

# Vassiliev 不変量の基本定理の別証明

岩元 悠一郎 (信州大学) \*

## 概要

結び目の交点の上下の情報を落として特異点にしたものを特異結び目という. 任意の結び目不変量は特異結び目の不変量に拡張できる.  $m$  個の特異点を持つ特異結び目に対してを返すような不変量を  $m$  次の Vassiliev 不変量という. 不変量の基本定理は  $m$  次の Vassiliev 不変量の空間が order  $m$  の chord 図の空間に同型であるという主張である. 本講演では D. Bar-Natan と A. Stoimenow による予想をもとにこれの 3 次における別証明を与える.

## 1 Vassiliev 不変量

### 1.1 特異結び目の空間と Vassiliev 不変量

埋め込み  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  に対して, 像  $f(S^1)$  を結び目,  $f$  自体を向き付けられた結び目と呼ぶ. また, 埋め込み  $f: (S^1)^{\sqcup k} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (k \geq 2)$  を絡み目,  $f$  自体を向き付けられた絡み目と呼んだ. 図 1, 2, 3 は結び目, 絡み目の例である. 2 つの結び目が isotopy で移りあうとき, 2 つの結び目を同一視する. 結び目を図示するときは, 下側を通る弧を切って表すことで交点における上下の情報を与える. また, 交点は横断的な二重点のみ許すこととし, そうでないときは適切な形に isotopy 変形をする.

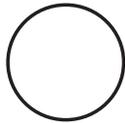


図 1 Trivial knot



図 2 Trefoil



図 3 Hopf link

**定義 1.1.** 横断的な二重点のみを許した  $S^1$  の埋め込み  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を特異結び目と呼ぶ. また, 横断的な二重点を特異点と呼び,  $m$  個の特異点を持つ特異結び目を  $m$  特異結び目と呼ぶ.

**定義 1.2.**  $K, J$  を  $m$  特異結び目とする.  $\mathbb{R}^3$  の向きを保つ同相写像  $\varphi$  と  $S^1$  の向きを保つ同相写像  $\psi$  が存在して, 次が成り立つとき,  $m$  特異結び目  $K, J$  は互いに isotopic であるという.

$$K = \varphi \circ J \circ \psi \tag{1.1}$$

Isotopic であるという関係は同値関係である. この同値関係による同値類を特異結び目の isotopy class と呼ぶ. また,  $m$  特異結び目 isotopy class の集合を  $\mathcal{K}_m^0$  と書く.

---

\* mail:IwamotoY.math@gmail.com

**定義 1.3.** 次で  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  上の関係を定める.

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \quad (1.2)$$

ただし, (1.2) の図式はそれぞれ, その外側では同じ結び目であり, 交点の情報だけが異なる結び目であることを表す. この関係を differential relation と呼び, (DR) で表す.

$m$  特異結び目の isotopy class の張るベクトル空間  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  を (DR) で割った空間  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/(DR)$  も単に  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  で表す.

**定義 1.4.** 線型写像  $\delta: \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  を次で定める.

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \quad (1.3)$$

この  $\delta$  が well-defined であることは, differential relation によって担保される. (1.3) における  $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$ ,  $\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}$  はそれぞれ正交点, 負交点と呼び, 互いに 1 回の交差交換で移り合う.

任意の向き付けられた結び目の不変量  $f$  は, 次の式で 1 特異結び目の不変量へ拡張できる.

$$\delta^*(f)\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) := f \circ \delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) \quad (1.4)$$

また,  $\delta^*$  を結び目不変量の微分と呼ぶ.  $K \in \mathcal{K}_m^0$  の  $m$  個ある特異点  $s_1, \dots, s_m$  を正負に分解して得られる結び目を  $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}$  と書くことにする. ただし,  $s_i$  を正 (負) の交点に解消するとき  $\varepsilon_i = +1(-1)$ . 次のように (1.4) を  $m$  特異結び目の不変量に拡張する.

$$(\delta^*)^m(f)(K) := \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m f(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}) \quad (1.5)$$

**定義 1.5.** 特異結び目の不変量  $f$  が次を満たすとき,  $f$  を  $m$  次以下の Vassiliev 不変量という.

$$(\delta^*)^{m+1}(f) = 0 \quad (1.6)$$

**定義 1.6.**  $S^1$  を向き付けられた円周とし,  $\mathcal{P} = \{(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m)\}$  を  $S^1$  上の互いに異なる  $2m$  個の点による  $m$  個の対の集合とする.

このとき, 組  $(S^1, \mathcal{P})$  を chord 図と呼び, 向き付けられた円周とその上の点  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$  に対して,  $p_i$  と  $q_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を結ぶ chord を書いて図示する. ただし, 対は順序を考慮しないものとする. 2 つの chord 図  $D, D'$  が  $2m$  個の点の順序を変えないような  $S^1$  の同相写像で移り合うとき,  $D, D'$  は同じ chord 図とみなす. また,  $m$  本の chord を持つ chord 図全体の集合を  $\mathcal{D}_m^0$  と書く.

**定義 1.7.** 写像  $F: \mathcal{K}_m^0 \rightarrow \mathcal{D}_m^0$  を次のように定義する.  $m$  特異結び目  $K \in \mathcal{K}_m^0$  上の特異点を  $s_1, \dots, s_m$  とする. 埋め込み  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  によって  $f(p_1) = f(q_1) = s_i, (p_i \neq q_i, i = 1, \dots, m)$  となるとき,  $F(K)$  を  $\mathcal{P} = \{(p_i, q_i)\}_{i=1, \dots, m}$  が表す chord 図と定義する.

$F$  の線型拡張した写像  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0$  も同じ記号  $F$  で表す.  $F$  は図 4 のように, 自然に chord 図をつくる写像と考えてよい. また, chord  $(p_i, q_i)$  について,  $S^1 \setminus \{p_i, q_i\}$  に  $\mathcal{P}$  の元が属さない連結成分が存在するとき, chord  $(p_i, q_i)$  を孤立 chord (isolated chord) と呼ぶ. 図 4 中の chord  $(p_4, q_4)$  は孤立 chord の例である.

**命題 1.8.** 次の列は完全列である.

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 \xrightarrow{F} \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0 \quad (1.7)$$

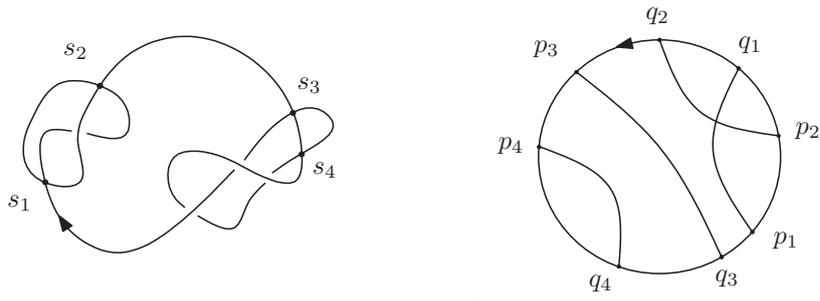


図4 Chord 図の作り方の例

## 1.2 特異結び目あるいは Chord 図における 1-term relation と 4-term relation

**定義 1.9.** はめ込み  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  に対し,  $\#f^{-1}(s) = 3$  となる点  $s$  において,  $f$  (の像) が横断的に交わる時, この点  $s$  を triple point と呼ぶ. また,  $f$  (の像) の上で特に指定された 1 点のことを marked point と呼ぶ. Triple point, marked point は図 5, 7 のように表す. 1 つの triple point と  $m - 2$  個の特異点を持つ

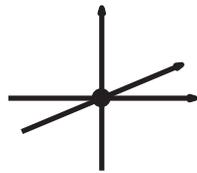


図5 Triple point

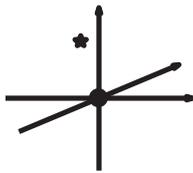


図6 弧に指定のある triple point



図7 Marked point

つ特異結び目であって, 図 6 のように triple point に集まる 3 本の弧のうち 1 つが指定されたものと, 1 つの marked point と  $m - 1$  個の特異点を持つ特異結び目の isotopy class の集合を  $\mathcal{K}_m^1$  で表す. ただし, triple point に集まる 3 本の弧のうち別の弧が指定した特異結び目は  $\mathcal{K}_m^1$  の元としては違うものとする.

$$\mathcal{K}_m^1 := \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \begin{array}{c} \star \\ | \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{ with } m - 2 \text{ singular points, } \text{---} \text{ with } m - 1 \text{ singular points} \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

また, これらの特異結び目の isotopy class によって張られるベクトル空間を  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1$  で表すが,  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  と同じように,  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1$  を  $(DR)$  で割った空間  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 / (DR)$  も単に  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1$  で表す.

**定義 1.10.** 線型写像  $\partial_1^{\mathcal{K}_m} : \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  を次で定める.

$$\partial_1^{\mathcal{K}_m} \left( \begin{array}{c} \star \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) := \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad (1.9)$$

$$\partial_1^{\mathcal{K}_m} \left( \text{---} \right) := \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (1.10)$$

**定義 1.11.** 次で, topological 4-term relation 及び topological 1-term relation を定義する.

形式和  $\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$  を 4T-knots,  $\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$  を 1T-knot で表すことにする.

- $(\mathbb{QK}_m^0)^*$  の元  $f$  に対し,

$$f(4T\text{-knots}) = 0 \quad (1.11)$$

が常に成立するとき,  $f$  は topological 4-term relation (T4T) を満たすという.

- $(\mathbb{QK}_m^0)^*$  の元  $f$  に対し,

$$f(1T\text{-knots}) = 0 \quad (1.12)$$

が常に成立するとき,  $f$  は topological 1-term relation (T1T) を満たすという.

ただし, 4-term relation における 4 項は図 8 のように triple point の指定された弧を各方向 N, S, E, W (北, 南, 東, 西) に少しずらして得られる 4 つの図を表す.

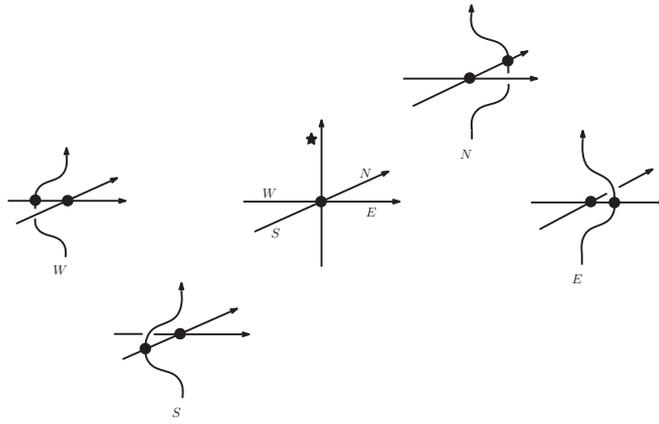


図 8 4-term relation における 3 重点と 4 つの図式 N, E, S, W

$f \in (\mathbb{QK}_m^0)^*$  が (T1T), (T4T) を満たすことは,  $f \in (\mathbb{QK}_m^0 / \text{Im } \partial \mathcal{K}_m)^*$  であることと同じである.

**定義 1.12.** Triple point や marked point を表す chord を次の図 9, 10 のように図示する.

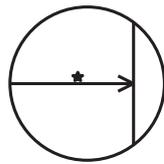


図 9 Triple point を表す chord



図 10 Marked point

1 つの triple point を表す chord と  $m - 2$  本の chord を持つ chord 図や, 1 つの marked point と  $m - 1$  本の chord を持つ chord 図全体の集合を  $\mathcal{D}_m^1$  で表す (ただし  $3 \leq m$  である).

$$\mathcal{D}_m^1 := \left\{ \left( \text{circle with triple point chord} \right) \text{ with } m - 2 \text{ chords}, \left( \text{circle with marked point} \right) \text{ with } m - 1 \text{ chords} \right\} \quad (1.13)$$

また, これらの chord 図によって張られるベクトル空間を  $\mathbb{QD}_m^1$  で表す.

**定義 1.13.** 線型写像  $\delta: \mathbb{QK}_{m+1}^1 \rightarrow \mathbb{QK}_m^1$  を  $\delta: \mathbb{QK}_{m+1}^0 \rightarrow \mathbb{QK}_m^0$  と同様に定義する. ただし, 分解する特異点は triple point, marked point 以外を選ぶことにする.

**定義 1.14.** 線型写像  $F: \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1$  を  $F: \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0$  と同様に定義する. ただし, triple point, marked point については次の対応で定める.

$$F\left(\begin{array}{c} \star \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \star \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right), \quad (1.14)$$

$$F\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array}\right), \quad (1.15)$$

**定義 1.15.** 線型写像  $\partial_1^{\mathcal{D}_m}: \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0$  を次で定める.

$$\partial_1^{\mathcal{D}_m}\left(\begin{array}{c} \star \\ \text{---} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) \quad (1.16)$$

$$\partial_1^{\mathcal{D}_m}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array}\right) \quad (1.17)$$

ただし, 注目している triple point に対応する chord と marked point に対応する chord のみが描かれているが, 通常の chord は描けていないだけで両辺とも同じ chord が配置されているとする.

**定義 1.16.** 次で 4-term relation, 1-term relation を定義する.

形式和  $\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$  を 4T-diagrams,  $\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array}\right)$  を 1T-diagram で表すことにする.

- $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0)^*$  の元  $f$  に対し, 
$$f(4T\text{-diagrams}) = 0 \quad (1.18)$$

が常に成立するとき,  $f$  は 4-term relation (4T) を満たすという.

- $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0)^*$  の元  $f$  に対し, 
$$f(1T\text{-diagram}) = 0 \quad (1.19)$$

が常に成立するとき,  $f$  は 1-term relation (1T) を満たすという. ただし, 1T-diagram の chord 図に描かれている chord は孤立 chord を表す.

$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0)^*$  が (1T), (4T) を満たすことは,  $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m})^*$  であることと同じである.

**命題 1.17.** [cf. [3, 定理 7.2]] 線型写像  $\delta: \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  は  $\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}}$  でも定義され, さらに,  $\delta: \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$  は単射である.

**命題 1.18.** 次の横 2 列は完全列であり, 図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^1 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

## 2 Vassiliev 不変量の基本定理

### 2.1 Vassiliev 不変量の基本定理

**定義 2.1.**  $\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m}$  の双対空間  $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m})^*$  の元のことを weight system と呼ぶ.

Vassiliev 不変量の基本定理とは次の定理のことである.

**定理 2.2** (cf. [2, Theorem4.5]). order  $m$  の weight system の空間  $(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m})^*$  と  $m$  次の Vassiliev 不変量の空間  $(\mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1})$  は同型である. つまり,

$$(\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m})^* \cong \mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1}. \quad (2.1)$$

本質的には chord 図の空間の不変量である weight system から Vassiliev 不変量を構成することができるという主張である.

この定理はすでに証明されている. M. Kontsevich によって導入された Kontsevich 積分は, この発見によって Vassiliev 不変量の基本定理の全ての次数  $m$  についての証明となる.

### 2.2 D. Bar-Natan と A. Stoimenow による予想

より自然でトポロジカルな証明方法があるのではないかという考えのもと, D.Bar-Natan と A.Stoimenow は [1] で次のような予想を残している.

**予想 2.3** (cf. [1, Conjecture 1.13]). 任意の不変量  $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_m})^*$  に対して,  $g \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m-1}^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m-1}})^*$  が存在し, 次ををみます.

$$\delta^*(f) = g \quad (2.2)$$

## 3 Vassiliev 不変量の基本定理の証明

### 3.1 予想 2.3 の言い換え

命題 1.18 で可換であることが示された可換図式を自然に拡張し, これに snake lemma を適用することで, 次の列が完全列となるような写像  $d$  が存在することがわかる.

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 \xrightarrow{\delta} \ker \partial^{\mathcal{K}_m} \xrightarrow{F} \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \xrightarrow{d} \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{K}_m} \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m} \quad (3.1)$$

以下は拡張後の可換図式と, 写像  $d$  をまとめた図式である.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^1 & \xrightarrow{\delta} & \ker \partial^{\mathcal{K}_m} & \xrightarrow{F} & \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^1 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 & \xrightarrow{F} & \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_m} & \longrightarrow & \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{D}_m} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

予想 2.3 は完全列 3.1 によって、代数的に次のように言い換えられる。

$$\delta^* : (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_m})^* \rightarrow (\mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}})^* \text{ が全射である.} \quad (3.2)$$

$$\iff \delta : \mathbb{Q}\mathcal{K}_{m+1}^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0 / \text{Im } \partial^{\mathcal{K}_m} \text{ が単射である.} \quad (3.3)$$

$$\iff F : \ker \partial^{\mathcal{K}_m} \rightarrow \ker \partial^{\mathcal{D}_m} \text{ が全射である.} \quad (3.4)$$

### 3.2 $m = 3$ における予想 2.3 の証明

この節では  $m = 3$  において  $F|_{\ker \partial^{\mathcal{K}_m}}$  が全射であることを示し、これをもって予想 2.3 の証明とする。そのための準備として、 $\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^0, \mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1$  の基底達を描き出す。すると、次のように  $\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^0$  は 5 つ、 $\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1$  は 9 つの基底によって張られることがわかる。 $\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1$  の基底はそれぞれ  $D_A, \dots, D_I$  で表すことにする。

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^0 &= \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{c} \text{Circle with 3 vertical lines} \\ \text{Circle with 3 diagonal lines} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines} \\ \text{Circle with 3 vertical lines and 3 horizontal lines} \\ \text{Circle with 3 diagonal lines and 3 horizontal lines} \end{array} \right\} \\
\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1 &= \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{c} \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a diagonal line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a curved line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line and a curved line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a diagonal line and a curved line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line and a diagonal line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line and a curved line and a diagonal line} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line and a diagonal line and a curved line and a dot} \\ \text{Circle with 3 horizontal lines and a vertical line and a diagonal line and a curved line and a dot and a diagonal line} \end{array} \right\} \\
&= \mathbb{Q} \left\{ D_A, D_B, D_C, D_D, D_E, D_F, D_G, D_H, D_I \right\}
\end{aligned}$$

ここで、写像  $\partial^{\mathcal{D}_3} : \mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1 \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{D}_3^0$  を行列表示すると以下を得る。

$$\partial^{\mathcal{D}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

このことから  $\ker \partial^{\mathcal{D}_3}$  は、次の5つの基底によって張られることがわかる。

$$\begin{aligned} \ker \partial^{\mathcal{D}_3} &= \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}, \text{Diagram 3}, \text{Diagram 4}, \\ \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}, -\text{Diagram 7} - \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} \end{array} \right\} \\ &= \mathbb{Q} \left\{ D_A + D_B, D_C, D_D, D_E + D_F, -D_A - D_G + D_H \right\} \end{aligned}$$

次に、 $\mathbb{Q}\mathcal{D}_3^1$  の各基底に対して、これらを与える  $\mathcal{K}_3^1$  の元をひとつずつ取る。それらによって表される  $\ker \partial^{\mathcal{D}_3}$  の各基底に対応する形式和が  $\ker \partial^{\mathcal{K}_3}$  の元であることを確認する。

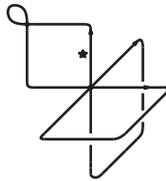


図 11  $K_A$

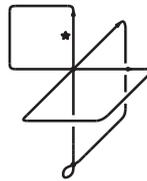


図 12  $K_B$

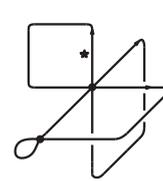


図 13  $K_C$

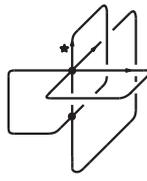


図 14  $K_D$

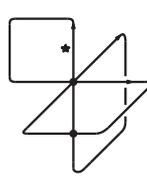


図 15  $K_E$

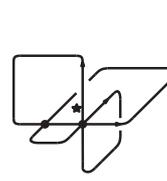


図 16  $K_F$



図 17  $K_G$



図 18  $K_H$



図 19  $K_I$

$D_A$  を与える  $\mathcal{K}_3^1$  の元として図 11 の  $K_A$  をとる。  $K_A$  は  $\partial^{\mathcal{D}_3}$  によって次のような結び目に移る。これらは  $\mathcal{K}_3^0$  の元である。ずらした方向  $N, S, E, W$  (北, 南, 東, 西) に応じて、  $K_A^N, K_A^S, K_A^E, K_A^W$  と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{Diagram } K_A &\xrightarrow{\partial} \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} & (3.6) \\ &= K_A^N - K_A^S + K_A^E - K_A^W & (3.7) \end{aligned}$$

$D_B$  を与える  $\mathcal{K}_3^1$  の元として図 12 の  $K_B$  をとる。  $K_A$  と同様に  $\partial^{\mathcal{K}_3}$  によって移った結び目達を  $K_B^N, K_B^S, K_B^E, K_B^W$  と呼ぶことにするが、  $K_A$  に向きを合わせることで、  $N, S, E, W$  に加え、  $u, d$  (上,

下) を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &\xrightarrow{\partial} \text{Diagram}_1 - \text{Diagram}_2 + \text{Diagram}_3 - \text{Diagram}_4 & (3.8) \\ &= K_B^N - K_B^S + K_B^E - K_B^W & (3.9) \end{aligned}$$

$$= K_B^N - K_B^S + K_B^E - K_B^W \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Diagram}_5 - \text{Diagram}_6 + \text{Diagram}_7 - \text{Diagram}_8 & (3.10) \\ &= K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N & (3.11) \end{aligned}$$

$$= K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N \quad (3.11)$$

$D_C, \dots, D_F$  についても図 13, 14, 15, 16 のように, それぞれを与える結び目  $K_C, \dots, K_F$  がとれて,  $\partial^{\mathcal{K}_3}$  による移り変わりも同じように考えられるので以下にまとめる. ただし,  $K_E, K_F$  はそれぞれ  $K_D$  に向きを揃えて表す.

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_A) = K_A^N - K_A^S + K_A^E - K_A^W \quad (3.12)$$

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_B) = K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N \quad (3.13)$$

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_C) = K_A^W - K_A^E + K_A^u - K_A^d \quad (3.14)$$

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_D) = K_D^N - K_D^S + K_D^E - K_D^W \quad (3.15)$$

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_E) = K_D^d - K_D^u + K_D^S - K_D^N \quad (3.16)$$

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_F) = K_D^W - K_D^u + K_D^E - K_D^d \quad (3.17)$$

さらに, これらの結び目のうち isotopy で移りあう組があるのでこれも以下にまとめる.

$$K_A^E = K_A^u, K_A^W = K_A^d, K_D^N = K_D^W, K_D^E = K_D^S. \quad (3.18)$$

基底  $D_A + D_B$  について

この基底を与える  $\mathcal{K}_3^1$  の元として  $K_A + K_B$  をとる. このとき,  $K_A^E$  と  $K_A^u$ ,  $K_A^W$  と  $K_A^d$  は互いに isotopy で移りあうため,  $K_A^E = K_A^u, K_A^W = K_A^d$  であることに注意すると,

$$\partial^{\mathcal{K}_3}(K_A + K_B) = (K_A^N - K_A^S + K_A^E - K_A^W) + (K_A^d - K_A^u + K_A^S - K_A^N) \quad (3.19)$$

$$= (K_A^N - K_A^N) + (-K_A^S + K_A^S) + (K_A^E - K_A^u) + (-K_A^W + K_A^d) \quad (3.20)$$

$$= 0. \quad (3.21)$$

故に,  $K_A + K_B \in \ker \partial^{\mathcal{K}_3}$  である. その他の基底も同様に計算して各基底を与える  $\mathcal{K}_3^1$  の元が取れる.

## 4 今後の展望

3.2 節では, 具体的な chord 図の書き出しと基底を与える結び目の計算によって, 写像  $F: \ker \partial^{\mathcal{K}_3} \rightarrow \ker \partial^{\mathcal{D}_3}$  の全射性を示した.

今後は, 同じような議論のもと, 一般の  $m$  (つまり, 全ての次数) について証明を拡張することを目標とする. その際予想される障壁として計算の煩雑さが挙げられる. 3 次についての計算は, 基底の数が少ないことが,

書き出しや計算の煩雑さを抑え、これに助けられたように感じる。実際、手計算でも、丁寧に、時間をかければやり遂げられる程度の計算であった。

しかし、4 以上に拡張する場合、 $\mathbb{Q}D_m^0, \mathbb{Q}D_m^1$  の基底の個数は組み合わせの数だけ増えていく。故に具体的に書き出す段階で計算機に頼らざるを得ないが、それには限界がある。

ここで、Kontsevich 積分について事実を確認する。Kontsevich 積分は、これを見つけてしまえば、それだけで Vassiliev 不変量の基本定理の証明になる。つまり、具体的な chord 図の書き出しや計算をする必要はなく、次数によって、構成の難しさには違いが無い。このことから、うまい定式化のもとでは、実は「Chord 図の書き出し」も「特異結び目の微分の計算」も必要ないという可能性がある。例えば、triple point を例にとって考えてみると、 $\partial$  による分解には、ずらす方向によって、北、南、東、西、上、下の 6 パターンが考えられ、triple point に集まる 3 本の弧のうち、ずらす弧の指定には 3 パターンが考えられる。各パターンについて triple point の近傍のみの計算で済ませてしまい、その外側が交差交換の差に収まること等が示せたら、「Chord 図の書き出し」や「特異結び目の微分の計算」のパートを省くことができるかもしれない。今後は、こういった、ブラッシュアップを考えていきたい。

## 5 謝辞

本研究集会への参加にあたり、講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます。また、旅費の補助も頂きましたこと、この場を借りて御礼申し上げます。参加者の皆様とは、懇親会やディスカッションで貴重なアドバイスをいくつも頂きました。最後に、信州大学の境圭一先生には日頃から熱心にご指導いただき、多くのことを教えていただきました。厚く感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] D. Bar-Natan, A. Stoimenow, *The Fundamental Theorem of Vassiliev Invariants*, arXiv: 9702009.
- [2] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (2012).
- [3] 谷山公規, 結び目理論 - 一般の位置から観るバシリエフ不変量 -, 数学のかんどころ 41 共立出版 (2023).