

コード図の数え上げと doodle 不変量による Milnor の 3 重絡み数の表示

平田遼介（信州大学）*

概要

[3] から、次数 2 の結び目不変量はガウス図式の数え上げの項と Arnold 不変量の項の和で表すことが出来ることが分かる。本稿では、同じく次数 2 の不変量である Milnor の 3 重絡み数があるコード図の数え上げと doodle 不変量を用いて表す。また本稿では、講演スライドで紹介したコード図の作り方を簡略化しており、例に挙げる絡み目も変更している。

1 Doodle 不変量

この章では doodle を定義した後、3 成分 doodle の不変量を定義する。

定義 1.1. [cf.[2], [5]] Doodle とは、平面上の有限個の閉曲線の和集合であって、高々 2 重点しか持たず、各 2 重点が横断的になっているものである。 n 個の閉曲線の和集合である doodle のことを n 成分 doodle といい、 $D = (C_1, \dots, C_n)$ と書く。また、doodle D を構成している各 C_i のことを、doodle の成分という。

本稿では、断りがない限り doodle と書いたら 3 成分 doodle を表しているものとする。

例 1.2. 図 1 において、doodle の例とそうではない例を示す。図 1 の (c) では、横断的ではない 2 重点を持っている点、(d) では 3 重点を持っている点から、それぞれ doodle ではない例となっている。

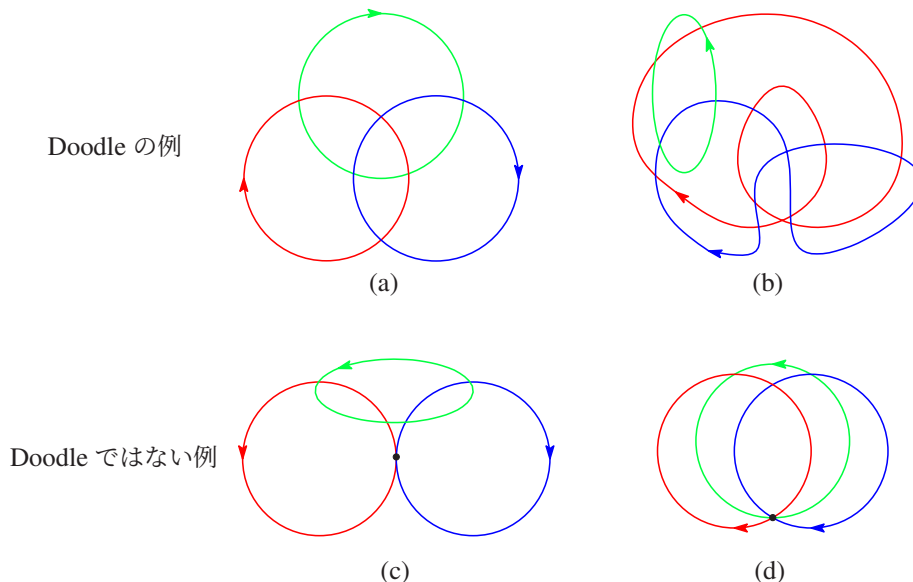


図 1 Doodle と doodle ではない例

定義 1.3. [cf.[2], [5]] 2 つの doodle D と D' が isotopic であるとは、全同位な変形と Reidemeister 変形の I と II と III の一部だけで移り合うときにいう。

* mail:23ss108k@gmail.com

注意 1.4. 定義 1.3 において, 許可されている Reidemeister 変形と禁止されている Reidemeister 変形は次の図 2 と 3 に示す通りである. これらの図では, 同じ色で描かれた曲線は同じ成分の一部を表しており, 変形前後で向きを保つ

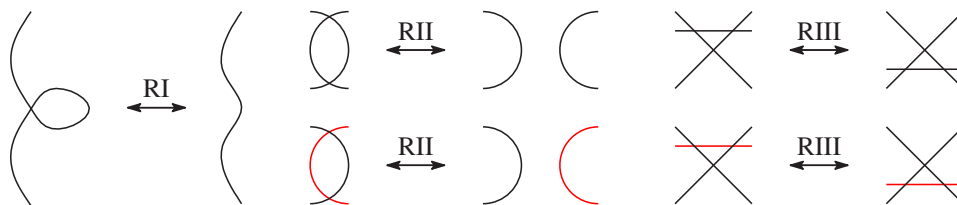


図 2 許可されている変形

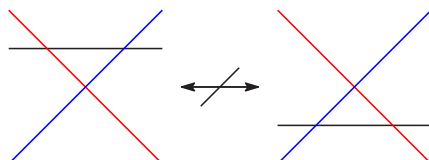


図 3 禁止されている変形

ているものとする.

3 成分 doodle の不変量を定義する. Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ の C_2 と C_3 の交点 p の符号 $\delta(p; C_2, C_3)$ を図 4 のように定義する. そして, 単純閉曲線 C_1 の内部にある C_2 と C_3 の交点 p の符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ を図 5 のように定義す

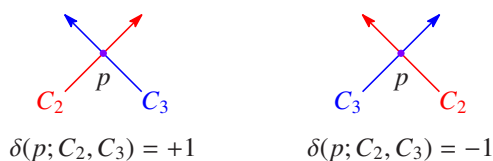


図 4 符号 $\delta(p; C_2, C_3)$ の絵

る. 符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ は, C_1 に反時計回りの向きがついていれば $\delta(p; C_2, C_3)$ と一致し, C_1 に時計回りの向きが

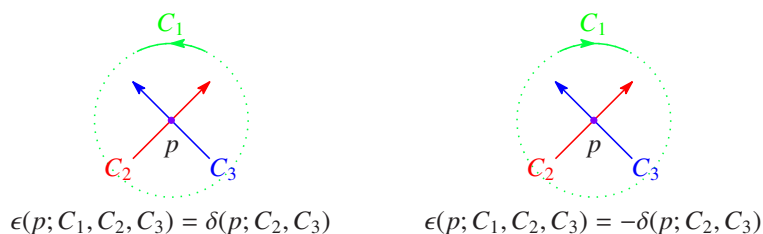


図 5 符号 $\epsilon(p; C_1, C_2, C_3)$ の絵

ついていれれば $\delta(p; C_2, C_3)$ の -1 倍となるものである.

定義 1.5 (cf. [2]). 各成分が自己交差を持たない doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ を考える. このとき, C_1 の内部にあるすべての C_2 と C_3 の交点を考え, $\mu(C_1, C_2, C_3)$ を次で定義する:

$$\mu(C_1, C_2, C_3) := \sum_p \epsilon(p; C_1, C_2, C_3). \quad (1.1)$$

例 1.6. 図 6 にて, $\mu(C_1, C_2, C_3)$ の計算例を示す.

定義 1.5 で定義した μ 不変量を自己交差を持つ doodle に拡張する. Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ の成分 C_1 に着目し, C_1 の全ての自己交差に対して smoothing という自己交差を繋ぎ変える操作を行うことを考える (図 7 を参照).

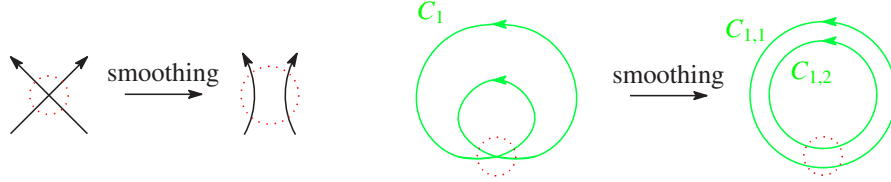
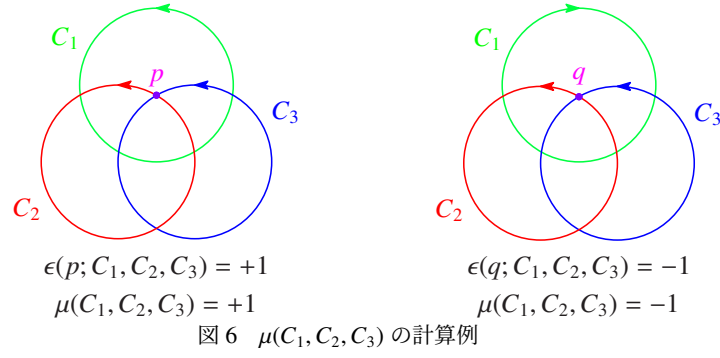


図 7 Smoothing の例

定義 1.7. Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ を考え、 C_1 の全ての自己交差に smoothing を行うことで得られた単純閉曲線の和集合を $(C_{1,1}, \dots, C_{1,a})$ とする。このとき、 $\mu(C_1, C_2, C_3)$ を次で定義する：

$$\mu(C_1, C_2, C_3) := \sum_{i=1}^a \sum_p \epsilon(p; C_{1,i}, C_2, C_3). \quad (1.2)$$

この μ 不変量は次の性質を満たす。

命題 1.8. (1) $\mu(C_1, C_2, C_3)$ の値は整数である。

(2) $-C_i$ と書いたら C_i と向きだけが入れ替わっているものを表しているとする。このとき、次の式が成り立つ：

$$\mu((-1)^{s_1} C_1, (-1)^{s_2} C_2, (-1)^{s_3} C_3) = (-1)^s \mu(C_1, C_2, C_3) \quad (s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}, s = s_1 + s_2 + s_3). \quad (1.3)$$

(3) $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群とする。このとき、次の式が成り立つ：

$$\mu(C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}, C_{\sigma(3)}) = \text{sgn}(\sigma) \mu(C_1, C_2, C_3) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_3). \quad (1.4)$$

(4) μ 不変量は、定義 1.3 に関しての不変量となっている。

2 コード図の作り方

まずは doodle から絡み目を作ることを考える。Doodle $D = (C_1, C_2, C_3)$ から絡み目 $L(D)$ を次のように作る。

- C_1 と C_2 の交点では C_1 の方が上になるように上下をつける。
- C_2 と C_3 の交点では C_2 の方が上になるように上下をつける。
- C_3 と C_1 の交点では C_3 の方が上になるように上下をつける。
- 各成分の自己交点には適切な上下をつける。

例 2.1. 図 8 にて、doodle から絡み目を作る例を示す。図 8 の D' の自己交差には左上から右下へ向かう方を上にするような上下をつけて $L(D')$ を作ったが、上下を逆にしても問題はない。

Doodle から出来る絡み目には次のことが成り立つ。

命題 2.2 (cf. [2]). (1) $L(D)$ の各成分が自明になるように上下を付けられる。

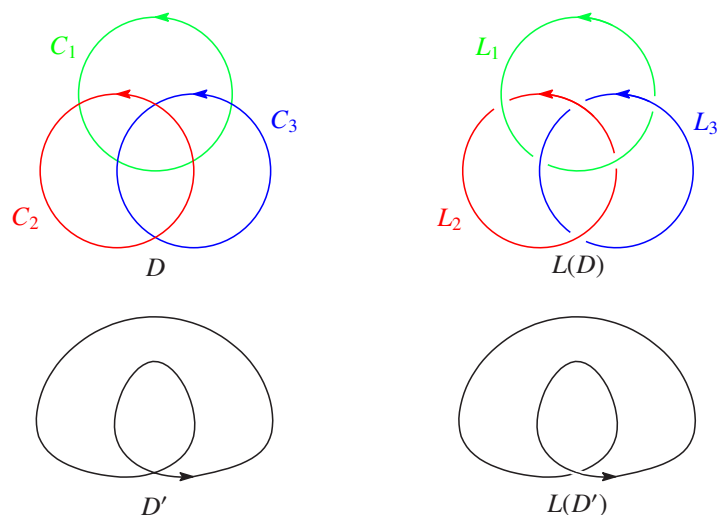


図 8 Doodle から絡み目を作る例

(2) $L(D)$ のどの 2 つの成分の絡み数を考えても 0 になる.

ここからは, 今回の主結果に必要なコード図を作っていく.

定義 2.3. S^1 上のコード図であって, 次のような頂点を許すコード図のことを一般化されたコード図という.

- 他の頂点とコードで結ばれていない頂点.
- 2 つ以上の頂点とコードで結ばれている頂点.

例 2.4. 図 9 にて, 頂点集合 $V = \{a, b, c, d\}$ を持つ一般化されたコード図の例を示す. 頂点 a は 2 つ以上の頂点とコードで結ばれている頂点であり, 頂点 d は他の頂点とコードで結ばれていない頂点になっている.

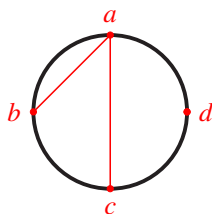


図 9 一般化されたコード図の例

図 10 の 3 成分絡み目 $L = (L_1, L_2, L_3)$ を基にコード図を作ること考える. L から得られる doodle を $D_L =$

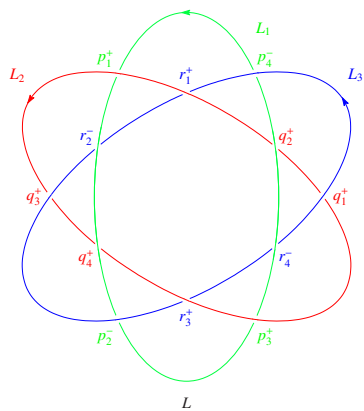


図 10

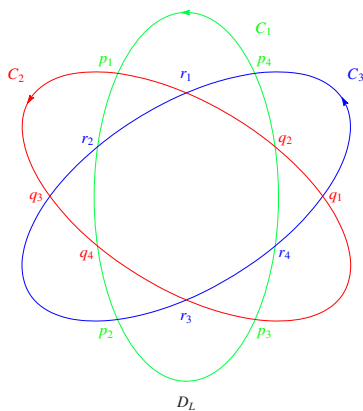


図 11

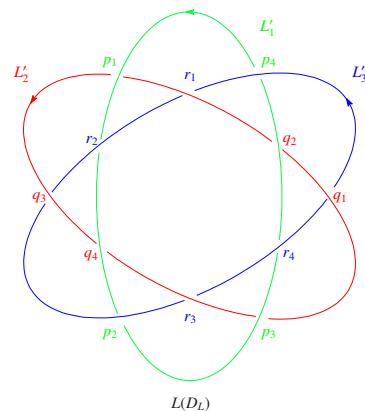


図 12

(C_1, C_2, C_3) とし, D_L から出来る絡み目を $L(D_L) = (L'_1, L'_2, L'_3)$ とする (それぞれ図 11 と 12 を参照). 各交点には次

の図 13 のような符号 $\gamma(p; L_1, L_k)$ がついていると仮定する (図 10 の各交点には既にこの符号を右上につけている). $V_a(L_1)$ を絡み目 L において L_1 と他の成分との交点のうち, L_1 の方が上にある交点を集めた集合とする. 絡み目 L と

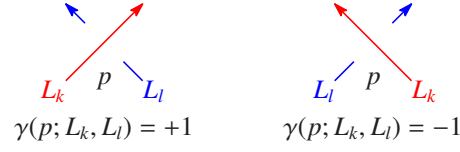


図 13 符号 $\gamma(p; L_1, L_k)$ の絵

$L(D_L)$ を比較したときに, 成分 L_i と L_j の交点の上下が入れ替わっている交点を集めた集合を $V_c(L_i, L_j)$ とし, 上下が入れ替わっていない交点を集めた集合を $V_{nc}(L_i, L_j)$ とする (図 14 を参照). $L(D_L)$ の作り方から, $V_a(L_1)$ は次のよう

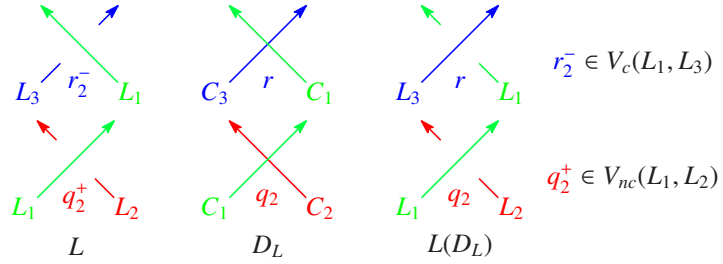


図 14 図 10 の L における $V_c(L_1, L_3)$ と $V_{nc}(L_1, L_2)$ の例

に書くことが出来る:

$$V_a(L_1) = \{q_2^+, r_2^-, q_4^+, r_4^-\} = \{r_2^-, r_4^-\} \sqcup \{q_2^+, q_4^+\} = V_c(L_1, L_3) \sqcup V_{nc}(L_1, L_2). \quad (2.1)$$

ここで, 2 点 b_{c_3} と b_{nc_2} を L_1 上にとる. ただし, b_{c_3} を始点, b_{nc_2} を終点とするような L_1 の一部を切り取ったときに, その上に $V_a(L_1)$ の元が存在していないような位置に 2 点をとることにする (図 15 を参照). $V_a(L_1)$ の元と 2 点

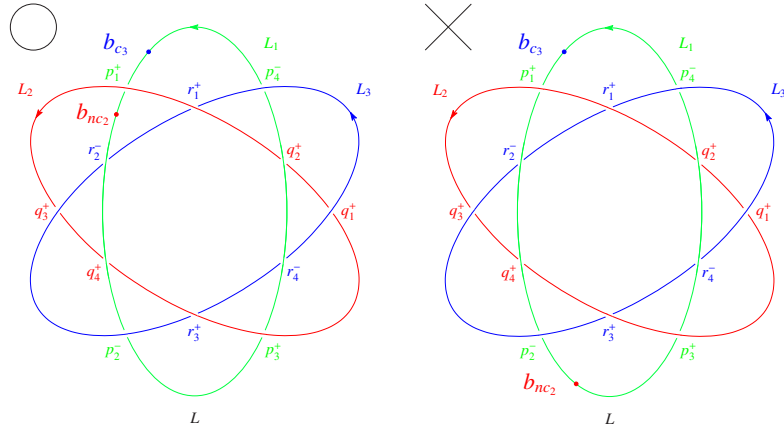


図 15

b_{c_3} と b_{nc_2} を頂点とするような一般化されたコード図 G_{L_1} を次の手順で作っていく.

1. L_1 上の $V_a(L_1)$ の元と 2 点 b_{c_3} と b_{nc_2} の位置に対応するように, S_1 上に各点をとる (図 16 を参照). ここで S_1 とは G_{L_1} の外側の円周のことを表しており, L_1 に対応する向きがついているとする.
2. $V_c(L_1, L_3)$ の元と b_{c_3} を交点を持たないようにコードで結ぶ. このとき, 符号 $\gamma(p; L_1, L_3)$ が +1 の元は b_{c_3} が終点に, -1 の元は b_{c_3} が始点となるようにコードに向きをつける (図 17 を参照). これらのコードを集めた集合を $T_{1,3}$ とする.
3. 同様に, $V_{nc}(L_1, L_2)$ の元と b_{nc_2} をお互いに交点を持たないようにコードで結び, 向きをつける (図 18 を参照). このとき結んだコードを集めた集合を $T_{1,2}$ とする.

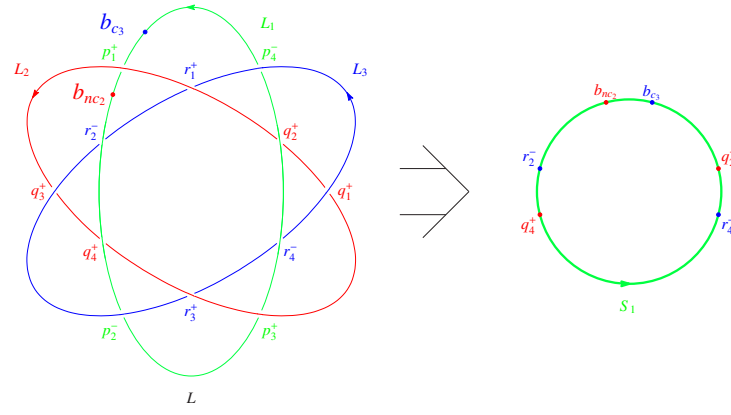


図 16

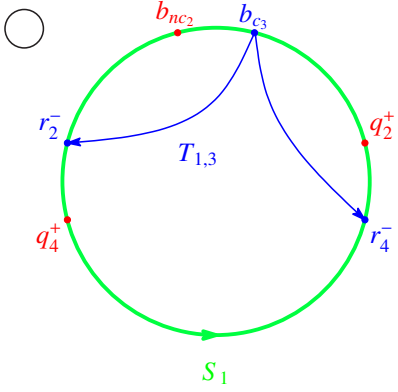


図 17

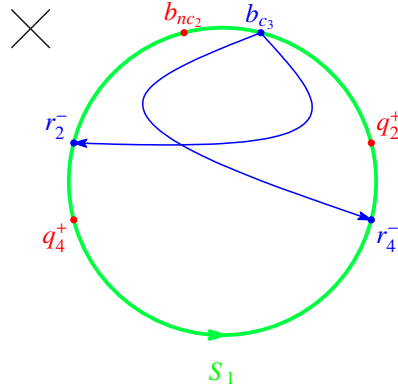


図 18

同じ様にコード図 G_{L_2} と G_{L_3} を作る.

定義 2.5. コード図 G_{L_k} において, $T_{k,j}$ と $T_{k,i}$ の全ての交点を符号 $\epsilon(p; S_k, T_{k,j}, T_{k,i})$ で足し合わせたものを $\langle \bigotimes_i, G_{L_k} \rangle$ と書く.

3 主結果

定理 3.1. 向き付けられた 3 成分絡み目 $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ を考え, L から得られた doodle を $D_L = (C_1, C_2, C_3)$ とする. また, $\mathfrak{A}_3$ を 3 次交代群とする. このとき, Milnor の 3 重絡み数は次のように書くことが出来る:

$$\bar{\mu}_L(123) \equiv -\mu(C_1, C_2, C_3) - \sum_{(i,j,k) \in \mathfrak{A}_3} \langle \bigotimes_i, G_{L_k} \rangle \pmod{\Delta_L(123)}. \quad (3.1)$$

例 3.2. 図 10 の絡み目 L の 3 重絡み目 $\bar{\mu}_L(123)$ を計算する. 絡み目 L の絡み数はそれぞれ $\text{Link}(L_1, L_2) = 2, \text{Link}(L_2, L_3) = 2, \text{Link}(L_3, L_1) = -2$ であるので, $\Delta_L(123) = 2$ である. また, doodle D_L の μ 不変量を計算すると $\mu(C_1, C_2, C_3) = +2$ であることが分かる (図 11 を参照). 次に G_{L_1} を基に $\langle \bigotimes_2, G_{L_1} \rangle$ を計算すると -3 になることが分かる (図 18 を参照). 同様に G_{L_2} と G_{L_3} を構成して, それぞれの交点の符号和を計算すると $\langle \bigotimes_3, G_{L_2} \rangle = -1$ となり, $\langle \bigotimes_1, G_{L_3} \rangle = -1$ となること分かる (図 19 と 20 を参照). 以上のことから, 絡み目 L の 3 重絡み数を計算すると次のようになる:

$$\bar{\mu}_L(123) \equiv -2 - (-3 - 1 - 1) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (3.2)$$

定理 3.1 は次の定理を基に証明する.

定理 3.3 (cf. [4, Theorem(1)]). 絡み目 $L = (L_1, L_2, L_3)$ の各成分を境界とするザイフェルト曲面を $F_i (i = 1, 2, 3)$ とし,

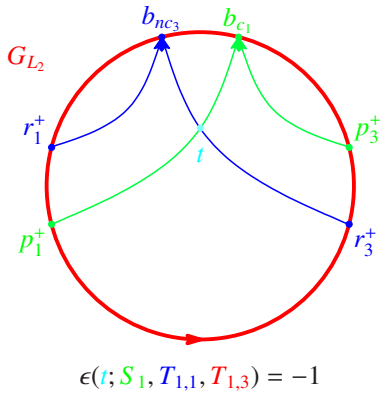


図 19

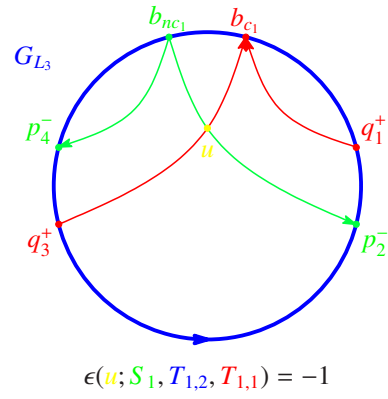


図 20

$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ とする. 任意のザイフェルト曲面 F に対して, 次が成り立つ:

$$\bar{\mu}_L(123) \equiv m_{123}(F) - t_{123}(F) \pmod{\Delta_L(123)}. \quad (3.3)$$

この定理で出てくる $t_{123}(F)$ はザイフェルト曲面 F の 3 重点の符号和を表しており, $m_{123}(F)$ は L_i と $\text{Int}(F_j), \text{Int}(F_k)$ の交点が定める語の追い越し数の和を表している (詳細は [4] を参照).

定理 3.3 の証明方針. 最初にコード図 G_{L_i} ($i = 1, 2, 3$) を基にして, 次の手順で L_1 を境界とする曲面を貼る.

1. ザイフェルトアルゴリズムによって L_1 を境界とするザイフェルト曲面を貼る (図 21 と 22 を参照). このよう

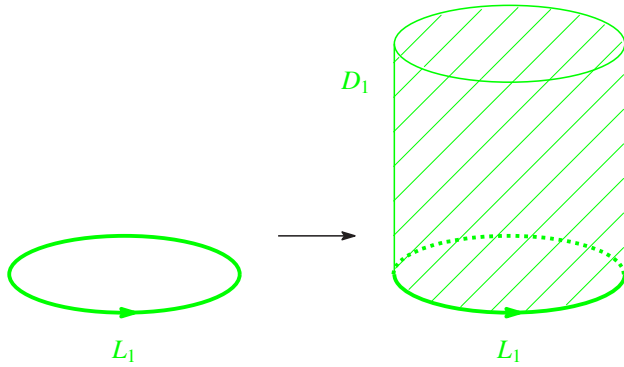


図 21

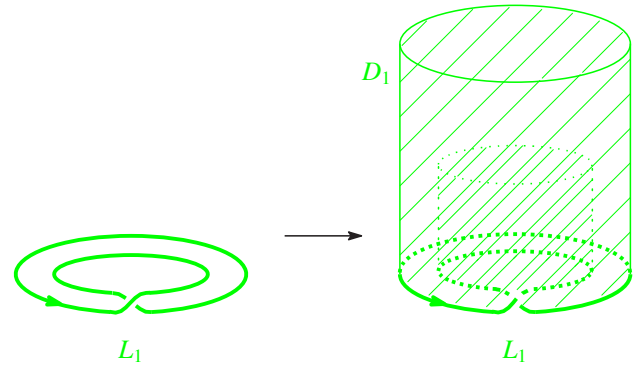


図 22

にして貼った曲面を D_1 と置く.

2. ここでは図 23 のように stretch という曲面を引き伸ばす操作をすることで D_1 を変形することを考える. $V_a(L_2)$

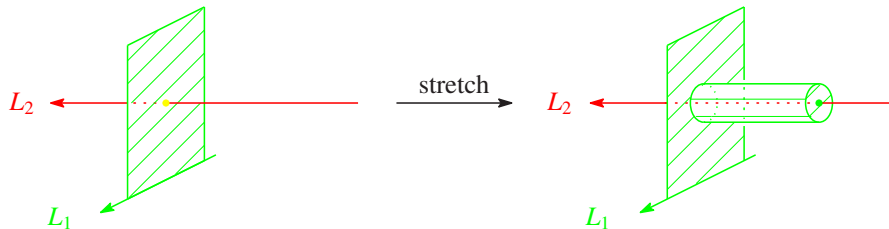


図 23

の元のうち L_1 と L_2 の交点になっている元を考える. この元に対応する D_1 と L_2 の交点の付近の曲面を, b_{c_1} に向けて L_2 の向きに沿って stretch する. ただし, 太さと stretch する先を調整することで曲面同士が交点を持たないようにする.

3. 同様に $V_a(L_3)$ の元のうち L_1 と L_3 の交点になっている元を考える．この元に対応する D_1 と L_3 の交点の付近の曲面を、 b_{nc_1} に向けて L_3 の向きとは反対向きに stretch する．このときも太さと stretch する先を調整することで曲面同士が交点を持たないようにする．

以上の操作によって出来たザイフェルト曲面を Σ^1 とおく．同様の手順で Σ^2 と Σ^3 を構成する．このとき、 $m_{123}(\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(123)}$ となる．また、ザイフェルト曲面 $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$ に現れる 3 重点は次の 2 つに分けることが出来る．

- (1) 変形する前のザイフェルト曲面 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ に現れる 3 重点．
- (2) 変形する前のザイフェルト曲面 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ には現れない 3 重点．

この後は (1) の 3 重点の符号和が $\mu(C_1, C_2, C_3)$ に対応していることを証明する（図 24 を参照）．その後、(2) の 3 重

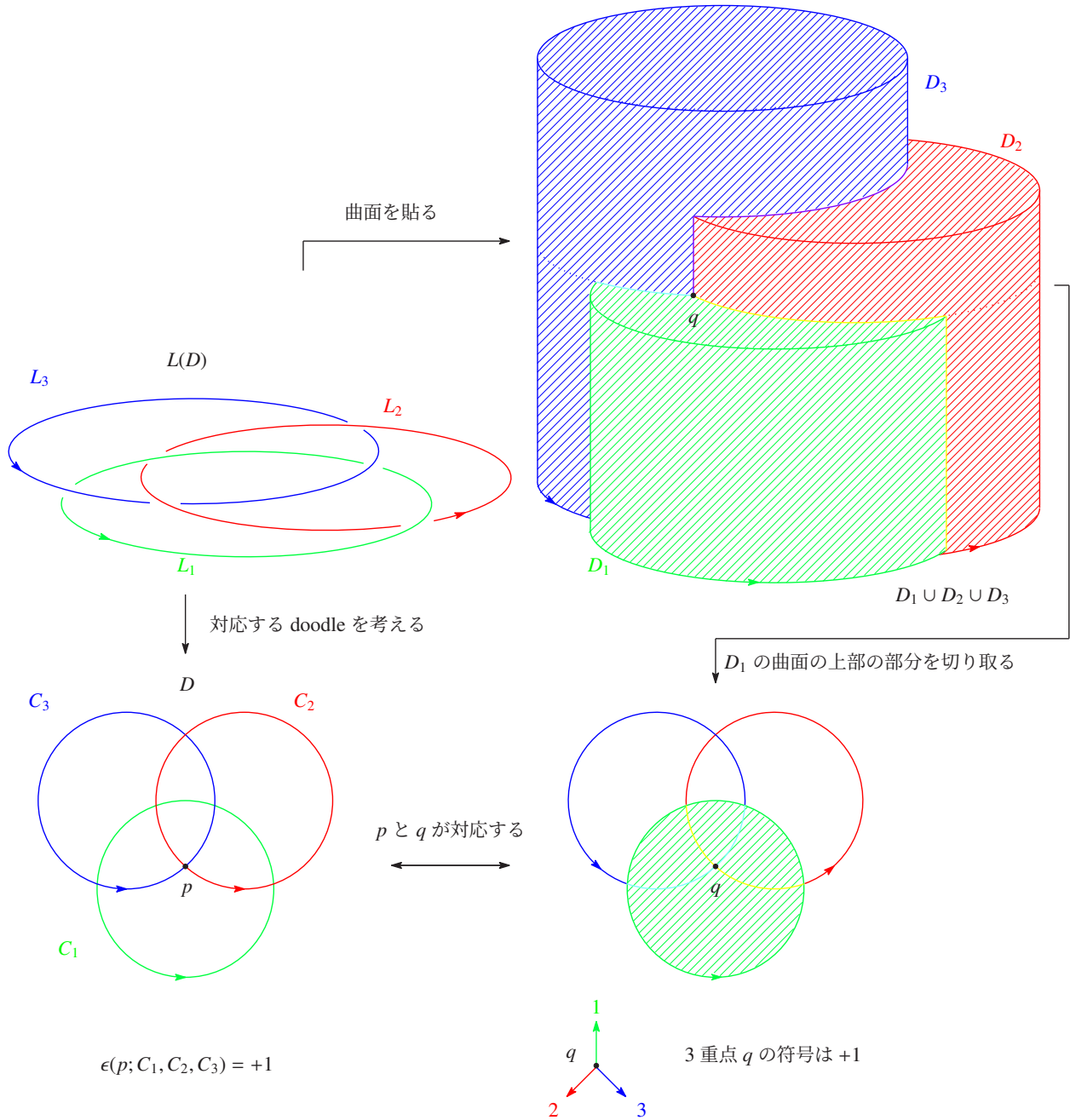
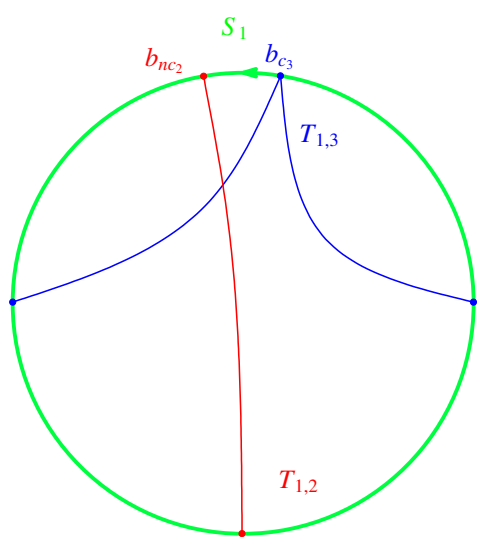


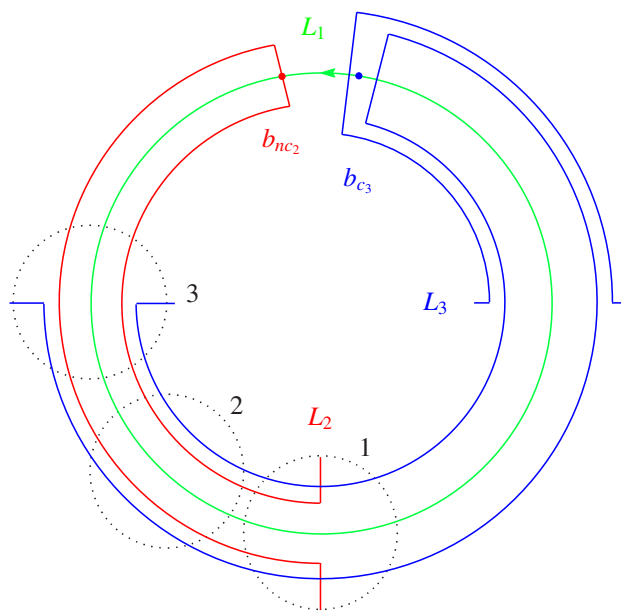
図 24

点の符号和が $\sum_{(i,j,k) \in \mathfrak{A}_3} \langle \bigotimes_i, G_{L_k} \rangle$ に一致することを示すことで定理 3.1 を証明できる（図 25 を参照）．

□



G_{L_1}



L

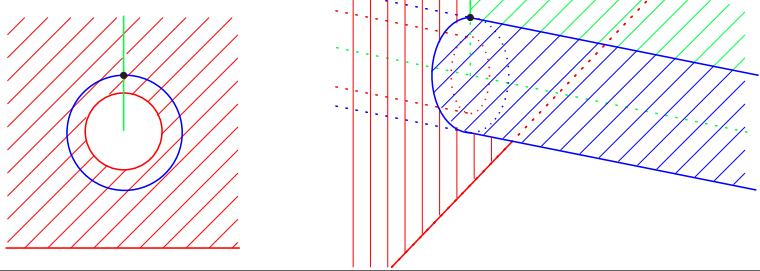
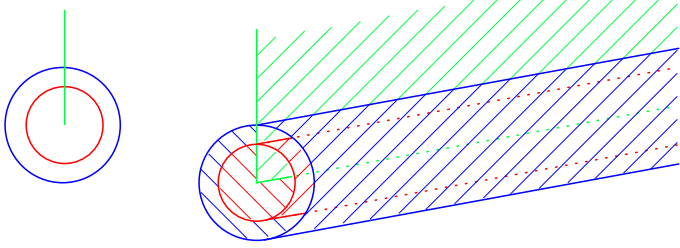
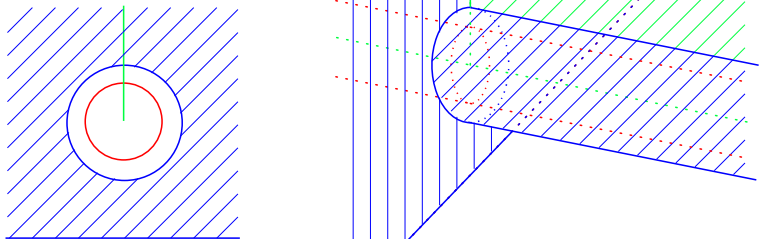
曲面の付近の様子	3重点が存在するかしないか
1 	存在する
2 	存在しない
3 	存在しない

図 25

4 謝辞

本研究集会にて講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます。また、参加者の皆様には貴重なアドバイスをいくつも頂きました。お礼申し上げます。最後に信州大学の境圭一先生にはセミナーを通し、たくさんのご指導いただきました。ここに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] C. W. Davis, M. Nagel, P. Orson and M. Powell, *Surface Systems and Triple Linking Numbers*, Indiana University Mathematics Journal, 69(2020), no. 7, 2505-2547.
- [2] R. Fenn and P. Taylor, *Introducing doodles*, Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 37-43.
- [3] X. S. Lin and Z. Wang, *Integral geometry of plane curves and knot invariants* J. Differential Geom., 44(1996), 74-95.
- [4] B. Mellor and P. Melvin, *A geometric interpretation of Milnor's triple linking numbers*, Algebr. Geom. Topol. 3 (2003), no. 1, 557-568.
- [5] A. B. Merkov, *On the classification of ornaments*, in Singularities and bifurcations, Advances in Soviet Mathematics 21 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994), pp. 199-211.
- [6] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz (1957), 280-306.