

バンド手術による絡み目解消経路の特徴付け

お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科 清水 日菜乃

1 アブストラクト

今回は、平行に向き付けられたトーラス絡み目 $T(2, 6)$ がバンド手術によって解かれる経路を特徴付ける。この研究は [10, 11] で行われた研究を拡張するものである。

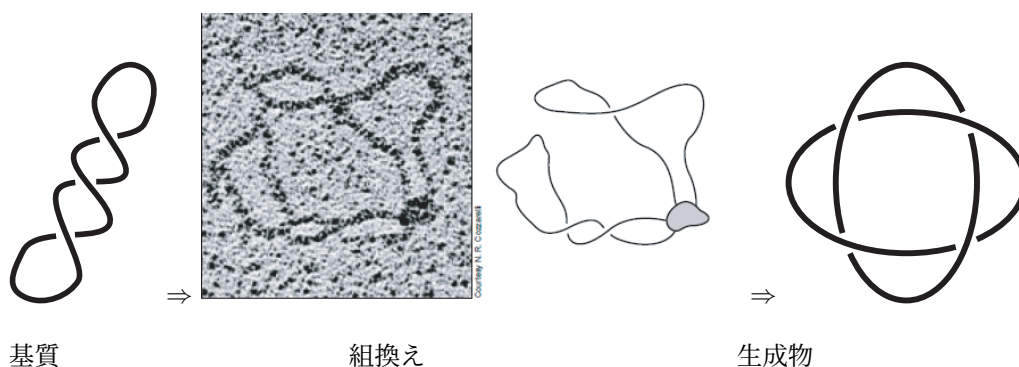
DNA の部位特異的組換え (site-specific recombination) は、向き付けられた結び目・絡み目の向きを保つバンド手術を用いてモデル化される。[1] において、平行に向き付けられたトーラス絡み目 $T(2, 2n)$ が部位特異的組換えにより段階的に解かれる様子が観察されている。[10, 11] において、その様子が結び目理論を用いて解明されている。[10, 11] では、DNA の組換えを扱う観点から途中に現れるものは結び目または 2 成分絡み目に限るという制約のもとその特徴付けが行われてきた。DNA 組換えとバンド手術に関する論文は、[2] などがある。

一方、[5] において、渦で作られた 3_1 結び目が繋ぎ換え (reconnection) により解かれる様子が観察されている。繋ぎ換えも組換えと同様に、向きを保つバンド手術を用いてモデル化されるため、[10, 11] の結果が渦結び目・絡み目の研究 [6, 12, 13] に応用されている。渦の繋ぎ換えでは成分数に関する制約を外すことが自然となったため、成分に関する制約を外した上で絡み目が解かれる様子の特徴付けを行うのが今回の研究である。

2 研究の背景

2.1 DNA の組換えによる絡み目解消

DNA の部位特異的組換えは、バンド手術でモデル化されることが知られている。



D.W.Sumners, *Notices of AMS*, 42 (1995)

部位特異的組換えは、特定の部位 (塩基配列) の箇所のみ起こる組換えである。

Grainge et al. (EMBO J. 2007) は XerCD-dif-FtsK は細胞内で得られた DNA 絡み目 (RH 2m-cat (torus link $T(2, 2m)$)) で平行な部位を持つものを、何回かの組換えで解くことを示した。部位の塩基配列を用いて、DNA 絡み目には自然に向きを入れることが出来るため、向きのついた絡み目に対するバンド手術で部位特異的組換えをモデル化することができる。この実験では組換えが起こる部位 (dif) が 2 つしかないため、絡み目が解かれる過程で現れる成分数は 1 か 2 である。

定義 2.1 (向きを保つバンド手術). L を S^3 の絡み目とする。 $b: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^3$ を埋め込みで、 $b^{-1}(L) = [0, 1] \times \{0, 1\}$ を満たすものとする。このとき、 L_b を L から $b([0, 1] \times \{0, 1\})$ を取り除き $b(\{0, 1\} \times [0, 1])$ に変えて得られる絡み目とする。この操作をバンド手術という。バンド $b([0, 1] \times [0, 1])$ 以外の部分の向きが一致するとき、向きを保つバンド手術という。

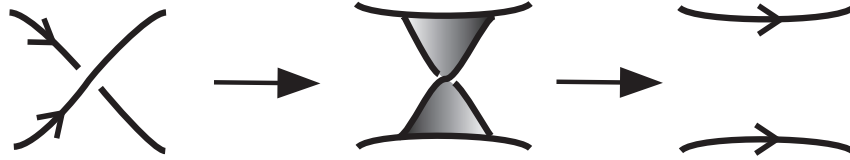


図 1: バンド手術

[10, 11] では、平行な向きを持つ 6_1^2 が最短経路で自明な結び目に解かれる様子の特徴付けが行われている。[10] では、絡み目の交点数が各ステップで下がる場合はただ一つの経路であることが証明されている。[11] では、絡み目の交点数が各ステップで絡み目の交点数が上がらない場合は 9 通りの経路があることが証明されている。この論文では、DNA の組み換えの様子をモデル化しているため、経路に現れるものは結び目または成分数が 2 の絡み目となることが仮定されている。

定理 2.2. [10] 経路に現れる絡み目の成分数が 2 以下であり、各ステップで絡み目の交点数が下がると仮定したとき、平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる最短経路は図 2 にある唯一つである。

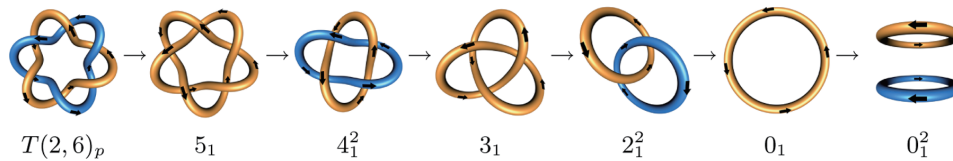


図 2: 定理 2.2 の結果

Shimokawa, K., Ishihara, K., Grainge, I., Sherratt, D.J., *Proc Natl Acad Sci U S A.* (2013) Dec 24;110(52):20906-11

定理 2.3. [11] 経路に現れる絡み目の成分数が 2 以下であり、各ステップで絡み目の交点数が上がらないと仮定したとき、平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる最短経路は図 3 にある 9 通りである。

3 渦結び目・絡み目

渦の 3_1 が時間経過で 0_1^2 に解ける様子を観察する実験が行われている。

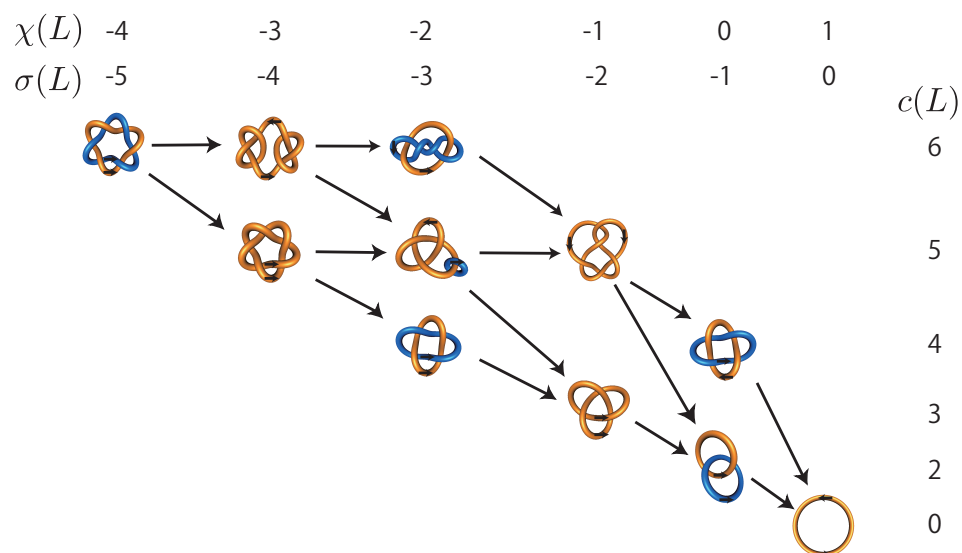
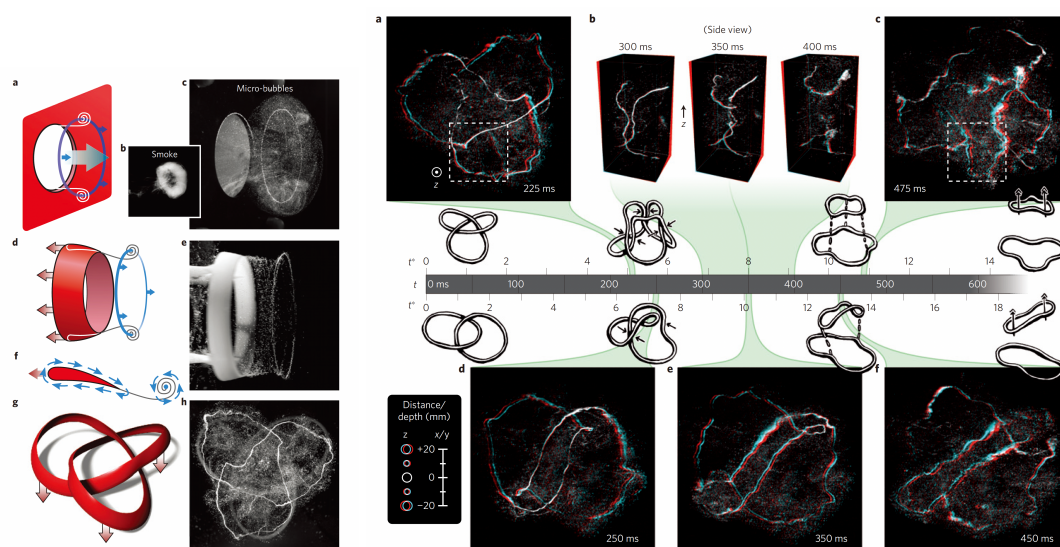


図 3: 定理 2.3 の結果

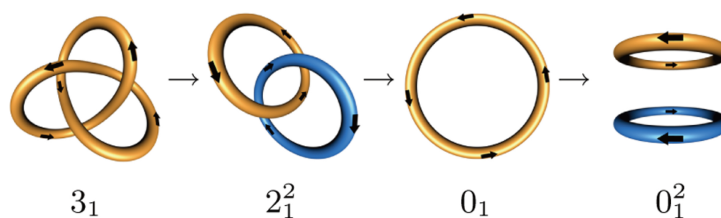
Stolz, R., Yoshida, M., Brasher, R. et al., *Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification*. *Sci Rep* 7, 12420 (2017)



“Creation and dynamics of knotted vortices”,

D. Kleckner and W.T.M. Irvine, *Nature Physics* 9, 253-258 (2013)

渦結び目は繋ぎ換えによって自明な絡み目に解かれる。



渦にも自然に向きが入り、渦の繋ぎ換えも向きを保つバンド手術によってモデル化される。

渦絡み目についても、平行な向きを持つ $T(2, 6)$ から繋ぎ換えにより自明な結び目が得られる様子のシミュレーション等を用いた研究が [7] などで行われている。渦の絡み目の場合には、成分数に関する制限が無くなる。

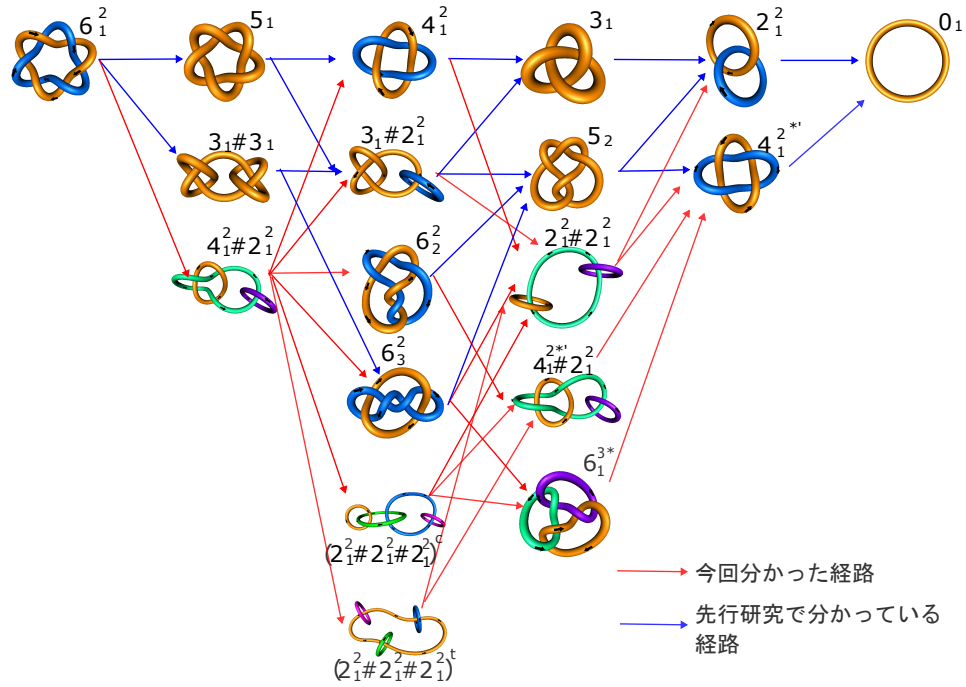


図 4: 主定理の図。左から符号数が $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ である。

今回は、成分数に関する仮定をなくした上で、平行な向きを持つ 6_1^2 が最短経路で自明な結び目に解かれる様子の特徴付ける。ここでは、各ステップで交点数は増加しないと仮定する。定理 3.1 がこの論文の主定理である。

定理 3.1. 平行な向きを持つ 6_1^2 が自明な結び目に解かれる、仮定を満たす最短経路は図 4 にある 41 通りである。

4 主定理の証明の準備

この章では主定理の証明に用いる補題を準備する。なお、講演では経路に非分離絡み目は現れないと仮定していたが、補題 4.1 によって経路に非分離絡み目は現れないことがわかった。これによって、さらに明確に経路を特徴付けることができた。

補題 4.1. $[8]$ L と L_b を向き付けられた絡み目とする。 L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとき、次が成り立つ：

$$|\sigma(L) - \sigma(L_b)| + |n(L) - n(L_b)| = 1$$

ただし $\sigma(L)$ は L の符号数、 $n(L)$ は L の退化次数である。

命題 4.2. 6_1^2 が 0_1 に解かれる最短経路において、現れる絡み目の符号数は $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ である。

補題 4.3. 向きを保つバンド手術は絡み目の成分数を 1 変化させる。

補題 4.4. 経路に現れる絡み目の成分数は 4 以下である。

証明. $\sigma(6_1^2) = -5, \sigma(0_1) = 0$ だから、命題 4.1 より、 6_1^2 の絡み目解消の最短経路で現れる絡み目の符号数はそれぞれ $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ である。また、命題 4.3 より、 6_1^2 の絡み目解消の最短経路で現れる絡み目の成分数は $2, 1, 2, 1, 2, 1$ か $2, 1, 2, 3, 2, 1$ か $2, 3, 2, 1, 2, 1$ か $2, 3, 4, 3, 2, 1$ のいずれかである。□

補題 4.5. L が分離絡み目のとき、 $n(L) \neq 0$ である。

証明. L の分離した成分にそれぞれ連結なザイフェルト曲面を張り、それらをチューブで繋ぎ合わせる。その時、チューブの中心線に対応する S の 1 次元 ホモロジー $H_1(S)$ の生成元 a で、絡み数 $lk(a, a^+)$ が 0 のものが 1 つ増え、 A の対角成分に 0 が現れる。これは、 A の固有値 0 に対応し、 $n(L) \neq 0$ となる。 $\square$

補題 4.6. 経路に分離絡み目は現れない。

証明. 定理より $|\sigma(L) - \sigma(L_b)| + |n(L) - n(L_b)| = 1$ であり、最短経路だと $|n(L) - n(L_b)| = 0$ となる。 $n(6_1^2) = 0$ だから、経路に現れる絡み目はすべて退化次数が 0 である。よって経路に分離絡み目は現れない。 $\square$

補題 4.7. L を成分数が 4 以下で、交点数が 6 以下の非分離絡み目とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $\sigma(L) = -5$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、 $L = 6_1^2$ である。
2. $\sigma(L) = -4$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、 $L = 5_1, 3_1 \# 3_1, 2_1^2 \# 4_1^2$ または 6_3^3 である。
3. $\sigma(L) = -3$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、 $L = 4_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 3_1 \# 2_1^2, (2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^c$ または $(2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^t$ である。
4. $\sigma(L) = -2$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、 $L = 3_1, 5_2, 6_2, 6_1^{3'}, 6_1^{3*}, 4_1^2 \# 2_1^{2'}, 4_1^{2*'} \# 2_1^2$ または $2_1^2 \# 2_1^2$ である。
5. $\sigma(L) = -1$ かつ成分数が偶数であることの必要十分条件は、 $L = 6_1^{2*'}, 6_3^{2*'}, 5_1^2, 4_1^{2*'}, 2_1^2$ または $3_1 \# 2_1^{2'}$ である。
6. $\sigma(L) = 0$ かつ成分数が奇数であることの必要十分条件は、 $L = 0_1, 4_1, 6_1, 6_1^*, 6_3, 2_1^2 \# 2_1^{2'}$ または $3_1 \# 3_1^*$ である。

補題 4.8. $[4]$ L を $(c+1)$ 成分の絡み目とする。 L_b が L から向きを保つバンド手術で得られる c 成分の絡み目とする。このとき、以下が成り立つ：

$$V(L; \omega) = \eta i V(L_b; \omega) = \pm i^c (i\sqrt{3})^\delta, \quad \eta = \pm 1$$

ならば、

$$i^c V(L; -1) \equiv \eta i^{c-1} V(L_b; -1) \pmod{3^{\delta+1}}$$

が成り立つ。特に、

$$\frac{V(L; \omega)}{V(L_b; \omega)} \in \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

が成り立つ。

補題 4.9. $[3]$ $Q(L; x)$ を L の Q 多項式とする。また、 $\rho(L) = Q(L; (\sqrt{5}-1)/2)$ とする。 L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとき、次が成り立つ：

$$\frac{\rho(L)}{\rho(L_b)} \in \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}.$$

補題 4.10. $[3]$ $L = K_1 \cup K_2$ とする。もし $lk(K_1, K_2)$ が偶数のとき、 L_b が L から向きを保つバンド手術で得られるとすると、

$$\text{Arf}(L) = \text{Arf}(L_b)$$

が成り立つ。

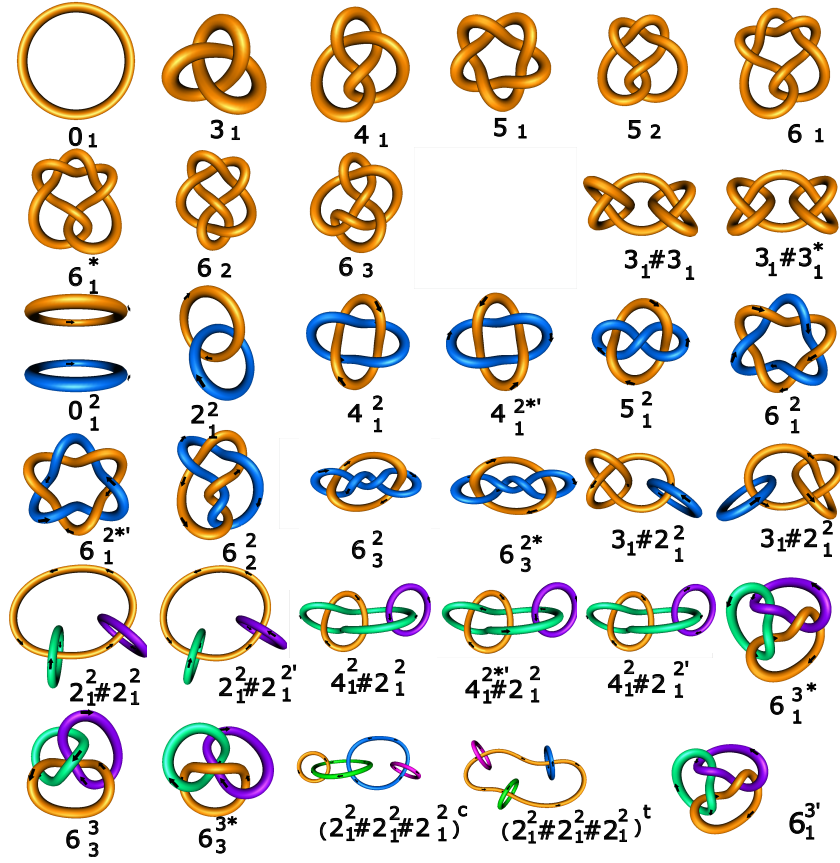


図 5: 今回は、図のような向き付けられた結び目・絡み目の表記を用いる。表記は、[10, 11] に合わせているため、[9] とは異なるものがある。

補題 4.11. *[K.Ishihara (private communication)]* $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, $L' = K_1 \cup K_2'$ とする。ただし K_i は結び目とする。このとき、 K_2 と K_3 に向きを保つバンド手術を行って K_2' ができたとすると、

$$lk(K_1, K_2') = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

が成り立つ。

証明. K_2, K_3 の間に向きを保つバンド手術が存在し、 K_2' を得るとき、ライデマイスター変形によってバンドを L の正則図形の領域の内側にとることができる。このとき L の他の絡み数は変わらないから、

$$lk(K_1, K_2') = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

が成り立つ。 □

5 主定理の証明

5.1 Step 1

この章では、符号数が -5 の絡み目から符号数が -4 の絡み目へのバンド手術を考察する。

命題 5.1. 6_1^2 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -4 の絡み目は、 $5_1, 3_1\#3_1, 2_1^2\#4_1^2$ である。

証明. 図 8 のようにバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。 □

命題 5.1 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.2. 6_1^2 と 6_3^3 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. それぞれの各成分を図 6 のようにおく。

このとき $lk(K_1, K_2) = -3, lk(K'_1, K'_2) = -1, lk(K'_2, K'_3) = 1, lk(K'_3, K'_1) = -1$ である。補題 4.11 より、どの 2 成分の間にも向きを保つバンド手術は存在しない。よって、 6_1^2 と 6_3^3 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

□

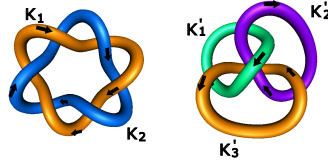


図 6: 6_1^2 と 6_3^3 の成分の名前

5.2 Step 2

ここでは、 $4_1^2 \# 2_1^2$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -3 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.3. $4_1^2 \# 2_1^2$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -3 の絡み目は、 $4_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 3_1 \# 2_1^2$ or $2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2$ である。

証明. 図 8 のようにバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。

□

5.3 Step 3

ここでは、 6_3^2 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -2 の絡み目を特徴付ける。

命題 5.4. 6_3^2 から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -2 の絡み目は、 $5_2, 2_1^2 \# 2_1^2, 6_1^{3*}$ である。

証明. それぞれ図 8 のようにバンド手術が存在する。

□

命題 5.4 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.5. 6_3^2 と $3_1, 6_2, 4_1^2 \# 2_1^{2'}, 4_1^{2*'} \# 2_1^{2'}$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. $6_2, 4_1^2 \# 2_1^{2'}, 4_1^{2*'} \# 2_1^{2'}$ について、

$$\frac{V(6_3^2; \omega)}{V(4_1^2 \# 2_1^{2'}; \omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\},$$

$$\frac{V(6_3^2; \omega)}{V(4_1^{2*'} \# 2_1^{2'}; \omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\},$$

$$\frac{\rho(6_3^2)}{\rho(6_2)} = -\sqrt{5} \notin \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}.$$

補題 4.8 と補題 4.9 よりこれらの間に向きを保つバンド手術は存在しない。

3_1 について、 $lk(6_3^2) = -2$ だから補題 4.10 が使える。 $\text{Arf}(6_3^2) = 0, \text{Arf}(3_1) = 1$ だから、 6_3^2 から 3_1 への向きを保つバンド手術は存在しない。

□

5.4 Step 4

ここでは、 6_1^{3*} から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -1 の絡み目の特徴付ける。

命題 5.6. 6_1^{3*} から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -1 の絡み目は $4_1^{2*'}$ である。

証明. 図 8 のように向きを保つバンド手術が存在する。補題 4.7 から従う。□

命題 5.6 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.7. 6_1^{3*} と $6_1^{2*}, 2_1^2$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明. $6_1^{2*}, 2_1^2$ について、

$$\frac{V(6_1^{2*}; \omega)}{V(6_1^{3*}; \omega)} = i\sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

$$\frac{V(2_1^2; \omega)}{V(6_1^{3*}; \omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

となる。よって、補題 4.8 より 6_1^{3*} と $6_1^{2*}, 2_1^2$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。□

5.5 Step 5

ここでは、 $4_1^{2*'}$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が 0 の絡み目の特徴付ける。

命題 5.8. $4_1^{2*'}$ から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 4 以下で符号数が 0 の絡み目は、 0_1 である。

証明. 図 8 のように向きを保つバンド手術が存在する。□

命題 5.8 を示すためには、以下の補題を示せば良い。

補題 5.9. $4_1^{2*'}$ と $4_1, 2_1^2 \# 2_1^{2'}$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明.

$$\frac{\rho(4_1^{2*'})}{\rho(4_1)} = -\sqrt{5}^{-1} \notin \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}$$

となる。補題 4.9 より $4_1^{2*'}$ と 4_1 の間に向きを保つバンド手術は存在しない。 $2_1^2 \# 2_1^{2'}$ について、それぞれ各成分を図 7 のようにおく。

このとき $lk(K_1, K_2) = 2, lk(K'_1, K'_2) = -1, lk(K'_2, K'_3) = 1, lk(K'_1, K'_2) = 0$ となり、補題 4.11 より、 $2_1^2 \# 2_1^{2'}$ のどの 2 つの成分の間にも $4_1^{2*'}$ への向きを保つバンド手術は存在しない。

よって、 $4_1^{2*'}$ と $2_1^2 \# 2_1^{2'}$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。□

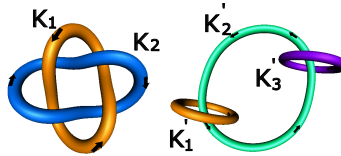


図 7: $4_1^{2*'}$ と $2_1^2 \# 2_1^{2'}$ の成分の名称

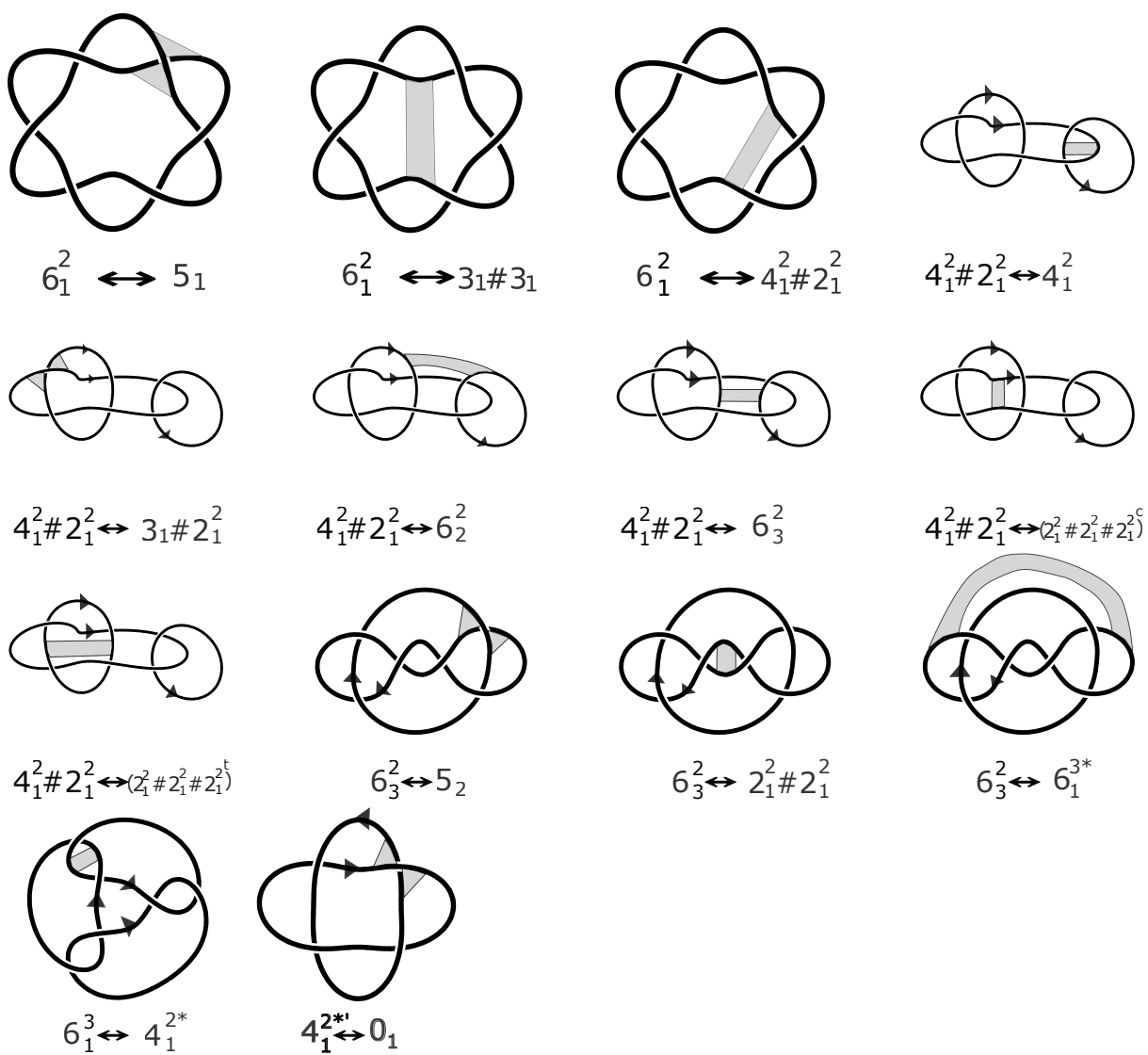


図 8: バンドの図

参考文献

- [1] I. Grainge, M. Bregu, M. Vazquez, V. Sivanathan, S.C.Ip, and D.J. Sherratt. Unlinking chromosomes catenated *in vivo* by site-specific recombination. *EMBO J*, 26(19):4228–4238, 2007.
- [2] Kai Ishihara, Koya Shimokawa, and Mariel Vazquez. *Site-specific recombination modeled as a band surgery: Applications to Xer recombination*, pages 387–401. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [3] Taizo Kanenobu. Band surgery on knots and links. *J. Knot Theory Ramifications*, 19(12):1535–1547, 2010.
- [4] Taizo Kanenobu. Band surgery on knots and links, II. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21(09):1250086, 2012.
- [5] Dustin Kleckner and William T. M. Irvine. Creation and dynamics of knotted vortices. *Nature Physics*, 9(4):253–258, 2013.
- [6] Christian E. Laing, Renzo L. Ricca, and De Witt L. Sumners. Conservation of writhe helicity under anti-parallel reconnection. *Scientific Reports*, 5(1):9224, 2015.
- [7] Xin Liu, Renzo L. Ricca, and Xin-Fei Li. Minimal unlinking pathways as geodesics in knot polynomial space. *Communications Physics*, 3(1):136, 2020.
- [8] Kunio Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117:387–422, 1965.
- [9] D. Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2003.
- [10] Koya Shimokawa, Kai Ishihara, Ian Grainge, David J. Sherratt, and Mariel Vazquez. FtsK-dependent XerCD-*dif* recombination unlinks replication catenanes in a stepwise manner. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(52):20906–20911, 2013.
- [11] Robert Stolz, Masaaki Yoshida, Reuben Brasher, Michelle Flanner, Kai Ishihara, David J. Sherratt, Koya Shimokawa, and Mariel Vazquez. Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification. *Scientific Reports*, 7(1):12420, 2017.
- [12] De Witt L Sumners, Irma I Cruz-White, and Renzo L Ricca. Zero helicity of Seifert framed defects. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(29):295203, 2021.
- [13] Simone Zuccher and Renzo L. Ricca. Creation of quantum knots and links driven by minimal surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 942:A8, 2022.