

絡み目の p 進トーション

吉崎彪雅

1. INTRODUCTION

本稿は、研究集会「結び目の数理 VII」での筆者の講演内容をまとめたものであり、内容は [9] に基づく。本稿を通して、 p を素数とし、 d を正の整数とする。本稿で主に紹介するのは、閉整ホモロジー 3 球面上の絡み目で分岐する $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆と呼ばれる被覆の系列に対し、それらの 1 次ホモロジー群の位数が p 進的に収束することである。ここで $\mathbb{Z}_p^d$ とは、 p 進整数全体からなる集合 $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の d 個直和である。

本研究の背景について簡単に紹介する。数論の分野において、大域体と呼ばれる対象の $\mathbb{Z}_p$ 拡大と呼ばれる無限次拡大体に対して、その中間体の類数という不変量が p 進的に収束することが発見された ([4, Corollary 2], [7, Theorem 2.1], [8, Theorem 5.3])。そして、数論と位相幾何学の類似を追求する数論的位相幾何学の観点から、結び目の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆 ($\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似物) に対して、部分被覆の 1 次ホモロジー群の位数 (類数の類似物) もまた、 p 進的に収束することが証明された ([7, Theorem 3.1])。本稿の主結果 Theorem 1.2 は、結び目に対する結果の絡み目への一般化である。

次に、本稿で使用する概念や記号について準備する。 M を有向連結閉 3 次元多様体、 L を tame な有限絡み目とする。写像 $h: N \rightarrow M$ が L で分岐する M の有限次分岐被覆であるとは、 $X = M - L$, $Y = N - h^{-1}(L)$ とおくとき、制限写像 $h|_Y: Y \rightarrow X$ が有限次被覆空間であり、その $X \hookrightarrow M$ に関する Fox 完備化として h が実現されることをいう。とくに、 $h_*(\pi_1(Y))$ が $\pi_1(X)$ の正規部分群であるとき、 h は正規 (Galois) 被覆であるという。このとき、被覆変換群 G は $G \cong \pi_1(X)/h_*(\pi_1(Y))$ を満たす。逆に、有限群への全射準同型写像 $\tau: \pi_1(X) \rightarrow G$ が与えられたとき、正規部分群 $\ker \tau \subset \pi_1(X)$ に対応して、正規被覆 $Y \rightarrow X$ 及び正規分岐被覆 $N \rightarrow M$ が定まる。

Definition 1.1 (分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆). M を閉整ホモロジー 3 球面とし、 $L = l_1 \cup \dots \cup l_d$ を M 内の d 成分絡み目とする。 $\pi_1(M - L)^{ab}$ におけるメリディアンを $m_1, \dots, m_d$ とする。群準同型写像 $\tau: \pi_1(M - L) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ を、アーベル化 $\pi_1(M - L) \rightarrow \pi_1(M - L)^{ab}$ と標準同型 $\pi_1(M - L)^{ab} \cong \mathbb{Z}^d$; $m_i \mapsto e_i$ (e_i は $\mathbb{Z}^d$ の標準基底) の合成写像とする。正の整数からなる組 $(n_1, \dots, n_d)$ に対して、 $\Gamma_{n_1, \dots, n_d} = \prod_i p^{n_i}\mathbb{Z}$ とおく。 τ と自然な全射 $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d/\Gamma_{n_1, \dots, n_d}$ との合成写像を $\tau_{n_1, \dots, n_d}$ とおき、 $\ker \tau_{n_1, \dots, n_d}$ に対応する分岐被覆を $M_{n_1, \dots, n_d} \rightarrow M$ とかけば、これは自然に逆系をなす。これを本稿では (M, L) の分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆と呼ぶ。

有限とは限らない群 A に対して、

$$|A| = \begin{cases} A \text{ の元の個数} & A \text{ が有限集合} \\ 0 & A \text{ が無限集合} \end{cases}$$

と定める。また、 $A_{\text{non-}p}$ を、位数が有限かつ p と素な元全体からなる部分群とする。本稿の主結果は次の通りである。

Theorem 1.2. すべての $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_{>0}^d$ に対して, $M_{n_1, \dots, n_d}$ が有理ホモロジー 3 球面となる絡み目で分岐する $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆に対して, $\lim_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} |H_1(M_{n_1, \dots, n_d}; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$ は $\mathbb{Z}_p$ において収束する.

Theorem 1.2 の証明には, 多変数多項式の巡回終結式と呼ばれる対象の p 進収束性を用いる (Theorem 2.1). 巡回終結式定義や結果については, Section 2 でまとめる. Section 3 では, Theorem 2.1 と, Mayberry–Murasugi, Porti らによるホモロジーの位数を計算する公式 (Theorem 3.1) を用いて, Theorem 1.2 を証明する. Section 4 では, 具体例として k -twisted Whitehead link ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対する p 進極限値の計算結果を紹介する. 講演では計算方法について言及しなかったが, k が偶数の場合は計算が簡単なので, 計算方法も併せて紹介する. Section 5 では, Theorem 1.2 の極限値が, p 進トーションという CW 複体の不変量と一致することを紹介する (Theorem 5.1). Section 6 では, 現在残っている課題を共有する.

2. 巡回終結式

Theorem 1.2 は, 整数係数多項式の巡回終結式というものの p 進的ふるまいから従う. そのため本節では, 巡回終結式とその p 進収束性を紹介する.

R を整域とする. t を変数とする多項式 $f, g \in R[t]$ に対して,

$$\begin{aligned} f &= a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots a_0, \\ g &= b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots b_0, \end{aligned}$$

$a_m, b_n \neq 0$ とおく. f と g の終結式 $\text{Res}(f, g)$ を, Sylvester 行列

$$\text{Syl}(f, g) = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & \end{bmatrix}$$

の行列式を用いて,

$$\text{Res}(f, g) = \det \text{Syl}(f, g)$$

によって定める. 正の整数の組 $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}^d$ をとる. 整数係数多変数多項式 $f(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_d]$ に対して, 各変数について反復的に終結式をとることで,

$$r_{n_1, \dots, n_d}(f) = \text{Res}(t_1^{p^{n_1}} - 1, \dots, \text{Res}(t_d^{p^{n_d}} - 1, f))$$

を定義する. [7] において, $d = 1$ の場合, すなわち一変数多項式に対する $r_n(f)$ の p 進収束性を証明した. 今回, これを多変数に拡張した.

Theorem 2.1. 多重数列 $(r_{n_1, \dots, n_d}(f))$ は $\mathbb{Z}_p$ で収束する.

Remark 2.2. 数列 $(r_{n_1, \dots, n_d}(f))$ が収束する場合, $n = n_1 = \cdots n_d$ を満たす部分列 $(r_{n, \dots, n}(f))$ もまた同じ値に収束する.

また, 定理の証明から自然に次も分かる.

Corollary 2.3. ある組 $(m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}_{>0}^d$ に対して, $\varphi_i(t_i) \mid t_i^{p^{m_i}} - 1$ ($1 \leq i \leq d$) なる多項式 φ_i をとる. このとき, $n_i \geq m_i$ における多重数列

$$\text{Res}\left(\frac{t_1^{p^{n_1}} - 1}{\varphi_1(t_1)}, \text{Res}\left(\frac{t_2^{p^{n_2}} - 1}{\varphi_2(t_2)}, \dots, \text{Res}\left(\frac{t_d^{p^{n_d}} - 1}{\varphi_d(t_d)}, f\right)\right)\right)$$

は, $\mathbb{Z}_p$ で収束する.

3. THEOREM 1.2 の証明

本節では、巡回終結式の収束性から Theorem 1.2 を導く。そのために、Mayberry–Murasugi, Porti らによる結果を紹介する。\$M\$ を整ホモロジー 3 球面とする。被覆変換群が有限アーベル群 \$G\$ となる、絡み目 \$L\$ で分岐する分岐被覆空間 \$h: N \to M\$ を考える。このとき、\$h: N \to M\$ に対応するような全射準同型写像 \$\sigma: \pi_1(M-L) \to G\$ が存在するのであった。\$G\$ から \$\mathbb{C}^*\$ への準同型写像全体を \$\hat{G}\$ とする。絡み目 \$L = l_1 \cup \dots \cup l_d\$ に対して、各成分のメリディアンを選び \$m_i\$ (\$1 \le i \le d\$) とする。\$\xi \in \hat{G}\$ に対して、\$L\$ の部分絡み目 \$L_\xi = \cup_{\xi(\sigma(m_i)) \neq 1} l_i\$ を定め、\$L_\xi\$ の成分数を \$d(L_\xi)\$ とする。また、\$L_\xi\$ の成分の番号は \$\xi_1, \dots, \xi_{d(L_\xi)}\$ とする。たとえば、\$L_\xi = l_{\xi_1} \cup \dots \cup l_{\xi_{d(L_\xi)}}\$ となり、対応するメリディアンは \$m_{\xi_1}, \dots, m_{\xi_{d(L_\xi)}}\$ となる。\$\hat{G}^{(1)} = \{\xi \in \hat{G} \mid L_\xi: \text{one component}\}\$ と定める。以上の設定で、次が成り立つ。

Theorem 3.1 ([5, Theorem 10.1], [2, Theorem 1.1]).

$$|H_1(N; \mathbb{Z})| = \frac{|G|}{\prod_{\xi \in \hat{G}^{(1)}} |1 - \xi(\sigma(m_{\xi_1}))|} \prod_{\xi \in \hat{G}} |\Delta_{L_\xi}(\xi(\sigma(m_{\xi_1})), \dots, \xi(\sigma(m_{\xi_{d(L_\xi)}})))|. \quad (3.1)$$

Theorem 2.1 (Corollary 2.3) と Theorem 3.1 を用いて、主結果を証明する。\$\mu_p(n) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{p^n} = 1, \zeta \neq 1\}\$ とおく。まず、\$\Gamma = \prod_i p^{n_i} Z_p\$ とおき、Definition 1.1 における \$\tau_\Gamma\$ に対して Theorem 3.1 を適用すれば、\$M_{n_1, \dots, n_d}\$ の 1 次ホモロジーの位数が得られる。ここで、各メリディアン \$m_i\$ に対して \$\tau_\Gamma(m_i)\$ の位数は \$p^{n_i}\$ であることに注意する。このとき、(3.1) の分数部分は 1 となることがわかる。さらに、\$\xi \in \hat{G}\$ が走る部分を、\$L\$ の部分絡み目が走るように並び替えると、\$M_{n_1, \dots, n_d}\$ のホモロジーの位数は次のように書ける。

$$\begin{aligned} |H_1(M_{n_1, \dots, n_d}, \mathbb{Z})| &= \prod_{L' \subset L} \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_{L'_1})} \dots \prod_{\zeta_{d(L')} \in \mu_p(n_{L'_d(L')})} |\Delta_{L'}(\zeta_1, \dots, \zeta_{d(L')})| \\ &= \prod_{L' \subset L} \left| \text{Res}\left(\frac{t_1^{p^{n_{L'_1}}} - 1}{t_1 - 1}, \dots, \text{Res}\left(\frac{t_{d(L')}^{p^{n_{L'_d(L')}}} - 1}{t_{d(L')} - 1}, \Delta_{L'}\right)\right) \right|. \end{aligned}$$

ここで、添え字の \$L'_1, \dots, L'_{d(L')}\$ は、\$L'\$ の成分の番号である。これに Corollary 2.3 を適用すれば、主結果 (Theorem 1.2) が得られる。

4. 具体例

\$M = S^3\$ とし、\$L\$ として twisted Whitehead link の場合に、\$\mathbb{Z}_p^2\$ 被覆のホモロジーの位数の \$p\$ 進極限值を計算する。正の整数 \$k\$ に対して、\$k\$-twisted Whitehead link \$L_k\$ を fig. 1 の形の絡み目とする。

このとき、閉整ホモロジー 3 球面 \$M\$ 上 \$L_k\$ で分岐する \$\mathbb{Z}_p^2\$ 被覆 (\$M_{n_1, n_2} \to M\$) に対して、

$$\lim_{n_1, n_2 \to \infty} |H_1(S_{n_1, n_2}^3; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = \begin{cases} \frac{m|m|_p}{\omega_p(m|m|_p)} & \text{if } k = 2m, \\ \frac{\omega_p(2)}{2} & \text{if } k = 2m + 1, p \neq 2 \\ (-1)^m \frac{\omega_2(m+1) - \omega_2(m)}{k} \prod_{\zeta \in \mu_2 \setminus \{-1\}} |\log_2 \frac{m\zeta + m + 1}{m\zeta + m + \zeta}|_2 \log_2 \frac{m\zeta + m + 1}{m\zeta + m + \zeta} & \text{if } k = 2m + 1, p = 2. \end{cases}$$

となる。ここで、\$|\cdot|_p\$ は正規化された \$p\$ 進絶対値とし、\$\omega_p\$ はタイヒミュラー指標とする。ただし、\$m\$ が偶数の場合は \$\omega_2(m) = 0\$ と定める。また、\$\mu_2 = \cup_{n \geq 1} \mu_2(n)\$ と

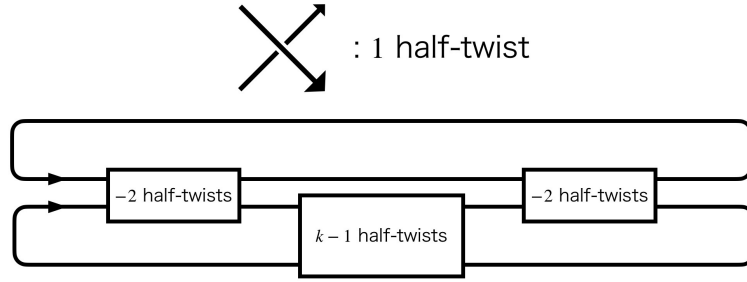


FIGURE 1. L_k

する．ここでは $k = 2m$ の場合の計算方法を見る． L_k の Alexander 多項式は次の形である ([6, Proposition 12.2]).

$$\Delta_{L_k}(t_1, t_2) = \begin{cases} m(1 + t_1 t_2 - t_1 - t_2) & \text{if } k = 2m, m \geq 1 \\ 1 + m - m(t_1 + t_2) + (1 + m)t_1 t_2 & \text{if } k = 2m + 1, m \geq 0. \end{cases}$$

L_k の任意の 1 成分部分絡み目 L' は自明な結び目であるため, $\Delta_{L'}(t_1, t_2) = 1$ となる．よって, Theorem 1.2 の証明をふまえると, $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ の位数は以下のように書ける．

$$|H_1(S_{n_1, n_2}^3; \mathbb{Z})| = \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_1)} \prod_{\zeta_2 \in \mu_p(n_2)} |m(1 + \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 - \zeta_2)|.$$

右辺を変形していくと,

$$\begin{aligned} |H_1(S_{n_1, n_2}^3; \mathbb{Z})| &= \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_1)} \prod_{\zeta_2 \in \mu_p(n_2)} |m(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2)| \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)} \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_1)} \left(|1 - \zeta_1|^{p^{n_2}-1} \prod_{\zeta_2 \in \mu_p(n_2)} |1 - \zeta_2| \right) \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)} \prod_{\zeta_1 \in \mu_p(n_1)} (|1 - \zeta_1|^{p^{n_2}-1} p^{n_2}) \\ &= m^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)} p^{n_1(p^{n_2}-1) + n_2(p^{n_1}-1)}. \end{aligned}$$

となる．よって, non- p part の位数は $(m|m|_p)^{(p^{n_1}-1)(p^{n_2}-1)}$ となり, $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ で $m|m|_p/\omega_p(m|m|_p)$ に収束することが分かる．

$k = 2m + 1$ の場合も基本的には同様の計算方法であるが, 少し技巧的な計算が必要になる．

5. p 進トーション

2020 年に, Kionke [3] は p 進トーションというホモトピー不変量を定義した．本節では, 主結果の p 進極限值と p 進トーションとの関係について紹介する．まず, p 進トーションの定義を簡単に紹介する．有限 CW-複体 X に対して, $\tilde{X}$ を X の普遍被覆とし, X の部分集合 A をとる． G を開副 p -群を部分群に持つ副有限群とし, $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow G$ を群準同型写像とする．開部分群 $\Gamma \subset \pi_1(X)$ に対して, Γ に対応する X の不分岐被覆を $h_\Gamma: \tilde{X}/\Gamma \rightarrow X$ と表記する．また, R を $1/p$ を含む単位的可換環とし, 有限生成アーベル群 H のトーション部分群を $\text{tors}H$ によって表す

ことにする. このとき, j 番目の p 進トーションとは

$$t_j^{[p]}(X, A; \varphi, R) := \#_p^G(\text{tors} \varinjlim_{N < G} H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N), A_N; R)) \quad (5.1)$$

によって定義されるものである. ここで, $\#_p^G$ は集合の位数を p 進的に補完する関数であり, 有限集合に対してはその位数を, p 進的に“許容的”な (“admissible” [3, Definition 4.2]) 無限集合については, $\mathbb{Z}_p$ あるいは ∞ に値をとるものである (詳しくは [3, Section 4]). また, N は G の開正規部分群を互り, $A_N = h_{\varphi^{-1}(N)}^{-1}(A)$ とする.

本節の結果は次である.

Theorem 5.1. M を整ホモロジー 3 球面とし, d 成分絡み目 L に対して, アレキサンダー多項式 $\Delta_L(t_1, \dots, t_d)$ が $(1, \dots, 1)$ 以外の 1 の p べき根対で 0 にならないとする. $N(L)$ を M における L の管状近傍とし, $E(L) = M - \text{int} N(L)$ とおく. このとき,

$$\lim_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} |H_1(M_{n_1, \dots, n_d}; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = t_2^{[p]}(E(L), \partial E(L); \varphi, \mathbb{Z}[1/p]).$$

証明は, Kionke による“近似定理”を利用する.

Theorem 5.2 ([3, Theorem 5.11]). $\cap_n N_n = \{1\}$ をみたす G の正規閉部分群の列 $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{tors} H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N_n), A_{N_n}; R)| = t_j^{[p]}(X, A; \varphi, R)$$

が成り立つ.

Theorem 5.1 の証明. $n = n_1 = \dots = n_d$ の場合を考え, $M_n = M_{n, \dots, n}$ とおく. このとき Remark 2.2 より,

$$\lim_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} |H_1(M_{n_1, \dots, n_d}; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}| \quad (5.2)$$

である. $X = E(L)$ とおく. $\Gamma = (p^n \mathbb{Z}_p)^d$ に対応する被覆空間を $h_n : X_n \rightarrow X$ とする. (5.2) とあわせれば, Theorem 5.2 より,

$$|\text{tors} H^2(X_n, \partial X_n; \mathbb{Z}[1/p])| = |H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$$

を示せばよい. まず,

$$|\text{tors} H^2(X_n, \partial X_n; \mathbb{Z}[1/p])| = |\text{tors} H^2(X_n, \partial X_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$$

であるから, $\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーを見ればよい. Lefschetz 双対より,

$$H^2(X_n, \partial X_n; \mathbb{Z}) \cong H_1(X_n; \mathbb{Z})$$

を得る. Hartley–Murasugi [1, Theorem 2.1] より,

$$\text{tors} H_1(X_n; \mathbb{Z}) \cong \text{tors}(H_1(M_n; \mathbb{Z}) / \langle h_n^{-1}(L) \rangle) \quad (5.3)$$

となる. ここで, $\langle h_n^{-1}(L) \rangle$ は $h_n^{-1}(L)$ の各成分の類で生成される $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ の部分群である. $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ より, L の各成分 K には Seifert 曲面 Σ_K が存在する. Δ_L に対する仮定より, L は h_n で分解しない (すなわち, $\#h_n^{-1}(L) = d$). よって各 K に対して $\partial h_n^{-1}(\Sigma_K) = e_K h_n^{-1}(K)$ (e_K は分岐指数) となるため, $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ において $e_K[h_n^{-1}(K)] = 0$ となる. e_K は被覆変換群 $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ の位数 p^{nd} を割るため, 特に p べきである. 従って $[h_n^{-1}(K)]$ は $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ の p -パートに含まれ, (5.3) より,

$$\text{tors} H_1(X_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p} \cong \text{tors} H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}$$

となる. □

6. 課題

現在残っている課題を挙げる.

- Theorem 1.2 では, 「すべての有限次部分被覆が有理ホモロジー 3 球面となる分岐 $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆」という仮定がついているが, 一般には分岐 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆が有理ホモロジー 3 球面とならない (1 次ホモロジー群が有限にならない) 絡み目も存在する. そのような場合に, 1 次ホモロジー群のトーションパートの位数に対して p 進収束性を示し, その極限値の具体例を求めよ.
- Theorem 5.1 では, 絡み目が分解しないこと (Alexander 多項式が $(1, \dots, 1)$ 以外の 1 の素数べき根で消えないこと) を仮定している. こちらも一般には成り立たないが, p 進トーションと一致するだろうか.

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」を開催くださり, 世話人の先生方に感謝申し上げます. また, 報告集の草稿を確認し, 多くのコメントをくださった植木氏にも感謝申し上げます.

REFERENCES

- [1] Richard Hartley and Kunio Murasugi, *Homology Invariants*, Canadian Journal of Mathematics **30** (1978), no. 3, 655—670.
- [2] Porti Joan, *Mayberry-murasugi's formula for links in homology 3-spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society **132** (200405), no. 11, 3423–3431.
- [3] Steffen Kionke, *On p -adic limits of topological invariants*, Journal of the London Mathematical Society **102** (2020), no. 2, 498–534, available at <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms.12326>.
- [4] H. Kisilevsky, *A generalization of a result of Sinnott*, Pacific J. Math. **Special Issue** (1997), 225–229. Olga Taussky-Todd: in memoriam. MR1610867
- [5] John P. Mayberry and Murasugi Kunio, *Torsion-groups of abelian coverings of links*, Transactions of the American Mathematical Society **271** (1982), no. 1, 143–173.
- [6] Sohei Tateno and Jun Ueki, *The iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p^d$ -covers of links*, 2024.
- [7] Jun Ueki and Hyuga Yoshizaki, *The p -adic limits of class numbers in $\mathbb{Z}_p$ -towers*, 2022. preprint. arXiv:2210.06182.
- [8] Hyuga Yoshizaki, *Generalized Pell's equations and Weber's class number problem*, J. Théor. Nombres Bordeaux **35** (2023), no. 2, 373–391. MR4655363
- [9] ———, *The p -adic limits of iterated p -power cyclic resultants of multivariable polynomials*, 2025. preprint.

Email address: yoshizaki.hyuga@gmail.com

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE; 2641 YAMAZAKI, NODA-SHI, CHIBA, JAPAN