

Hasse norm principle and genus theory in 3-dimensional topology

田代大堯（九州大学大学院数理学府博士1年）

概要

本稿は2024年12月24日から27日にかけて早稲田大学にて開催された研究集会「結び目の数理 VII」の報告書である。講演では数論的位相幾何学における類似に基づき、整数論の重要な結果であるハッセのノルム原理と種の理論の位相幾何学的類似について解説した。

イントロ

数論的位相幾何学は整数環と3次元多様体、素イデアルと結び目などの整数論と3次元位相幾何学の諸概念の類似に基づき、両理論の相互発展を目指す分野である。 $\mathcal{O}_F$ を数体 F の整数環として、本講演で使用した類似は次のとおりである。(cf. [4])

$\mathcal{O}_F$ のコンパクト化したスペクトル $\overline{\text{Spec}(\mathcal{O}_F)}$	有向連結閉3次元多様体 X
$\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\text{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_F)$	X の結び目 $K : S^1 \hookrightarrow X$
$\mathcal{O}_F$ の素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$	X の絡み目 $L = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$
$\mathfrak{p}$ 進整数環 $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$	K の環状近傍 V_K
$\mathfrak{p}$ 進体 $F_{\mathfrak{p}}$	V_K の境界トーラス ∂V_K
F の分数イデアル J_F	X の1次元輪体群 $Z_1(X)$
F の非零代数的数 $F^\times$	X の2次元鎖群 $C_2(X)$
境界準同型 $\partial_F : F^\times \rightarrow J_F$ $a \mapsto (a)$	境界準同型 $\partial_X : C_2(X) \rightarrow Z_1(X)$ $\Sigma \mapsto \partial_X \Sigma$
F の(狭義)イデアル類群 $H_F = \text{Coker}(\partial_F)(H^+(F))$	X の1次元ホモロジー群 $H_1(X) = \text{Coker}(\partial_X)$
$\mathcal{O}_F$ の単数群 $\mathcal{O}_F^\times$	X の2次元ホモロジー群 $H_2(X)$
F のイデール群 I_F	X のイデール群 I_X
F の主イデール群 P_F	X の主イデール群 P_X
有限次拡大 E/F	有限次被覆 $h : Y \rightarrow X$
n 冪剰余記号 $(\frac{a}{p})_n$	絡み数 $\text{lk}(L, K)$

以上の類似をもとに、数論で展開されるイデール群を用いて述べられるハッセのノルム原理及びその応用である種の理論の位相幾何学的類似を紹介するのが講演の目的であった。

用語 多様体または3次元多様体は有向連結閉3次元多様体を指すものとする。多様体 X とその部分多様体 A に対して、 $H_n(X), H_n(X, A)$ は各 $\mathbb{Z}$ 係数 n 次特異ホモロジー群、特異相対ホモロジー群を表すものとする。 $h: Y \rightarrow X$ をガロア被覆としたとき、 h のガロア群を $\text{Gal}(h)$ で表す。 X の結び目 K に対して、 V_K で K の環状近傍、 μ_K, λ_K で各 K のメリディアン、ロンジチュードを表す。整ホモロジー3球面 X 内の結び目 K, K' に対して、 $\text{lk}(K, K')$ で K, K' の絡み数を表す。

1 状況設定

本章は [4], [7] を参考に行っている。また、数論側のイデール理論は [6] を参考に行っている。整数環の素イデール全体の集合の幾何学的類似物の1つとして、多様体 X に対して非常に許容的な絡み目というものがある。

定義 1.1. (非常に許容的な絡み目 [7]) X を3次元多様体とする。この時、可算個の tame な成分からなる絡み目 $\mathcal{L} \subset X$ が非常に許容的な絡み目であるとは、任意の $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次分岐被覆 $h: Y \rightarrow X$ に対して、 $H_1(Y)$ が $h^{-1}(\mathcal{L})$ の成分により生成されるもののことである。

定理 1.2. (cf. [7]) X の非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L} \subset X$ は存在する。

以上の定理により、 X 内で非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を1つ取り $(X, \mathcal{L})$ の組に対して議論する(この組を単に X と書くこともある)。 X のイデール群、主イデール群を定める。

定義 1.3. (イデール群) X を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える多様体とする。この時、 X のイデール群 I_X を次で定める。

$$I_X := \{(a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{L}} H_1(\partial V_K) \mid a_K \in \mathbb{Z}[\mu_K] \text{ for almost all } K \subset \mathcal{L}\}.$$

主イデール群は対角写像 $\Delta_X: H_2(X, \mathcal{L}) \rightarrow I_X$ の像として定められるので、 $H_2(X, \mathcal{L}), \Delta_X$ を定義する。講演では X が整ホモロジー3球面としたときの $H_2(X, \mathcal{L}), \Delta_X$ のイメージを作ってもらふことに注力したが、本稿では一般の多様体での構成を行う。有限部分絡み目 $L, L' \subset \mathcal{L}$ で $L \subset L'$ となるものをとる。この時、自然な全射 $j_{L, L'}: H_2(X, L) \twoheadrightarrow H_2(X, L')$ を得る。よって、 $((H_2(X, L))_L, (j_{L, L'})_{L \subset L'})$ は帰納系をなし、 $H_2(X, \mathcal{L})$ でこの帰納極限を表す。

$$H_2(X, \mathcal{L}) := \varinjlim_{L \subset \mathcal{L}} H_2(X, L) = \bigsqcup_{L \subset \mathcal{L}} H_2(X, L) / \sim.$$

ただし、 $S_L \in H_2(X, L), S_{L'} \in H_2(X, L')$ に対して、 $S_L \sim S_{L'}$ を有限部分絡み目 $L \cup L' \subset L'' \subset \mathcal{L}$ が存在して $j_{L, L''}(S_L) = j_{L', L''}(S_{L'})$ を満たすときに定める。更に、有限絡み目 $L \subset \mathcal{L}$ に対して、 $V_L := \bigsqcup_{K \subset L} V_K, X_L := X \setminus \text{Int} V_L$ と置く。 (X, V_L) に対して、切除同型と相対ホモロジー完全列の境界準同型の合成により ∂_L を次で定める。

$$\partial_L: H_2(X, L) \xrightarrow{\cong} H_2(X, V_L) \xrightarrow{\text{ex}} H_2(X_L, \partial V_L) \xrightarrow{\partial} H_1(\partial V_L).$$

$L, L' \subset \mathcal{L}$ で $L \subset L'$ を満たすものを取ると、次の図式 (*) を得る。

$$\begin{array}{ccccc} H_2(X, L') & & \xrightarrow{\partial_{L'}} & & H_1(\partial V_{L'}) \\ (*) : & j_{L, L'} \uparrow & \circlearrowleft & \downarrow p_{L', L} & \\ H_2(X, L) & & \xrightarrow{\partial_L} & & H_1(\partial V_L). \end{array}$$

ただし、 $p_{L', L}: H_1(\partial V_{L'}) \rightarrow H_1(V_L)$ は自然な射影とする。 ∂_L に対して L に関する極限を取ることと、 X の対角写像 $\Delta_X: H_2(X, \mathcal{L}) \rightarrow I_X$ を得る。

定義 1.4. (主イデール群) $P_X := \text{Im}(\Delta_X)$ を X の主イデール群という。

2 ハッセのノルム原理

2.1 ハッセのノルム原理のステートメント

本研究課題の動機となった整数論におけるハッセのノルム原理を紹介する。

定理 2.1. (ハッセのノルム原理 [2]) E/F を代数体の有限次巡回拡大として、 E, F のイデール群、主イデール群を各 I_E, I_F, P_E, P_F とし、 $N_{E/F} : I_E \rightarrow I_F, N_{E/F} : P_E \rightarrow P_F$ を得る。このとき、 $N_{E/F}(I_E) \cap P_F = N_{E/F}(P_E)$ が成立。

この位相幾何学的類似を述べる。

定理 2.2. (幾何学的ハッセのノルム原理 [9]) M を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える整ホモロジー 3 球面、 $f : N \rightarrow M$ を $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次巡回分岐被覆とする。この時、 $f_* : I_N \rightarrow I_M, f_* : P_N \rightarrow P_M$ が誘導される。このとき、 $f_*(I_N) \cap P_M = f_*(P_N)$ が成立。

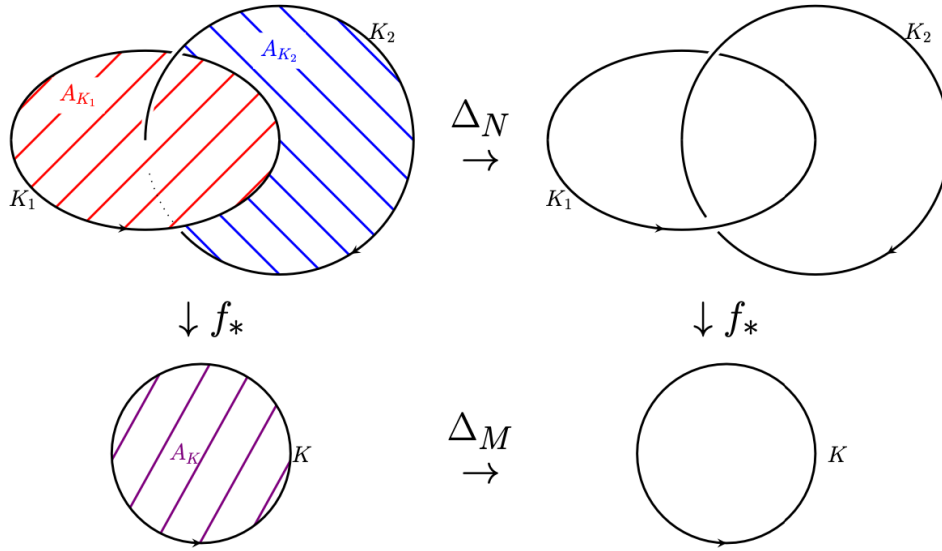


図 1: ハッセのノルム原理の解釈

この式は上の図のように解釈することができる。図 1 の右下の結び目をイデール群の K 成分とする。これが図 1 の左下の図のような紫の曲面 A_K の境界になっていて被覆空間では図 1 の右上の図のような絡み目 $K_1 \sqcup K_2$ になっているならば、図 1 の左上のような曲面 A_{K_1}, A_{K_2} が存在してこの図式が可換になる、即ち境界を取る操作と被覆により低空間へ送る操作が順番に依らないということである。このような曲面が取れてしまうというのは f の巡回性がいかに強い条件なのかをよく表している。しかし、このような曲面がとれるというメリットとは裏腹に、定理 2.2. を示すには余計な情報もついてきてしまうという事情がある。この余計な情報は無視できるということを示すために、 Δ_M の明示化を使う。

2.2 Δ_M の明示化

M は整ホモロジー 3 球面、有限部分絡み目 $L \subset M$ であるから、 $H_2(M, L)$ は L の各成分のザイフェルト曲面で生成される。 $\partial_L : H_2(M, L) \rightarrow H_1(\partial V_L)$ は切除同型と境界準同型の合成により得られたので、 L の各成分のザイフェルト曲面に $\text{Int} V_L$ の穴を開けた後、境界を取る操作を施す。

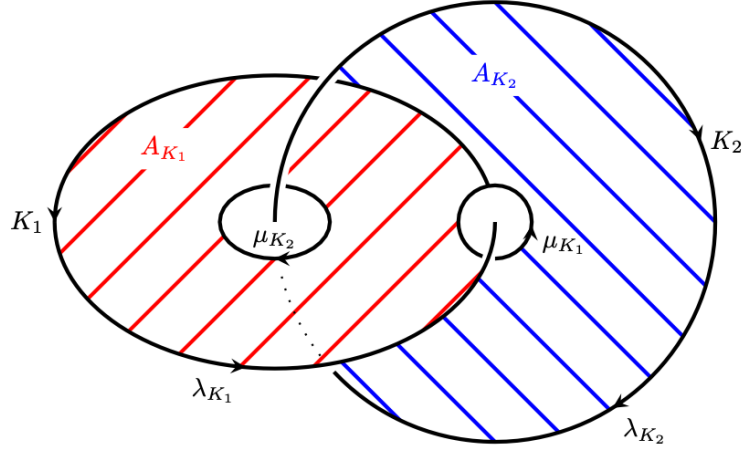


図 2: ハッセのノルム原理の解釈

図2のような穴あき曲面 A_{K_1}, A_{K_2} に対して境界を取る場合を考える。 A_{K_1} に境界をとると、外側のループは K_1 自身のロンジチュードに、内側のループは K_1 に絡んでいる結び目のメリディアンになる。よって、 L の成分 K のザイフェルト曲面 S_K に対して、 ∂_L は次のように表せる。

$$\partial_L(S_K) := [\lambda_K] - \sum_{K' \subset L \setminus K} \text{lk}(K, K') [\mu_{K'}].$$

∂_L に対して L に関する極限を取ると、 Δ_M を明示化することができる。

3 種の理論

3.1 ヒルベルトの定理 90

この節では種の理論の証明で必要になるヒルベルトの定理 90 を紹介する。数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90 は次の通り。

定理 3.1. (数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90 [1, Chapter 7, Corollary 7.4]) E/F を代数体の有限次巡回拡大で $\text{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$ とする。このとき、任意の $a \in I_E$ に対して、 $b \in I_E$ が存在して $a = (\sigma - 1)b$ を満たす。

一方、トポロジーでは次の通り。以下、 S^3 に対して、 S^3 は非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L} \subset S^3$ を備えるものとする。

定理 3.2. (3次元多様体に対するヒルベルトの定理 90 [10]) $f: M \rightarrow S^3$ を $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する素数次巡回分岐被覆で $\text{Gal}(M/S^3) = \langle \tau \rangle$ とする。このとき、任意の $a \in I_M$ に対して、 $b \in I_M$ が存在して $a = (\tau - 1)b$ を満たす。

3.2 種の理論

最初に、幾何学的種の理論の先行研究を挙げる。被覆の底空間が有理ホモロジー 3 球面で素数次巡回被覆の場合 [8, 15]、底空間が S^3 で任意の有限次巡回被覆の場合 [5, Theorem]、任意の 3 次

元多様体の有限次分岐ガロア被覆の場合 [11, Theorem 3.2] がある。今回の論文は彼らのアプローチと異なり、数論における種の理論 [3, Section 2] と証明まで含めて完全にパラレルになっている点に特色がある。では、数論における種の理論について紹介しよう。

定理 3.3. (種の理論 cf.) [3, Section 2]) $n \geq 2$ を自然数, $\{p_1, \dots, p_r : \text{素数 } | p_i \equiv 1 \pmod n\}$, $\text{Spec } \mathcal{O}_k \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ を $p_1 \cdots p_r$ で分岐する n 次巡回分岐被覆とする。 $H^+(k)$ のイデアル類を代表するイデアルは各 p_i と互いに素な $\mathcal{O}_k$ のイデアルを取り、 $[a], [b] \in H^+(k)$ に対して次のような同値関係を定める。 $[a] \approx [b] : \text{同じ種に属する} \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(a)}{p_i} \right)_n = \left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(b)}{p_i} \right)_n$.
この時、 $H^+(k)/\approx \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1}$ が成り立つ。

一方、今回の結果は次の通り。

定理 3.4. ([10]) p を素数、 $L_0 = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_r \subset S^3$ を絡み目、 $L_0 \subset \mathcal{L}$ を S^3 の非常に許容的な絡み目、 $f : M \rightarrow S^3$ を L_0 で分岐する p 次巡回分岐被覆とする。 $H_1(M)$ のホモロジー類を代表する 1 次元輪体は $f^{-1}(L_0)$ と交わらないとし、このとき $[a], [b] \in H_1(M)$ に対して次のような同値関係を定める。 $[a] \approx [b] : \text{同じ種に属する} \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{lk}(f_*(a), K_i) \equiv \text{lk}(f_*(b), K_i) \pmod p$.
このとき、 $H_1(M)/\approx \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ が成り立つ。

[10] の証明のプロセスが [3, Section 2] と同様であることを確認する。方針としては $\chi : H_1(M) \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ を構成し、これに準同型定理を用いる。

$H_1(M)/\approx \cong H_1(M)/\text{Ker } \chi$ において、 $\text{Ker } \chi = (\tau - 1)H_1(M)$ を示すためにハッセのノルム原理とヒルベルトの定理 90 を使う (但し τ は f のガロア群の生成元)。このことから、 $H_1(M)/\text{Ker } \chi \cong f_*(I_M) + P_{S^3}/f_*(U_M) + P_{S^3}$ を示すことができる。

また、[7] による幾何学的類体論の同型射によって $f_*(I_M) + P_{S^3}/f_*(U_M) + P_{S^3} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ が示される。

謝辞 世話人である谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生をはじめ、本研究集会の運営の方々へ御礼申し上げます。

参考文献

- [1] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich. *Algebraic number theory, Proceedings of an Instructional Conference*. Academic Press, 1967.
- [2] Helmut Hasse. Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol (Proof of a theorem and disproof of a conjecture on the general norm residue symbol). *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1931:64–69, 1931.
- [3] S. Iyanaga and T. Tamagawa. Sur la theorie du corps de classes sur le corps des nombres rationnels. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 3(1):220–227, 1951. doi:10.2969/jmsj/00310220.
- [4] Masanori Morishita. *Knots and primes -An introduction to Arithmetic Topology*. Universitext. Springer Singapore, 2nd edition. doi:10.1007/978-981-99-9255-3.

- [5] Masanori Morishita. A theory of genera for cyclic coverings of links. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 77(7):115–118, 2001. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pja/1148393034>.
- [6] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. doi:10.1007/978-3-662-03983-0.
- [7] Hirofumi Niibo and Jun Ueki. Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(12):8467–8488, 2019. doi:10.1090/tran/7480.
- [8] Alexander Reznikov. Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds. *Selecta Math. (N.S.)*, 6(1):1–39, 2000. doi:10.1007/s000290050001.
- [9] Hirotaka Tashiro. On the Hasse norm principle for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint. arXiv:, 2024.
- [10] Hirotaka Tashiro. On genus theory for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint, 2025.
- [11] Jun Ueki. On the Iwasawa μ -invariants of branched $\mathbf{Z}_p$ -covers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 92(6):67–72, 2016. URL: <https://doi.org/10.3792/pjaa.92.67>.