3 重以上の交点を持つ図式に対する 3 重絡み数の Polyak-Viro 型公式

奥原 悠朔 * (信州大学大学院総合理工学研究科)

概要

R.Brooks と R.Komendarczyk による 2024 年の論文で, 次数 2 の有限型不変量である Conway 多項式の 2 次の係数について，3 重以上の交点を許容するような図式に対する Polyak-Viro 型公式が与えられた．本講演では次数 2 の有限型不変量である Milnor の 3 重絡み数について，R.Koytcheff と I.VoliĆ による積分表示から読み替えて，3 重以上の交点を許容するような図式に対する Polyak-Viro 型の公式を与える．

1 はじめに

次数 2 の有限型不変量である Casson knot invariant c_2 について，以下の定理が証明されている．

定理 1 ([1, Theorem A])**.** *Long knot* K の図式 D_K が横断的 2 重点のみを持つとき，次の等式が成り立つ：

$$c_2(D_K) = \langle \quad , G_{D_K}\rangle.$$

ここで右辺は D_K の Gauss diagram 内の subdiagram を符号付きで数え上げた値とし，以下も同様とする．

定理 2 ([1, Theorem B])**.** *Long knot* K の図式 D_K が横断的な 3 重以上の交点を持つとき次の式が成り立つ：

$$c_2(D_K) = \langle \quad , G_{D_K}\rangle + \frac{1}{2}(\langle \quad , G_{D_K}\rangle + \langle \quad , G_{D_K}\rangle + \langle \quad , G_{D_K}\rangle).$$

同じく次数 2 の有限型不変量である Milnor triple linking number[2] について類似の定理の成立を示した．

定理 A. *Long link* L の図式 D_L が横断的な 2 重点のみを持つとき，次の等式が成り立つ：

$$\mu_{123}(D_L) = \langle \quad , G_{D_L}\rangle - \langle \quad , G_{D_L}\rangle + \langle \quad , G_{D_L}+\rangle.$$

定理 B. *Long link* L の図式 D_L が横断的な 3 重以上の交点を持つとき，次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mu_{123}(D_L) =&\langle \quad , G_{D_L}\rangle - \langle \quad , G_{D_L}\rangle + \langle \quad , G_{D_L}\rangle \\ &+ \frac{1}{2}(\langle \quad , G_{D_L}\rangle - \langle \quad , G_{D_L}\rangle + \langle \quad , G_{D_L}\rangle).\end{aligned}$$

2 Long link と図式

この節の始めに，考察の対象となる long link[1, 3] を定義する．

---

* e-mail: 23ss103j@gmail.com

定義 1. 3 成分の long link とは滑らかな埋め込み $L=(L_1,L_2,L_3):\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ で，第 i 成分は $t\geq 1$ のとき $f_i^+(t)=(t,(2-i)t,0)$ に，$t\leq -1$ のとき $f_i^-(t)=(t,(i-2)t,0)$ に一致し，$-1\leq t\leq 1$ のとき $L_i(t)\in I^3$ を満たす ($I^3=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid |x_k|\leq 1(k=1,2,3)\}$) ものをいう．

つまり 3 成分の long link とは，原点を中心とする立方体の内部で絡まり合い，立方体の外側で半直線であるような 3 本の曲線である．誤解の恐れが無い限り L の像を long link と呼ぶこともある．以降 $\mathcal{L}=\{$3 成分の long link$\}$ とする．次に定義する long link の図式の方が紙面上では扱いやすい．

定義 2. $L\in\mathcal{L}$ の図式 D_L とは，$N=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ に垂直な平面への射影の像で，交点において上下の情報をもつようなものをいう．

Long link の図式が 3 重以上の点を持つ場合に上下関係を視認しにくいので色により表現する．例えば次の図のように，3 重点は手前側の成分から青，黒，赤の順番で表す．以降図式の交点 p の符号を $\mathrm{sgn}(p)$ と書く．

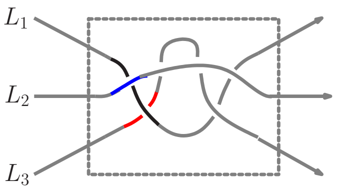

図 1　2 重点のみをもつ long link の図式の例

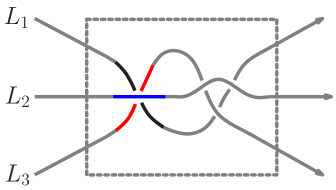

図 2　3 重点ももつ long link の図式の例

3　Arrow diagram と Gauss diagram

この節では，arrow diagram と Gauss diagram を定義する [3]．

定義 3. 3-strand arrow diagram とは，直線 $\mathbb{R}$ の 3 本のコピー (strand) と，その上の相異なる点をつなぐ向きづけられた chord からなるグラフのことをいう．

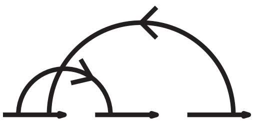

図 3　端点を共有してない arrow diagram

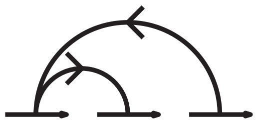

図 4　端点を共有する arrow diagram

定義 4. 3-strand Gauss diagram とは，chord に符号を与えられた 3-strand arrow diagram のことをいう．

以上の定義の下で long link の図式に Gauss diagram を対応づけられる．Long link の第 i 成分を i 番目の strand に向きを保って対応させ，図式の交点を成す 2 点が対応する strand の間に chord を張り，交点の下側の点に対応した strand 上の点から上側の点に対応した strand 上の点に向かうように chord の向きを定め，交点の符号を chord の符号とすればよい．図式 D_L に対応する Gauss diagram を G_{D_L} と書く．

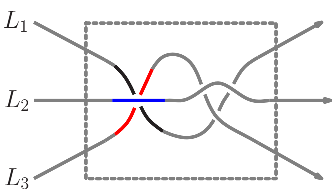

図 5　Long link L' の図式 $D_{L'}$

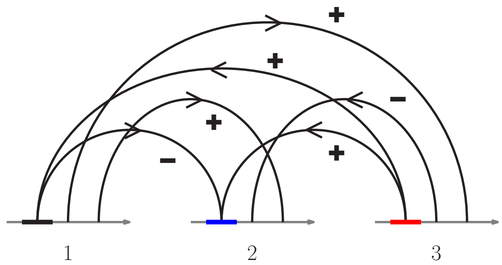

図 6　$D_{L'}$ の Gauss Diagram $G_{D_{L'}}$

Gauss diagram G_{D_L} の chord 全体から成る集合を $C(G_{D_L})$ と表し，2 つの元の（順序を考えない）組 $\{\alpha, \beta\}$ の集合を $C^2(G_{D_L})$ と表す．α の端点が i-th strand と j-th strand 上にあることを α を α_{ij} と書いたりする．

4　配置空間積分

後に定理の証明で用いる Milnor triple linking number の配置空間積分による表示について述べる．詳しいことは [4, 5] を参照されたい．始めに η_N^ε を定義する．

定義 5. η_N^ε を N を中心とした半径 ε の円盤上で台をもち，$\int_{S^2} \eta_N^\varepsilon = 1$ を満たす $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の 2-形式とする．

ここで以下の図で表した arrow diagram を X_1, X_2, X_3 として，配置空間 $F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}$ を定義する．

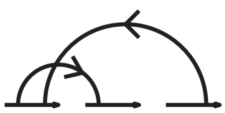

図 7　X_1

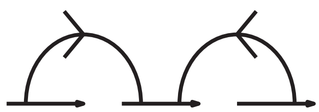

図 8　X_2

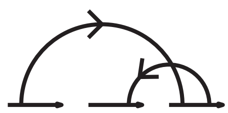

図 9　X_3

定義 6.

$$F_{X_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2\} \tag{1}$$
$$F_{X_2} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_3\} \tag{2}$$
$$F_{X_3} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 < x_4\} \tag{3}$$

つまり F_{X_k} は X_k の chord の端点に付随して定義される配置空間である．気持ちとしては上から順に元を，

第 1 成分上の相異なる 2 点，第 2 成分上の 1 点，第 3 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，
第 2 成分上の相異なる 2 点，第 1 成分上の 1 点，第 3 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，
第 3 成分上の相異なる 2 点，第 1 成分上の 1 点，第 2 成分上の 1 点からなる 4 点の配置とみなす，

定義 7. $L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対し写像 $h_{13} : F_{X_1} \to S^2$ を $h_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{L_2(x_3) - L_1(x_1)}{|L_2(x_3) - L_1(x_1)|}$ と定める．

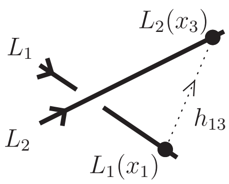

図 10　h_{13} のイメージ

つまり h_{ij} は X_k の chord に付随して定義される写像である．言葉で説明すれば h_{13} は F_{X_1} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_2(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づけている．以下同様に定義する:

$h_{42}: F_{X_1} \to S^2$; F_{X_1} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_1(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{12}: F_{X_2} \to S^2$; F_{X_2} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_2(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{43}: F_{X_2} \to S^2$; F_{X_2} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_2(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{13}: F_{X_3} \to S^2$; F_{X_3} の元を点 $L_1(x_1)$ から点 $L_3(x_3)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．
$h_{42}: F_{X_3} \to S^2$; F_{X_3} の元を点 $L_3(x_4)$ から点 $L_2(x_2)$ へ向かう単位ベクトルに対応づける．

実際は F_{X_k} や h_{ij} が L の取り方に依存するので，$F_{X_k,L}$ とか h_{ij}^L のように書くべきだが，煩わしさを回避するために L を省略する．h_{13} が F_{X_1}, F_{X_3} 上の写像を表しているが，文脈から読み取れるので混乱の恐れは無いだろう．配置空間積分について述べる前に次の定理に言及しておく．詳しいことは [6] を参照されたい．

定理 3 ([6])**.** F_{X_k} について，各 h_{ij} を $\overline{F_{X_k}}$ 上に滑らかに拡張可能な角付き多様体 $\overline{F_{X_k}}$ が存在する．$\overline{F_{X_k}}$ を F_{X_k} の *Axelrod-Singer compactification* と呼ぶ．

それでは配置空間積分 I_{X_k} を定義しよう．

定義 8. $L \in \mathcal{L}$ に対し，$I_{X_k} = I_{X_k}(L)$ を次のように定義する：

$$I_{X_1} = \int_{\overline{F_{X_1}}} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon, \quad I_{X_2} = \int_{\overline{F_{X_2}}} h_{12}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{43}^*\eta_N^\varepsilon, \quad I_{X_3} = \int_{\overline{F_{X_3}}} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon$$

これらも $I_{X_k,L}$ などと書くべきところの $L \in \mathcal{L}$ を省略する．続いて以下の図で表したグラフを Y とする．

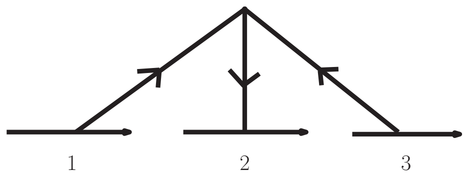

図 11　Y

定義 9.

$$F_Y = \{(x_1, x_2, x_3; x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid L_i(x_i) \neq x_4, i \neq 1, 2, 3\}.$$

つまり F_Y は Y の頂点に付随して定義される配置空間であり，集合の元は与えられた link の各成分上に 1 点ずつ，link の外側の空間に 1 点を配置したものとみなす．F_Y の Axelrod-Singer compactification については定理 3 と同様のことが成り立つ．

定義 10. $L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対して，$h_{14}, h_{42}, h_{34}: F_Y \to S^2$ を次のように定義する：

$$h_{14}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{x_4 - L_1(x_1)}{|x_4 - L_1(x_1)|}, \quad h_{42}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{L_2(x_2) - x_4}{|L_1(x_1) - x_4|}, \quad h_{34}(x_1, x_2, x_3; x_4) = \frac{x_4 - L_3(x_3)}{|x_4 - L_1(x_1)|}.$$

つまり h_{ij} は Y の辺に付随して定義される写像である．

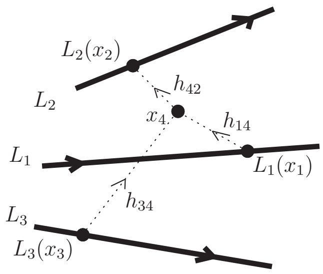

図 12　h_{14}, h_{42}, h_{34} のイメージ

それでは配置空間積分 I_Y を定義しよう．

定義 11. $\overline{F_Y}$ を F_Y の Axelrod-Singer's compactification とし，次で定義する：

$$I_Y = \int_{\overline{F_Y}} h_{14}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^* \eta_N^\varepsilon.$$

以上の定義の下で次の定理が成り立つ．

定理 4 ([4, 5]). $L \in \mathcal{L}$ に対し $\mu_{123}(L)$ を L の *Milnor triple linking number* とするとき，次の等式が成り立つ：

$$\mu_{123}(L) = I_{X_1} - I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y.$$

5　定理 A

定理 A を証明する上で用いる記号を定義する．$L \in \mathcal{L}$ に対して，$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2(G_{D_L})$ のうち次の図を成すようなものだけを集めた集合を $C^2_{X_1}(G_{D_L})$ とする．同様にして chord の位置関係を以下の図の様に替えることで $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_2}(G_{D_L})$ と $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_3}(G_{D_L})$ を定義する．

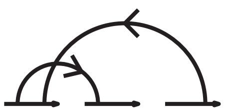

図 13　$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}$ の位置関係

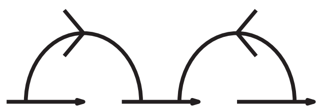

図 14　$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

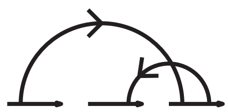

図 15　$\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

$C^2_{X_1}(G_{D_L})$ に含まれる組に対して chord の符号の積を取り，全て足し合わせた値を以下の様に表す：

$$\langle \quad , G_{D_L} \rangle = \sum_{\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2_{X_1}(G_{D_L})} \mathrm{sgn}(\alpha_{12}) \mathrm{sgn}(\alpha_{13}),$$

記号 $\langle \quad , G_{D_L} \rangle$，$\langle \quad , G_{D_L} \rangle$ については，$\langle \quad , G_{D_L} \rangle$ の $\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}, C^2_{X_1}$ の部分をそれぞれ $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_2}$ あるいは $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_3}$ に差し替えて同様に定義する．

Proof of Theorem A. D_L に対し，L_2 が上にあるような L_1 と L_2 の 2 重点を $p_1, ..., p_m$ とする．ただし p_i は $L_1(s_i)$ と $L_2(t_i)$ に対応するものとする．L_1 が上にあるような L_1 と L_3 の 2 重点を $q_1, ..., q_n$ とする．ただし q_j は $L_1(u_j)$ と $L_3(v_j)$ に対応するものとする．このとき，ε の取り方に依存した s_i の近傍 J_i^1，u_j の近傍 J_j^2，t_i の近傍 J_i^3，v_j の近傍 J_j^4 が存在して次の等式が成立する：

$$\mathrm{supp}(h_{13}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon) = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} J_i^1 \times J_j^2 \times J_i^3 \times J_j^4.$$

したがって，ε が十分に小さいとき次の等式が成立する：

$$I_{X_1} = \int_{\mathrm{supp} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \int_{J_i^1\times J_j^2\times J_i^3\times J_j^4} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon. \tag{4}$$

式（4）の第 3 辺を計算するために Hopf link $L=(L_1,L_2)$ を考え，$h: S^1\times S^1 \to S^2$ を

$$h(x_1,x_2) = \frac{L_2(x_2)-L_1(x_1)}{|L_2(x_2)-L_1(x_1)|}$$

で定義する．η_N^ε は $H_{DR}^2(S^2)$ の生成元を与えることに注意すれば次の等式が成り立つ：

$$\int_{S^1\times S^1} h^*\eta_N^\varepsilon = \mathrm{link}(L_1,L_2). \tag{5}$$

一方 L の 2 つの交点のうち L_2 が上にあるほうを p とし，p が $L_1(s)$ と $L_2(t)$ に対応するものだとすれば s と t の（小さい）開近傍 U,V が存在して $\mathrm{supp}(h^*\eta_N^\varepsilon)\subset U\times V$ となる．したがって次の等式が成立する：

$$\int_{S^1\times S^1} h^*\eta_N^\varepsilon = \int_{U\times V} h^*\eta_N^\varepsilon. \tag{6}$$

式（6）の右辺が $\int_{J^1\times J^3} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon$ や $\int_{J^2\times J^4} h_{42}^*\eta_N^\varepsilon$ に他ならない．(5) と (6) により，求める値は $\mathrm{link}(L_1,L_2)$ にほかならず，それが $\mathrm{sgn}(p)$ に等しいことが容易に確かめられる．したがって次の等式が成り立つ：

$$I_{X_1} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \Big(\int_{J^1\times J^3} h_{13}^*\eta_N^\varepsilon\Big)\Big(\int_{J^2\times J^4} h_{42}^*\eta_N^\varepsilon\Big) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \mathrm{sgn}(p_i)\mathrm{sgn}(p_j) = \sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\in C_{X_1}^2} \mathrm{sgn}(\alpha_{12})\mathrm{sgn}(\alpha_{13}). \tag{7}$$

式（7）の最後の辺は $\langle\ , G_{D_L}\rangle$ の定義式に他ならない．つまり $\varepsilon\to 0$ としたとき I_{X_1} は $\langle\ , G_{D_L}\rangle$ に収束する．同様にして以下の等式の成立が確認できる：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{X_2} = \langle\ , G_{D_L}\rangle, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_{X_3} = \langle\ , G_{D_L}\rangle.$$

F_Y の定義から，$(x_1,x_2,x_3;x_4)\in F_Y$ について，$(x_1,x_2,x_3;x_4)\in \mathrm{supp}(h_{14}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^*\eta_N^\varepsilon)$ となるような x_4 の範囲は次の図のようになる．

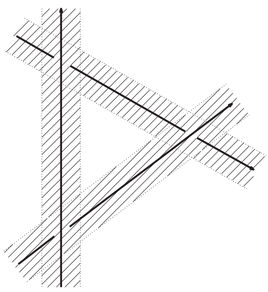

図 16　x_4 が存在しうる範囲

D_L が横断的な 2 重点しかもたないことから，ε が十分小さいとき F_Y 上で

$$\mathrm{supp}(h_{14}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^*\eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^*\eta_N^\varepsilon) = \emptyset$$

が成り立つので，$\varepsilon \to 0$ とすれば I_Y は 0 に収束する. 以上のことから，次の等式が成り立つ：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_{X_1} - I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y) = \langle\ , G_{D_L}\rangle - \langle\ , G_{D_L}\rangle + \langle\ , G_{D_L}\rangle.$$

□

6 定理 B

図式が 3 重以上の交点を持つような $L' \in \mathcal{L}$ を考える．$C^2_{X_1}(G_{D_L})$ と同様に，$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\} \in C^2(G_{D_{L'}})$ のうち次の図を成すようなものだけを集めた集合を $C^2_{X_1'}(G_{D_{L'}})$ とする．同様にして chord の位置関係を以下の図の様に替えることで $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_2'}(G_{D_{L'}})$ と $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の集合 $C^2_{X_3'}(G_{D_{L'}})$ を定義する．

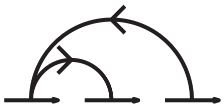

図 17　$\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}$ の位置関係

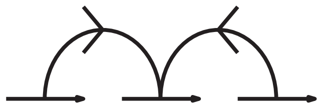

図 18　$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

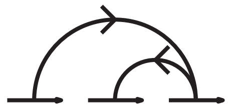

図 19　$\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}$ の位置関係

さらに定理 A のときと同様にして組を成す chord の符号の積を全て足し合わせて以下の様に表す：

$$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle = \sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\in C^2_{X_1'}(G_{D_{L'}})} \mathrm{sgn}(\alpha_{12})\mathrm{sgn}(\alpha_{13}),$$

記号 $\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$，$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$ については，$\langle\ , G_{D_{L'}}\rangle$ の $\{\alpha_{12}, \alpha_{13}\}, C^2_{X_1'}$ の部分をそれぞれ $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_2'}$ あるいは $\{\alpha_{13}, \alpha_{23}\}, C^2_{X_3'}$ に差し替えて同様に定義する．

Proof of Theorem B. $L' \in \mathcal{L}$ は図式が 3 重以上の交点を持つとし，3 重以上の交点の近傍を少し isotopy で動かして図式が横断的な 2 重点だけを持つようにした link を L とおく．L', L の取り方により自然な全単射 $F : C(G_{D_L}) \to C(G_{D_{L'}})$ が得られる．例えば以下の図で同じ番号を添えられた chord が対応する．

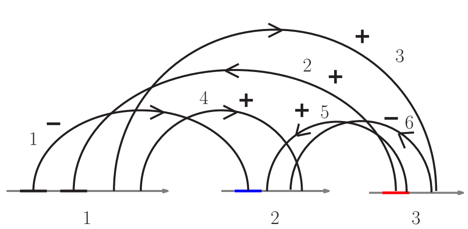

図 20　L' の図式 $D_{L'}$

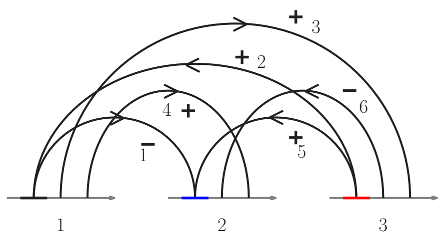

図 21　$D_{L'}$ の Gauss Diagram $G_{D_{L'}}$

また，写像 $f_{X_m} : C^2(G_{D_L}) \to \{0, 1, -1\} (m = 1, 2, 3)$ を次のように定める：

$$f_{X_m}(\{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\alpha_{ij})\mathrm{sgn}(\alpha_{kl}), & \{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\} \in C^2_{X_m}(G_{D_L}) \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

すると各記号の定義から，以下の等式が成り立つ：

$$\langle\ , G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_1}(\{\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\}). \tag{8}$$

$$\langle \quad , G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_2}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{9}$$

$$\langle \quad , G_{D_L}\rangle = \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_3}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{10}$$

今後は $\beta_{ij} = F(\alpha_{ij}) \in C(G_{D_{L'}})$ とする．$C^2(G_{D_L})$ は以下の 3 つの交わらない集合に分けられる：

$$C^2_s(G_{D_L}) = \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \beta_{ij}\text{と}\beta_{kl}\text{が } X_1, X_2, X_3\text{のいずれかの形を成す}\},$$
$$C^2_c(G_{D_L}) = \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \beta_{ij}\text{と}\beta_{kl}\text{が } X'_1, X'_2, X'_3\text{のいずれかの形を成す}\},$$
$$C^2_o(G_{D_L}) = \{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L}) \mid \text{他の場合}\}.$$

$\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2_o(G_{D_L})$ であるとき $f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = 0$ となるので，(8)，(9)，(10) を書き換えると；

$$\sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2(G_{D_L})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_{L'}})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) + \sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_c(G_{D_{L'}})} f_{X_m}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}). \tag{11}$$

となる．特に $C^2_s(G_{D_L})$ の定義から次の等式が成り立つ：

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_1}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle, \tag{12}$$

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_2}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle, \tag{13}$$

$$\sum_{\{\beta_{ij},\beta_{kl}\}\in C^2_s(G_{D_L})} f_{X_3}(\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}) = \langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle. \tag{14}$$

等式 (8) から (14) により，次の書き換えができる：

$$\begin{aligned}&\langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle - \langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle + \langle \quad , G_{D_{L'}}\rangle \\ &= \langle \quad , G_{D_L}\rangle - \langle \quad , G_{D_L}\rangle + \langle \quad , G_{D_L}\rangle \\ &+ \sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C^2_c(G_{D_L})} (f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\}) + f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\})).\end{aligned} \tag{15}$$

等式 (15) の第 2 項を考察する．(順序を考えない) 組 $\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\}$ は $\{\beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\} = \{F(\alpha_{12}),F(\alpha_{23}),F(\alpha_{13})\}$ が以下の chord diagram $Y_m (m = 1,2,3,4,5,6)$ を成すか否かで分かれる．

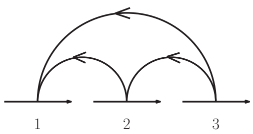

図 22　Y_1

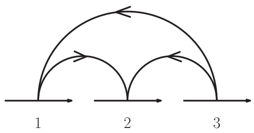

図 23　Y_2

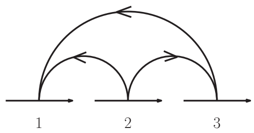

図 24　Y_3

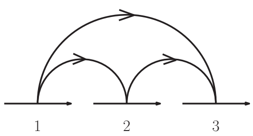

図 25　Y_4

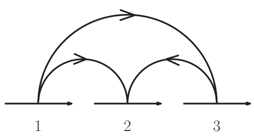

図 26　Y_5

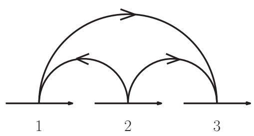

図 27　Y_6

3 つ組 $\{\{\alpha_{12},\alpha_{23}\},\{\alpha_{23},\alpha_{13}\},\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}\}$ と 3 つ組 $\{\beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\}$ が 1 対 1 に対応するので，

$$C_Y^3(G_{D_L}) = \{\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\} \mid \beta_{12},\beta_{23},\beta_{13}\text{が図 22 から図 27 のいずれかの形を成す}\}$$

とすれば次の等式が成立する：

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\alpha_{ij},\alpha_{kl}\}\in C_c^2(G_{D_L})} (f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\}) + f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\})) \\ =& \sum_{\{\alpha_{12},\alpha_{23},\alpha_{13}\}\in C_Y^3(G_{D_L})} (f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{23}\}) + f_{X_3}(\{\alpha_{13},\alpha_{23}\})).\end{aligned} \tag{16}$$

以下の形が出現するような気もするが，link に対応した arrow diagram には現れないことに注意しておく．

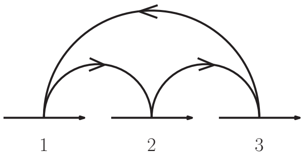

図 28　Y_7

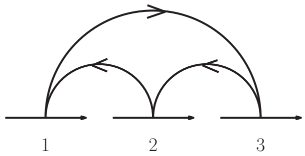

図 29　Y_8

$g(Y) = f_{X_1}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_2}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}) + f_{X_3}(\{\alpha_{12},\alpha_{13}\}), Y = Y_1, ..., Y_6$ とする．さらに，a, b, c を有理数とし，以下の連立方程式を解く：

$g(Y) = a\langle$  $, G_{D_{L'}}\rangle + b\langle$  $, G_{D_{L'}}\rangle + c\langle$  $, G_{D_{L'}}\rangle.$　(17)

各 Y_m について検証するがここでは Y_2 のみ扱う．$G_{D_{L'}}$ において次の図の様な形を発見したとする．

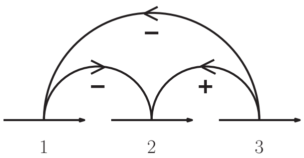

図 30　3 本の chord の位置関係

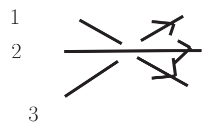

図 31　対応する 3 重点

このとき G_{D_L} において対応する chord がなす形は以下の 2 種類が考えられる．しかしいずれの場合でも，等式（17）の左辺は同じ値 $g(Y) = 0$ が得られる．

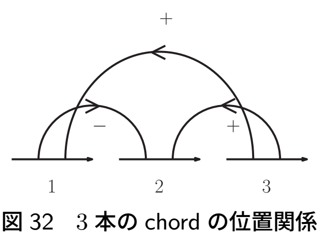

図 32　3 本の chord の位置関係

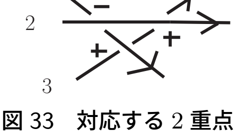

図 33　対応する 2 重点

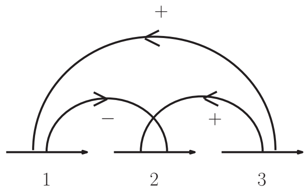

図 34　3 本の chord の位置関係

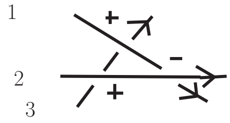

図 35　対応する 2 重点

式（17）の右辺を各校について計算してみるよう．まず以下の結果が得られる：

$$\langle \ , G_{D_L}\rangle = -1, \quad \langle \ , G_{D_L}\rangle = -1, \quad \langle \ , G_{D_L}\rangle = 0. \tag{18}$$

式（18）より，等式 $0 = -a - b$ を得る. 同様のことをすべての $m = 1, ...6$ と全ての符号のつき方（各 m に対して 8 通りずつありえる）について繰り返せば，全てを満たす解として次の結果を得る：

$$a = -b = c = \frac{1}{2}. \tag{19}$$

したがって，次の等式が成立する：

$$\begin{aligned}
&\langle \ , G_{D_L}\rangle - \langle \ , G_{D_L}\rangle + \langle \ , G_{D_L}\rangle \\
&= \langle \ , G_{D_{L'}}\rangle - \langle \ , G_{D_{L'}}\rangle + \langle \ , G_{D_{L'}}\rangle \\
&+ \frac{1}{2}(\langle \ , G_{D_{L'}}\rangle - \langle \ , G_{D_{L'}}\rangle + \langle \ , G_{D_{L'}}\rangle).
\end{aligned}$$

この等式と Thm$A$，ならびに $\mu_{123}(L) = \mu_{123}(L')$ であることから次の結果が得られる：

$$\begin{aligned}
\mu_{123}(D_L) =& \langle \ , G_{D_L}\rangle - \langle \ , G_{D_L}\rangle + \langle \ , G_{D_L}\rangle \\
&+ \frac{1}{2}(\langle \ , G_{D_L}\rangle - \langle \ , G_{D_L}\rangle + \langle \ , G_{D_L}\rangle).
\end{aligned}$$

□

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」にて講演の機会を与えてくださいました世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生，そして運営の皆々様へ感謝申し上げます．

参考文献

[1] ROBYN BROOKS AND RAFAL KOMENDARCZYK, *From integrals to combinatorial formulas of finite type invariants - a case study* (2024)

[2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz (1957), 280-306, Princeton Univercity Press

[3] ROBIN KOYTCHEFF, BRIAN A. MUNSON, AND ISMAR VOLIĆ, *Configuration space integrals and the cohomology of the space of homotopy string links* (2013)

[4] ROBIN KOYTCHEFF, *The Milnor triple linking number of string links by cut-and-paste topology*, Algebraic & Geometric Topology 14 (2014) 1205-1247

[5] Robin Koytchef, ISMAR VOLIĆ, *Milnor invariants of string links, trivalent trees, and configuration space integrals*, Topology and its Applications 251 (2019) 47-69

[6] Scott Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory. II*