}{a-b})^2 = (a^n+b^n)^2 - (a^n-b^n)^2 = 4a^nb^n = 4m^n$ である.

ここで, p が L_{2n+1} を割り切るようなある $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ があると仮定する. そのとき, $(4m-1)F_n^2 \equiv (2m^n)^2 m \bmod p$ が成り立つ. これは, $m(4m-1)$ が mod p で平方であることを表している. さらに, $p \nmid m(4m-1)$ が成り立つ. なぜなら, $p \mid m$ のとき, 漸化式により, すべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $L_n \equiv 1 \bmod p$ となり, $p \mid L_{2n+1}$ と矛盾する. 一方, $p \mid 4m-1$ ならば, $(\star)$ より $p = 2$ または $p \mid m$ となり, したがって矛盾する. よって, 次が得られる.

命題 5.1. 素数 p に対し, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ があって p が L_{2n+1} を割り切るとき, ルジャンドル記号について $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ となる.

例 5.2. 以下の例は, **例** 3.4と見比べることができる.

(i) $m = 1$ とする. このとき, 条件 $(\frac{12}{p}) = 1$ は $p = 2$ または $p \equiv \pm 1 \bmod 12$ となる. $L_{n+1} = L_n - L_{n-1}$ より,

$n \bmod 6$	1	2	3	4	5	6
L_n	1	-1	-2	-1	1	2

である. よって, $p = 2$ のみである.

(ii) $m = -1$ とする. このとき, L_n と F_n は古典的なものであり, 条件 $(\frac{5}{p}) = 1$ は $p = 2$ または $p \equiv \pm 1 \bmod 5$ となる. よって,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L_n	1	3	2^2	7	11	$2{\cdot}3^2$	29	47	$2^2{\cdot}19$	$3{\cdot}41$	199	$2{\cdot}7{\cdot}23$	521	$3{\cdot}281$

	15	16	17	18	19	20	21
	$2^2{\cdot}11{\cdot}31$	$13{\cdot}17$	3571	$2{\cdot}3{\cdot}13{\cdot}37$	9349	15127	$2^4{\cdot}29{\cdot}211$

である.

L_{2n+1} の値を $0 \leqslant n \leqslant 10$ の範囲でリストアップする. (ii) $m = -1$, (iii) $m = 2$, (iv) $m = -2$, (v) $m = 3$, (vi) $m = -3$ に対し, L_{2n+1} $(0 \leqslant n \leqslant 10)$ の値は次のようになる.

$2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
(ii)	1	2^2	11	29	$2^2\cdot 19$	199	521	$2^2\cdot 11\cdot 31$	3571	9349	$2^4\cdot 29\cdot 211$
(iii)	1	5	11	13	5	67	181	$5^2\cdot 11$	101	797	$5\cdot 13\cdot 43$
(iv)	1	7	31	127	$7\cdot 73$	$23\cdot 89$	8191	$7\cdot 31\cdot 151$	131071	524287	$7^2\cdot 127\cdot 337$
(v)	1	2^3	31	83	$2^3\cdot 17$	67	1559	$2^3\cdot 29\cdot 31$	21929	44917	$2^3\cdot 41\cdot 83$
(vi)	1	$2\cdot 5$	61	337	$2\cdot 5\cdot 181$	$23\cdot 491$	51169	$2\cdot 5^2\cdot 61\cdot 89$	$67\cdot 21487$	7634353	$2\cdot 5\cdot 41\cdot 293\cdot 337$

しばしば, 大きな素数が見つかる.

注意 5.3. 少なくとも $m=-1$(古典的な場合) のとき, **命題** 5.1の逆は成り立たない. 実際, Lagarias [Lag85] は, 集合

$$S_A := \{p \mid p \equiv \pm 1 \bmod \ p \text{ divides } L_n \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

の素数の密度が 5/12 であることを示した. よって, 集合

$$\{p \mid p \equiv \pm 1 \bmod 5 \text{ and } p \text{ divides } L_{2n+1} \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

の素数の密度は, 集合 $\{p \mid p \equiv \pm 1 \bmod 5\}$ の密度 1/2 よりも小さい.

6. 巡回被覆

S^3 内の結び目 K を考え, その Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ で表す. このとき, Fox–Weber の公式 [Web79] により, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, K で分岐する $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $M_n \to S^3$ は

$$r_n := |H_1(M_n;\mathbb{Z})| = |\mathrm{Res}(t^n-1, \Delta_K(t))|$$

を満たす. ただし群 G が有限群のとき $|G|$ で G の位数 $\#G$ を表し, G が無限群のときは $|G|=0$ と定める. また, 多項式 $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ に対し, $\mathrm{Res}(f(t), g(t)) \in \mathbb{Z}$ はそれらの終結式を表す. なお, K が種数 1 の 2 橋結び目であるときは, $H_1(M_n)$ の詳しい群構造は Fox らによって知られている ([Fox60], [Ily21]). まず, 次のように主張する.

定理 6.1. $\Delta_K(t) = mt^2 + (1-2m)t + m$ で $m \in \mathbb{Z}$ であるとき, $p \mid r_n$ となるある奇数 n があるならば $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ である.

証明. オイラーのトーシェント関数は $m \leqslant 6$ に対して $\varphi(m) \leqslant 2$ をみたす. $r_n = 0$ となるのは $m=1$ または $6 \mid n$ のときのみである. よって, 任意の奇数 n に対して $0 \neq r_n = \#H_1(M_n)$ が成り立つ.

$m=0$ のとき, $r_n = 1$, $p \nmid r_n$ である. 以下, $m \neq 0$ である. $\Delta_K(t) = mt^2 + (1-2m)t + m = m(t-\alpha)(t-\beta)$, $m \in \mathbb{Z}$ と書く. すると, $\alpha\beta = 1$, $\alpha + \beta = \frac{2m-1}{m}$, $r_n = m^n(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) = m^n(2-\alpha^n-\beta^n)$ である. さらに, $t^2-t+m = (t-a)(t-b)$ と書く. すると, $a+b=1$, $ab=m$, $a^2+b^2 = 1-2m = -m(\alpha+\beta)$, $a^2b^2 = m^2 = (-m\alpha)(-m\beta)$ となり, よって, $\{a^2, b^2\} = \{-m\alpha, -m\beta\}$ となる. $a^2 = -m\alpha$, $b^2 = -m\beta$ としてよい.

n が奇数のとき, $L_n^2 = (a^n+b^n)^2 = ((-m\alpha)^n + (-m\beta)^n + 2m^n) = m^n(2-\alpha^n-\beta^n) = -\mathrm{Res}(t^n-1, \Delta_K(t)) = r_n$ が成り立つ. したがって, **命題** 5.1から結論が導かれる. □

定理 1.1の証明. $\Delta_{J(2k,2l)}(t) = klt^2 + (1-2kl)t + kl$ であるから, $m = kl$ を代入することで, **定理** 3.1と**定理** 6.1から得られる. □

注意 6.2. n が偶数であるとき, $\mathrm{Res}(t^n-1, \Delta_k(t)) = m^n(\alpha^n+\beta^n-2) = ((-m\alpha)^n+(-m\beta)^n-2m^n) = (a^n-b^n)^2 = (a-b)^2F_n^2 = (1-4m)F_n^2 = L_n^2 - (2m^{n/2})^2$ が成り立つ. したがって, $p \mid r_n$ はルジャンドル記号に関する似たような条件を導けない.

例 6.3. $4m^2-m$ が平方因子をもつ場合, **定理** 1.1の逆は成り立たない. 例えば, $m=16$ かつ $p=3$ のとき, $4m^2-m=16{\cdot}63=7\cdot 12^2$, $(7/3)=(1/3)=1$ である. なので, $J(2,32)$ は $\mathbb{Z}_3$ 上 liminal 指標をもつ. この場合, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $3\nmid r_{2n-1}$ である.

注意 6.4. 次の点については依然として謎のままである.

(1) **定理** 1.1はより広いクラスの結び目に拡張されるのか？文字通りでは一般的に正しいわけではない. $\Delta_K(t)=-t^4+3t^3-3t^2+3t-1$ を持つ $K=6_3$ は, $r_5=|\mathrm{Res}\,(t5-1,\Delta_K(t))|=24$ となり, 2 つの多様体の交点は $\mathbb{F}_2^2$ には存在しない. しかし, そのような素数は非常に稀に思われる. より一般的な設定で適切な定式化や解釈が存在することが期待される.

(2) **定理** 1.1の背景には, Burde–de Rham 理論があると考えられる. しかし, 明確な含意はなく, むしろこの結果が新たな視点を提供することが期待される.

(3) Burde–de Rham 理論は, Heusener–Porti によって高次元表現に拡張されている [HP15]. 我々の研究も高次元の場合に拡張されるだろうか. 8 の字結び目の $\mathrm{SL}_3\mathbb{C}$ 指標多様体の研究 [HMP16] が 1 つの手がかりである可能性がある.

(4) **問い** 4.1でも述べたように、**定理** 3.1の条件のもとで常に liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在するかどうかは繊細な問題である.

REFERENCES

BTTU23 Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic* SL_2-*representations and L-functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.

Bur67 Gerhard Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33. MR 212787

dR67 Georges de Rham, *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. (2) **13** (1967), 187–194. MR 240804

Fox60 Ralph H. Fox, *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 187–196. MR 119210

HMP16 Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti, *The* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$-*character variety of the figure eight knot*, Illinois J. Math. **60** (2016), no. 1, 55–98. MR 3665172

HP15 Michael Heusener and Joan Porti, *Representations of knot groups into* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *and twisted Alexander polynomials*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 313–354. MR 3402353

HPSP01 Michael Heusener, Joan Porti, and Eva Suárez Peiró, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 191–227. MR 1807271

Ily21 Mednykh Ilya, *Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two*, preprint. arXiv:2111.04292, November 2021.

KMTT18 Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L-functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3171–3195. MR 3766846

Lag85 J. C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density* 2/3, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 449–461. MR 789184

Mar16 Julien Marché, *Character varieties in* SL_2 *and Kauffman Skein algebras*, Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, RIMS Kôkyûroku, no. 1991, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 4 2916, pp. 27–42.

Maz11 Barry Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089

MTT24 Yasushi Mizusawa, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On the Burde–de Rham theorem for finitely presented pro-p groups*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), arXiv:2408.01270.

MTTU17 Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for* SL_2*-representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015

Neu99 Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)

Nys96 Louise Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 257–283. MR 1411348 (98a:20013)

STU25 Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki, *Liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$*-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots*, preprint. arXiv:2501.00323, 2025.

Tra18 Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388

TTU22 Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots,* -3*-Dehn surgeries, and L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

TU24 Ryoto Tange and Jun Ueki, *Twisted Iwasawa invariants of knots*, Math. Nachr. **297** (2024), no. 4, 1519–1534. MR 4734983

Web79 Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)

Honami Sakamoto sakamoto10ho73@gmail.com
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan

Ryoto Tange rtange.math@gmail.com
Department of Mathematics, School of Education, Waseda University; 1-104 Totsuka-cho, Shinjuku-ku, 169-8050, Tokyo, Japan

Jun Ueki uekijun46@gmail.com
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan

Hasse norm principle and genus theory in 3-dimensional topology

田代大尭（九州大学大学院数理学府博士１年）

概 要

本稿は２０２４年１２月２４日から２７日にかけて早稲田大学にて開催された研究集会「結び目の数理 VII」の報告書である。講演では数論的位相幾何学における類似に基づき、整数論の重要な結果であるハッセのノルム原理と種の理論の位相幾何学的類似について解説した。

イントロ

数論的位相幾何学は整数環と３次元多様体、素イデアルと結び目などの整数論と３次元位相幾何学の諸概念の類似に基づき、両理論の相互発展を目指す分野である。$\mathcal{O}_F$ を数体 F の整数環として、本講演で使用した類似は次のとおりである。(cf. [4])

$\mathcal{O}_F$ のコンパクト化したスペクトル $\overline{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)}$	有向連結閉 3 次元多様体 X
$\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$	X の結び目 $K : S^1 \hookrightarrow X$
$\mathcal{O}_F$ の素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_n\}$	X の絡み目 $L = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_n$
$\mathfrak{p}$ 進整数環 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$	K の環状近傍 V_K
$\mathfrak{p}$ 進体 $F_\mathfrak{p}$	V_K の境界トーラス ∂V_K
F の分数イデアル J_F	X の 1 次元輪体群 $Z_1(X)$
F の非零代数的数 $F^\times$	X の 2 次元鎖群 $C_2(X)$
境界準同型 $\partial_F : F^\times \to J_F$ $a \mapsto (a)$	境界準同型 $\partial_X : C_2(X) \to Z_1(X)$ $\Sigma \mapsto \partial_X \Sigma$
F の (狭義) イデアル類群 $H_F = \mathrm{Coker}(\partial_F)(H^+(F))$	X の 1 次元ホモロジー群 $H_1(X) = \mathrm{Coker}(\partial_X)$
$\mathcal{O}_F$ の単数群 $\mathcal{O}_F^\times$	X の 2 次元ホモロジー群 $H_2(X)$
F のイデール群 I_F	X のイデール群 I_X
F の主イデール群 P_F	X の主イデール群 P_X
有限次拡大 E/F	有限次被覆 $h : Y \to X$
n 冪剰余記号 $(\frac{a}{p})_n$	絡み数 $\mathrm{lk}(L, K)$

以上の類似をもとに、数論で展開されるイデール群を用いて述べられるハッセのノルム原理及びその応用である種の理論の位相幾何学的類似を紹介するのが講演の目的であった。

用語 多様体または 3 次元多様体は有向連結閉 3 次元多様体を指すものとする。多様体 X とその部分多様体 A に対して、$H_n(X), H_n(X,A)$ は各 $\mathbb{Z}$ 係数 n 次特異ホモロジー群、特異相対ホモロジー群を表すものとする。$h: Y \to X$ をガロア被覆としたとき、h のガロア群を $\mathrm{Gal}(h)$ で表す。X の結び目 K に対して、V_K で K の環状近傍、μ_K, λ_K で各 K のメリディアン、ロンジチュードを表す。整ホモロジー 3 球面 X 内の結び目 K, K' に対して、$\mathrm{lk}(K, K')$ で K, K' の絡み数を表す。

1 状況設定

本章は [4],[7] を参考にしている。また、数論側のイデール理論は [6] を参考にしている。整数環の素イデアル全体の集合の幾何学的類似物の 1 つとして、多様体 X に対して非常に許容的な絡み目というものがある。

定義 1.1. (非常に許容的な絡み目 [7]) X を 3 次元多様体とする。この時、可算個の tame な成分からなる絡み目 $\mathcal{L} \subset X$ が<u>非常に許容的な絡み目</u>であるとは、任意の $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次分岐被覆 $h: Y \to X$ に対して、$H_1(Y)$ が $h^{-1}(\mathcal{L})$ の成分により生成されるもののことである。

定理 1.2. (cf. [7]) X の非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L} \subset X$ は存在する。

以上の定理により、X 内で非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を 1 つ取り $(X, \mathcal{L})$ の組に対して議論する (この組を単に X と書くこともある)。X のイデール群、主イデール群を定める。

定義 1.3. (イデール群) X を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える多様体とする。この時、X の<u>イデール群</u>I_X を次で定める。

$$I_X := \{(a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{L}} H_1(\partial V_K) | a_K \in \mathbb{Z}[\mu_K] \text{ for almost all } K \subset \mathcal{L}\}.$$

主イデール群は対角写像 $\Delta_X: H_2(X, \mathcal{L}) \to I_X$ の像として定められるので、$H_2(X, \mathcal{L}), \Delta_X$ を定義する。講演では X が整ホモロジー 3 球面としたときの $H_2(X, \mathcal{L}), \Delta_X$ のイメージを作ってもらうことに注力したが、本稿では一般の多様体での構成を行う。有限部分絡み目 $L, L' \subset \mathcal{L}$ で $L \subset L'$ となるものをとる。この時、自然な全射 $j_{L,L'}: H_2(X, L) \hookrightarrow H_2(X, L')$ を得る。よって、$((H_2(X, L))_L, (j_{L,L'})_{L \subset L'})$ は帰納系をなし、$H_2(X, \mathcal{L})$ でこの帰納極限を表す。

$$H_2(X, \mathcal{L}) := \varinjlim_{L \subset \mathcal{L}} H_2(X, L) = \bigsqcup_{L \subset \mathcal{L}} H_2(X, L) / \sim .$$

ただし、$S_L \in H_2(X, L)$, $S_{L'} \in H_2(X, L')$ に対して、$S_L \sim S_{L'}$ を有限部分絡み目 $L \cup L' \subset L'' \subset \mathcal{L}$ が存在して $j_{L,L''}(S_L) = j_{L',L''}(S_{L'})$ を満たすときに定める。更に、有限絡み目 $L \subset \mathcal{L}$ に対して、$V_L := \bigsqcup_{K \subset L} V_K, X_L := X \setminus \mathrm{Int} V_L$ と置く。(X, V_L) に対して、切除同型と相対ホモロジー完全列の境界準同型の合成により ∂_L を次で定める。

$$\partial_L : H_2(X, L) \overset{\cong}{\to} H_2(X, V_L) \overset{\text{ex}}{\to} H_2(X_L, \partial V_L) \overset{\partial}{\to} H_1(\partial V_L).$$

$L, L' \subset \mathcal{L}$ で $L \subset L'$ を満たすものを取ると、次の図式 $(*)$ を得る。

$$\begin{array}{cccc} & H_2(X, L') & \overset{\partial_{L'}}{\to} & H_1(\partial V_{L'}) \\ (*): & j_{L,L'} \uparrow & \circlearrowright & \downarrow p_{L',L} \\ & H_2(X, L) & \overset{\partial_L}{\to} & H_1(\partial V_L). \end{array}$$

ただし、$p_{L',L}: H_1(\partial V_{L'}) \to H_1(V_L)$ は自然な射影とする。∂_L に対して L に関する極限を取ることで、X の<u>対角写像</u>$\Delta_X: H_2(X, \mathcal{L}) \to I_X$ を得る。

定義 1.4. (主イデール群) $P_X := \mathrm{Im}(\Delta_X)$ を X の<u>主イデール群</u>という。

2 ハッセのノルム原理

2.1 ハッセのノルム原理のステートメント

本研究課題の動機となった整数論におけるハッセのノルム原理を紹介する。

定理 2.1. (ハッセのノルム原理 [2]) E/F を代数体の有限次巡回拡大として、E, F のイデール群、主イデール群を各 I_E, I_F、P_E, P_F とし、$N_{E/F} : I_E \to I_F, N_{E/F} : P_E \to P_F$ を得る。
このとき、$N_{E/F}(I_E) \cap P_F = N_{E/F}(P_E)$ が成立。

この位相幾何学的類似を述べる。

定理 2.2. (幾何学的ハッセのノルム原理 [9]) M を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える整ホモロジー 3 球面、$f : N \to M$ を $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次巡回分岐被覆とする。この時、$f_* : I_N \to I_M, f_* : P_N \to P_M$ が誘導される。
このとき、$f_*(I_N) \cap P_M = f_*(P_N)$ が成立。

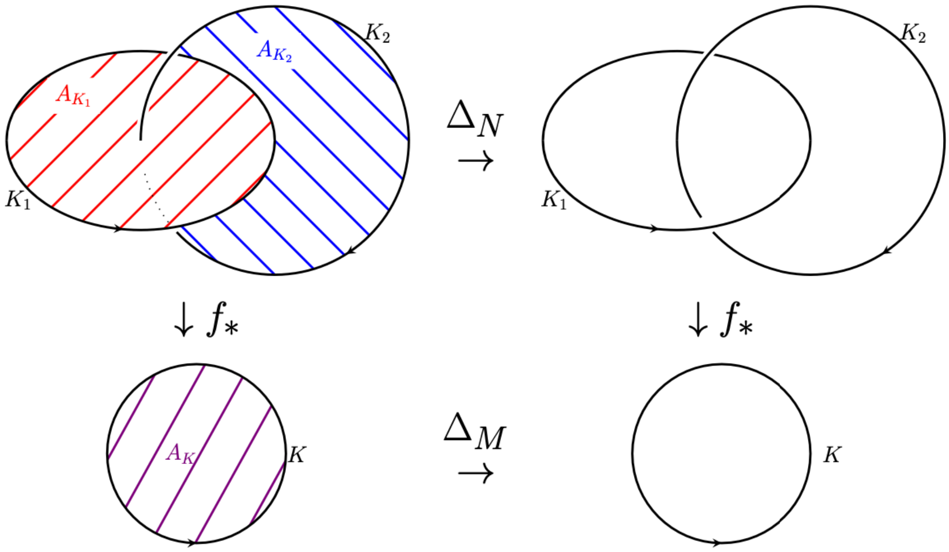


図 1: ハッセのノルム原理の解釈

この式は上の図のように解釈することができる。図 1 の右下の結び目をイデール群の K 成分とする。これが図 1 の左下の図のような紫の曲面 A_K の境界になっていて被覆空間では図 1 の右上の図のような絡み目 $K_1 \sqcup K_2$ になっているならば、図 1 の左上のような曲面 A_{K_1}, A_{K_2} が存在してこの図式が可換になる、即ち境界を取る操作と被覆により低空間へ送る操作が順番に依らないということである。このような曲面が取れてしまうというのは f の巡回性がいかに強い条件なのかをよく表している。しかし、このような曲面がとれるというメリットとは裏腹に、定理 2.2. を示すには余計な情報もついてきてしまうという事情がある。この余計な情報は無視できるということを示すために、Δ_M の明示化を使う。

2.2 Δ_M の明示化

M は整ホモロジー 3 球面、有限部分絡み目 $L \subset M$ であるから、$H_2(M, L)$ は L の各成分のザイフェルト曲面で生成される。$\partial_L : H_2(M, L) \to H_1(\partial V_L)$ は切除同型と境界準同型の合成により得られたので、L の各成分のザイフェルト曲面に $\mathrm{Int} V_L$ の穴を開けた後、境界を取る操作を施す。

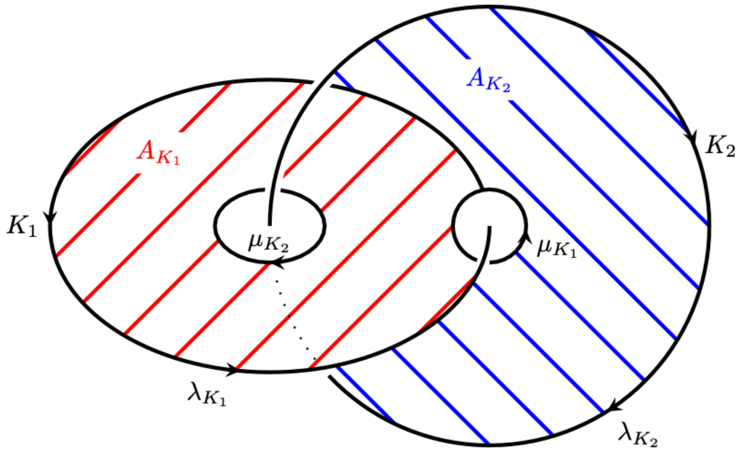


図 2: ハッセのノルム原理の解釈

図 2 のような穴あき曲面 A_{K_1}, A_{K_2} に対して境界を取る場合を考える。A_{K_1} に境界をとると、外側のループは K_1 自身のロンジチュードに、内側のループは K_1 に絡んでいる結び目のメリディアンになる。よって、L の成分 K のザイフェルト曲面 S_K に対して、∂_L は次のように表せる。

$$\partial_L(S_K) := [\lambda_K] - \sum_{K' \subset L \setminus K} \mathrm{lk}(K, K')[\mu_{K'}].$$

∂_L に対して L に関する極限を取ると、Δ_M を明示化することができる。

3 種の理論

3.1 ヒルベルトの定理 90

この節では種の理論の証明で必要になるヒルベルトの定理 90 を紹介する。数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90 は次の通り。

定理 3.1. (数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90 [1, Chapter 7, Corollary 7.4]) E/F を代数体の有限次巡回拡大で $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$ とする。このとき、任意の $a \in I_E$ に対して、$b \in I_E$ が存在して $a = (\sigma - 1)b$ を満たす。

一方、トポロジーでは次の通り。以下、S^3 に対して、S^3 は非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L} \subset S^3$ を備えるものとする。

定理 3.2. (3 次元多様体に対するヒルベルトの定理 90 [10]) $f : M \to S^3$ を $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する素数次巡回分岐被覆で $\mathrm{Gal}(M/S^3) = \langle \tau \rangle$ とする。このとき、任意の $a \in I_M$ に対して、$b \in I_M$ が存在して $a = (\tau - 1)b$ を満たす。

3.2 種の理論

最初に、幾何学的種の理論の先行研究を挙げる。被覆の底空間が有理ホモロジー 3 球面で素数次巡回被覆の場合 [8, 15]、底空間が S^3 で任意の有限次巡回被覆の場合 [5, Theorem]、任意の 3 次

元多様体の有限次分岐ガロア被覆の場合 [11, Theorem 3.2] がある。今回の論文は彼らのアプローチと異なり、 数論における種の理論 [3, Section 2] と証明まで含めて完全にパラレルになっている点に特色がある。では、数論における種の理論について紹介しよう。

定理 3.3. (種の理論 cf.)[3, Section 2]) $n \geq 2$ を自然数, $\{p_1, \cdots, p_r : 素数 \mid p_i \equiv 1 \bmod n\}$, $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_k \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ を $p_1 \cdots, p_r$ で分岐する n 次巡回分岐被覆とする。$H^+(k)$ のイデアル類を代表するイデアルは各 p_i と互いに素な $\mathcal{O}_k$ のイデアルを取り、$[a], [b] \in H^+(k)$ に対して次のような同値関係を定める。$[a] \approx [b]$:同じ種に属する$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(a)}{p_i}\right)_n = \left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(b)}{p_i}\right)_n$.
この時、$H^+(k)/\approx\, \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1}$ が成り立つ。

一方、今回の結果は次の通り。

定理 3.4. ([10]) p を素数、$L_0 = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_r \subset S^3$ を絡み目、$L_0 \subset \mathcal{L}$ を S^3 の非常に許容的な絡み目、$f : M \to S^3$ を L_0 で分岐する p 次巡回分岐被覆とする。$H_1(M)$ のホモロジー類を代表する 1 次元輪体は $f^{-1}(L_0)$ と交わらないとし、このとき $[a], [b] \in H_1(M)$ に対して次のような同値関係を定める。$[a] \approx [b]$:同じ種に属する$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{lk}(f_*(a), K_i) \equiv \mathrm{lk}(f_*(b), K_i) \bmod p$.
このとき、$H_1(M)/\approx\, \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ が成り立つ。

[10] の証明のプロセスが [3, Section 2] と同様であることを確認する。方針としては $\chi : H_1(M) \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ を構成し、これに準同型定理を用いる。

$H_1(M)/\approx\, \cong H_1(M)/\mathrm{Ker}\chi$ において、$\mathrm{Ker}\chi = (\tau - 1)H_1(M)$ を示すためにハッセのノルム原理とヒルベルトの定理 90 を使う (但し τ は f のガロア群の生成元)。このことから、$H_1(M)/\mathrm{Ker}\chi \cong f_*(I_M) + P_{S^3}/f_*(U_M) + P_{S^3}$ を示すことができる。

また、[7] による幾何学的類体論の同型射によって $f_*(I_M) + P_{S^3}/f_*(U_M) + P_{S^3} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ が示される。

謝辞 世話人である谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生をはじめ、本研究集会の運営の方々へ御礼申し上げます。

参考文献

[1] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich. *Algebraic number theory, Proceedings of an Instructional Conference*. Academic Press, 1967.

[2] Helmut Hasse. Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol (Proof of a theorem and disproof of a conjecture on the general norm residue symbol). *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1931:64–69, 1931.

[3] S. Iyanaga and T. Tamagawa. Sur la theorie du corps de classes sur le corps des nombres rationnels. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 3(1):220–227, 1951. `doi:10.2969/jmsj/00310220`.

[4] Masanori Morishita. *Knots and primes -An introduction to Arithmetic Topology*. Universitext. Springer Singapore, 2nd edition. `doi:10.1007/978-981-99-9255-3`.

[5] Masanori Morishita. A theory of genera for cyclic coverings of links. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 77(7):115–118, 2001. URL: `http://projecteuclid.org/euclid.pja/1148393034`.

[6] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. `doi:10.1007/978-3-662-03983-0`.

[7] Hirofumi Niibo and Jun Ueki. Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(12):8467–8488, 2019. `doi:10.1090/tran/7480`.

[8] Alexander Reznikov. Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds. *Selecta Math. (N.S.)*, 6(1):1–39, 2000. `doi:10.1007/s000290050001`.

[9] Hirotaka Tashiro. On the Hasse norm principle for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint. arXiv:, 2024.

[10] Hirotaka Tashiro. On genus theory for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint, 2025.

[11] Jun Ueki. On the Iwasawa μ-invariants of branched $\mathbf{Z}_p$-covers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 92(6):67–72, 2016. URL: `https://doi.org/10.3792/pjaa.92.67`.

絡み目の p 進トーション

吉崎彪雅

1. Introduction

本稿は，研究集会「結び目の数理 VII」での筆者の講演内容をまとめたものであり，内容は [9] に基づく．本稿を通して，p を素数とし，d を正の整数とする．本稿で主に紹介するのは，閉整ホモロジー 3 球面上の絡み目で分岐する $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆と呼ばれる被覆の系列に対し，それらの 1 次ホモロジー群の位数が p 進的に収束することである．ここで $\mathbb{Z}_p^d$ とは，p 進整数全体からなる集合 $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の d 個直和である．

本研究の背景について簡単に紹介する．数論の分野において，大域体と呼ばれる対象の $\mathbb{Z}_p$ 拡大と呼ばれる無限次拡大体に対して，その中間体の類数という不変量が p 進的に収束することが発見された ([4, Corollary 2], [7, Theorem 2.1], [8, Theorem 5.3])．そして，数論と位相幾何学の類似を追求する数論的位相幾何学の観点から，結び目の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆 ($\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似物) に対して，部分被覆の 1 次ホモロジー群の位数 (類数の類似物) もまた，p 進的に収束することが証明された ([7, Theorem 3.1])．本稿の主結果 Theorem 1.2 は，結び目に対する結果の絡み目への一般化である．

次に，本稿で使用する概念や記号について準備する．M を有向連結閉 3 次元多様体，L を tame な有限絡み目とする．写像 $h : N \to M$ が L で分岐する M の有限次分岐被覆であるとは，$X = M - L, Y = N - h^{-1}(L)$ とおくとき，制限写像 $h|_Y : Y \to X$ が有限次被覆空間であり，その $X \hookrightarrow M$ に関する Fox 完備化として h が実現されることをいう．とくに，$h_*(\pi_1(Y))$ が $\pi_1(X)$ の正規部分群であるとき，h は正規 (Galois) 被覆であるという．このとき，被覆変換群 G は $G \cong \pi_1(X)/h_*(\pi_1(Y))$ を満たす．逆に，有限群への全射準同型写像 $\tau : \pi_1(X) \to G$ が与えられたとき，正規部分群 $\ker \tau \subset \pi_1(X)$ に対応して，正規被覆 $Y \to X$ 及び正規分岐被覆 $N \to M$ が定まる．

Definition 1.1 (分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆). M を閉整ホモロジー 3 球面とし，$L = l_1 \cup \cdots \cup l_d$ を M 内の d 成分絡み目とする．$\pi_1(M-L)^{ab}$ におけるメリディアンを $m_1, ..., m_d$ とする．群準同型写像 $\tau : \pi_1(M-L) \to \mathbb{Z}^d$ を，アーベル化 $\pi_1(M-L) \to \pi_1(M-L)^{ab}$ と標準同型 $\pi_1(M-L)^{ab} \cong \mathbb{Z}^d; m_i \mapsto e_i$ (e_i は $\mathbb{Z}^d$ の標準基底) の合成写像とする．正の整数からなる組 $(n_1, ..., n_d)$ に対して，$\Gamma_{n_1,...,n_d} = \prod_i p^{n_i}\mathbb{Z}$ とおく．τ と自然な全射 $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d/\Gamma_{n_1,...,n_d}$ との合成写像を $\tau_{n_1,...,n_d}$ とおき，$\ker \tau_{n_1,...,n_d}$ に対応する分岐被覆を $M_{n_1,...,n_d} \to M$ とかけば，これは自然に逆系をなす．これを本稿では (M, L) の分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆と呼ぶ．

有限とは限らない群 A に対して，

$$|A| = \begin{cases} A \text{ の元の個数} & A \text{ が有限集合} \\ 0 & A \text{ が無限集合} \end{cases}$$

と定める．また，$A_{\text{non-}p}$ を，位数が有限かつ p と素な元全体からなる部分群とする．

本稿の主結果は次の通りである．

Theorem 1.2. すべての $(n_1,...,n_d)\in\mathbb{Z}^d_{>0}$ に対して，$M_{n_1,...,n_d}$ が有理ホモロジー 3 球面となる絡み目で分岐する $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆に対して，$\lim_{n_1,...,n_d\to\infty}|H_1(M_{n_1,...,n_d};\mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$ は $\mathbb{Z}_p$ において収束する．

Theorem 1.2 の証明には，多変数多項式の巡回終結式と呼ばれる対象の p 進収束性を用いる (Theorem 2.1)．巡回終結式定義や結果については，Section 2 でまとめる．Section 3 では，Theorem 2.1 と，Mayberry–Murasugi, Porti らによるホモロジーの位数を計算する公式 (Theorem 3.1) を用いて，Theorem 1.2 を証明する．Section 4 では，具体例として k-twisted Whitehead link ($k\in\mathbb{Z}_{>0}$) に対する p 進極限値の計算結果を紹介する．講演では計算方法について言及しなかったが，k が偶数の場合は計算が簡単なので，計算方法も併せて紹介する．Section 5 では，Theorem 1.2 の極限値が，p 進トーションという CW 複体の不変量と一致することを紹介する (Theorem 5.1)．Section 6 では，現在残っている課題を共有する．

2. 巡回終結式

Theorem 1.2 は，整数係数多項式の巡回終結式というものの p 進的ふるまいから従う．そのため本節では，巡回終結式とその p 進収束性を紹介する．

R を整域とする．t を変数とする多項式 $f,g\in R[t]$ に対して，

$$f=a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots a_0,$$
$$g=b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots b_0,$$

$a_m,b_n\neq 0$ とおく．f と g の**終結式** $\mathrm{Res}(f,g)$ を，Sylvester 行列

$$\mathrm{Syl}(f,g)=\begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

の行列式を用いて，

$$\mathrm{Res}(f,g)=\det\mathrm{Syl}(f,g)$$

によって定める．正の整数の組 $n_1,...,n_d\in\mathbb{Z}^d$ をとる．整数係数多変数多項式 $f(t_1,...,t_d)\in\mathbb{Z}[t_1,...,t_d]$ に対して，各変数について反復的に終結式をとることで，

$$r_{n_1,...,n_d}(f)=\mathrm{Res}(t_1^{p^{n_1}}-1,...,\mathrm{Res}(t_d^{p^{n_d}}-1,f))$$

を定義する．[7] において，$d=1$ の場合，すなわち一変数多項式に対する $r_n(f)$ の p 進収束性を証明した．今回，これを多変数に拡張した．

Theorem 2.1. 多重数列 $(r_{n_1,...,n_d}(f))$ は $\mathbb{Z}_p$ で収束する．

Remark 2.2. 数列 $(r_{n_1,...,n_d}(f))$ が収束する場合，$n=n_1=\cdots n_d$ を満たす部分列 $(r_{n,...,n}(f))$ もまた同じ値に収束する．

また，定理の証明から自然に次も分かる．

Corollary 2.3. ある組 $(m_1,...,m_d)\in\mathbb{Z}^d_{>0}$ に対して，$\varphi_i(t_i)\mid t_i^{p^{m_i}}-1$ $(1\geq i\geq d)$ なる多項式 φ_i をとる．このとき，$n_i\geq m_i$ における多重数列

$$\mathrm{Res}(\frac{t_1^{p^{n_1}}-1}{\varphi_1(t_1)},\mathrm{Res}(\frac{t_2^{p^{n_2}}-1}{\varphi_2(t_2)},...,\mathrm{Res}(\frac{t_d^{p^{n_d}}-1}{\varphi_d(t_d)},f)))$$

は，$\mathbb{Z}_p$ で収束する．

3. Theorem 1.2 の証明

本節では，巡回終結式の収束性から Theorem 1.2 を導く．そのために，Mayberry–Murasugi, Porti らによる結果を紹介する．M を整ホモロジー 3 球面とする．被覆変換群が有限アーベル群 G となる，絡み目 L で分岐する分岐被覆空間 $h: N \to M$ を考える．このとき，$h: N \to M$ に対応するような全射準同型写像 $\sigma: \pi_1(M-L) \to G$ が存在するのであった．G から $\mathbb{C}^*$ への準同型写像全体を $\hat{G}$ とする．絡み目 $L = l_1 \cup \cdots \cup l_d$ に対して，各成分のメリディアンを選び m_i $(1 \le i \le d)$ とする．$\xi \in \hat{G}$ に対して，L の部分絡み目 $L_\xi = \cup_{\xi(\sigma(m_i)) \neq 1} l_i$ を定め，L_ξ の成分数を $d(L_\xi)$ とする．また，L_ξ の成分の番号は $\xi_1, ..., \xi_{d(L_\xi)}$ とする．たとえば，$L_\xi = l_{\xi_1} \cup \cdots \cup l_{\xi_{d(L_\xi)}}$ となり，対応するメリディアンは $m_{\xi_1}, ..., m_{\xi_{d(L_\xi)}}$ となる．$\hat{G}^{(1)} = \{\xi \in \hat{G} \mid L_\xi\text{: one component}\}$ と定める．以上の設定で，次が成り立つ．

Theorem 3.1 ([5, Theorem 10.1], [2, Theorem 1.1])**.**

$$|H_1(N;\mathbb{Z})| = \frac{|G|}{\prod_{\xi \in \hat{G}^{(1)}} |1 - \xi(\sigma(m_{\xi_1}))|} \prod_{\xi \in \hat{G}} |\Delta_{L_\xi}(\xi(\sigma(m_{\xi_1})), ..., \xi(\sigma(m_{\xi_{d(L_\xi)}})))|. \quad (3.1)$$

Theorem 2.1 (Corollary 2.3) と Theorem 3.1 を用いて，主結果を証明する．$\mu_p(n) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{p^n} = 1,\ \zeta \neq 1\}$ とおく．まず，$\Gamma = \prod_i p^{n_i} Z_p$ とおき，Definition 1.1 における τ_Γ に対して Theorem 3.1 を適用すれば，$M_{n_1,...,n_d}$ の 1 次ホモロジーの位数が得られる．ここで，各メリディアン m_i に対して $\tau_\Gamma(m_i)$ の位数は p^{n_i} であることに注意する．このとき，(3.1) の分数部分は 1 となることがわかる．さらに，$\xi \in \hat{G}$ が走る部分を，L の部分絡み目が走るように並び替えると，$M_{n_1,...,n_d}$ のホモロジーの位数は次のように書ける．

$$\begin{aligned} |H_1(M_{n_1,...,n_d},\mathbb{Z})| &= \prod_{L' \subset L} \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_{L'_1})} \cdots \prod_{\zeta_{d(L')} \in \mu_p(n_{L'_{d(L')}})} |\Delta_{L'}(\zeta_1, ..., \zeta_{d(L')})| \\ &= \prod_{L' \subset L} |\operatorname{Res}(\frac{t_1^{p^{n_{L'_1}}} - 1}{t_1 - 1}, ..., \operatorname{Res}(\frac{t_{d(L')}^{p^{n_{L'_{d(L')}}}} - 1}{t_{d(L')} - 1}, \Delta_{L'}))|. \end{aligned}$$

ここで，添え字の $L'_1, ..., L'_{d(L')}$ は，L' の成分の番号である．これに Corollary 2.3 を適用すれば，主結果 (Theorem 1.2) が得られる．

4. 具体例

$M = S^3$ とし，L として twisted Whitehead link の場合に，$\mathbb{Z}_p^2$ 被覆のホモロジーの位数の p 進極限値を計算する．正の整数 k に対して，k-twisted Whitehead link L_k を fig. 1 の形の絡み目とする．

このとき，閉整ホモロジー 3 球面 M 上 L_k で分岐する $\mathbb{Z}_p^2$ 被覆 $(M_{n_1,n_2} \to M)$ に対して，

$$\lim_{n_1,n_2 \to \infty} |H_1(S^3_{n_1,n_2};\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| =$$

$$\begin{cases} \frac{m|m|_p}{\omega_p(m|m|_p)} & \text{if } k = 2m, \\ \frac{\omega_p(2)}{2} & \text{if } k = 2m+1,\ p \neq 2 \\ (-1)^m \frac{\omega_2(m+1) - \omega_2(m)}{k} \prod_{\zeta \in \mu_2 \setminus \{-1\}} |\log_2 \frac{m\zeta + m + 1}{m\zeta + m + \zeta}|_2 \log_2 \frac{m\zeta + m + 1}{m\zeta + m + \zeta} & \text{if } k = 2m+1,\ p = 2. \end{cases}$$

となる．ここで，$|\cdot|_p$ は正規化された p 進絶対値とし，ω_p はタイヒミュラー指標とする．ただし，m が偶数の場合は $\omega_2(m) = 0$ と定める．また，$\mu_2 = \cup_{n \ge 1} \mu_2(n)$ と

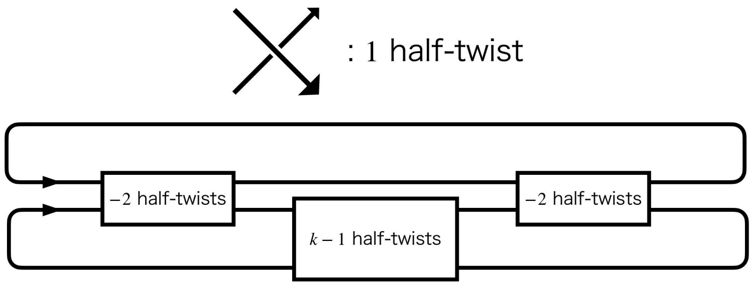


Figure 1. L_k

する．ここでは $k=2m$ の場合の計算方法を見る．L_k の Alexander 多項式は次の形である ([6, Proposition 12.2])．

$$\Delta_{L_k}(t_1,t_2)=\begin{cases} m(1+t_1t_2-t_1-t_2) & \text{if } k=2m,\ m\geq 1 \\ 1+m-m(t_1+t_2)+(1+m)t_1t_2 & \text{if } k=2m+1,\ m\geq 0. \end{cases}$$

L_k の任意の 1 成分部分絡み目 L' は自明な結び目であるため，$\Delta_{L'}(t_1,t_2)=1$ となる．よって，Theorem 1.2 の証明をふまえると，$H_1(M_n;\mathbb{Z})$ の位数は以下のように書ける．

$$|H_1(S^3_{n_1,n_2};\mathbb{Z})|=\prod_{\zeta_1\in\mu_p(n_1)}\prod_{\zeta_2\in\mu_p(n_2)}|m(1+\zeta_1\zeta_2-\zeta_1-\zeta_2)|.$$

右辺を変形していくと，

$$\begin{aligned}|H_1(S^3_{n_1,n_2};\mathbb{Z})| &= \prod_{\zeta_1\in\mu_p(n_1)}\prod_{\zeta_2\in\mu_p(n_2)}|m(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)| \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)}\prod_{\zeta_1\in\mu_p(n_1)}\left(|1-\zeta_1|^{p^{n_2}-1}\prod_{\zeta_2\in\mu_p(n_2)}|1-\zeta_2|\right) \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)}\prod_{\zeta_1\in\mu_p(n_1)}\left(|1-\zeta_1|^{p^{n_2}-1}p^{n_2}\right) \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)}p^{n_1(p^{n_2}-1)+n_2(p^{n_1}-1)}.\end{aligned}$$

となる．よって，non-p part の位数は $(m|m|_p)^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)}$ となり，$n_1,n_2\to\infty$ で $m|m|_p/\omega_p(m|m|_p)$ に収束することが分かる．

$k=2m+1$ の場合も基本的には同様の計算方法であるが，少し技巧的な計算が必要になる．

5. p 進トーション

2020 年に，Kionke [3] は p 進トーションというホモトピー不変量を定義した．本節では，主結果の p 進極限値と p 進トーションとの関係について紹介する．まず，p 進トーションの定義を簡単に紹介する．有限 CW-複体 X に対して，$\tilde{X}$ を X の普遍被覆とし，X の部分集合 A をとる．G を開副 p-群を部分群に持つ副有限群とし，$\varphi:\pi_1(X)\to G$ を群準同型写像とする．開部分群 $\Gamma\subset\pi_1(X)$ に対して，Γ に対応する X の不分岐被覆を $h_\Gamma:\tilde{X}/\Gamma\to X$ と表記する．また，R を $1/p$ を含む単位的可換環とし，有限生成アーベル群 H のトーション部分群を tors$H$ によって表す

ことにする．このとき，j 番目の p 進トーションとは

$$t_j^{[p]}(X,A;\varphi,R) := \#_p^G(\mathrm{tors}\varinjlim_{N<G} H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N),A_N;R)) \tag{5.1}$$

によって定義されるものである．ここで，$\#_p^G$ は集合の位数を p 進的に補完する関数であり，有限集合に対してはその位数を，p 進的に "許容的" な ("admissible"[3, Definition 4.2]) 無限集合については，$\mathbb{Z}_p$ あるいは ∞ に値をとるものである (詳しくは [3, Section 4])．また，N は G の開正規部分群を亙り，$A_N = h_{\varphi^{-1}(N)}^{-1}(A)$ とする．

本節の結果は次である．

Theorem 5.1. M を整ホモロジー 3 球面とし，d 成分絡み目 L に対して，アレキサンダー多項式 $\Delta_L(t_1,...,t_d)$ が $(1,...,1)$ 以外の 1 の p べき根対で 0 にならないとする．$N(L)$ を M における L の管状近傍とし，$E(L)=M-\mathrm{int}N(L)$ とおく．このとき，

$$\lim_{n_1,...,n_d\to\infty}|H_1(M_{n_1,...,n_d};\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = t_2^{[p]}(E(L),\partial E(L);\varphi,\mathbb{Z}[1/p]).$$

証明は，Kionke による "近似定理" を利用する．

Theorem 5.2 ([3, Theorem 5.11])**.** $\cap_n N_n=\{1\}$ をみたす G の正規閉部分群の列 $N_1\supset N_2\supset N_3\supset\cdots$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}|\mathrm{tors}H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N_n)),A_{N_n};R| = t_j^{[p]}(X,A;\varphi,R)$$

が成り立つ．

Theorem 5.1 の証明. $n=n_1=\cdots=n_d$ の場合を考え，$M_n=M_{n,...,n}$ とおく．このとき Remark 2.2 より，

$$\lim_{n_1,...,n_d\to\infty}|H_1(M_{n_1,...,n_d};\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = \lim_{n\to\infty}|H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| \tag{5.2}$$

である．$X=E(L)$ とおく．$\Gamma=(p^n\mathbb{Z}_p)^d$ に対応する被覆空間を $h_n: X_n\to X$ とする．(5.2) とあわせれば，Theorem 5.2 より，

$$|\mathrm{tors}H^2(X_n,\partial X_n;\mathbb{Z}[1/p])| = |H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$$

を示せればよい．まず，

$$|\mathrm{tors}H^2(X_n,\partial X_n;\mathbb{Z}[1/p])| = |\mathrm{tors}H^2(X_n,\partial X_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$$

であるから，$\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーを見ればよい．Lefschetz 双対より，

$$H^2(X_n,\partial X_n;\mathbb{Z})\cong H_1(X_n;\mathbb{Z})$$

を得る．Hartley–Murasugi [1, Theorem 2.1] より，

$$\mathrm{tors}H_1(X_n;\mathbb{Z})\cong \mathrm{tors}(H_1(M_n;\mathbb{Z})/\langle h_n^{-1}(L)\rangle) \tag{5.3}$$

となる．ここで，$\langle h_n^{-1}(L)\rangle$ は $h_n^{-1}(L)$ の各成分の類で生成される $H_1(M_n;\mathbb{Z})$ の部分群である．$H_1(M;\mathbb{Z})=0$ より，L の各成分 K には Seifert 曲面 Σ_K が存在する．Δ_L に対する仮定より，L は h_n で分解しない (すなわち，$\#h_n^{-1}(L)=d$)．よって各 K に対して $\partial h_n^{-1}(\Sigma_K)=e_K h_n^{-1}(K)$ (e_K は分岐指数) となるため，$H_1(M_n;\mathbb{Z})$ において $e_K[h_n^{-1}(K)]=0$ となる．e_K は被覆変換群 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ の位数 p^{nd} を割るため，特に p べきである．従って $[h_n^{-1}(K)]$ は $H_1(M_n;\mathbb{Z})$ の p-パートに含まれ，(5.3) より，

$$\mathrm{tors}H_1(X_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}\cong \mathrm{tors}H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}$$

となる． □

6. 課題

現在残っている課題を挙げる．

- Theorem 1.2 では,「すべての有限次部分被覆が有理ホモロジー 3 球面となる分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆」という仮定がついているが，一般には分岐 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆が有理ホモロジー 3 球面とならない (1 次ホモロジー群が有限にならない) 絡み目も存在する．そのような場合に，1 次ホモロジー群のトーションパートの位数に対して p 進収束性を示し，その極限値の具体例を求めよ．
- Theorem 5.1 では，絡み目が分解しないこと (Alexander 多項式が $(1, ..., 1)$ 以外の 1 の素数べき根で消えないこと) を仮定している．こちらも一般には成り立たないが，p 進トーションと一致するだろうか．

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」を開催くださり，世話人の先生方に感謝申し上げます．また，報告集の草稿を確認し，多くのコメントをくださった植木氏にも感謝申し上げます．

References

[1] Richard Hartley and Kunio Murasugi, *Homology Invariants*, Canadian Journal of Mathematics **30** (1978), no. 3, 655––670.

[2] Porti Joan, *Mayberry-murasugi' s formula for links in homology 3-spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society **132** (200405), no. 11, 3423–3431.

[3] Steffen Kionke, *On p-adic limits of topological invariants*, Journal of the London Mathematical Society **102** (2020), no. 2, 498–534, available at `https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms.12326`.

[4] H. Kisilevsky, *A generalization of a result of Sinnott*, Pacific J. Math. **Special Issue** (1997), 225–229. Olga Taussky-Todd: in memoriam. MR1610867

[5] John P. Mayberry and Murasugi Kunio, *Torsion-groups of abelian coverings of links*, Transactions of the American Mathematical Society **271** (1982), no. 1, 143–173.

[6] Sohei Tateno and Jun Ueki, *The iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p^d$-covers of links*, 2024.

[7] Jun Ueki and Hyuga Yoshizaki, *The p-adic limits of class numbers in $\mathbb{Z}_p$-towers*, 2022. preprint. arXiv:2210.06182.

[8] Hyuga Yoshizaki, *Generalized Pell's equations and Weber's class number problem*, J. Théor. Nombres Bordeaux **35** (2023), no. 2, 373–391. MR4655363

[9] ———, *The p-adic limits of iterated p-power cyclic resultants of multivariable polynomials*, 2025. preprint.

Email address: `yoshizaki.hyuga@gmail.com`

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science; 2641 Yamazaki, Noda-shi, Chiba, Japan

Twisted Whitehead 絡み目のトーション関数の零点集合について

植木 潤 (Jun Ueki)

Abstract

結び目や絡み目の群の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標がなす代数多様体上で, Reidemeister トーション関数が定める因子（零点集合に重複度の情報を備えたもの）を調べ, とくに次の 2 点を指摘する. (1) Whitehead 絡み目 W_1 の群の non-acyclic な既約表現は, $(-3,-3)$-filling を経由することで特徴付けられる. (2) twisted Whitehead 絡み目 W_k ($k \in \mathbb{Z}$) について, ホロノミー表現が乗っている指標多様体の既約成分上で, 因子の重複度は 2 である.

本稿は研究集会「結び目の数理 VII」の報告集記事であり, 内容は論文 [TTU22, BTTU23] に基づく.

1. Figure-eight knot, and twist knots

1.1 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標多様体

$K = 4_1$ (figure-eight knot) の群は

$$\pi_K = \pi_1(S^3 - 4_1) = \langle a, b \mid aw = wb \rangle$$

という表示をもつ. ここに a, b はメリディアン元であり, $w = [a, b^{-1}]$ とおく. 一般に $g \in \pi_K$ に対し

$$\mathrm{tr}\, g : \mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C});\ \rho \mapsto \mathrm{tr}\, \rho$$

という写像を考える. π_K の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標たちは, $x = \mathrm{tr}\, a$, $y = \mathrm{tr}\, ab$ によってパラメトライズされる. 表現の共役類の集合について

$$\mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C})//\mathrm{conj.} = \{\mathrm{tr}\, \rho \mid \rho \in \mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C})\}$$

という等式があり, $f(x, y) = 2x^2 - x^2y + y^2 - y - 1 \in \mathbb{Z}[x, y]$ と置くと, 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の全体と代数的集合 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0, x^2 - y - 2 \neq 0\}$ の間に自然な全単射がある.

1.2 トーション関数

π_K の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類の代表元は, $\mathbb{C}[x, y]$ の 2 次拡大に値を持つ Riley の普遍 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 $\boldsymbol{\rho}^R$ に指標多様体の座標を代入することで得られる. その Reidemeister トーションは複体の基底を選ぶことで決まる不変量であるが, 一般に境界が空でない連結な 3 次元多様体は 2 次元複体に潰れるので, 群の表示から Fox 微分によって計算することができ,

$$\tau(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}^R) = -2(x - 1) := \tau(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$$

と計算される. また, $\mathrm{Frac}\, \mathbb{Z}[x, y]$ の単元倍を除き, 局所係数ホモロジーの order を用いて $\tau(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}^R) \doteq \prod_i (\mathrm{ord} H_i(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}^R))^{(-1)^i}$ となる.

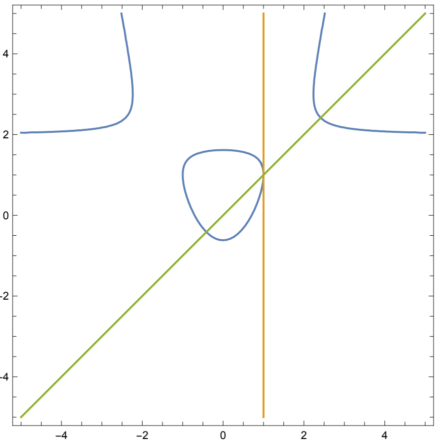
各既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ に対し, $\tau(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}^R)$ に ρ の共役類の座標を代入することで $\tau(S^3 - K, \rho)$ の値が得られ, 関数 $\tau(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}^R)$ の零点は non-acyclic な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現に対応する.

なお GL_1 普遍表現 $\boldsymbol{\rho}_1$ を考えると, K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ について $\tau(S^3 - K, \boldsymbol{\rho}_1) \doteq \Delta_K(t)/(t - 1)$ となる. この意味で $\tau(x, y)$ は Alexander 多項式の SL_2 版と考えられる.

2020 Mathematics Subject Classification Primary 57K10, 11R23; Secondary 57K31, 11S05

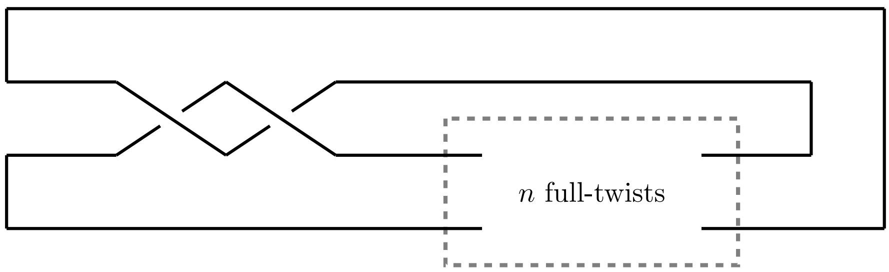
1.3 零点の位数

B.Mazur の問題 [Maz00] の, この文脈での解釈が示唆することに, 代数多様体 $f(x,y)=0$ 上の多項式関数 $\tau(x,y)$ の零点の重複度は, 繊細かつ興味深い対象である.



上の図は $\mathbb{R}^2$ での $f(x,y)=0$ と $\tau(x,y)=0$ の様子である. 2 つの曲線が共有点で接していることが見て取れる. このことは, $\tau(x,y)$ の $f(x,y)=0$ 上の零点の重複度が 2 である, と換言される.

$K=4_1$ に限らず次が言える. 各 $n\in\mathbb{Z}$ に対し twist 結び目 $J(2,2n)$ を次の図で定める.



$J(2,0)=0_1$ (unknot), $J(2,2)=3_1$ (trefoil), $J(2,-2)=4_1$ (figure-eight) である.

定理 1.1 [TTU22, Theorem B]. 任意の twist 結び目 $J(2,2n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ に対し, 記号を同様に定めたとき, トーション関数 $\tau(x,y)$ の指標多様体 $f(x,y)=0$ 上の零点の重複度は 2 である.

同様の性質は他の結び目についても見られ, 一般に次が期待される.

予想 1.2. 一般に素な双曲結び目 K に対し, ホロノミー表現を含む既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の多様体上で, トーション関数の零点の重複度は 2 であろう.

1.4 幾何学的な解釈

定理 1.3 [TTU22, Theorems C,D]. 任意の twist 結び目 $J(2,2n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ について,

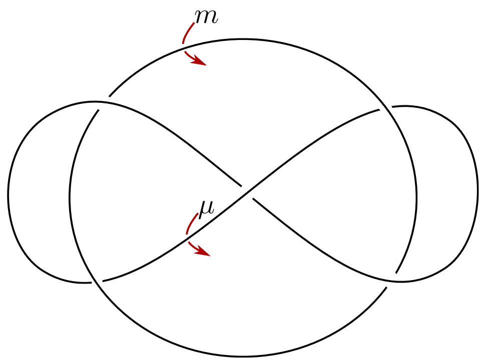
$$\rho \text{ が non-acyclic} \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \rho \text{ は } -3\text{-filling を経由し, かつ } \operatorname{tr}\rho(a^{-1}w^n)=-1$$

という同値性がある.

なお一般の体 $\mathbb{F}$ 上で, $A\in\mathrm{SL}_2\mathbb{F}$ について, $\operatorname{ord}A=3 \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{tr}A=-1$ という同値性がある.

2. Whitehead link

Whitehead 絡み目 W_1 は次の図で定義される.



W_1 の群は表示

$$\pi_{W_1} = \pi_1(S^3 - W_1) = \langle m, \mu \mid m\omega = \omega\mu \rangle,$$

$\omega = \omega(m,\mu)$ を持つ. 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現は $x = \operatorname{tr} m$, $y = \operatorname{tr}\mu$, $z = \operatorname{tr} m\mu$ によってパラメトライズされ, 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の代数多様体とトーション関数は, それぞれ

$$f(x,y,z) = xyz^2 - z(x^2+y^2+z^2) + xy + 2z,$$
$$\tau(x,y,z) = -2(x+y-z-2)$$

によって与えられる.

定理 2.1 [BTTU23]. (1) $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ について, 次の同値性がある:

$$f = 0 \text{ かつ } \tau = 0 \underset{\text{iff}}{\iff} x+y-1 = 0 \text{ かつ } z+1 = 0$$

$\underset{\text{iff}}{\iff}$ $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ に共役類が対応する既約表現 ρ は, $(-3,-3)$-filling を経由する.

(2) P を $f = \tau = 0$ 上の generic な点とすれば, 環の局所化について

$$(\mathbb{C}[x,y,z]/(f,\tau))_{(P)} \cong (\mathbb{C}[x,y,z]/((x+y-1)^2, z+1))_{(P)}.$$

この環の長さから, $f = 0$ 上での τ の零点の重複度は 2 である.

$(-3,-3)$-filling によって得られる空間 $W(-3,-3)$ は 2 つのレンズ空間の連結和 $L(3,1)\#L(3,1)$ であり, その基本群は三角群 $\Gamma(3,3,\infty)$ と同型である. (1) の系として, $L(3,1)\#L(3,1)$ の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現は全て non-acyclic である.

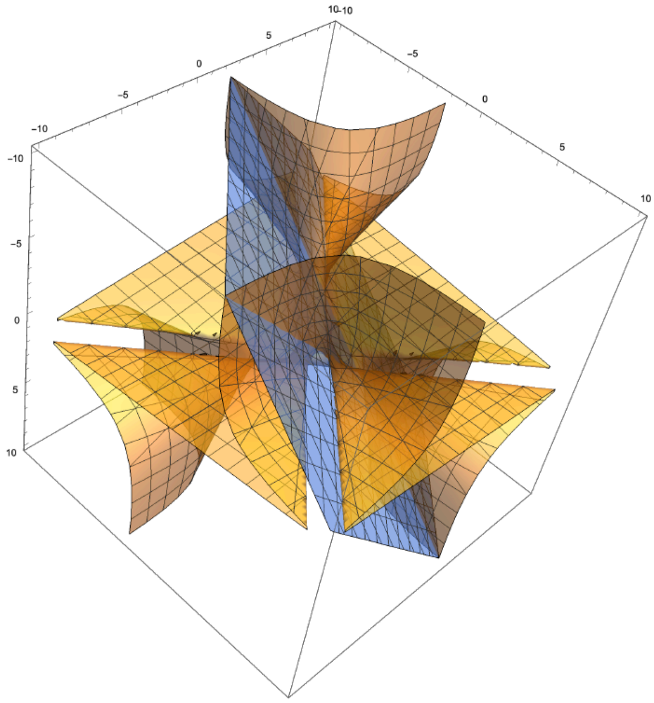
なお W_1 の第 2 成分に対する -3-filling を経由する指標全体がなす部分多様体は $\{x+y-1 = 0, z+1 = 0\} \cup \{x-y-1 = 0, z-1 = 0\}$ である. W_1 の第 1 成分に $1/n$-filling を施すと $S^3 - J(2,2n)$ が得られ, 前節で述べた twist 結び目 $J(2,2n)$ に対する既存の結果が復元される.

$f = 0$ 上の点 (a,b,c) 周りでの陰関数を $z = z_f(x,y)$ とし, $L(x,y) = \tau(x,y,z_f(x,y))$ と定める. このとき (a,b) 周りでの $L(x,y)$ の Taylor 展開を同じ記号 $L(x,y)$ で表せば, (2) より, 極大イデアル $\mathfrak{m} = (x-a, y-b) \subset \mathbb{C}[\![x-a, y-b]\!]$ に対し $L(x,y) \in \mathfrak{m}^2$ かつ $L(x,y) \notin \mathfrak{m}^3$ である. この性質は, 有限体上の表現の CDVR 上の普遍変形 $\boldsymbol{\rho}$ に付随する "代数的 L 関数" $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\rho}}$ に遺伝する.

因子の零点の重複度という概念には長い歴史があり, 交叉重複度と深い関係がある. 今回我々は [Sha13, Chapter 3] に従って由緒ある方法で零点の重複度を定義し, Serre の交叉公式 (cf. [Har77, Appendix A]) を用いて局所環の長さを用いて重複度を計算した.

$f(x,y,z) = 0$ と $\tau(x,y,z) = 0$ を $\mathbb{R}^3$ 内に図示すると次のようになる.

植木 潤 (Jun Ueki)

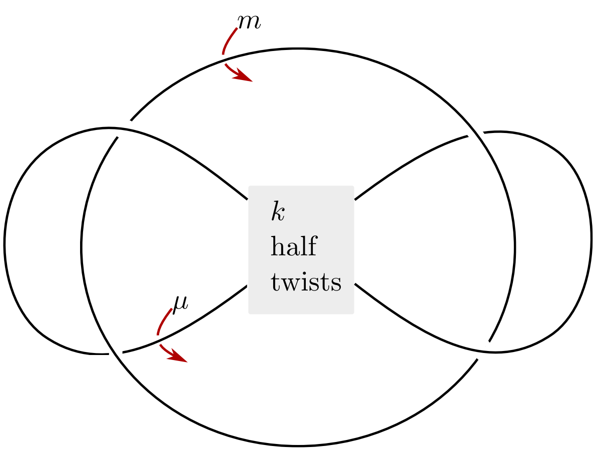


W_1 の non-acyclic 表現の特徴付けは, 次の一般的な事実の系と捉えることができる. これは閉 3 次元多様体に対する [Kit94, Main Theorem] の, 境界付き version である.

定理 2.2 [BTTU23]. M を cusp つき 3 次元双曲多様体, N を M から filling によって得られる Seifert 多様体とし, N の base orbifold は Euler 数 $\neq 0$ であるとする. 表現 $\rho : \pi_1 M \to \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ が $\pi_1 M \twoheadrightarrow \pi_1 N$ (例外型手術) を経由し, ρ は境界上で自明であり, generic fiber を I_2 に送るとする. このとき ρ は non-acyclic である.

3. Twisted Whitehead links

各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, W_k を次の図で定義する. W_1 は Whitehead link である. なお標準的な 2 橋絡み目表示によれば $W_k = \mathfrak{b}(2, k, 2) = \mathfrak{b}(2, k+1, -2)$ となり, W_{-k} と W_{k-2} は互いに鏡映の関係にある.



W_k の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標多様体は最初に [Tra16] で計算された. 次に [Tra18] で別の方法で計算され, ホロノミー指標が属する既約成分が特定された. W_k のトーション関数は [NT19] で計算された.

なお W_k から $-1/l$-filling ($l \in \mathbb{Z}$) によって double twist knot $J(k, 2l)$ が得られ, 諸性質が遺伝する. また Borromean ring から filling によって W_{2k-1} たちが得られる.

定理 3.1 [BTTU23]. W_k の群の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 既約表現を考えた場合も, 既約指標の多様体の, ホロノミー指標が乗っている既約成分 $f = 0$ 上では, τ の零点の重複度は 2 である. 他の既約成分上では, τ の零点の重複度は 1 である.

証明. $v = \mathrm{tr}\,\mu m \mu^{-1} m^{-1} = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$ とおき, f, τ を $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ の元と見れば, 環 $\mathbb{C}[x, y, z, w]/(f, \tau, v - (x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2))$ の generic な点での局所化から得られる. □

一般の W_k に対する non-acyclic 表現の具体的な幾何的特徴付けは, まだ得られていない:

問題 3.2. W_1 に対する $W(-3, -3) \cong L(3, 1)\#L(3, 1)$ に当たるものを, 一般の W_k に対して見つけよ.

謝辞.
研究集会「結び目の数理 VII」の世話人の先生方, また共同研究者である Léo Benard, Anh T. Tran, 丹下稜斗氏らに感謝します. 主に本稿著者のライフイベント等の都合により, 初報からもう何年も経ってしまいましたが, 近日中に論文 [BTTU23] の大幅に改訂した最新版を arXiv にて公開の予定です. 本研究の一部は, JSPS 科研費 JP19K14538 および JP23K12969 の助成を受けたものです.

References

BTTU23 Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic* SL_2*-representations and L-functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.

Har77 Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR 463157

Kit94 Teruaki Kitano, *Reidemeister torsion of Seifert fibered spaces for* $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$*-representations*, Tokyo J. Math. **17** (1994), no. 1, 59–75. MR 1279569

Maz00 Barry Mazur, *The theme of p-adic variation*, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 433–459. MR 1754790 (2001i:11064)

NT19 Hoang-An Nguyen and Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of twisted Whitehead links*, New York J. Math. **25** (2019), 1240–1258. MR 4028833

Sha13 Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, third ed., Springer, Heidelberg, 2013, Varieties in projective space. MR 3100243

Tra16 Anh T. Tran, *Character varieties of* $(-2, 2m+1, 2n)$*-pretzel links and twisted Whitehead links*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 2, 1650007, 16. MR 3463852

Tra18 ———, *The A-polynomial 2-tuple of twisted Whitehead links*, Internat. J. Math. **29** (2018), no. 2, 1850013, 14. MR 3770936

TTU22 Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots, −3-Dehn surgeries, and L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

植木 潤 (Jun Ueki) uekijun46@gmail.com
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan