

交点数が3以下のロング溶接結び目について

西元勇樹

神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期課程2年

1 ロング仮想結び目, ロング溶接結び目, 仮想アーク図式の r 同値類

定義 1.1. I を閉区間 $[0, 1]$ とする. はめこみ $\alpha : I \rightarrow I \times I$ が次の条件 (i) を満たすとき, その像 $\alpha(I)$ を 仮想アーク図式 という. また α が条件 (i), (ii) を満たすとき, その像 $\alpha(I)$ を ロング仮想結び目図式 という. 図2は仮想アーク図式であり, ロング仮想結び目図式でもある.

(i) α の多重点は全て横断的な2重点であり, その各2重点は実交点, 仮想交点のどちらかである. ただし, 実交点, 仮想交点とは, それぞれ図1のように表される情報がついている2重点のことである.

(ii) $\alpha(0) = (0, \frac{1}{2})$, $\alpha(1) = (1, \frac{1}{2})$ が成り立つ.

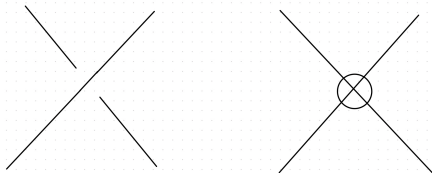


図 1: 実交点 (左) と仮想交点 (右)

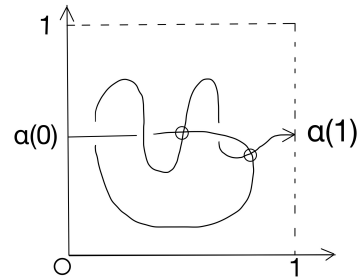


図 2: 仮想アーク図式, ロング仮想結び目図式

本稿では, 仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式には, $\alpha(0)$ から $\alpha(1)$ へ向きが付いているとする. $\alpha(0)$, $\alpha(1)$ をそれぞれ $\alpha(I)$ の始点, 終点といい, $\alpha(I)$ の始点と終点を合わせて $\alpha(I)$ の端点という. また, AD , LD をそれぞれ, 仮想アーク図式全体の集合, ロング仮想結び目図式全体の集合とする.

定義より, 任意のロング仮想結び目図式は仮想アーク図式である.

定義 1.2. D を仮想アーク図式またはロング仮想結び目図式とする. D の下交点から次の下交点, D の下交点から D の端点, D の端点から次の下交点のいずれかである D の一部を, D の弧という. ただし D の弧の内部には下交点をもたないとする. D が実交点をもたないときは, D の端点から D の端点も D の弧という.

仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式に対して同値関係を定義するため, 局所変形を紹介する. 局所変形 $R1 \sim R3$, $V1 \sim V4$, OC , $E1$, $E2$ を図3で定める. ただし, 変形の前後で図式に付いた向きは変わらないとする. また図3において, 黒丸は端点を表す.

仮想アーク図式およびロング仮想結び目図式の同値類を定義する.

定義 1.3. D , D' をロング仮想結び目図式とする. D と D' が有限回の局所変形 $R1 \sim R3$, $V1 \sim V4$, 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' は v 同値 であるといい, $D \sim_v D'$ と書く. また, D と D' が有限回の局所変形 $R1 \sim R3$, $V1 \sim V4$, OC , 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' は w 同値 であるといい, $D \sim_w D'$ と書く.

定義 1.4. D , D' を仮想アーク図式とする. D と D' が有限回の局所変形 $R1 \sim R3$, $V1 \sim V4$, OC , $E1$, $E2$, 端点を固定した $I \times I$ 上の全同位変形で移り合うとき, D と D' は r 同値 であるといい, $D \sim_r D'$ と書く.

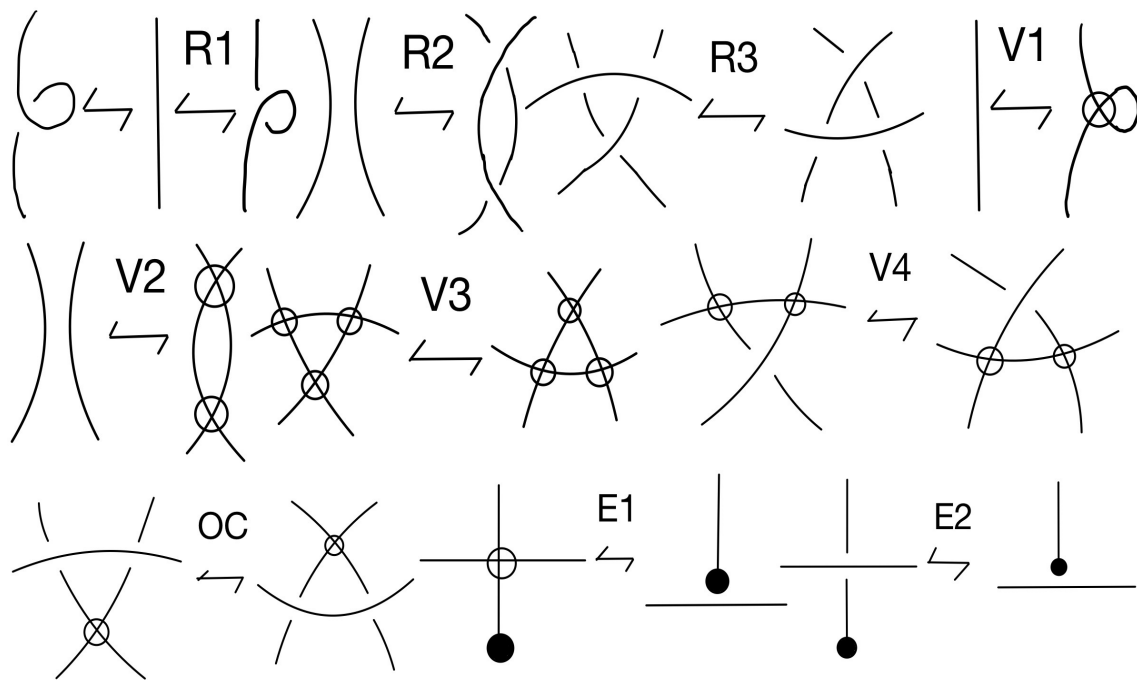


図 3: 局所変形 V1~V4, OC, E1, E2

容易にわかるように, v 同値と w 同値は $\mathcal{LD}$ 上の同値関係であり, r 同値は $\mathcal{AD}$ 上の同値関係である.

注意 1.5. D, D' をロング仮想結び目図式とする. $D \stackrel{v}{\sim} D'$ であるならば $D \stackrel{w}{\sim} D'$ であり, $D \stackrel{w}{\sim} D'$ であるならば $D \stackrel{r}{\sim} D'$ である.

定義 1.6. $\mathcal{LD}$ に対し, 同値関係 $\stackrel{v}{\sim}$ で割ったときの各同値類をロング仮想結び目, $\stackrel{w}{\sim}$ で割ったときの各同値類をロング溶接結び目という. また, ロング仮想結び目またはロング溶接結び目 K の代表元 D を K の図式という. さらに, $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類 K の代表元 D を K の図式という.

K を $\mathcal{LD}/\stackrel{v}{\sim}$, $\mathcal{LD}/\stackrel{w}{\sim}$ または $\mathcal{AD}/\stackrel{r}{\sim}$ の元とする. K が実交点も仮想交点ももたない図式を少なくとも 1 つもつとき, K は自明であるという. また, $\min\{D \text{ の実交点の個数} \mid D: K \text{ の図式}\}$ を K の交点数といい, $c(K)$ と書く.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. D^* を, 図 4 のように D の真下に鏡を置いて映した図式とする. また $-D$ を, 図 4 のように D の向きを逆にし, さらに 180 度回転させた図式とする. $-D$ の向きはロング仮想結び目図式の向きの条件を満たしている.

注意 1.7. ロング溶接結び目 K に対し, D, D' をその図式とする. このとき, $[D] = [D']$ であるならば, $[D^*] = [D'^*]$, $[-D] = [-D']$ である.

$K^* := [D^*]$, $-K := [-D]$ とおく. 注意 1.7 より, この記号の定義は well-defined である. また $(-K)^* = -(K^*)$ であるから, これを $-K^*$ と表す. さらに, $\overline{K} := \{K, K^*, -K, -K^*\}$ とおく.

吉田 [14] により, 交点数が 3 以下のロング仮想結び目の完全な分類が与えられた. また, 金信-小松 [9] により, 交点数が 4 以下の $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類が 105 種類以下であることが示された. さらに金信-角 [10] により, 交点数が 4 である 1 組 $\{R_{8,1}^4, R_{8,6}^4\}$ を除いて, 交点数が 4 以下の $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類の分類が与えられた. 今回, ロング仮想結び目と $\mathcal{AD}$ 上の r 同値類との中間に位置するようなロング溶接結び目の分類に取り組んだ.

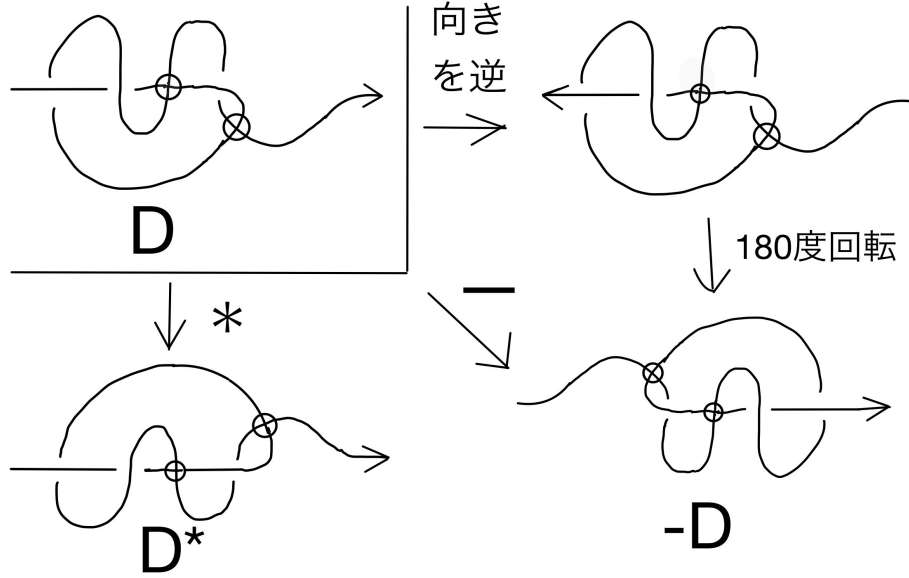


図 4: D に対する D^* と $-D$

2 不変量の導入

ロング溶接結び目を分類する上で必要な不変量を紹介する. 第 2.1 節では閉包, 第 2.2 節では正規化されたアレキサンダー多項式の定義を述べる. なお, 第 2.2 節中の群の定義は [8] を, 自由微分の定義は [12] を参照している. 第 2.3 節では $\bar{K}$ に対する不変量を定義する.

2.1 閉包

ロング仮想結び目図式 D に対し, 図 5 のように両端点を閉じることで得られる仮想結び目図式を $\text{Cl}(D)$ とかく. ただし, $\text{Cl}(D)$ に対し, w 同値, $*$, $-$ の操作で移り合うものは同じ図式であるとみなす.

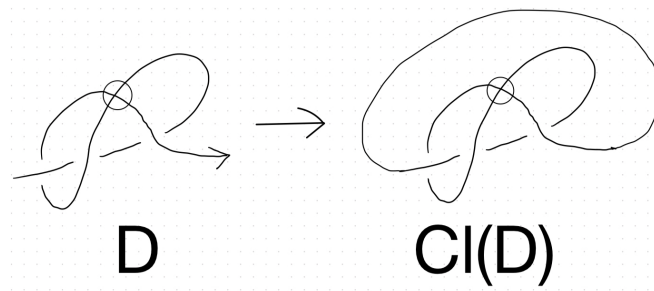


図 5: 仮想結び目図式 D と $\text{Cl}(D)$

ロング溶接結び目 K に対し, D, D' をその図式とする. $D \approx D'$ ならば $\text{Cl}(D) \approx \text{Cl}(D')$ であることが容易にわかる. よって $\text{Cl}(D)$ は K の不変量である. これを K の閉包といい, $\text{Cl}(K)$ と書く. また, 定義より $\text{Cl}(D) = \text{Cl}(D^*) = \text{Cl}(-D)$ である.

2.2 正規化されたアレキサンダー多項式

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. $\{a_1, \dots, a_n\}$ を D の弧の集合とし, 各 a_i に文字 x_i を対応させた階数 n の自由群 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ を考える. v を D の 1 つの実交点とし, そこに集まる 3 つの弧を a_i, a_j, a_k

とする. ただし, 図 6 のように, a_j は上交点を通る弧とし, a_j の進行方向に見て右側が a_i , 左側が a_k とする. このとき, v における関係式 $r(v)$ を $x_j^{-1}x_ix_j = x_k$ と定める. このとき, a_i と a_k の向きは気にしない. この関係式を D の各実交点 $v_1, \dots, v_{n-1}$ について求めると, 群表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r(v_1), \dots, r(v_{n-1}) \rangle$ が得られる. この群を $G(D)$ と書く.

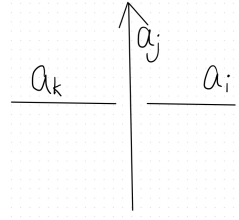


図 6: 実交点における関係式: $x_j^{-1}x_ix_j = x_k$

このとき, 次が知られている.

定理 2.1 ([6],[11],[13]). ロング仮想結び目図式 D, D' に対し, $D \stackrel{w}{\sim} D'$ ならば $G(D) \cong G(D')$ が成り立つ.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. 定理 2.1 から $G(D)$ は K の不変量である. これを K の群 といい, $G(K)$ と書く.

群 G および環 R に対し, $RG := \{r_1g_1 + \dots, r_ng_n \mid r_1 \in R, g_1 \in G, n \in \mathbb{Z}\}$ を G の R 上の群環という. 群環の元には自然な和と積が入る.

階数 n の自由群 $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ に対し, 写像 $\frac{\partial}{\partial x_j} : F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n$ が, 次の性質:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}, \quad \frac{\partial (uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad (u, v \in F_n) \quad (1)$$

を満たすものとして一意に存在する ([5]). これを群環の準同型に拡張した写像 $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n$ を, x_j に関する自由微分という.

K をロング溶接結び目, D を K の図式とする. また $G(K)$ は $\langle x_1, \dots, x_n \mid r(v_1), \dots, r(v_{n-1}) \rangle$ の表示をもつとし, $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ を階数 n の自由群とする. さらに, $\varphi : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を $x_j \mapsto t (j = 1, \dots, n)$ で定める環準同型とする. ここで, $(n-1) \times n$ 行列 $M = (\frac{\varphi(\partial r(v_i)}{\partial x_j})_{i,j})$ に対し, M の $(n-1)$ 次小行列式が生成するイデアルは単項イデアルであることが知られている ([4]). この単項イデアルの生成元をアレキサンダー多項式といい, $\Delta_K(t)$ と書く. アレキサンダー多項式は単元倍の差を除いて K の不変量となっている ([4]). さらに, $\Delta_K(t)$ は $\Delta_K(1) = 1$, $\frac{d}{dt}\Delta_K(1) = 0$ を満たすように正規化することができる ([7]). K の正規化されたアレキサンダー多項式を $\tilde{\Delta}_K(t)$ と書く. また, $*, -$ の操作に関して次が成り立つ.

補題 2.2. ロング溶接結び目 K に対し, $\tilde{\Delta}_K(t^{-1}) = \tilde{\Delta}_{K^*}(t) = \tilde{\Delta}_{-K}(t)$ が成り立つ.

2.3 $\overline{K}$ の不変量

本稿では, ロング溶接結び目の分類を考える上で, $*, -$ で移り合うものは同じ結び目として扱うものとする. ロング溶接結び目 K に対して定義される $\overline{K}$ の分類を行うため, $\overline{K}$ に対する不変量を定義する. K をロング溶接結び目, 写像 f をロング溶接結び目の不変量としたとき, $f(\overline{K}) := \{f(K), f(K^*), f(-K), f(-K^*)\}$ と定義すると, 次が成り立つ.

注意 2.3. ロング溶接結び目 K, K' に対し, $\overline{K} = \overline{K'}$ ならば $f(\overline{K}) = f(\overline{K'})$ である.

第 2.1 節の最後より, $\text{Cl}(\overline{K}) = \{\text{Cl}(K)\}$ が成り立つ. よって単に $\text{Cl}(\overline{K}) = \text{Cl}(K)$ としてよい. また, 補題 2.2 より, $\tilde{\Delta}_{\overline{K}}(t^{-1}) = \{\tilde{\Delta}_K(t), \tilde{\Delta}_K(t^{-1})\}$ が成り立つ.

3 主結果

定理 3.1. 交点数が 3 以下のロング溶接結び目 K に対し、次が成り立つ。ただし、 $K_1^0, K_1^2, K_2^2, K_1^3, \dots, K_{10}^3$ は図 7 のロング溶接結び目である。

- $c(\overline{K}) = 0$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^0}$ であることは同値である。
- $c(\overline{K}) = 1$ である $\overline{K}$ は存在しない。
- $c(\overline{K}) = 2$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}$ であることは同値であり、 $\overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}$ は互いに異なる。
- $c(\overline{K}) = 3$ であることと $\overline{K} = \overline{K_1^3}, \overline{K_2^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ であることは同値であり、組 $\{\overline{K_5^3}, \overline{K_6^3}\}, \{\overline{K_7^3}, \overline{K_9^3}\}$ を除いて、 $\overline{K_1^3}, \overline{K_2^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ は互いに異なる。

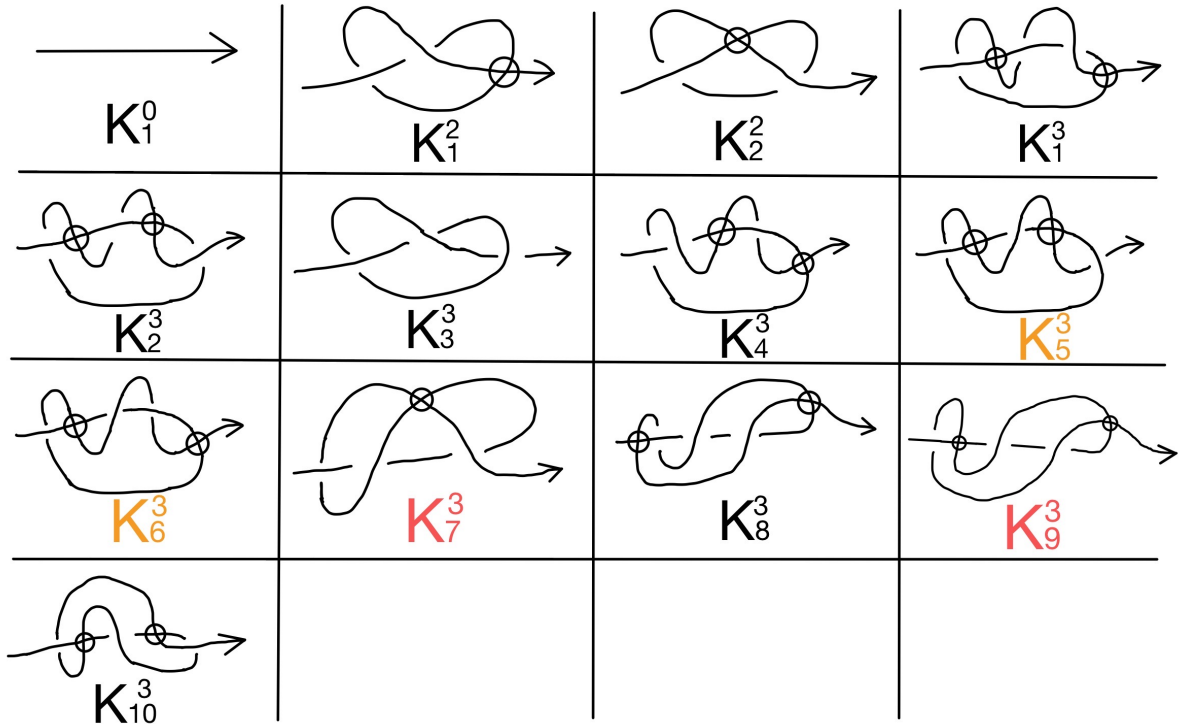


図 7: 交点数が 3 以下のロング溶接結び目のリスト

$\overline{K_1^0}, \overline{K_1^2}, \overline{K_2^2}, \overline{K_1^3}, \dots, \overline{K_{10}^3}$ の正規化されたアレキサンダー多項式と閉包を表 1 に示す。表 1 における w3.1, w3.2 は, Bartholomew と Fenn により与えられた溶接結び目の表 ([1]) 中の溶接結び目を指している。[1] の表は [2], [3] をもとに作成され, Bartholomew のホームページに掲載されている。図 8 は, [1] の表に掲載されている溶接結び目のうち交点数が 4 以下の範囲である。ただし, [1] の表は * の操作による差を除いた表となっている。

$\overline{K}$	$\tilde{\Delta}_{\overline{K}}(t)$	$\text{Cl}(\overline{K})$
$\overline{K}_1^0$	$\{1\}$	自明
$\overline{K}_1^2$	$\{t - 1 + t^{-1}\}$	自明
$\overline{K}_2^2$	$\{-t^2 + 2t, 2t^{-1} - t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_1^3$	$\{t^2 - t + t^{-1}, t - t^{-1} + t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_2^3$	$\{-t^3 + t^2 + t, t^{-1} + t^{-2} - t^{-3}\}$	自明
$\overline{K}_3^3$	$\{t - 1 + t^{-1}\}$	w3.2
$\overline{K}_4^3$	$\{t - 1 + t^{-1}\}$	w3.1
$\overline{K}_5^3$	$\{-t^2 + 2t, 2t^{-1} - t^{-2}\}$	w3.1
$\overline{K}_6^3$	$\{-t^2 + 2t, 2t^{-1} - t^{-2}\}$	w3.1
$\overline{K}_7^3$	$\{t^2 - 2t + 2, 2 - 2t^{-1} + t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_8^3$	$\{-t + 3 - t^{-1}\}$	自明
$\overline{K}_9^3$	$\{t^2 - 2t + 2, 2 - 2t^{-1} + t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_{10}^3$	$\{-t^3 + 2t^2 - t + 1, 1 - t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3}\}$	自明

表 1: 各 $\overline{K}$ の正規化されたアレキサンダー多項式と閉包

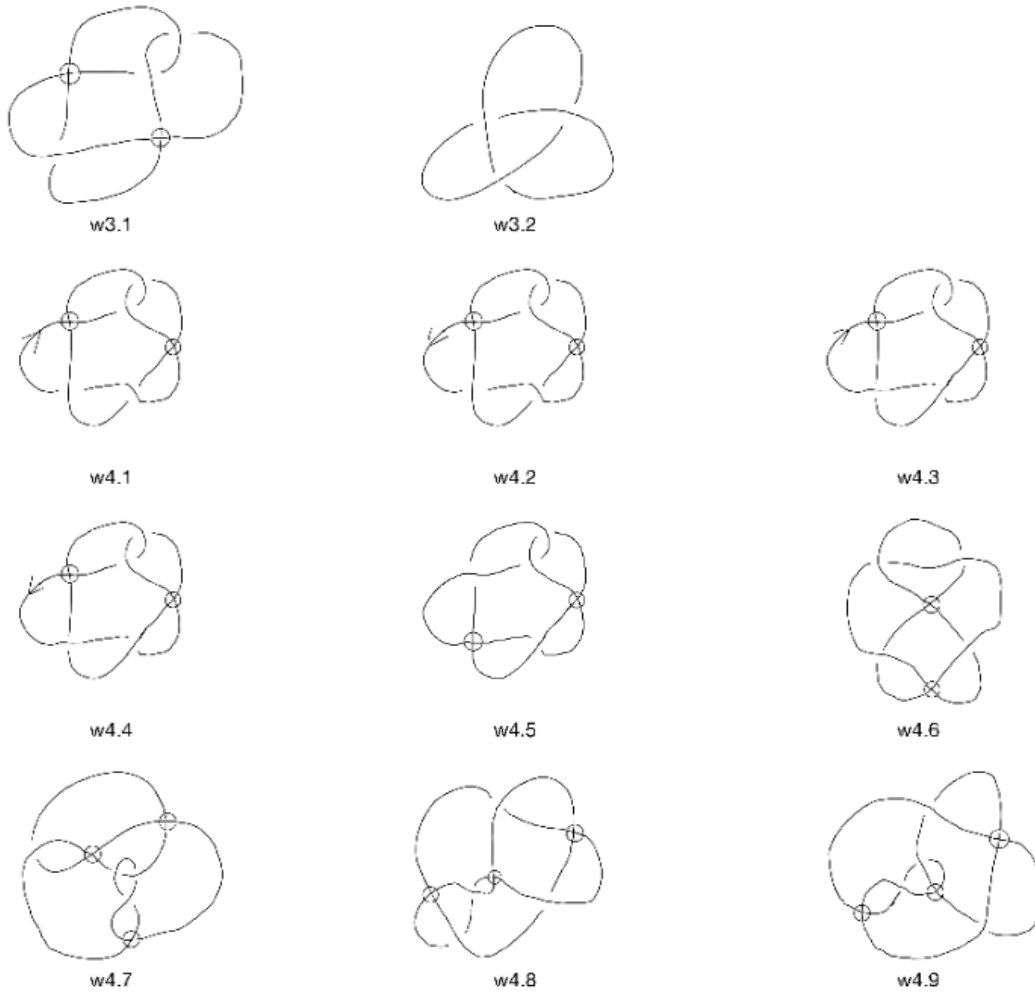


図 8: Bartholomew と Fenn による溶接結び目の表の交点数が 4 以下の範囲

謝辞

本研究集会で講演の機会をくださった世話人の先生方に御礼申し上げます。また、講演に際してご指導くださった和田康哉先生、講演後にたくさんの助言をくださった佐藤進先生にも重ねて感謝申し上げます。

参考文献

- [1] A. Bartholomew, <https://www.layer8.co.uk/maths/welded-knots/index.htm>
- [2] A. Bartholomew and R. Fenn, *Biquandles of small size and some invariants of virtual and welded knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), no. 7, 943–954.
- [3] R. Fenn and A. Bartholomew, *Erratum: Biquandles of small size and some invariants of virtual and welded knots*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1792002, 11 pp.
- [4] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Based upon lectures given at Haverford College under the Philips Lecture Program Ginn and Company, Boston, MA, 1963. x+182 pp.
- [5] クロウエル フォックス 著, 寺阪英孝 野口広 訳, 結び目理論入門, 岩波書店 (1967)
- [6] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, Finite-type invariants of classical and virtual knots, Topology **39** (2000), no. 5, 1045–1068. Topology 39 (2000), no. 5, 1045–1068.
- [7] Habiro Kazuo, Kanenobu Taizo, Shima Akiko, *Finite type invariants of ribbon 2-knots*, Low-dimensional topology (Funchal, 1998), 187–196. Contemp. Math., **233** American Mathematical Society, Providence, RI, 1999
- [8] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, 丸善出版 (2012).
- [9] T. Kanenobu and S. Komatsu, *Enumeration of ribbon 2-knots presented by virtual arcs with up to four crossings*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1750042, 41 pp.
- [10] T. Kanenobu and T. Sumi, *Classification of a family of ribbon 2-konts with trivial Alexander polynomial*, Commun. Korean Math. Soc. **33** (2018), no. 2, 591–604.
- [11] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690.
- [12] 新國亮, SGC ライブラリ-178 空間グラフのトポロジー Conway-Gordon の定理をめぐって, サイエンス社 (2022).
- [13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9**(2000), no. 4, 531–542.
- [14] 吉田立樹, Long Virtual Knot の分類に向けて, 神戸大学大学院理学研究科修士学位論文, 2024.