

Twisted Whitehead 絡み目のトーション関数の零点集合について

植木 潤 (Jun Ueki)

ABSTRACT

結び目や絡み目の群の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標がなす代数多様体上で, Reidemeister トーション関数が定める因子 (零点集合に重複度の情報を備えたもの) を調べ, とくに次の 2 点を指摘する. (1) Whitehead 絡み目 W_1 の群の non-acyclic な既約表現は, $(-3, -3)$ -filling を經由することで特徴付けられる. (2) twisted Whitehead 絡み目 W_k ($k \in \mathbb{Z}$) について, ホロノミー表現が乗っている指標多様体の既約成分上で, 因子の重複度は 2 である.

本稿は研究集会「結び目の数理 VII」の報告集記事であり, 内容は論文 [TTU22, BTTU23] に基づく.

1. Figure-eight knot, and twist knots

1.1 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標多様体

$K = 4_1$ (figure-eight knot) の群は

$$\pi_K = \pi_1(S^3 - 4_1) = \langle a, b \mid aw = wb \rangle$$

という表示をもつ. ここに a, b はメリディアン元であり, $w = [a, b^{-1}]$ とおく. 一般に $g \in \pi_K$ に対し

$$\mathrm{tr} g : \mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}); \rho \mapsto \mathrm{tr} \rho$$

という写像を考える. π_K の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標たちは, $x = \mathrm{tr} a$, $y = \mathrm{tr} ab$ によってパラメトライズされる. 表現の共役類の集合について

$$\mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}) // \mathrm{conj.} = \{\mathrm{tr} \rho \mid \rho \in \mathrm{Hom}(\pi_K, \mathrm{SL}_2\mathbb{C})\}$$

という等式があり, $f(x, y) = 2x^2 - x^2y + y^2 - y - 1 \in \mathbb{Z}[x, y]$ と置くと, 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の全体と代数的集合 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0, x^2 - y - 2 \neq 0\}$ の間に自然な全単射がある.

1.2 トーション関数

π_K の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類の代表元は, $\mathbb{C}[x, y]$ の 2 次拡大に値を持つ Riley の普遍 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ^R に指標多様体の座標を代入することで得られる. その Reidemeister トーションは複体の基底を選ぶことで決まる不変量であるが, 一般に境界が空でない連結な 3 次元多様体は 2 次元複体に潰れるので, 群の表示から Fox 微分によって計算することができ,

$$\tau(S^3 - K, \rho^R) = -2(x - 1) := \tau(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$$

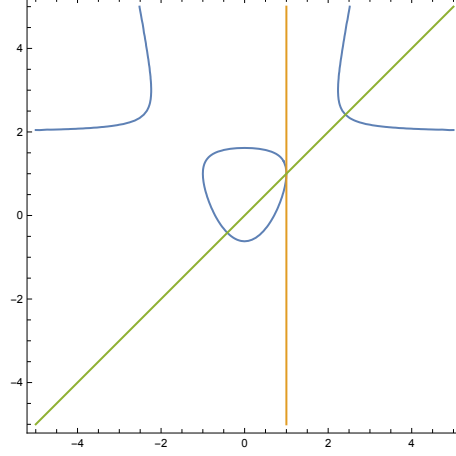
と計算される. また, $\mathrm{Frac} \mathbb{Z}[x, y]$ の単元倍を除き, 局所係数ホモロジーの order を用いて $\tau(S^3 - K, \rho^R) \doteq \prod_i (\mathrm{ord} H_i(S^3 - K, \rho^R))^{(-1)^i}$ となる.

各既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ に対し, $\tau(S^3 - K, \rho^R)$ に ρ の共役類の座標を代入することで $\tau(S^3 - K, \rho)$ の値が得られ, 関数 $\tau(S^3 - K, \rho^R)$ の零点は non-acyclic な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現に対応する.

なお GL_1 普遍表現 ρ_1 を考えると, K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ について $\tau(S^3 - K, \rho_1) \doteq \Delta_K(t)/(t - 1)$ となる. この意味で $\tau(x, y)$ は Alexander 多項式の SL_2 版と考えられる.

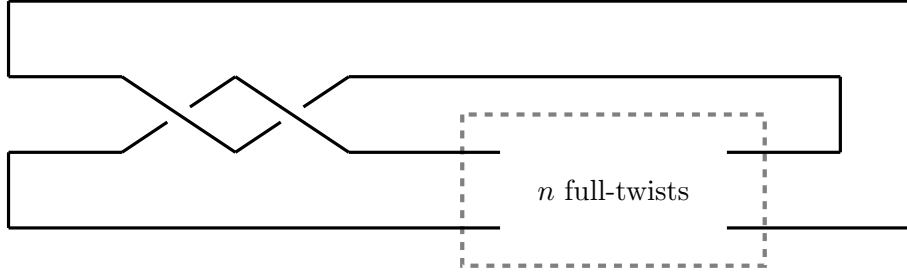
1.3 零点の位数

B.Mazur の問題 [Maz00] の, この文脈での解釈が示唆することにより, 代数多様体 $f(x, y) = 0$ 上の多項式関数 $\tau(x, y)$ の零点の重複度は, 繊細かつ興味深い対象である.



上の図は $\mathbb{R}^2$ での $f(x, y) = 0$ と $\tau(x, y) = 0$ の様子である. 2つの曲線が共有点で接していることが見て取れる. このことは, $\tau(x, y)$ の $f(x, y) = 0$ 上の零点の重複度が2である, と換言される.

$K = 4_1$ に限らず次が言える. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し twist 結び目 $J(2, 2n)$ を次の図で定める.



$J(2, 0) = 0_1$ (unknot), $J(2, 2) = 3_1$ (trefoil), $J(2, -2) = 4_1$ (figure-eight) である.

定理 1.1 [TTU22, Theorem B]. 任意の twist 結び目 $J(2, 2n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) に対し, 記号を同様に定めたとき, トーション関数 $\tau(x, y)$ の指標多様体 $f(x, y) = 0$ 上の零点の重複度は2である.

同様の性質は他の結び目についても見られ, 一般に次が期待される.

予想 1.2. 一般に素な双曲結び目 K に対し, ホロノミー表現を含む既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の多様体上で, トーション関数の零点の重複度は2であろう.

1.4 幾何学的な解釈

定理 1.3 [TTU22, Theorems C,D]. 任意の twist 結び目 $J(2, 2n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ について,

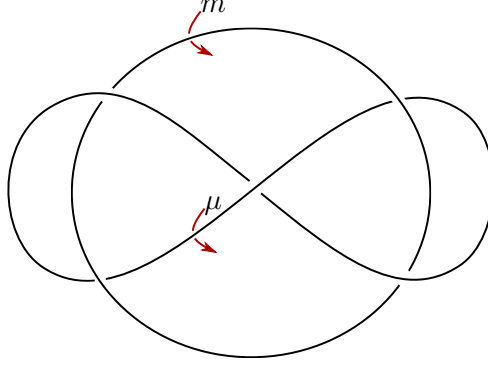
$$\rho \text{ が non-acyclic} \iff \rho \text{ は } -3\text{-filling を経由し, かつ } \mathrm{tr} \rho(a^{-1}w^n) = -1$$

という同値性がある.

なお一般の体 $\mathbb{F}$ 上で, $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{F}$ について, $\mathrm{ord} A = 3 \iff \mathrm{tr} A = -1$ という同値性がある.

2. Whitehead link

Whitehead 絡み目 W_1 は次の図で定義される.



W_1 の群は表示

$$\pi_{W_1} = \pi_1(S^3 - W_1) = \langle m, \mu \mid m\omega = \omega\mu \rangle,$$

$\omega = \omega(m, \mu)$ を持つ. 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現は $x = \mathrm{tr} m$, $y = \mathrm{tr} \mu$, $z = \mathrm{tr} m\mu$ によってパラメトライズされ, 既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標の代数多様体とトーション関数は, それぞれ

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz^2 - z(x^2 + y^2 + z^2) + xy + 2z, \\ \tau(x, y, z) &= -2(x + y - z - 2) \end{aligned}$$

によって与えられる.

定理 2.1 [BTTU23]. (1) $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ について, 次の同値性がある:

$$f = 0 \text{ かつ } \tau = 0 \stackrel{\text{iff}}{\iff} x + y - 1 = 0 \text{ かつ } z + 1 = 0$$

$$\stackrel{\text{iff}}{\iff} (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ に共役類が対応する既約表現 } \rho \text{ は, } (-3, -3)\text{-filling を経由する.}$$

(2) P を $f = \tau = 0$ 上の generic な点とすれば, 環の局所化について

$$(\mathbb{C}[x, y, z]/(f, \tau))_{(P)} \cong (\mathbb{C}[x, y, z]/((x + y - 1)^2, z + 1))_{(P)}.$$

この環の長さから, $f = 0$ 上での τ の零点の重複度は 2 である.

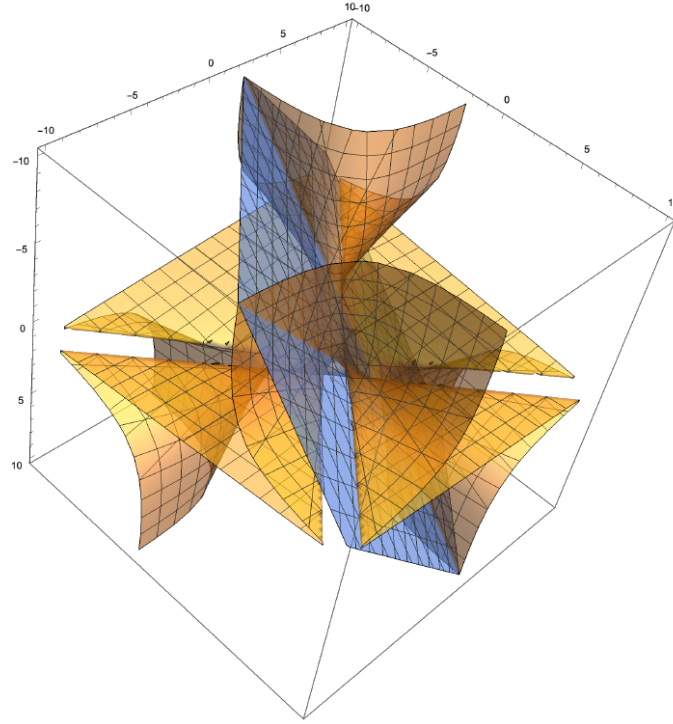
$(-3, -3)$ -filling によって得られる空間 $W(-3, -3)$ は 2 つのレンズ空間の連結和 $L(3, 1) \# L(3, 1)$ であり, その基本群は三角群 $\Gamma(3, 3, \infty)$ と同型である. (1) の系として, $L(3, 1) \# L(3, 1)$ の既約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現は全て non-acyclic である.

なお W_1 の第 2 成分に対する -3 -filling を経由する指標全体がなす部分多様体は $\{x + y - 1 = 0, z + 1 = 0\} \cup \{x - y - 1 = 0, z - 1 = 0\}$ である. W_1 の第 1 成分に $1/n$ -filling を施すと $S^3 - J(2, 2n)$ が得られ, 前節で述べた twist 結び目 $J(2, 2n)$ に対する既存の結果が復元される.

$f = 0$ 上の点 (a, b, c) 周りでの陰関数を $z = z_f(x, y)$ とし, $L(x, y) = \tau(x, y, z_f(x, y))$ と定める. このとき (a, b) 周りでの $L(x, y)$ の Taylor 展開を同じ記号 $L(x, y)$ で表せば, (2) より, 極大イデアル $\mathfrak{m} = (x - a, y - b) \subset \mathbb{C}[[x - a, y - b]]$ に対し $L(x, y) \in \mathfrak{m}^2$ かつ $L(x, y) \notin \mathfrak{m}^3$ である. この性質は, 有限体上の表現の CDVR 上の普遍変形 ρ に付随する “代数的 L 関数” $\mathcal{L}_\rho$ に遺伝する.

因子の零点の重複度という概念には長い歴史があり, 交叉重複度と深い関係がある. 今回我々は [Sha13, Chapter 3] に従って由緒ある方法で零点の重複度を定義し, Serre の交叉公式 (cf. [Har77, Appendix A]) を用いて局所環の長さを用いて重複度を計算した.

$f(x, y, z) = 0$ と $\tau(x, y, z) = 0$ を $\mathbb{R}^3$ 内に図示すると次のようになる.

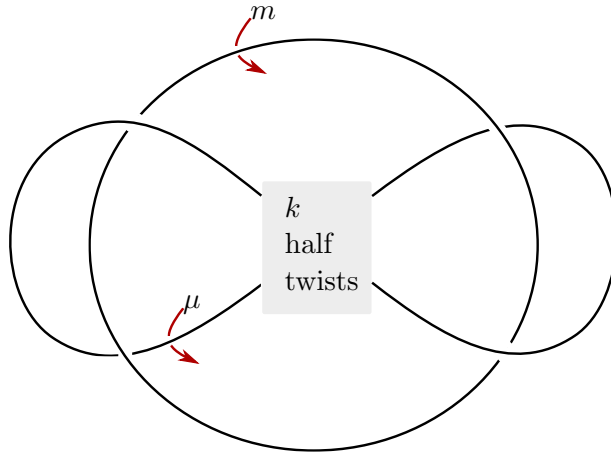


W_1 の non-acyclic 表現の特徴付けは、次の一般的な事実の系と捉えることができる。これは閉 3 次元多様体に対する [Kit94, Main Theorem] の、境界付き version である。

定理 2.2 [BTU23]. M を cusp つき 3 次元双曲多様体, N を M から filling によって得られる Seifert 多様体とし, N の base orbifold は Euler 数 $\neq 0$ であるとする. 表現 $\rho: \pi_1 M \rightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{C}$ が $\pi_1 M \twoheadrightarrow \pi_1 N$ (例外型手術) を経由し, ρ は境界上で自明であり, generic fiber を I_2 に送るとする. このとき ρ は non-acyclic である.

3. Twisted Whitehead links

各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, W_k を次の図で定義する. W_1 は Whitehead link である. なお標準的な 2 橋絡み目表示によれば $W_k = \mathbf{b}(2, k, 2) = \mathbf{b}(2, k+1, -2)$ となり, W_{-k} と W_{k-2} は互いに鏡映の関係にある.



W_k の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標多様体は最初に [Tra16] で計算された. 次に [Tra18] で別の方法で計算され, ホロノミー指標が属する既約成分が特定された. W_k のトーション関数は [NT19] で計算された.

なお W_k から $-1/l$ -filling ($l \in \mathbb{Z}$) によって double twist knot $J(k, 2l)$ が得られ, 諸性質が遺伝する. また Borromean ring から filling によって W_{2k-1} たちが得られる.

定理 3.1 [BTTU23]. W_k の群の $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 既約表現を考えた場合も, 既約指標の多様体の, ホロノミー指標が乗っている既約成分 $f = 0$ 上では, τ の零点の重複度は 2 である. 他の既約成分上では, τ の零点の重複度は 1 である.

証明. $v = \mathrm{tr} \mu m \mu^{-1} m^{-1} = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$ とおき, f, τ を $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ の元と見れば, 環 $\mathbb{C}[x, y, z, w]/(f, \tau, v - (x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2))$ の generic な点での局所化から得られる. $\square$

一般の W_k に対する non-acyclic 表現の具体的な幾何的特徴付けは, まだ得られていない:

問題 3.2. W_1 に対する $W(-3, -3) \cong L(3, 1) \# L(3, 1)$ に当たるものを, 一般の W_k に対して見つけよ.

謝辞.

研究集会「結び目の数理 VII」の世話人の先生方, また共同研究者である Léo Benard, Anh T. Tran, 丹下稜斗氏らに感謝します. 主に本稿著者のライフイベント等の都合により, 初報からもう何年も経ってしまいましたが, 近日中に論文 [BTTU23] の大幅に改訂した最新版を arXiv にて公開の予定です. 本研究の一部は, JSPS 科研費 JP19K14538 および JP23K12969 の助成を受けたものです.

REFERENCES

- BTTU23 Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic SL_2 -representations and L -functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.
- Har77 Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR 463157
- Kit94 Teruaki Kitano, *Reidemeister torsion of Seifert fibered spaces for $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ -representations*, Tokyo J. Math. **17** (1994), no. 1, 59–75. MR 1279569
- Maz00 Barry Mazur, *The theme of p -adic variation*, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 433–459. MR 1754790 (2001i:11064)
- NT19 Hoang-An Nguyen and Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of twisted Whitehead links*, New York J. Math. **25** (2019), 1240–1258. MR 4028833
- Sha13 Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, third ed., Springer, Heidelberg, 2013, Varieties in projective space. MR 3100243
- Tra16 Anh T. Tran, *Character varieties of $(-2, 2m+1, 2n)$ -pretzel links and twisted Whitehead links*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 2, 1650007, 16. MR 3463852
- Tra18 ———, *The A -polynomial 2-tuple of twisted Whitehead links*, Internat. J. Math. **29** (2018), no. 2, 1850013, 14. MR 3770936
- TTU22 Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic SL_2 -representations of twist knots, -3 -Dehn surgeries, and L -functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

植木 潤 (Jun Ueki) uekijun46@gmail.com

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan