

3つの軸方向の正射影がすべて木となる空間グラフの構成

小林 怜央 (早稲田大学大学院教育学研究科数学教育専攻修士2年)

概要

少なくとも1本の辺を持つ有限グラフの任意の空間埋め込みに対して、それと全同位な空間埋め込みで、3つの軸方向の正射影の像が全て木となるものが存在することを示す。

1 導入

1.1 用語の定義

定義 1.1.1 (空間グラフ)

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の有限個の点と有限本の線分の和集合を**区分線形的空間グラフ**と呼ぶことにする。また、区分線形的空間グラフと \mathbb{R}^3 において全同位であるものを**空間グラフ**と呼ぶことにする。

定義 1.1.2 (T-3型)

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ を空間グラフとする。 G と全同位な空間グラフで、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面それぞれへの正射影が全て木となるものが存在するとき、 G は **T-3型** であるという。

1.2 先行研究

図1では分からないが、図2より次が分かる。

定理 2.1

自明な結び目は T-3 型である。

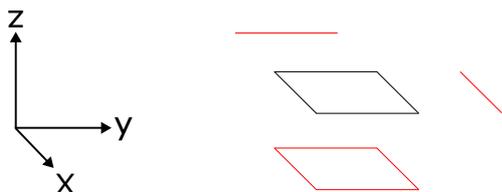


図1: 1つの平面にサイクルができてしまう例

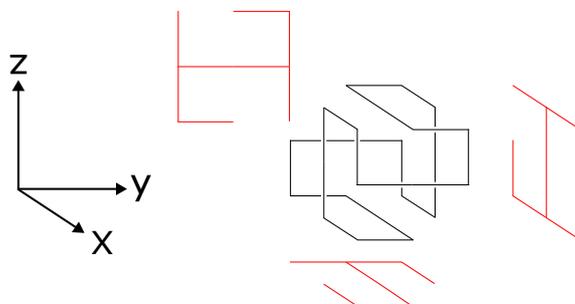


図2: 3つの平面への正射影が木となる例
(T-3 trivial A と呼ぶ)

図 2 の例については, P. Winkler [2] を参照のこと.
さらに次が示されている.

定理 2.2 (川村 [1])

全ての整数 p に対して, $(2, p)$ 型トーラス結び目 (絡み目) は T-3 型である.

1.3 主定理

次の主定理を発見した.

主定理 G を空間グラフとする.

G は T-3 型である.

$\Leftrightarrow G$ は, 2 個以上の孤立頂点のみから成る空間グラフではない.

2 主定理の証明

証明 次の 2.1~2.6 と補足より主定理は証明される.

- 2.1 : (空間グラフの射影図が非連結な場合のみ) 必要があれば空間グラフを全同位変形で変形して, 射影図が連結になるようにする.

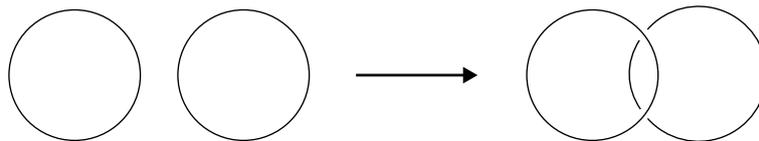


図 3

- 2.2 : (射影図の有界領域の個数より孤立頂点の個数の方が多い場合のみ) ライデマイスター移動 1 をして射影図の有界領域の個数を孤立頂点の個数まで増やす.

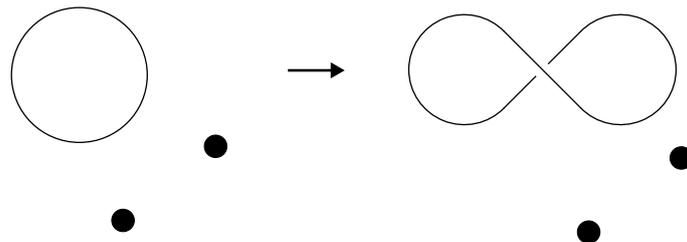


図 4

● 2.3 : 空間グラフの射影図の全ての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフになる. そして, その平面グラフを xy 平面上で全同位変形する.

◎交差点の上下をなくし頂点とする

例 : 8 の字結び目

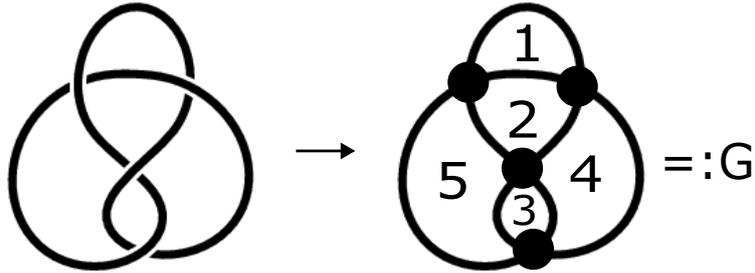


図 5

図 5 の右の G は平面グラフである.

図 5 では 8 の字結び目の場合を例に挙げたが, 一般の空間グラフの場合も, 射影図の全ての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフ (G' とする) になる.

◎図 5 の平面グラフ G を xy 平面上で全同位変形する

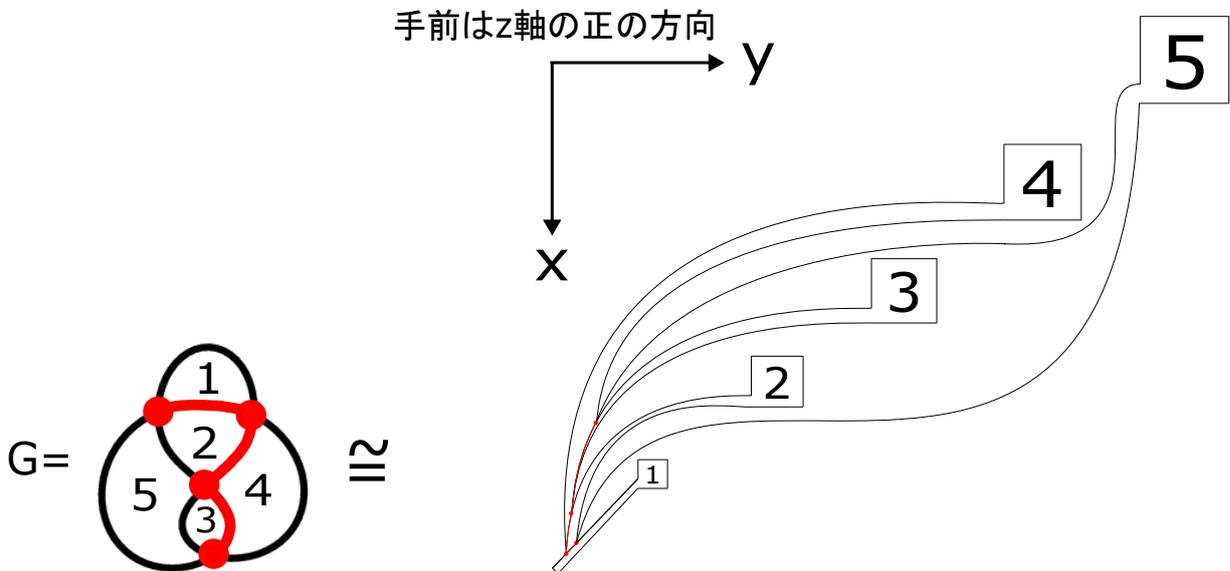


図 6

図 6 のように, 図 5 の平面グラフ G を xy 平面上で全同位変形する.

全同位変形のポイントとしては、**極大木** (図 6 では赤線) を描き、次に極大木以外の辺 (図 6 では黒線) を描く。その際の注意点は次の通り。

- ・左下から斜め右上へ「1 → 2 → 3 → 4 → 5」の順で□の大きさは1ずつ大きくして一直線上に並べる。
- ・相異なる2つの頂点の y の値は異なるようにする。
- ・1~5を囲んでいる全ての□は任意の頂点より y の値が大きい位置に置く。

図 6 の G に限らず、**一般の平面グラフ G'** の場合も極大木を描き、次に極大木以外の辺を描くことにより xy 平面上で全同位変形できる。注意点も上と同じ。

● 2.4 : 2.3 の平面グラフは空間グラフとして、T-3 型であることを証明する。

図 6 の右の平面グラフ G (2.3 の平面グラフ) を空間的にする際のポイントを2つ述べる。

ポイント 1 : 番号を囲むサイクルを空間的にする方法

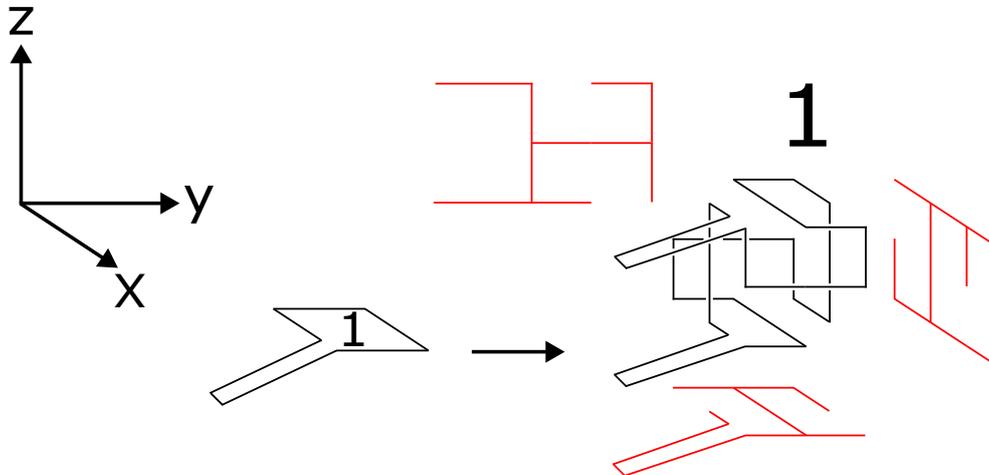


図 7

図 7 は「1」を囲んだサイクルを空間的にした場合だが、残りの「2」~「5」を囲んだサイクルも同じように空間的にする。

ポイント 2 : 図 8 の太い赤線 (実線) の出っ張らせ方

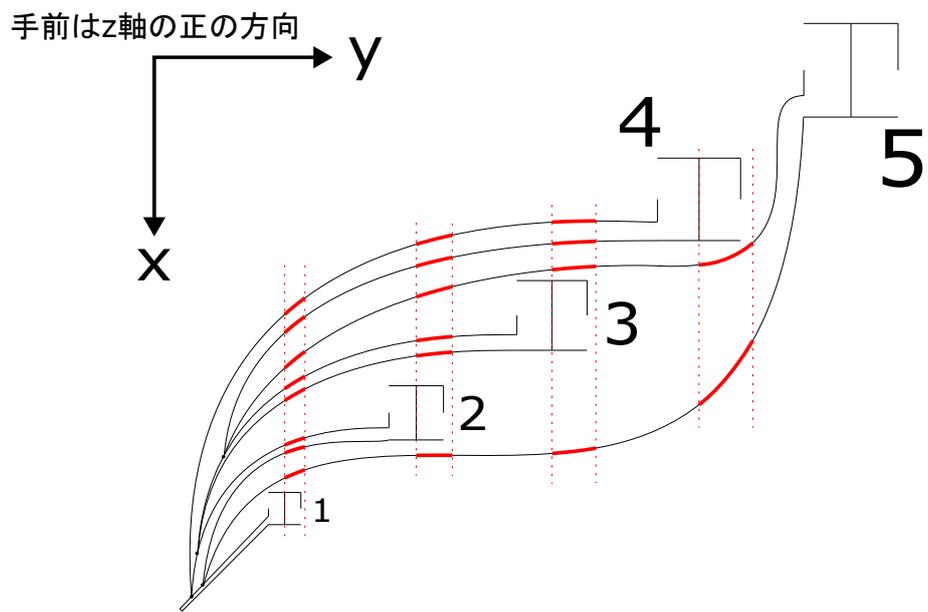


図 8

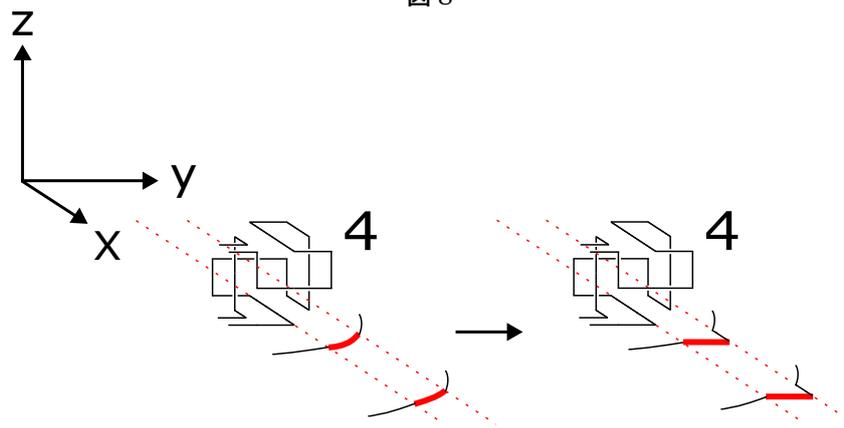


図 9

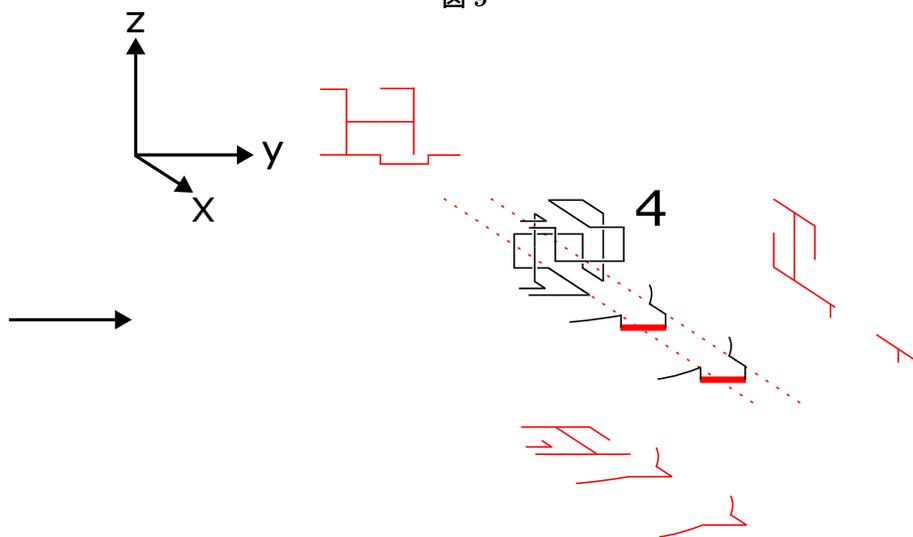


図 10

図9では、太い赤線を y 軸に平行にした。

図10では、太い赤線を z 軸の負の方向に**同じ長さ**で引っ張らせた。

図9, 10は、図8の一部の赤線を z 軸の負の方向に引っ張らせた場合だが、図8の全ての赤線も同じように z 軸の負の方向に引っ張らせる。

以上のポイント1, 2をふまえて、図6の右の平面グラフ G (2.3の平面グラフ) を空間的にすると、3つの平面への正射影は次のようになる。

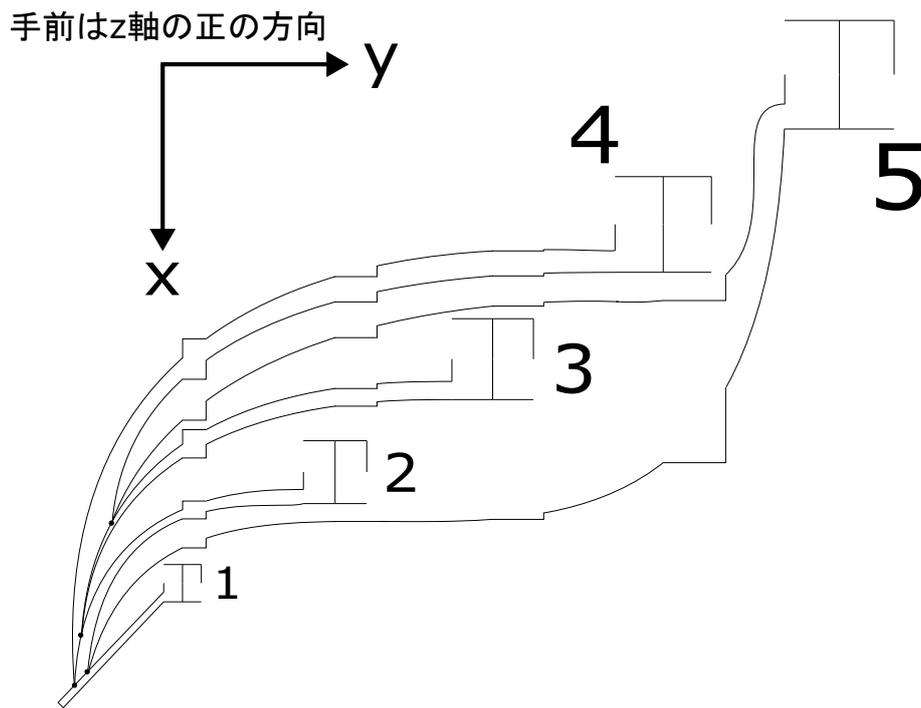


図11： xy 平面への正射影は木

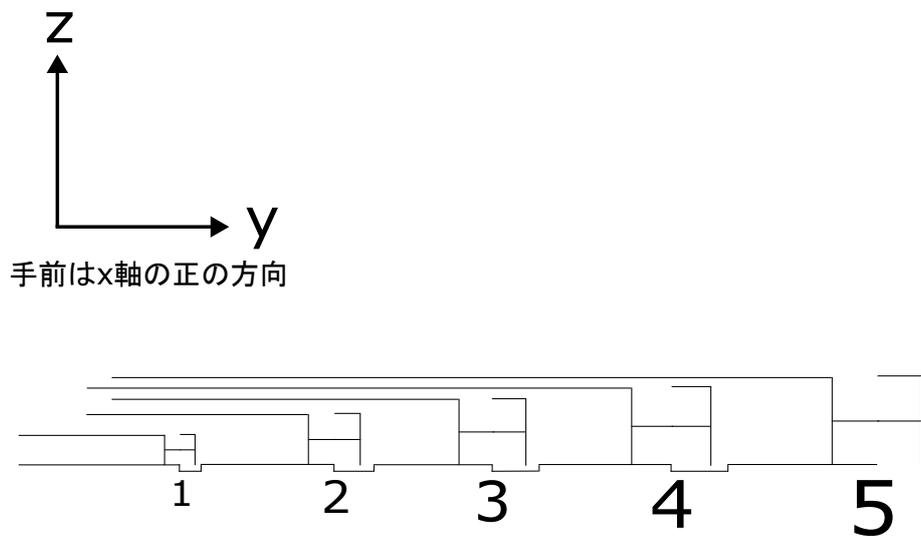


図12： yz 平面への正射影は木

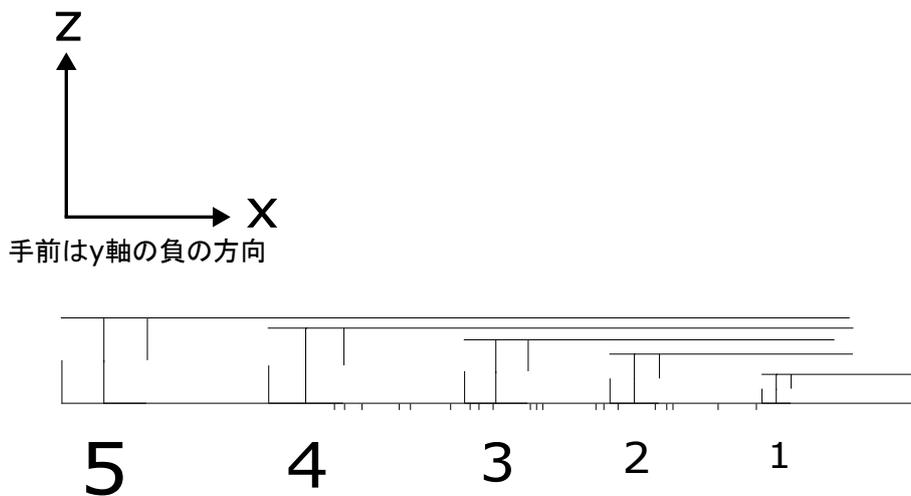


図 13 : zx 平面への正射影は木

よって図 11, 12, 13 より, 3つの平面への正射影は全て木となったので, 図 6 の右の平面グラフ G (2.3 の平面グラフ) は空間グラフとして, **T-3 型**.

ポイント 1, 2 をふまえて一般の平面グラフ G' を空間的にした場合も, 3つの平面への正射影は全て木となるので **T-3 型**.

- 2.5 : 2.4 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても **T-3 型**であることを証明する.

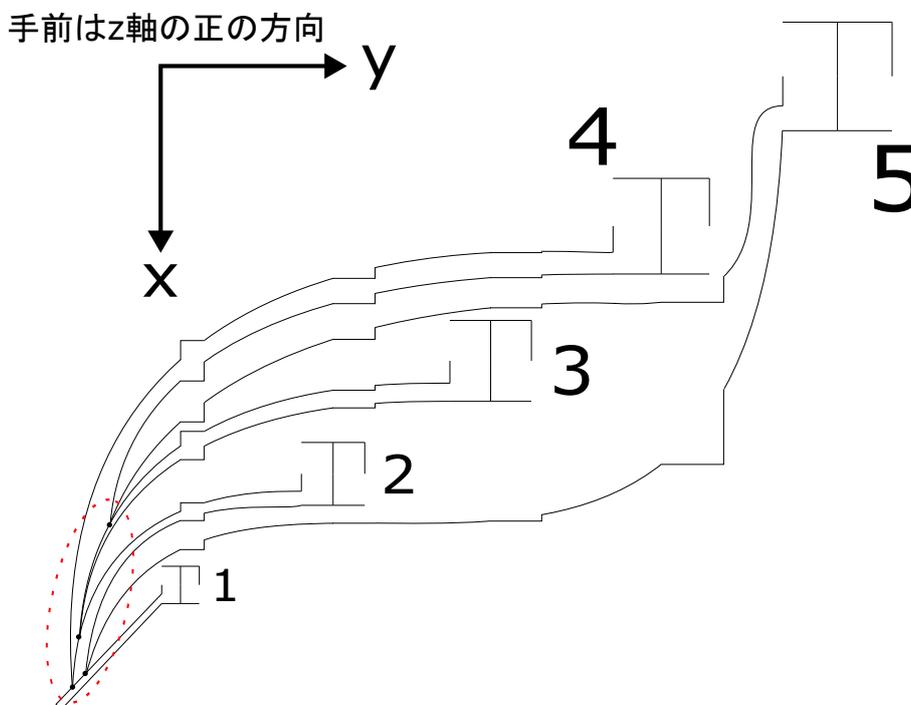


図 14 : 2.4 でできた空間グラフの xy 平面への正射影

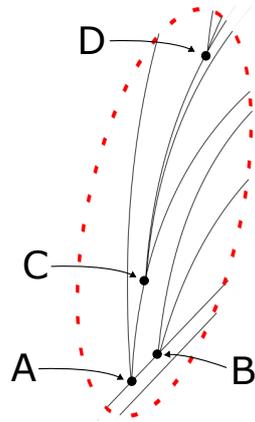


図 15：図 14 の赤い丸を拡大

◎頂点から交差点への戻し方

頂点 A を交差点に戻す場合を説明する。

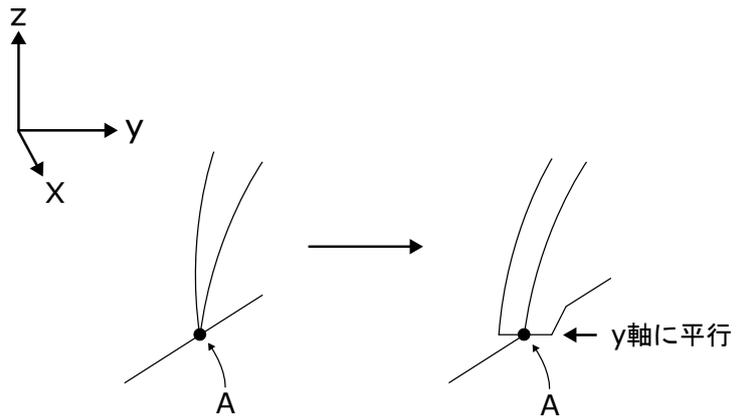


図 16

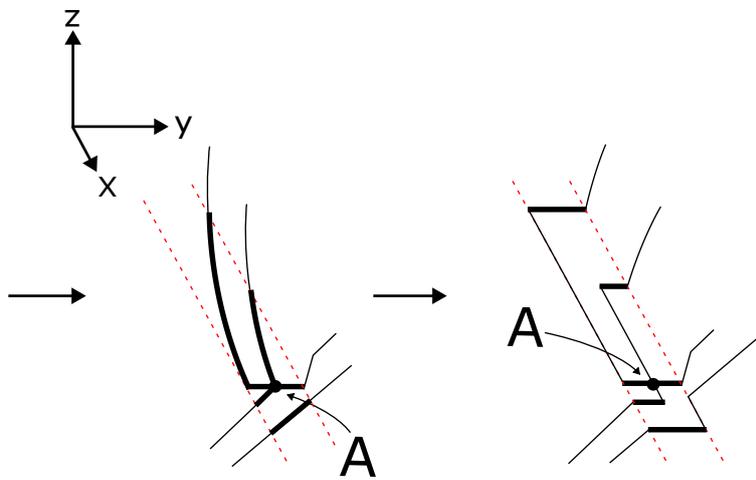


図 17

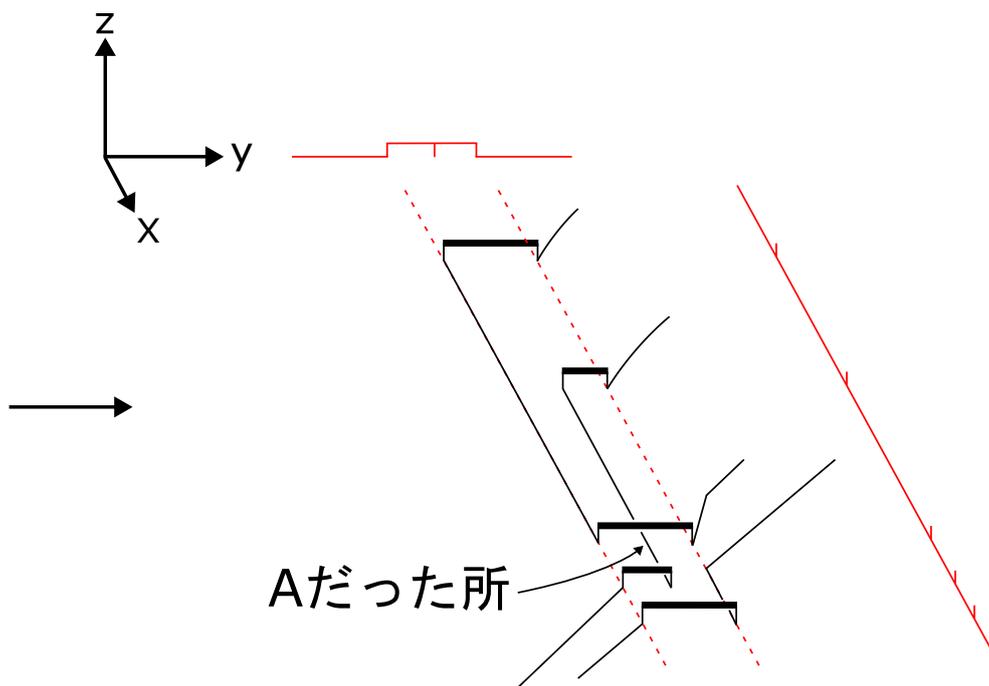


図 18

※図 16, 17 に描かれている頂点 A とその周辺の辺は全て xy 平面上にある.

また, 図 17 では太線を y 軸に平行にした.

頂点から交差点に戻す際の注意点は次の通り.

- 図 18 において, 出っ張らす長さは全て同じ.
- 頂点 B は太線を z 軸の正の方向に, 頂点 C と頂点 D は太線を z 軸の負の方向に出っ張らす.

4つの頂点を交差点に戻した際の3つの平面への正射影は次のようになる.

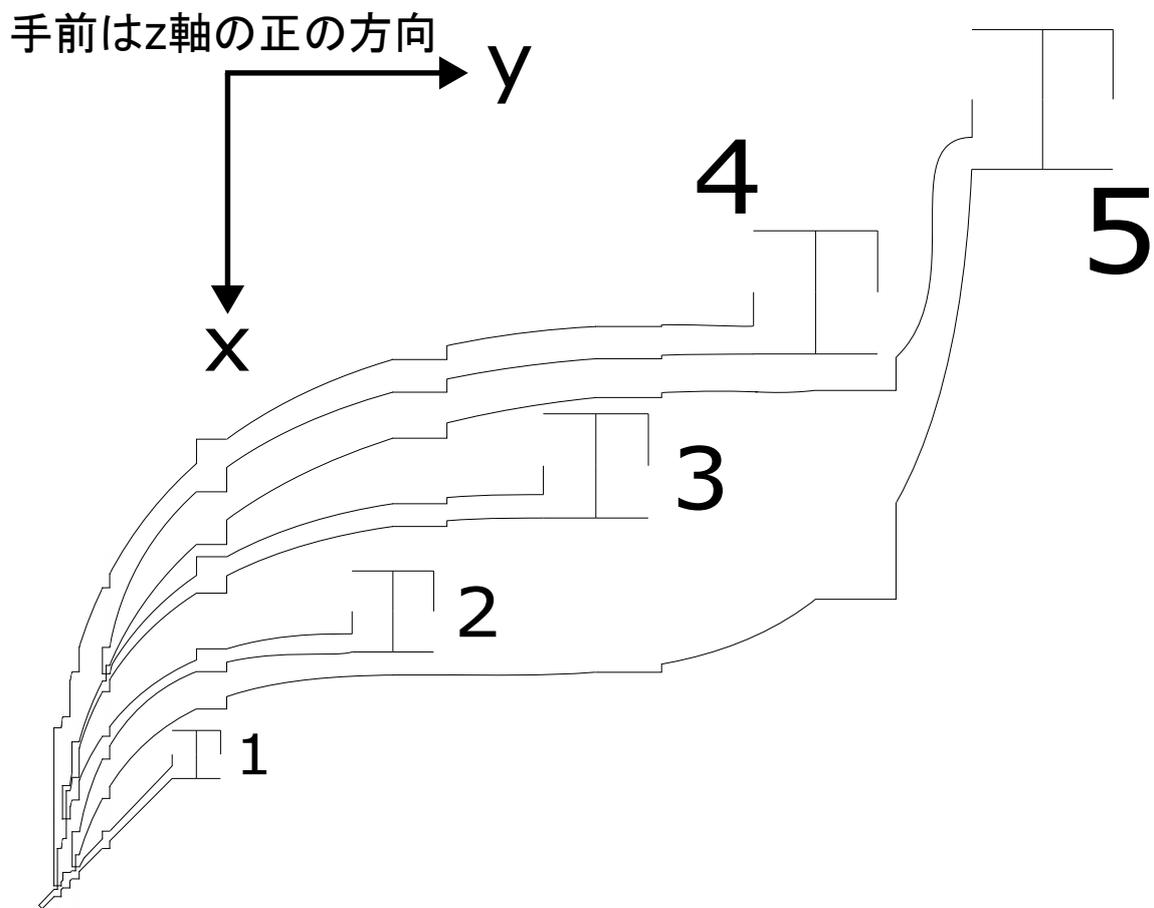


図 19 : xy 平面への正射影は木

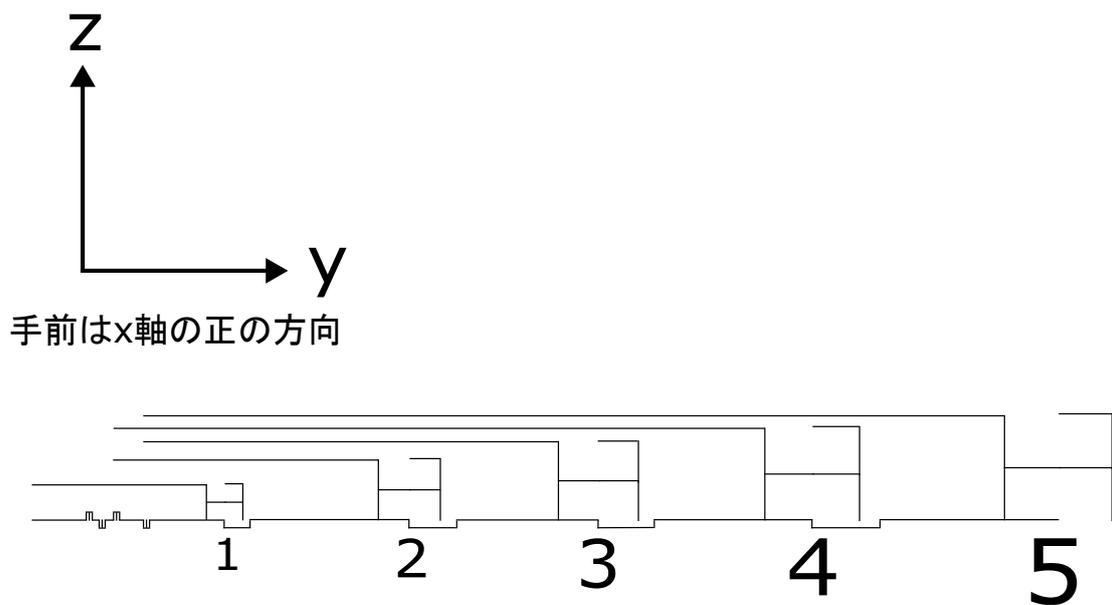


図 20 : yz 平面への正射影は木

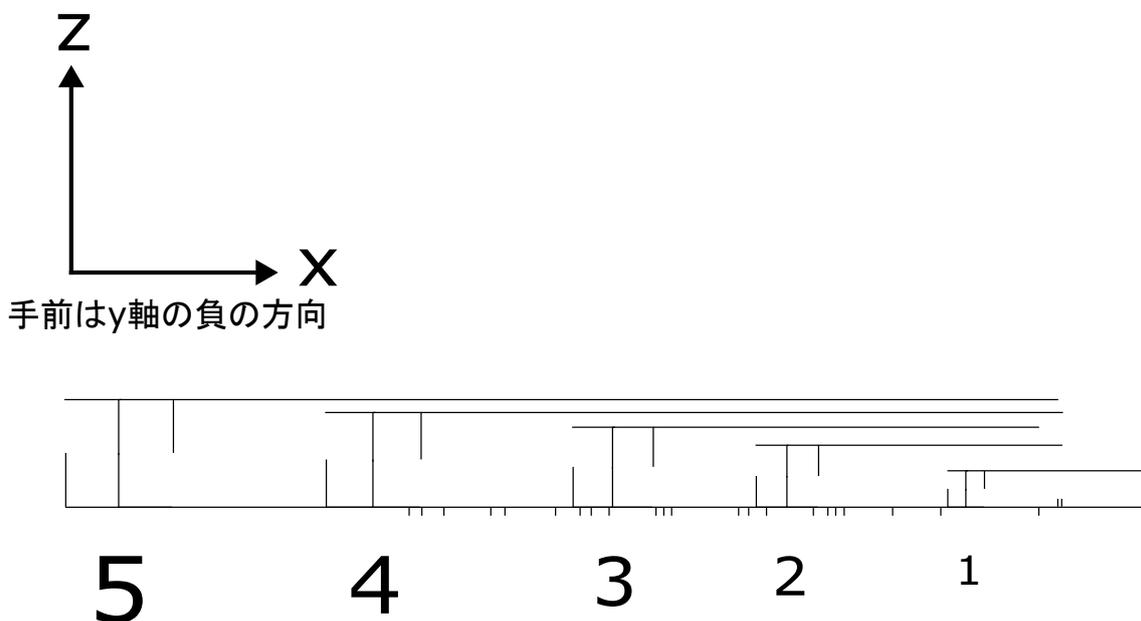


図 21 : zx 平面への正射影は木

よって図 19, 20, 21 より, 3つの平面への正射影は全て木となったので, 8 の字結び目は **T-3 型**.

2.4 のポイント 1, 2 をふまえて一般の平面グラフ G' を空間的にし, 頂点を交差点に戻した場合も, 3つの平面への正射影は全て木となるので **T-3 型**.

● 2.6 : (空間グラフに孤立頂点が存在する場合のみ) T-3 trivial A の真ん中に孤立頂点を置く.

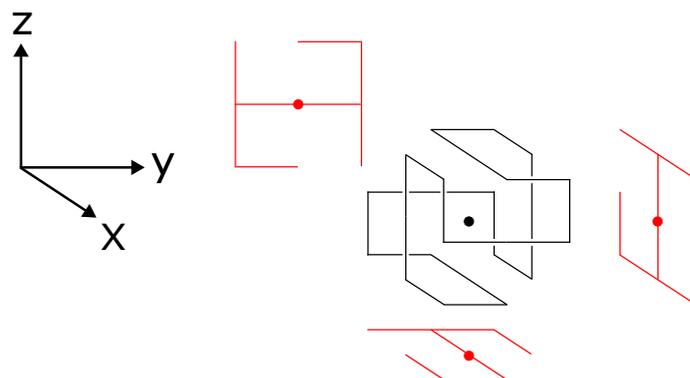


図 22

図 22 のように, T-3 trivial A の真ん中に孤立頂点を置くと, 3つの平面への正射影は全て木となる.

注意点として, 1 個の T-3 trivial A の中に置くことができる孤立頂点は 1 個まで. 1 個の T-3 trivial A の中に複数個の孤立頂点を置くと, 少なくとも 1 つの平面への正射影は連結成分数が 2 以上となり木ではなくなってしまうためである. このことから 2.2 では, 射影図の有界領域の個数より孤立頂点の個数の方が多い場合のみライデマイスター移動 1 をして有界領域の個数を増やした.

●補足：孤立頂点のみから成る空間グラフの場合

図 23 より, 1 個の孤立頂点のみで構成されたグラフは, どのように空間埋め込みをしても 3 つの軸方向の正射影は全て木になる.

また図 24 より, 2 個以上の孤立頂点のみで構成されたグラフは, どのように空間埋め込みをしても 3 つの軸方向の正射影が全て木になることはない.

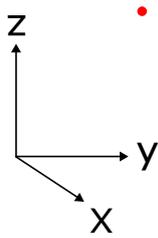


図 23 : T-3 型である

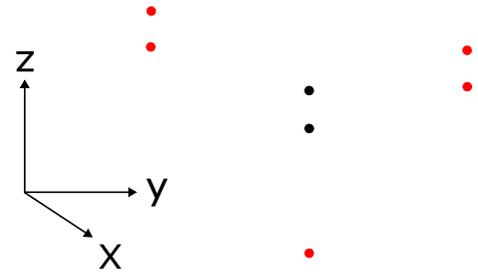


図 24 : T-3 型ではない

以上の 2.1~2.6 と補足より主定理を証明できた. ■

3 今後の課題

今回の研究により, 全ての空間グラフに対し, T-3 型であるものとそうでないものに分類できた. 今後は, 射影の方向を増やせるか考えたい.

4 謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

5 参考文献

- [1] K. Kawamura, CONSTRUCTION OF A LATTICE KNOT WHOSE THREE SHADOWS ARE ALL TREES, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, Vol. 20, No. 5 (2011) 775–785.
- [2] P. Winkler, *Mathematical Mind-Benders* (A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2007).