

A bracket polynomial for the Alexander–Conway polynomial

石井 敦（筑波大学数理物質系）

概要

アレクサンダー多項式とジョーンズ多項式はどちらもよく知られた多項式不変量であり、スケイン関係式を用いて簡単に計算して値を求めることができる。ジョーンズ多項式の不変性は、カウフマンブラケットを用いることで初等的に与えることができる。本稿では、アレクサンダー多項式に対しても、初等的に不変性を与えるブラケット多項式を導入する。

1 ブラケット多項式

図 1 の左の絵にあるような、 n 個の上端点と n 個の下端点を持つタングルを (n, n) -タングルといい、本稿では、端点で上から下に向かう向きを持っているとする。 (n, n) -タングルを平行なひもによって閉じることで、タングル T の閉包 $\hat{T}$ が得られる。タングル T のダイアグラムが D であった場合、これに平行なひもを加えることで得られるダイアグラムを $\hat{D}$ で表す。このとき、 $\hat{D}$ は $\hat{T}$ のダイアグラムになる。タングルはその端点に 1 個頂点を持つが、本稿では、 (n, n) -タングルはその内部に、1 個または 3 頂点で入次数 1 の頂点を持ってもよいものとする。 (n, n) -タングルはその内部に頂点を持たないとき、古典的であるという。

定義 1.1. 向き付けられた 1, 3 個 (n, n) -タングルダイアグラム D に対して、 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle &= -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle - \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle \\ \bullet \quad \langle \text{Diagram 6} \rangle &= -t \langle \text{Diagram 7} \rangle - \langle \text{Diagram 8} \rangle + t \langle \text{Diagram 9} \rangle + \langle \text{Diagram 10} \rangle \end{aligned}$$

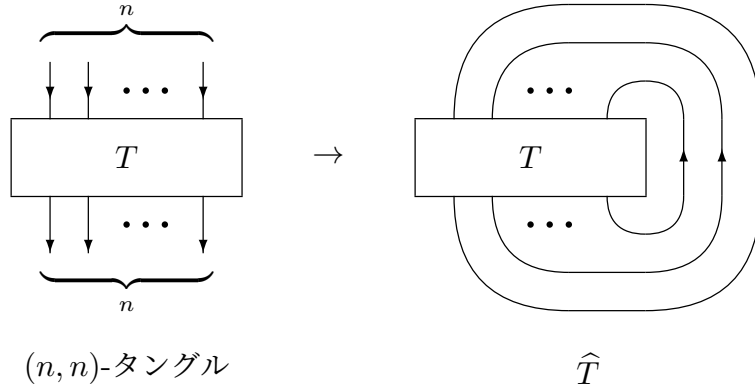
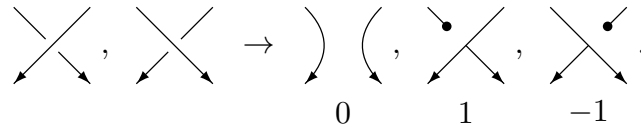


図 1

- 交点を持たないダイアグラム D に対して

$$\langle D \rangle = \begin{cases} 1 & D \text{ はループを含まない} \\ 0 & D \text{ はループを含む} \end{cases}$$

次に、定義 1.1 の $\langle D \rangle$ を状態和公式で与える。これは、 $\langle D \rangle$ の well-definedness を与える。ダイアグラム D の交点の集合を $C(D)$ とする。また、交点 χ の符号を $\text{sgn}(\chi)$ で表す。向き付けられた 1, 3 価 (n, n) -タングルダイアグラム D の状態 σ とは、 $0, 1, -1$ の各交点への割り当て、つまり、 $C(D)$ から $\{0, 1, -1\}$ への写像のことである。ただし、割り当てられた $0, 1, -1$ は次のタングルに対応し、この対応によってダイアグラム D のすべての交点を置き換えて得られるダイアグラムを D_σ で表す。



状態 σ に対して、交点 χ の重み $\text{wt}(\chi; \sigma)$ を次で定義する。

$$\text{wt}(\chi; \sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma(\chi) = \text{sgn}(\chi) \text{ のとき} \\ t^{-\text{sgn}(\chi)} & \sigma(\chi) = -\text{sgn}(\chi) \text{ のとき} \\ -t^{-\text{sgn}(\chi)} & \sigma(\chi) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\langle D \rangle$ の状態和公式は次で与えられる。

$$\langle D \rangle = \sum_{\sigma: D \text{ の状態}} \prod_{\chi \in C(D)} \text{wt}(\chi; \sigma) \delta(D_\sigma), \quad (1)$$

ここで、 $\delta(D_\sigma) \in \{0, 1\}$ は次で与えられる。

$$\delta(D_\sigma) = \begin{cases} 1 & D_\sigma \text{ はループを含まない} \\ 0 & D_\sigma \text{ はループを含む} \end{cases}$$

状態和公式 (1) を用いることで次の補題が得られる。

補題 1.2. 次の関係式が成り立つ。

- $\langle \text{diagram 1} \rangle = \langle \text{diagram 2} \rangle = \langle \text{diagram 3} \rangle$
- $\langle \text{diagram 4} \rangle = \langle \text{diagram 5} \rangle$
- $\langle \text{diagram 6} \rangle = \langle \text{diagram 7} \rangle = 0$
- $\langle \text{diagram 8} \rangle = \langle \text{diagram 9} \rangle = 0$
- $\langle \text{diagram 10} \rangle + \langle \text{diagram 11} \rangle = \langle \text{diagram 12} \rangle + \langle \text{diagram 13} \rangle$

Proof. これらの関係式が交点のないダイアグラムに対して成り立てば、状態和公式 (1) から、一般のダイアグラムに対しても、これらの関係式が成り立つことが分かる。交点のないダイアグラムに対しては、ループの有無に着目することで、これらの関係式が得られる。特に、最後の関係式は、タングルの外側での端点のつながり方に着目することで得られる。 $\square$

補題 1.3. 次の関係式が成り立つ。

- (1) $\langle \text{diagram 14} \rangle = \langle \text{diagram 15} \rangle$
- (2) $\langle \text{diagram 16} \rangle = t^{-1} \langle \text{diagram 17} \rangle + (1 - t^{-1}) \langle \text{diagram 18} \rangle$
- (3) $\langle \text{diagram 19} \rangle = t \langle \text{diagram 20} \rangle + (1 - t) \langle \text{diagram 21} \rangle$
- (4) $\langle \text{diagram 22} \rangle = \langle \text{diagram 23} \rangle$

Proof. 補題 1.2 より次が成り立つ。

- (1) $\langle \text{diagram 14} \rangle = -t^{-1} \langle \text{diagram 24} \rangle + \langle \text{diagram 25} \rangle + t^{-1} \langle \text{diagram 26} \rangle = \langle \text{diagram 15} \rangle.$
- (2) $\langle \text{diagram 16} \rangle = -t^{-1} \langle \text{diagram 27} \rangle + \langle \text{diagram 28} \rangle + t^{-1} \langle \text{diagram 29} \rangle$
 $= t^{-1} \langle \text{diagram 30} \rangle + (1 - t^{-1}) \langle \text{diagram 31} \rangle.$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \langle \text{diagram} \rangle &= -t \langle \text{diagram} \rangle + t \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle \\
 &= t \langle \text{diagram} \rangle + (1-t) \langle \text{diagram} \rangle.
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \langle \text{diagram} \rangle = -t \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle + t \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle.$$

□

補題 1.4. 次の関係式が成り立つ。

$$(1) \quad \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle$$

$$(2) \quad t^{-1} \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle$$

$$(3) \quad \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle = t \langle \text{diagram} \rangle$$

Proof. (1) 補題 1.2 より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle &= -t^{-1} \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle + t^{-1} \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle, \\
 \langle \text{diagram} \rangle &= -t \langle \text{diagram} \rangle + t \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle.
 \end{aligned}$$

(2) 補題 1.2 より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{diagram} \rangle &= -t \langle \text{diagram} \rangle + t \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle = t \langle \text{diagram} \rangle, \\
 \langle \text{diagram} \rangle &= -t^{-1} \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle + t^{-1} \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle.
 \end{aligned}$$

(3) 補題 1.2 より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= -t \langle \text{Diagram 2} \rangle + t \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle, \\
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle = t^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle.
 \end{aligned}$$

□

補題 1.5. 次の関係式が成り立つ。

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle.$$

Proof. 補題 1.2 と補題 1.4 より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
 &= -t^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle + \langle \text{Diagram 6} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right\rangle - t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right\rangle \\
&\quad + t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \right\rangle + t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} \right\rangle \\
&= -t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} \right\rangle + t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \end{array} \right\rangle.
\end{aligned}$$

□

命題 1.6. 次の関係式が成り立つ。

$$(1) \ t \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 12} \end{array} \right\rangle$$

$$(2) \ t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 14} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \end{array} \right\rangle$$

$$(3) \ \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 16} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 18} \end{array} \right\rangle$$

$$(4) \ \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 20} \end{array} \right\rangle$$

$$(5) \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

Proof. 補題 1.2 より次が成り立つ。

$$(1) \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle = -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle = t^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle,$$

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = -t \langle \text{Diagram 2} \rangle + t \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle.$$

$$(2) \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle = -t \langle \text{Diagram 2} \rangle + t \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle = t \langle \text{Diagram 5} \rangle,$$

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle.$$

補題 1.2, 補題 1.3, 補題 1.4 より次が成り立つ。

$$(3) \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle = -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle,$$

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = -t \langle \text{Diagram 2} \rangle + t \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle.$$

$$(4) \quad \langle \text{Diagram 1} \rangle = -t^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + t^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle \\ = -\langle \text{Diagram 5} \rangle + \langle \text{Diagram 6} \rangle + \langle \text{Diagram 7} \rangle = \langle \text{Diagram 8} \rangle \langle \text{Diagram 9} \rangle.$$

補題 1.3 と補題 1.5 より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle &= -t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle + t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \right\rangle \\
 &= -t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle + t^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \diagup \end{array} \right\rangle \\
 &= \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

□

2 アレクサンダー・コンウェイ多項式

命題 2.1. (1) 次の関係式が成り立つ。

$$t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle - t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle.$$

(2) 任意の向き付けられた古典的な $(2, 2)$ -タングル T に対して、次が成り立つ。

$$t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \boxed{T} \\ \uparrow \downarrow \end{array} \right\rangle = t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \boxed{T} \\ \downarrow \uparrow \end{array} \right\rangle.$$

Proof. (1) 次の等式の差を取ることで、等式が得られる。

$$\begin{aligned}
 t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle &= -t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle + t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \right\rangle, \\
 t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle &= -t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \right\rangle + t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

(2) (1) の等式と命題 1.6 より、ある $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ が存在して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ \boxed{T} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \right\rangle &= \alpha \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle + \beta \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle \\ &= (\beta - t^{-1}\alpha) \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + \alpha \left\langle \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle + t^{-1}\alpha \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

この等式の左側と右側でタングルを閉じることで、次の等号を得る。

$$t^{1/2} \left\langle \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ \boxed{T} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \right\rangle = t^{-1/2} \alpha \left\langle \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle = t^{-1/2} \left\langle \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ \boxed{T} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \right\rangle.$$

□

D を向き付けられた古典的な (n, n) -タングルのダイアグラムとする。 D の回転数 $\text{rot}(D)$ は、すべての成分で点を移動させたときの接ベクトルの角変化量の総和を 2π で割ったものとして定義する。このとき、 $\text{rot}(D) = \text{rot}(\hat{D}) - n$ が成り立つ。また、 D のねじれ数 $\text{wr}(D)$ を正交点の数から負交点の数を引いた数として定義する。このとき、 $\text{wr}(D) = \text{wr}(\hat{D})$ が成り立つ。

定理 2.2. D を向き付けられた古典的な (n, n) -タングル T のダイアグラムとする。このとき、

$$t^{\frac{\text{rot}(D) + \text{wr}(D)}{2}} \langle D \rangle$$

は T の不変量である。特に、 T が $(1, 1)$ -タングルである場合、次が成り立つ。

$$\Delta_{\hat{T}}(t) = t^{\frac{\text{rot}(D) + \text{wr}(D)}{2}} \langle D \rangle.$$

ここで、 $\Delta_L(t)$ は向き付けられた絡み目 L のアレクサンダー・コンウェイ多項式である。

Proof. 命題 1.6 より

$$t^{\frac{\text{rot}(D) + \text{wr}(D)}{2}} \langle D \rangle$$

はダイアグラム D で表される向き付けられた古典的な (n, n) -タングル T の不変量である。

L を向き付けられた絡み目とし、 T を向き付けられた古典的な $(1, 1)$ -タングルで L を閉包に持つものとする。 D を T のダイアグラムとする。このとき、 $X(L)$ を次で定義する。

$$X(L) := t^{\frac{\text{rot}(D) + \text{wr}(D)}{2}} \langle D \rangle.$$

命題 2.1 より、 $X(L)$ が向き付けられた古典的な $(1, 1)$ -タングル T の選び方に依らないことが分かる。また、 $X(L)$ は次のスケイン関係式をみたす。

$$X \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - X \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) X \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) X \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right).$$

自明な結び目に対して

$$\Delta_{\bigcirc}(t) = 1 = X(\bigcirc)$$

が成り立つことと合わせると、次が得られる。

$$\Delta_L(t) = X(L).$$

したがって、

$$\Delta_{\widehat{T}}(t) = X(\widehat{T}) = t^{\frac{\text{rot}(D) + \text{wr}(D)}{2}} \langle D \rangle.$$

□

3 終わりに

講演では、本稿で紹介したブラケット多項式のねじれ版も紹介しました。これについては参考文献 [1] を参照ください。

参考文献

- [1] A. Ishii, *On bracket polynomials for Alexander type invariants*, preprint.