

Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ -representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots – a précis in Japanese –

Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki

ABSTRACT

p を素数とし, K を種数 1 の 2 橋結び目とする. p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ. 加えて, liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在についても論じる. 議論の過程で, ルジャンドル記号を使って素数 p があるルカス型数列を割るための条件も指摘する.

本稿は研究集会「結び目の数理 VII」の報告集記事であり, 内容は論文 [STU25] に基づく.

Contents

1 導入	1
2 種数 1 の 2 橋結び目	2
3 Liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標	3
4 Liminal 表現	5
5 Lucas 型数列と Fibonacci 型数列	6
6 巡回被覆	7
References	8

1. 導入

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) とその低次元位相幾何学における類似研究 [MTTU17, KMTT18, TTU22, TU24, BTTU23] の文脈において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心がある. この論文では, Mazur の提案 [Maz11, Section 19] に従い, 「逆の方向へ進む」ことを目指す.

π を群とする. 関数 $\chi : \pi \rightarrow \mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標であるとは, $\chi = \mathrm{tr} \rho$ となるような $\mathbb{Z}_p$ の拡大体上の SL_2 表現 ρ が存在することをいう. また, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が liminal であるとは, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が絶対既約であり, かつ, そのすべての開近傍は絶対既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) をもつことをいう.

我々の主結果は次のように述べられる.

定理 1.1. K を S^3 上の種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.

定理 1.1 の証明においては, 指数多様体, Alexander 多項式の巡回終結式, そしてルジャンドル記号を用いる. また, ある Fibonacci 型/Lucas 型数列の性質を示して用いる.

議論は次のように与えられる. Section 2 では, 種数が 1 の 2 橋結び目, すなわち $J(2k, 2l)$ ($k, l \in \mathbb{Z}$, $(k, l) \neq (0, 0)$) 型のダブルツイスト結び目の諸性質を再確認し, 既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と可約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標の多様体たちの交点を計算する (**命題 2.1**).

Section 3 では, Hensel の補題を繰り返し使うことで, $J(2k, 2l)$ が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつことが (i) $p = 2$ かつ $r \equiv 1 \pmod{8}$, または (ii) $p \neq 2$, かつ $k^2l^2 - kl$ の非平方部分 r についてルジャンドル記号 $(\frac{r}{p}) = 1$ をみたすことと同値であること (定理 3.1) を示す. また, 様々な具体例を紹介する. Section 4 では, さらに liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在について考察する (命題 4.2).

Section 5 では, 与えられた $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $t^2 - t + m = (t-a)(t-b)$ と書き, $L_n = a^n + b^n$ によって Lucas 型数列 $(L_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ を定める. ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $p \mid L_{2n+1}$ であるとき, $(\frac{4m^2-m}{p}) = 1$ となることを示し (命題 5.1), 具体例を添える. $m = -1$ のとき, $(L, n)_n$ は古典的な Lucas 型となるが, これは 8 の字結び目 $J(2, -2) = 4_1$ の Alexander 多項式から生じる場合である.

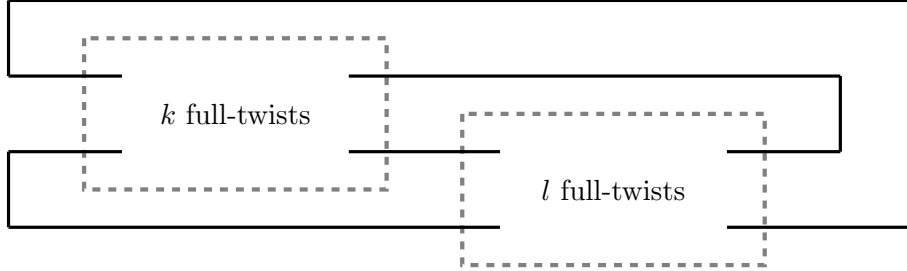
Section 6 では, 結び目 K の巡回被覆 $M_n \rightarrow S^3$ の諸性質を思い出し, Alexander 多項式が $\Delta_K(t) = mt^2 - (2m-1)t + m$ になるような結び目 K について, $p \mid \#H_1(M_{2n+1})$ であるならば $(\frac{4m^2-m}{p}) = 1$ であること (定理 6.1) を示し, そこから主定理 (定理 1.1) を導く.

このような変形可能な指標は Alexander 多項式の零点に対応するということが, Burde と de Rham の研究によって古典的に知られている [Bur67, dR67], また, [HPSP01] も参照のこと). なので, 我々の研究の背景には, 深い文脈が横たわっていると考えられる. さらなる課題や展望については注意 6.4 で述べる. なお, Burde–de Rham の定理の p 進類似とその数論的な設定への応用が, 第 2 著者らによって与えられている [MTT24].

謝辞. 研究集会「結び目の数理 VII」の世話人の先生方, また有用な助言をくださった Léo Benard, 三原朋樹, 関真一郎, 丹下基生, Anh T. Tran, 寺嶋郁二, 山口祥司, 吉崎彪雅に感謝します. 本研究の一部は, JSPS 科研費 JP23K12969 の助成を受けたものです.

2. 種数 1 の 2 橋結び目

任意の種数 1 の 2 橋結び目は, 各 $(0, 0) \neq (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ に対し次の図式によって定義される $J(2k, 2l)$ 型のダブルツイスト結び目として実現される. 基本的な参考文献は [Tra18] である.



特に, $J(2, 0)$ は自明な結び目, $J(2, 2)$ は三葉結び目 3_1 , $J(2, -2)$ は 8 の字結び目 4_1 であることが知られている. そのような結び目の群は次のような表示を持つ:

$$\pi := \pi_1(S^3 - J(2k, 2l)) = \langle a, b \mid w^l a = b w^l \rangle.$$

ここで, a, b はメリディアンを表し, $w = (ba^{-1})^k (b^{-1}a)^k$ である.

ザイフェルト行列の 1 つは $V = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ であり, Alexander 多項式は

$$\Delta_{J(2k, 2l)}(t) = \det(tV - V^\perp) = klt^2 + (1 - 2kl)t + kl$$

である.

各 $g \in \pi$ に対し, 写像 $\mathrm{tr} g: \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}; \rho \mapsto \mathrm{tr} \rho(g)$ を考える. そのとき, $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の共役類は

$$x := \mathrm{tr} a, \quad y := \mathrm{tr} ab^{-1}$$

によってパラメーター付けられる. (これは y は [TU24] のものとは異なるが, 今回の計算においては強い利点がある. 古い方の y は $\mathrm{tr} ab = \mathrm{tr} a \mathrm{tr} b - \mathrm{tr} ab^{-1} = x^2 - y$ をみtas.) さらに, $z := \mathrm{tr} w$ とおく.

非可換な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類は, 次の式で定義される Riley の普遍表現によって代表される.

$$\rho^R(a) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho^R(b) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 2-y & s^{-1} \end{pmatrix},$$

ここで, $x = s + s^{-1}$ であり, x, y は Riley 多項式 $f_{k,l}(x, y) = \Phi_{k,l}(x, y - 2) = 0$ をみtas.

既約表現の共役類たちと, $f_{k,l}(x, y) = 0$ かつ $y - 2 \neq 0$ なる点たちの間には, 一対一対応が存在する. $y - 2 = 0$ の各点は可約表現の集合と可換表現の集合の組と対応する.

命題 2.1. $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点は $(x, y) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, 2)$ である.

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n 次の第2種チェビシェフ多項式 $S_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を

$$S_{n-1}(2 \cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \neq 0$$

によって定める. この定義は, $S_{-1}(z) = 0$, $S_0(z) = 1$, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $S_{n+1}(z) - zS_n(z) + S_{n-1}(z) = 0$ という条件と同値である. これらの多項式は $S_{-1-n}(z) = -S_{-1+n}(z)$ と $S_{n-1}(\pm 2) = (\pm 1)^{n-1}n$ をみtas.

SL_2 指標の性質に基づく計算によって,

$$z = \mathrm{tr} w = 2 + (y - 2)(-x^2 + y + 2)S_{m-1}^2(y)$$

が成り立つ.

[Tra18, Subsection 2.2] により, 既約指標の多様体は

$$f_{k,l}(x, y) = S_l(z) - (1 + (-x^2 + y + 2)S_{k-1}(y)(S_k(y) - S_{k-1}(y)))S_{l-1}(z)$$

によって与えられる.

命題 2.1の証明. $y - 2 = 0$ のとき, $z = 2$ であり, $0 = f_{k,l}(x, 2) = l - (1 + (-x^2 + 2 + 2)k((k+1) - k))l = 1 - (4 - x^2)kl$ となり, したがって $x = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}$ である. $\square$

注意 2.2. 古いパラメータでは, 交点は $(x, \eta) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, -\frac{1}{kl})$ である. なお, 命題 2.1 は $\mathrm{char} \mathbb{F} \nmid kl$ をみtas任意の代数閉体 $\mathbb{F}$ に対して有効である.

3. Liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標

定理 3.1. $kl \neq 0$ と仮定する. このとき, $J(2k, 2l)$ の群が *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は

- i) $p = 2$ かつ $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \pmod{8}$, または
- ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, かつ $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分 r に対し, ルジャンドル記号 $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$.

ここに $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ に対し, $b^2 \mid a$ をみtas最大の整数を b とするとき, a/b^2 を a の**非平方部分**と呼ぶ. (この用語は別の概念に用いられる場合もあるので注意されたい.) また, $a \in \mathbb{Z}$ の p 上のルジャンドル記号 $\left(\frac{a}{p}\right) \in \{0, \pm 1\}$ は以下のように定義される. まず, $p \mid a$ のとき, $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ と置く. 次に, $p \nmid a$ と仮定する. もし $a \equiv x^2 \pmod{p}$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するなら, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ と定める. そうでないとき, $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ と定める. 次の補題は Hensel の補題 (cf.[Neu99, Chapter II (4.6)]) の帰結である.

補題 3.2. $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ かつ $p^2 \nmid a$ とする. このとき, $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$ とであるための必要十分条件は.

- i) $p = 2$ かつ $a \equiv 1 \pmod{8}$, または
- ii) $p \neq 2$, $(\frac{a}{p}) = 1$.

証明. (i) $p = 2$ とする. もし $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_2$ なら, $\sqrt{a} = \sum_i b_i 2^i$ かつ $b_i \in \{0, 1\}$ となり, $a \equiv (b_0 + 2b_1 + 4b_2)^2 \equiv b_0^2 + 4b_1(b_0 + b_1) \pmod{8}$ となる. すると, 仮定より $4 \nmid a$ のために, $b_0 = 1$ となる. $b_1 = 0, 1$ のいずれの場合にも $a \equiv 1 \pmod{8}$ である. 逆に, $a \equiv 1 \pmod{8}$ とし, $a = 8b + 1$, $b \in \mathbb{Z}$ とおく. $X^2 - a = 0$ が $\mathbb{Z}_2$ に解 $X = \alpha$ をもつとき, ある $\beta \in \mathbb{Z}_2$ があつて $\alpha = 2\beta + 1$ となり, $\alpha^2 - a = (2\beta + 1)^2 - (8b + 1) = 4(\beta^2 + \beta - 2b)$ となる. 多項式 $Y^2 + Y - 2b \pmod{2}$ が $\mathbb{F}_2$ で単根をもつので, Hensel の補題により, $Y^2 + Y - 2b$ は $\mathbb{Z}_2$ に根をもち, よつて $X^2 - a$ も $\mathbb{Z}_2$ に根を持つ.

ii) $p \neq 2$ と仮定する. $p \mid a$ のとき, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}_p$ となる. $p \nmid a$ のとき, $X^2 - a \pmod{p}$ は $\mathbb{F}_{p^2}$ に 2 つの単根を持ち, それらは Hensel の補題によつて $\mathbb{Z}_p$ の 2 次拡大へと持ち上がる. また, 次の 3 つの条件は同値である; $(\frac{a}{p}) = 1$ である, $X^2 - a \pmod{p}$ の根が $\mathbb{F}_p$ に根を持つ, $X^2 - a$ が $\mathbb{Z}_p$ に根を持つ. このことから結論を得る. $\square$

補題 3.3. $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ の liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と, $\mathbb{Z}_p^2$ 上で $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点との間に 1 対 1 対応がある.

証明. ρ が $\mathrm{Im} \, \mathrm{tr} \, \rho \subset \mathbb{Z}_p$ をみたす liminal 表現であるとき, $\mathrm{tr} \, \rho$ は $\mathbb{Z}_p^2$ において $y - 2 = 0$ 上にある. 加えて, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\rho \equiv \rho' \pmod{p^n}$ となる既約表現 ρ' があるため, $\mathrm{tr} \, \rho$ は $f_{k,l}(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$ 上にある. したがつて, $\mathrm{tr} \, \rho$ も $\mathbb{Z}_p^2$ において $f_{k,l}(x, y) = 0$ 上にある.

逆を示す. Section 2 の Riley の表現 ρ^R は Section 2 において, $\mathbb{Z}_p[x, y]$ の 2 次拡大上の表現と見ることができる.

命題 2.1 より, $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 内で交点をもつとき, $f_{k,l}(x, 2) = (f_{k,l}(x, y) \pmod{y - 2})$ は $\mathbb{Z}_p$ において単根 α をもち, Hensel の補題により $(x, y) = (\alpha, 2)$ の周りの陰関数 $x = x_f(y) \in \mathbb{Z}_p[[y - 2]]$ が得られる. $x = x_f(y)$ を Riley の表現に代入することで, $\mathbb{Z}_p[[y - 2]]$ の 2 次拡大における既約表現 ρ^R を得る. このとき, $\mathrm{Im} \, \mathrm{tr} \, \rho^R \subset \mathbb{Z}_p[[y - 2]]$ である.

$\mathbb{Z}_p[[y - 2]]$ の要素は, p 進単位円盤 $|y - 2|_p < 1$ 内の任意の $y \in \mathbb{Z}_p$ において $\mathbb{Z}_p$ に収束することに注意する. $y = 2$ を代入すると, この ρ^R に $y = 2$ を代入すると, 点 $(\alpha, 2)$ に対応する可約表現 ρ が得られ, $\mathrm{tr} \, \rho \subset \mathbb{Z}_p$ となる. 一方, $0 \neq |2 - \eta|_p < 1$, つまり, ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $2 \equiv \eta \pmod{p^n}$ をみたすような $y = \eta \in \mathbb{Z}_p$ を ρ^R に代入すると, 絶対既約表現 ρ_η であつて $\mathrm{tr} \, \rho_\eta \subset \mathbb{Z}_p$ をみたすものが得られる. したがつて, $\mathrm{tr} \, \rho$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標である. $\square$

定理 3.1 の証明. $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ が $\mathbb{Z}_p^2$ に交点を持つための必要十分条件は $p \nmid kl$ かつ $\sqrt{4k^2l^2 - kl} \in \mathbb{Z}_p$ であることなので, **補題 3.2** と **補題 3.3** から定理の主張が得られる. $\square$

例 3.4. 群 $\pi_1(S^3 - J(2, 2l))$ が liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ条件は $(\frac{4l^2 - l}{p}) = 1$ となる. 初等的な計算により, 次を得る.

- (i) $J(2, 2) = 3_1$ (三葉結び目): $(\frac{3}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.
- (ii) $J(2, -2) = 4_1$ (8 の字結び目): $(\frac{5}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$.
- (iii) $J(2, 4)$: $(\frac{14}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1, \pm 9, \pm 25, \pm 5, \pm 11, \pm 13 \pmod{56}$.
- (iv) $J(2, -4)$: $(\frac{18}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.
- (v) $J(2, 6)$: $p = 2$ or $(\frac{33}{p}) = 1$, i.e., $p \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \pmod{33}$.
- (vi) $J(2, -6)$: $(\frac{39}{p}) = 1$, i.e., $\pm p \equiv 1, 5, 7, 19, 23, 25, 26, 35, 41, 49, 61, 67 \pmod{156}$.

証明. $p = 2$ のときの条件は $4l^2 - l \equiv 1 \pmod{8}$, すなわち $l \equiv 3 \pmod{8}$ となる. 以下, $p \neq 2$ と仮定する.

(i) $l = 1$ のとき, $4l^2 - l = 3$ であり, その条件は $(\frac{3}{p}) = 1$ となる. $p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, 平方剰余の相互法則により, $(\frac{3}{p}) = (\frac{p}{3})$ が成り立つ. $x \equiv \pm 1$ ならば $x^2 \equiv 1$ であるから, $(\frac{3}{p}) = 1$ の必要十分条件は $p \equiv 1 \pmod{3}$ である. また, $p \equiv -1 \pmod{4}$ のとき, $(\frac{p}{3}) = -(\frac{3}{p})$ より, $p \equiv -1 \pmod{3}$ の必要十分条件は $(\frac{3}{p}) = 1$ である. したがって, 条件は $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$ である.

(ii) $l = -1$ のとき, 条件は $(\frac{5}{p}) = 1$ である. $5 \equiv 1 \pmod{4}$ より, $(\frac{5}{p}) = (\frac{p}{5})$ が成り立つ. $x \equiv \pm 1, \pm 2$ ならば $x^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ であるから, 条件は $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ である.

(iii) $l = 2$ のとき, 条件は $(\frac{14}{p}) = (\frac{2}{p})(\frac{7}{p}) = 1$ である. 第2補題によると, $(\frac{2}{p}) = 1$ をみたすのは $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ の場合に限る. $7 \equiv 3 \pmod{4}$ であり, $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ならば $x^2 \equiv 1, 4, 2 \pmod{7}$ であることに注意する. $p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, $(\frac{7}{p}) = (\frac{p}{7})$, so $(\frac{7}{p}) = 1$ をみたすのは $p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ の場合に限る. $p \equiv -1 \pmod{4}$ のとき, $(\frac{7}{p}) = -(\frac{p}{7})$ となり, $(\frac{7}{p}) = 1$ の必要十分条件は $p \equiv -1, -2, -4 \pmod{7}$ である. したがって, その条件は “ $\pm p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ かつ $\pm p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ ” または “ $\pm p \equiv 3 \pmod{8}$ かつ $\pm p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ ” (同じ順序での2重符号) となり, 結論を導く.

(iv) $l = -2$ のとき, $4l^2 - l = 18 = 2 \cdot 3^2$ より, 条件は $(\frac{2}{p}) = 1$ である. 第二補加法則によれば, $(\frac{2}{p}) = 1$ の必要十分条件は $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ である.

(v) $l = 3$ のとき, 条件は $1 = (\frac{33}{p}) = (\frac{3}{p})(\frac{11}{p}) = ((-1)^{\frac{p-1}{2}})^2 (\frac{p}{3})(\frac{p}{11}) = (\frac{p}{3})(\frac{p}{11})$ である. $x \equiv \pm 1$ ならば $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから, $p \equiv 1 \pmod{3}$ の必要十分条件は $(\frac{p}{3}) = 1$ である. $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ ならば $x^2 \equiv 1, 4, 9, 5, 3 \pmod{11}$ であるから, $(\frac{p}{11}) = 1$ iff $p \equiv 1, 4, 9, 5, 3 \pmod{11}$ となる. $(\frac{p}{3})$ と $(\frac{p}{11})$ の両方の値は1である必要十分条件は $p \equiv 1, 4, 31, 16, 25 \pmod{33}$ である. 両方の値が-1となる必要十分条件は $p \equiv 2 \pmod{3}$ および $p \equiv 2, 6, 7, 8, 10 \pmod{11}$ であり, それはすなわち $p \equiv 2, 17, 29, 8, 32 \pmod{33}$ である. したがって, その条件は $p \equiv 1, 2, 4, 8, 16, 17, 25, 29, 31, 32 \pmod{33}$, となり, 結論を導く.

(vi) $l = -3$ のとき, 条件は $(\frac{39}{p}) = (\frac{3}{p})(\frac{13}{p}) = 1$ となる. (i) で見たように, $(\frac{3}{p}) = 1$ の必要十分条件は $p \equiv \pm 1$, $(\frac{3}{p}) = -1$ の必要十分条件は $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$ である. また, $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ ならば $x^2 \equiv 1, 4, 9, 3, 12, 10 \pmod{13}$ であるから, $(\frac{13}{p}) = 1$ の必要十分条件は $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4 \pmod{13}$, $(\frac{13}{p}) = -1$ は $p \equiv \pm 2, \pm 5, \pm 6 \pmod{13}$ である. したがって, $(\frac{39}{p}) = 1$ の必要十分条件は $\pm p \equiv 1, 25, 133, 49, 121, 61, 41, 89, 5, 125, 149, 137 \pmod{156}$ である. $\square$

4. Liminal 表現

いま ρ を $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大上の表現とし, $\bar{\rho} := \rho \pmod{p}$ が絶対既約であり, $\mathrm{Im} \, \mathrm{tr} \, \bar{\rho} \subset \mathbb{F}_p$ をみたすとす. このとき, 有限体の Brauer 群は自明であるから, Skolem–Noether の定理により, このような $\mathbb{F}_p$ 上のある表現 $\bar{\rho}'$ と共役である (cf. [Mar16, Subsection 3.5]). さらに, Nyssen の定理 [Nys96, Théorème 1] により, この $\bar{\rho}'$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の表現 ρ' であって $\mathrm{tr} \rho = \mathrm{tr} \rho'$ を満たすものへと持ち上がり, このような ρ' は共役を除き一意である.

この議論がそのまま既約指標多様体 $X_{\mathrm{irr}}(S^3 - J(2k, 2l)) = \{f_{f,l}(x, y) = 0\} \setminus \{y - 2 = 0\}$ であるザリスキー閉包上の表現に拡張できるかどうかが気になるところである. Nyssen の証明は, 絶対既約性が多元環準同型の全射性と同値であるという事実を用いているので, その結果は剰余可約表現には必ずしも拡張されない. さらに, [KMTT18, Subsection 2.3] に指摘されているように, 結び目群の表現の設定では, 随伴表現の2次ホモロジーが消えないという意味で, 変形問題には障害が生じる. 次の問題は繊細である.

問い 4.1. $\mathbb{Z}_p$ 上の liminal 表現が与えられたとき, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現を見つけられるか?

少なくとも次が言える.

命題 4.2. 定理 3.1の条件のもとで, $p \neq 2$ かつ $(\frac{-kl}{p}) = 1$ であるとき, *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在する.

証明. **補題 3.3**の ρ^R を考え, $s = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ に注意する. **命題 2.1**より, $\sqrt{x^2 - 4}|_{y=2} = \sqrt{\frac{-1}{kl}}$ が成り立つ. $(\frac{-kl}{p}) = 1$ のとき, $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\frac{-1}{kl}} \in \mathbb{Z}_p$ であり, よって, $\rho^R \bmod y - 2$ は *liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現である. $\square$

5. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列

$m \in \mathbb{Z}$ とし, $t^2 - t + m = (t - a)(t - b)$ と書くと, $a + b = 1$, $ab = m$ が成り立つ. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列をそれぞれ $L_n = a^n + b^n$, $F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ と定義する. すると, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1 - 2m$, $L_{n+2} = L_{n+1} - mL_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} - mF_n$ となり, したがって $L_n, F_n \in \mathbb{Z}$ である.

すると,

$$L_n^2 + (4m - 1)F_n^2 = 4m^n \quad \cdots (\star)$$

が得られる. なぜなら, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 1 - 4m$ より, $(a^n + b^n)^2 + (4m - 1)(\frac{a^n - b^n}{a - b})^2 = (a^n + b^n)^2 - (a^n - b^n)^2 = 4a^n b^n = 4m^n$ である.

ここで, p が L_{2n+1} を割り切るようなある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があると仮定する. そのとき, $(4m - 1)F_n^2 \equiv (2m^n)^2 m \bmod p$ が成り立つ. これは, $m(4m - 1)$ が $\bmod p$ で平方であることを表している. さらに, $p \nmid m(4m - 1)$ が成り立つ. なぜなら, $p \mid m$ のとき, 漸化式により, すべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $L_n \equiv 1 \bmod p$ となり, $p \mid L_{2n+1}$ と矛盾する. 一方, $p \mid 4m - 1$ ならば, $(\star)$ より $p = 2$ または $p \mid m$ となり, したがって矛盾する. よって, 次が得られる.

命題 5.1. 素数 p に対し, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があつて p が L_{2n+1} を割り切るとき, ルジャンドル記号について $\left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$ となる.

例 5.2. 以下の例は, **例 3.4**と見比べることができる.

(i) $m = 1$ とする. このとき, 条件 $(\frac{12}{p}) = 1$ は $p = 2$ または $p \equiv \pm 1 \bmod 12$ となる. $L_{n+1} = L_n - L_{n-1}$ より,

$n \bmod 6$	1	2	3	4	5	6
L_n	1	-1	-2	-1	1	2

である. よって, $p = 2$ のみである.

(ii) $m = -1$ とする. このとき, L_n と F_n は古典的なものであり, 条件 $(\frac{5}{p}) = 1$ は $p = 2$ または $p \equiv \pm 1 \bmod 5$ となる. よって,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L_n	1	3	2 ²	7	11	2 ² ·3 ²	29	47	2 ² ·19	3·41	199	2·7·23	521	3·281
	15		16	17	18	19	20	21						
	2 ² ·11·31		13·17	3571	2·3·13·37	9349	15127	2 ⁴ ·29·211						

である.

L_{2n+1} の値を $0 \leq n \leq 10$ の範囲でリストアップする. (ii) $m = -1$, (iii) $m = 2$, (iv) $m = -2$, (v) $m = 3$, (vi) $m = -3$ に対し, L_{2n+1} ($0 \leq n \leq 10$) の値は次のようになる.

LIMINAL $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ -REPRESENTATIONS

$2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
(ii)	1	2^2	11	29	$2^2 \cdot 19$	199	521	$2^2 \cdot 11 \cdot 31$	3571	9349	$2^4 \cdot 29 \cdot 211$
(iii)	1	5	11	13	5	67	181	$5^2 \cdot 11$	101	797	$5 \cdot 13 \cdot 43$
(iv)	1	7	31	127	$7 \cdot 73$	$23 \cdot 89$	8191	$7 \cdot 31 \cdot 151$	131071	524287	$7^2 \cdot 127 \cdot 337$
(v)	1	2^3	31	83	$2^3 \cdot 17$	67	1559	$2^3 \cdot 29 \cdot 31$	21929	44917	$2^3 \cdot 41 \cdot 83$
(vi)	1	$2 \cdot 5$	61	337	$2 \cdot 5 \cdot 181$	$23 \cdot 491$	51169	$2 \cdot 5^2 \cdot 61 \cdot 89$	$67 \cdot 21487$	7634353	$2 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 293 \cdot 337$

しばしば, 大きな素数が見つかる.

注意 5.3. 少なくとも $m = -1$ (古典的な場合) のとき, **命題 5.1** の逆は成り立たない. 実際, Lagarias [Lag85] は, 集合

$$S_A := \{p \mid p \equiv \pm 1 \pmod{p} \text{ divides } L_n \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

の素数の密度が $5/12$ であることを示した. よって, 集合

$$\{p \mid p \equiv \pm 1 \pmod{5} \text{ and } p \text{ divides } L_{2n+1} \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

の素数の密度は, 集合 $\{p \mid p \equiv \pm 1 \pmod{5}\}$ の密度 $1/2$ よりも小さい.

6. 巡回被覆

S^3 内の結び目 K を考え, その Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ で表す. このとき, Fox–Weber の公式 [Web79] により, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, K で分岐する $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $M_n \rightarrow S^3$ は

$$r_n := |H_1(M_n; \mathbb{Z})| = |\mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t))|$$

を満たす. ただし群 G が有限群のとき $|G|$ で G の位数 $\#G$ を表し, G が無限群のときは $|G| = 0$ と定める. また, 多項式 $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ に対し, $\mathrm{Res}(f(t), g(t)) \in \mathbb{Z}$ はそれらの終結式を表す. なお, K が種数 1 の 2 橋結び目であるときは, $H_1(M_n)$ の詳しい群構造は Fox らによって知られている ([Fox60], [Ily21]). まず, 次のように主張する.

定理 6.1. $\Delta_K(t) = mt^2 + (1 - 2m)t + m$ で $m \in \mathbb{Z}$ であるとき, $p \mid r_n$ となるある奇数 n があるならば $\left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$ である.

証明. オイラーのトーシェント関数は $m \leq 6$ に対して $\varphi(m) \leq 2$ をみたとす. $r_n = 0$ となるのは $m = 1$ または $6 \mid n$ のときのみである. よって, 任意の奇数 n に対して $0 \neq r_n = \#H_1(M_n)$ が成り立つ.

$m = 0$ のとき, $r_n = 1, p \nmid r_n$ である. 以下, $m \neq 0$ である. $\Delta_K(t) = mt^2 + (1 - 2m)t + m = m(t - \alpha)(t - \beta)$, $m \in \mathbb{Z}$ と書く. すると, $\alpha\beta = 1, \alpha + \beta = \frac{2m-1}{m}, r_n = m^n(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) = m^n(2 - \alpha^n - \beta^n)$ である. さらに, $t^2 - t + m = (t - a)(t - b)$ と書く. すると, $a + b = 1, ab = m, a^2 + b^2 = 1 - 2m = -m(\alpha + \beta), a^2b^2 = m^2 = (-m\alpha)(-m\beta)$ となり, よって, $\{a^2, b^2\} = \{-m\alpha, -m\beta\}$ となる. $a^2 = -m\alpha, b^2 = -m\beta$ としてよい.

n が奇数のとき, $L_n^2 = (a^n + b^n)^2 = ((-m\alpha)^n + (-m\beta)^n + 2m^n) = m^n(2 - \alpha^n - \beta^n) = -\mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t)) = r_n$ が成り立つ. したがって, **命題 5.1** から結論が導かれる. $\square$

定理 1.1 の証明. $\Delta_{J(2k, 2l)}(t) = klt^2 + (1 - 2kl)t + kl$ であるから, $m = kl$ を代入することで, **定理 3.1** と **定理 6.1** から得られる. $\square$

注意 6.2. n が偶数であるとき, $\mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t)) = m^n(\alpha^n + \beta^n - 2) = ((-m\alpha)^n + (-m\beta)^n - 2m^n) = (a^n - b^n)^2 = (a - b)^2 F_n^2 = (1 - 4m)F_n^2 = L_n^2 - (2m^{n/2})^2$ が成り立つ. したがって, $p \mid r_n$ はルジャンドル記号に関する似たような条件を導けない.

例 6.3. $4m^2 - m$ が平方因子をもつ場合, **定理 1.1**の逆は成り立たない. 例えば, $m = 16$ かつ $p = 3$ のとき, $4m^2 - m = 16 \cdot 63 = 7 \cdot 12^2$, $(7/3) = (1/3) = 1$ である. なので, $J(2, 32)$ は $\mathbb{Z}_3$ 上 liminal 指標をもつ. この場合, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $3 \nmid r_{2n-1}$ である.

注意 6.4. 次の点については依然として謎のままである.

(1) **定理 1.1**はより広いクラスの結び目に拡張されるのか? 文字通りでは一般的に正しいわけではない. $\Delta_K(t) = -t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ を持つ $K = 6_3$ は, $r_5 = |\text{Res}(t^5 - 1, \Delta_K(t))| = 24$ となり, 2つの多様体の交点は $\mathbb{F}_2^2$ には存在しない. しかし, そのような素数は非常に稀に思われる. より一般的な設定で適切な定式化や解釈が存在することが期待される.

(2) **定理 1.1**の背景には, Burde–de Rham 理論があると考えられる. しかし, 明確な含意はなく, むしろこの結果が新たな視点を提供することが期待される.

(3) Burde–de Rham 理論は, Heusener–Porti によって高次元表現に拡張されている [HP15]. 我々の研究も高次元の場合に拡張されるだろうか. 8の字結び目の $\text{SL}_3\mathbb{C}$ 指標多様体の研究 [HMP16] が1つの手がかりである可能性がある.

(4) **問い 4.1**でも述べたように, **定理 3.1**の条件のもとで常に liminal な $\text{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在するかどうかは繊細な問題である.

REFERENCES

- BTTU23 Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic SL_2 -representations and L -functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.
- Bur67 Gerhard Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33. MR 212787
- dR67 Georges de Rham, *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. (2) **13** (1967), 187–194. MR 240804
- Fox60 Ralph H. Fox, *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 187–196. MR 119210
- HMP16 Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti, *The $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ -character variety of the figure eight knot*, Illinois J. Math. **60** (2016), no. 1, 55–98. MR 3665172
- HP15 Michael Heusener and Joan Porti, *Representations of knot groups into $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 313–354. MR 3402353
- HPSP01 Michael Heusener, Joan Porti, and Eva Suárez Peiró, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into $\text{SL}_2(\mathbb{C})$* , J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 191–227. MR 1807271
- Ily21 Mednykh Ilya, *Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two*, preprint. arXiv:2111.04292, November 2021.
- KMTT18 Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L -functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3171–3195. MR 3766846
- Lag85 J. C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density $2/3$* , Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 449–461. MR 789184
- Mar16 Julien Marché, *Character varieties in SL_2 and Kauffman Skein algebras*, Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, RIMS Kôkyûroku, no. 1991, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 4 2916, pp. 27–42.
- Maz11 Barry Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089
- MTT24 Yasushi Mizusawa, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On the Burde–de Rham theorem for finitely presented pro- p groups*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), arXiv:2408.01270.

LIMINAL $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ -REPRESENTATIONS

- MTTU17 Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for SL_2 -representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015
- Neu99 Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)
- Nys96 Louise Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 257–283. MR 1411348 (98a:20013)
- STU25 Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki, *Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ -representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots*, preprint. arXiv:2501.00323, 2025.
- Tra18 Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388
- TTU22 Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic SL_2 -representations of twist knots, -3 -Dehn surgeries, and L -functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562
- TU24 Ryoto Tange and Jun Ueki, *Twisted Iwasawa invariants of knots*, Math. Nachr. **297** (2024), no. 4, 1519–1534. MR 4734983
- Web79 Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l’homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)

Honami Sakamoto sakamoto10ho73@gmail.com

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan

Ryoto Tange rtange.math@gmail.com

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University; 1-104 Totsuka-cho, Shinjuku-ku, 169-8050, Tokyo, Japan

Jun Ueki uekijun46@gmail.com

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan