

On characterization of a multivariable polynomial invariant of twisted links

名古屋市立大学院
金 云峰*

Abstract

S. Satoh and Y. Tomiyama gave a characterization of a multivariable polynomial invariant of almost classical virtual links. N. Kamada extended the multivariable polynomial invariant to twisted links. In this talk, We give some results which are similar to S. Satoh and Y. Tomiyama's.

1 Preparation

1.1 virtual link の Alexander numbering

D を virtual knot diagram [1] とする. ここで, D の *semi-arc* とは D の 2 つの real crossing の間にある arc または real crossing を持たない loop のことである. また D の *Alexander numbering* とは D の各 real crossing を構成する semi-arc に対して Fig. 1 の条件を満たす numbering である. ($i, j \in \mathbb{Z}$)

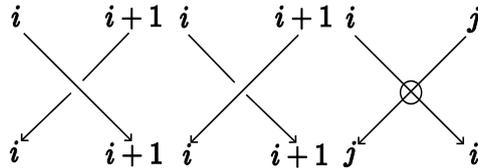


Fig. 1: Alexander numbering

virtual link diagram の Alexander numbering の例を Fig. 2 に示す. ここで classical link diagram は常に Alexander numbering 可能である.

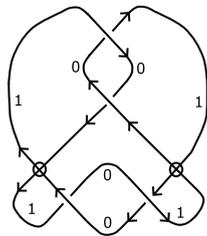


Fig. 2: Alexander numbering

ここで, すべての virtual link diagram が Alexander numbering を持つとは限らない. Fig. 3 に Alexander numbering を持たない virtual link diagram の例を示す.

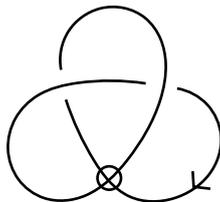


Fig. 3: Virtual link diagram which does not admit an Alexander numbering.

virtual link diagram D が *almost classical* [2] であるということは, D が Alexander numbering 可能であるということである. virtual link L が *almost classical* であるということは, L が almost classical な virtual link diagram を持つことである.

*e-mail : minehiro@gmail.com

1.2 virtual link の multivariable polynomial invariant

D を virtual link diagram とする. *pole diagram* とは, Fig. 4 に示すように edge 上に pole を持つ link diagram のことである. Fig. 5 に pole diagram の例を示す.

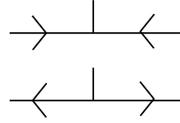


Fig. 4: A pole

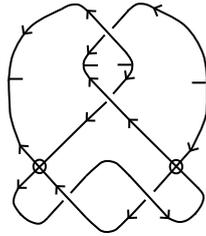


Fig. 5: A pole diagram

A-splice (または *B-splice*) とは Fig. 6 に示す link diagram の real crossing における local replacement のことである. ここで Fig. 6 において, 上(または下)の各 real crossing における local replacement を *A-splice* (または *B-splice*) という.

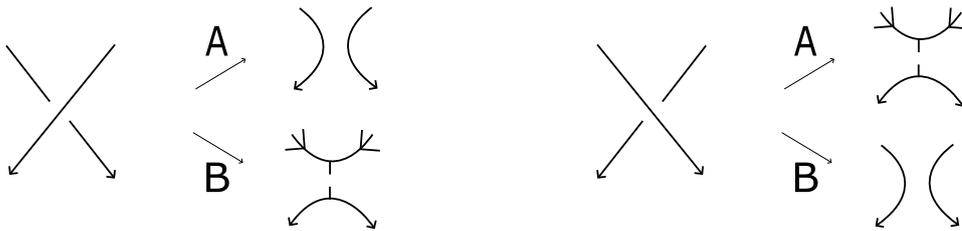


Fig. 6: A-splice and B-splice

D を link diagram とする. D の *state* とは D の各 classical crossing を *A-splice* (または *B-splice*) して得られた pole diagram のことである. ここで D の *state* の loop 上の pole の数は even である. map ι とは以下の条件を満たす state diagram の loop の集合から \mathbb{Z} への写像である.

$$(i) \quad \iota \left(\text{circle with } 2r \text{ poles} \right) = r, \text{ ここで pole は 交互に } 2r \text{ 個あり, 点線部は virtual crossing を含む.}$$

$$(ii) \quad \iota \left(\text{line with } n \text{ poles} \right) = \iota \left(\text{line} \right)$$

$$(iii) \quad \iota \left(\text{line with } n \text{ poles and a central circle} \right) = \iota \left(\text{line with } n \text{ poles and a central circle} \right)$$

D を virtual link diagram とする. D の *state* S について, $\sharp S = (S \text{ の } A\text{-splice の数}) - (S \text{ の } B\text{-splice の数})$, $\#S = (S \text{ の loop の数})$, $\tau_i(S) = (\iota(l) = i \text{ となる } S \text{ の loop } l \text{ の数})$ とする.

D の *double bracket* を以下に定める.

$$\langle\langle D \rangle\rangle := \sum_S A^{\sharp S} (-A^2 - A^{-2})^{\#S} d_1^{\tau_1(S)} d_2^{\tau_2(S)} \dots \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2, \dots].$$

$w(D) = (D \text{ の positive crossing の数}) - (D \text{ の negative crossing の数})$ とする. D の *multivariable polynomial* を以下に定める.

$$R_D := (-A^3)^{-w(D)} \langle\langle D \rangle\rangle.$$

Theorem 1.1. (H. A. Dye, L.H. Kauffman and Y. Miyazawa [3], [4])

D を virtual link diagram とする. multivariable polynomial R_D は virtual link の不変量である.

multivariable polynomial $R_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2, \dots]$ について, $\text{Exp}(R_D)$ を R_D の d_i を含まない項の A の指数の集合とする.

Theorem 1.2. (T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh and Y. Tomiyama [5])

L を almost classical な $\mu(L)$ component の virtual link とし, D を L の virtual link diagram とする.

$$\text{Exp}(R_D) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & (\mu(L) : \text{even}) \\ 4\mathbb{Z} + 2 & (\mu(L) : \text{odd}) \end{cases}$$

この定理の例を示す. D を Fig. 2 に示す virtual link diagram とし, L を D を持つ virtual link とする. ここで multivariable polynomial $R_D = -A^{-10}(A^4 + 1)(A^{16} + A^{12} + A^8 + A^4 + 1)$ となり $\mu(L) = 1$ であるので, 定理を満たしている.

1.3 twisted link の multivariable polynomial invariant

twisted link diagram [6] とは virtual link diagram の arc 上に Fig. 7 のように bar を含んだ diagram のことである. twisted link diagram の例を Fig. 7 の右側に示す.

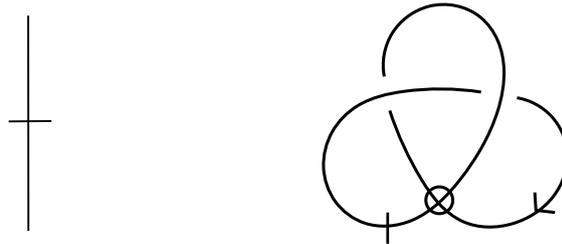


Fig. 7: bar と twisted link diagram

twisted Reidemeister moves とは Fig. 8 に示す局所変形である. twisted link diagram D と D' が有限回の generalized Reidemeister move と twisted Reidemeister move で移り合うとき, D と D' は同値であるという. twisted link とは twisted link diagram の同値類である.

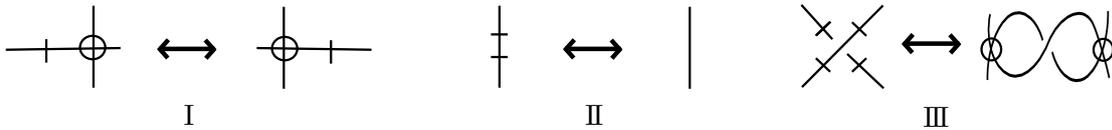


Fig. 8: twisted Reidemeister move

次に twisted link の multivariable polynomial invariant [7], [8] について定義する. D を twisted link diagram とし, D に対して map ι を定義する. map ι とは以下の条件を満たす state diagram の loop の集合から \mathbb{Z} への写像である.

(i) $\iota \left(\text{circle with poles and bar} \right) = r$, ここで pole は 交互に $2r$ 個あり, 点線部は virtual crossing, bar を含む.

(ii) $\iota \left(\text{line with bar} \right) = \iota \left(\text{line} \right)$

(iii) $\iota \left(\text{line with bar and crossing} \right) = \iota \left(\text{line with bar and crossing} \right)$

$$(iv) \iota \left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \right) = \iota \left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \right)$$

D の state の loop l に対して, l の bar の数が odd であるとき, $\iota(l) = 0$ となる.

twisted link diagram D の state S について, $\sharp S = (S \text{ の A-splice の数}) - (S \text{ の B-splice の数})$, $\sharp S = (S \text{ の loop の数})$, $\sharp_0 S = (S \text{ の bar の数が odd である loop の数})$, $\tau_i(S) = (\iota(l) = i \text{ となる } S \text{ の loop } l \text{ の数})$ とする.

D の double bracket を以下に定める.

$$\langle\langle D \rangle\rangle := \sum_S A^{\sharp S} (-A^2 - A^{-2})^{\sharp S} M^{\sharp_0 S} d_1^{\tau_1(S)} d_2^{\tau_2(S)} \dots \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, M, d_1, d_2, \dots].$$

$w(D) = (D \text{ の positive crossing の数}) - (D \text{ の negative crossing の数})$ とする. D の multivariable polynomial を以下に定める.

$$X_D := (-A^3)^{-w(D)} \langle\langle D \rangle\rangle.$$

Theorem 1.3. (*N. Kamada* [7])

D を twisted link diagram とする. multivariable polynomial X_D は twisted link の不変量である.

twisted link の multivariable polynomial の例を示す. D を Fig. 7 に示す twisted link diagram とする. このとき multivariable polynomial $X_D = -A^{-12} M (A^4 + 1) (A^6 + A^4 - 1)$ となる.

2 Main result and applications

2.1 Main result

D を twisted link diagram とし, b_1, b_2, \dots, b_r を D の bar とする. ここで D の bar-edge とは D の 2 つの real crossing または bar の間にある arc または real crossing, bar を持たない loop のことである. また D の twisted pseudo Alexander numbering とは D の各 real crossing, bar を構成する bar-edge に対して Fig. 9 の条件を満たす numbering である ($i, j, l_m, k_m \in \mathbb{Z}$). ここで l_m, k_m とは D の bar b_m に隣接する bar-edge に対する twisted pseudo Alexander numbering である. 各 l_m, k_m に対して, 和は n になる.

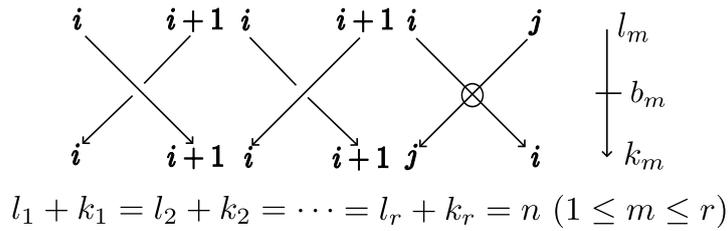


Fig. 9: twisted pseudo Alexander numbering

D の twisted pseudo odd Alexander numbering とは D の各 l_m, k_m の和が odd になる D の twisted pseudo Alexander numbering であり, D の twisted pseudo even Alexander numbering とは D の各 l_m, k_m の和が even になる D の twisted pseudo Alexander numbering である. Fig. 10 にその例を示す.

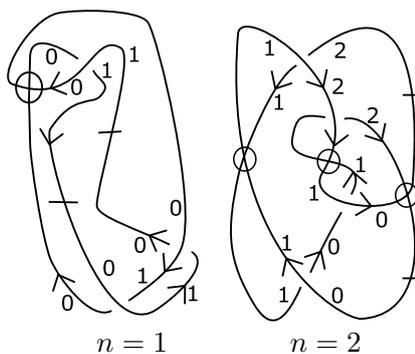


Fig. 10: twisted pseudo Alexander numbering の例

D の twisted pseudo odd Alexander numbering と twisted pseudo even Alexander numbering に対して、以下の定理を発見した。

Theorem 2.1. D を *twisted pseudo odd Alexander numbering* を持つ *twisted link diagram* とする。このとき D の *multivariable polynomial* に対して $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ が成り立つ。

Theorem 2.2. D を成分数が $\mu(L)$ で *twisted pseudo even Alexander numbering* を持つ *twisted link diagram* とする。The *multivariable polynomial* $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 4}, M]A^{2\mu(L)}$

この定理の例を示す。 D_1, D_2 を Fig. 10 に示す *twisted link diagram* とする。ここで D_1 が *twisted pseudo odd Alexander numbering* を持ち、 D_2 が *twisted pseudo even Alexander numbering* を持つ。また L を D を持つ *virtual link* とする。このとき *multivariable polynomial* $X_{D_1} = -A^4(A^4 + 1)(A^{10} - A^6 - A^4 + A^2 + 1)$, $X_{D_2} = -A^{-10}(A^4 + 1)\{(A^8 - 3A^4 + 1)A^4 - (A^{16} - 2A^8 + 1)M^2\}$ となり $\mu(L) = 1$ であるので、定理を満たしている。

2.2 application

L を *twisted link* とし、 D を Fig. 11 に示す L の *twisted link diagram* とする。このとき *multivariable polynomial* $X_D = -A^{-12}(A^4 + 1)(A^6 + A^4d_1 - (A^4 + 1)M^2 + A^4)$ となるので、 L は *twisted pseudo Alexander numbering* を持つ *twisted link diagram* を持たない。

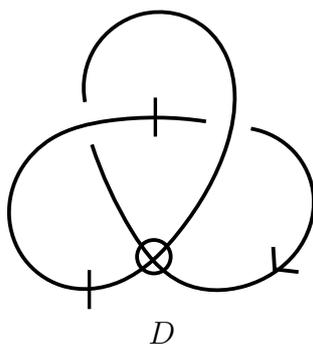


Fig. 11: twisted pseudo Alexander numbering を持たない *twisted link diagram*

また、 *twisted link diagram* D の *twisted pseudo Alexander numbering* に関して以下の *proposition* を発見した。

Proposition 2.3. D を *twisted link diagram* とし、 \tilde{D} を D の *double covering diagram* とする。このとき D が *twisted pseudo Alexander numbering* を持つならば、 \tilde{D} は *almost classical* である。

twisted link diagram D の *double covering diagram* \tilde{D} [9] について定義する。 b_1, b_2, \dots, b_k を *twisted link diagram* D の *bar* とする。 D を y 軸の左側に置き、 D の任意の 2 つの *bar* において、 *bar* を通る x 軸に平行な直線が同じにならないようにする。 Fig. 12 のように D の y 軸対称の *diagram* の *real crossing* の符号をすべて入れ替えて得られた *diagram* を $s(D)$ とする。

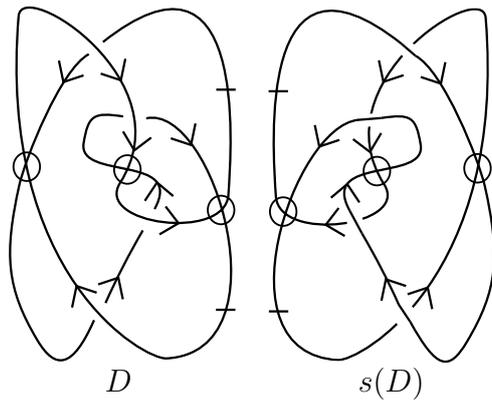


Fig. 12: D と $s(D)$

D と $s(D)$ の各 bar における近傍を Fig. 13 のように変形する. このようにして得られた diagram \tilde{D} を D の double covering diagram という. double covering diagram の例を Fig. 14 に示す.

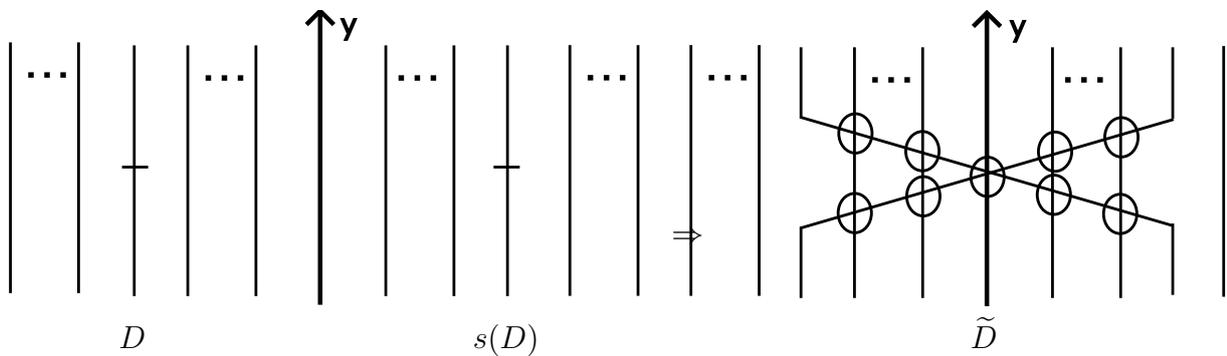


Fig. 13: double covering diagram

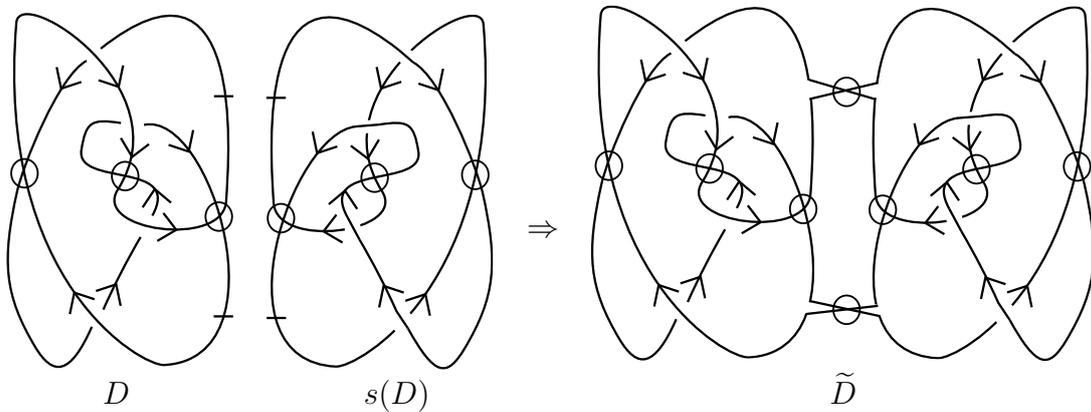


Fig. 14: double covering diagram の例

ここで, Fig. 14 の twisted link diagram D は Fig. 15 に示すように twisted pseudo Alexander numbering を持つ. このとき, D の double covering diagram \tilde{D} は Fig. 15 に示すように almost classical である.

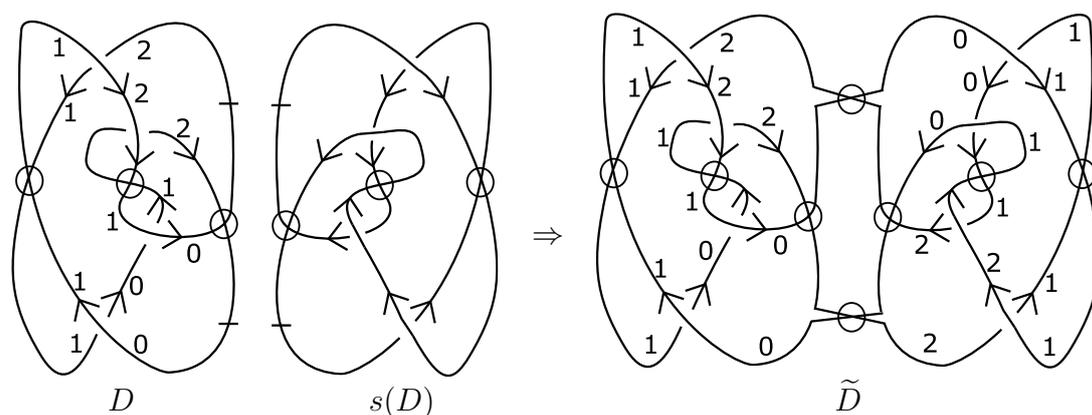


Fig. 15: D と \tilde{D} の numbering

References

- [1] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999) 663-690.
- [2] R. G. H. Boden E. Harper, *Virtual knot groups and almost classical knots*, Fundamenta Mathematicae **238** (2017), 101-142.
- [3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Virtual Crossing Number and the Arrow Polynomial* (2009), available at 0810.3858.
- [4] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **17** (2008), no. 11, 1311-1326, DOI 10.1142/S0218216508006658. cited By 34.
- [5] T. Nakamura and Y. Nakanishi and S. Satoh and Y. Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **10** (2012), DOI 10.1142/S0218216512500952.
- [6] M. O Bourgoin, *Twisted link theory*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), no. 3, 1249-1279.
- [7] N. Kamada, *Polynomial invariants and quandles of twisted links*, Topology Appl **159** (2012), 999-1006.
- [8] N. Kamada, *On twisted knots*, Knot theory and its applications **670** (2016), 328-341.
- [9] N. Kamada and S. Kamada, *Double coverings of twisted links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **25** (2016), no. 9. 1641011, 22 pp.