

トーラス結び目のトーラス上の自己融合について

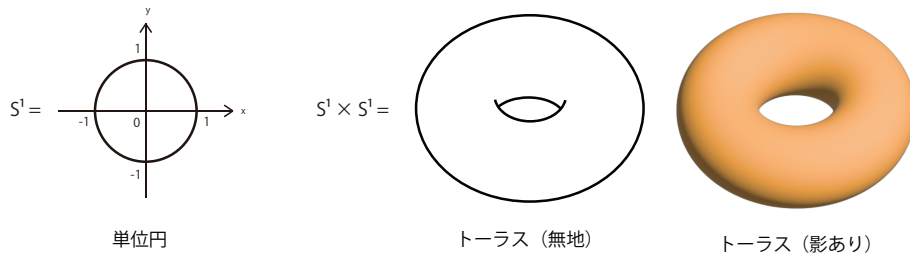
On Self-fusions of Torus Knots on the Torus

長谷川 諒 (甲南大学大学院自然科学研究科)

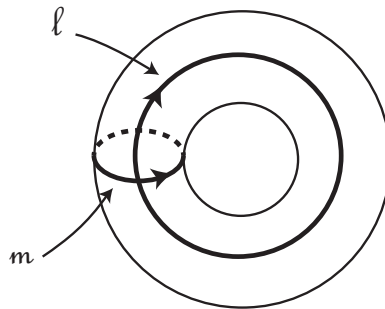
1. トーラスとトーラス結び目

1.1 トーラス

平面上の単位円周を $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし、トーラスを $T = S^1 \times S^1$ として定める。



1 つの S^1 に対応する閉曲線をロンジチュード ℓ 、もう 1 つの S^1 に対応する閉曲線をメリディアン m という。



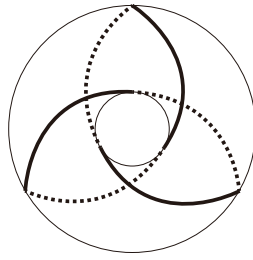
1.2 トーラス結び目

1.2.1 トーラス結び目の定義

(p, q) を負でない整数とし、 $\gcd(p, q) = 1$ とする。トーラス上で、 ℓ 方向に p 回、 m 方向に q 回まわる単純閉曲線を $T(p, q)$ と書き、 (p, q) 型のトーラス結び目という。

1.2.2 トーラス結び目の例

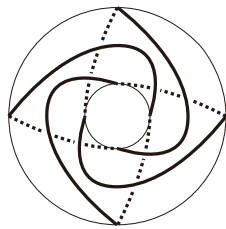
例えば、 $T(2, 3)$ は、1 本の紐を、トーラスの表面に、 ℓ 方向に 2 回、 m 方向に 3 回だけ巻き付けた結び目である。



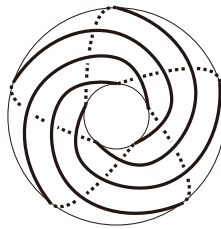
$T(2,3)$

トーラス結び目の例

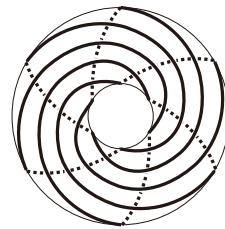
同様に、 $T(2,3)$ 以外にもさまざまなトーラス結び目があり、例えば、下図の $T(3,4)$ は 1 本の紐を、トーラスの表面に、 ℓ 方向に 3 回、 m 方向に 4 回だけ巻き付けた結び目である。



$T(3,4)$



$T(4,5)$



$T(5,6)$

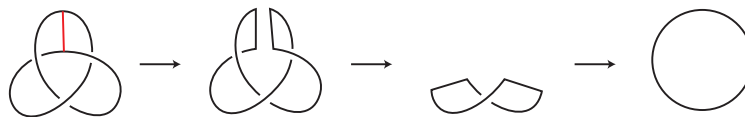
その他のトーラス結び目の例

2. 自己融合

2.1 結び目の自己融合

ある結び目に対して、その結び目と両端点だけで交わる弧に沿って 2 つに分割してつなぎ、新たな結び目または絡み目を作ることを 自己融合 (self-fusion) という。

自己融合をする際、結び目をつなぐ弧 α が必要になる。下図は、3 葉結び目における自己融合の図である。

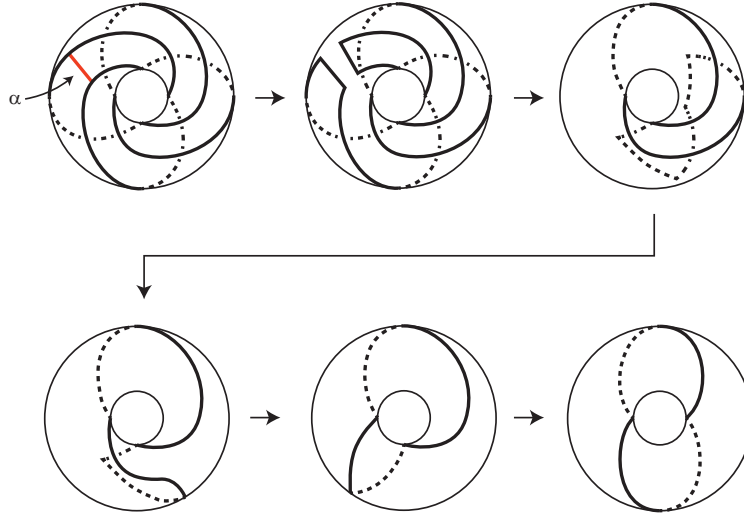


3 葉結び目の自己融合
(バンドのひねりは省略する。)

2.2 トーラス結び目の自己融合

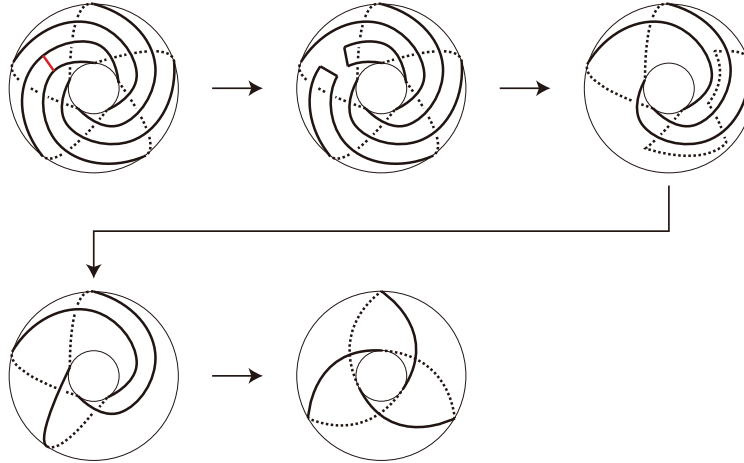
2.2.1 トーラス結び目の自己融合の例

トーラス T 上に描かれたトーラス結び目に対して、 T 上で自己融合を行う。すなわち、自己融合を指定する弧 α を T 上にとる。このとき、自己融合された結び目は再びトーラス上に描かれるので、新しいトーラス結び目が得られる。



$T(3,4)$ を自己融合して $T(1,2)$ が得られる

下図は、 $T(4,5)$ を自己融合して $T(2,3)$ が得られる例である。



注： α は、メリディアンに沿った弧とする。従って、トーラス結び目の自己融合は α の取り方に依らない。

2.3 $T(p, q)$ から $T(r, s)$ が得られるための必要十分条件

$T(p, q)$ から $T(r, s)$ となる条件として次を示した。

定理 2.3.1

$1 < p$ とする。 $T(p, q)$ からトーラス結び目の自己融合で $T(r, s)$ が得られるための必要十分条件は、
 $ps - qr = \pm 2$, $0 \leq r < p - 1$ かつ $\gcd(r, s) = 1$ である。

証明の要点

自己融合を行う T 上の弧を α とする。このとき、 α に沿って自己融合を実行し、重なりを少しずら

した結び目を $T(r, s)$ とする。(図 2.3.1)

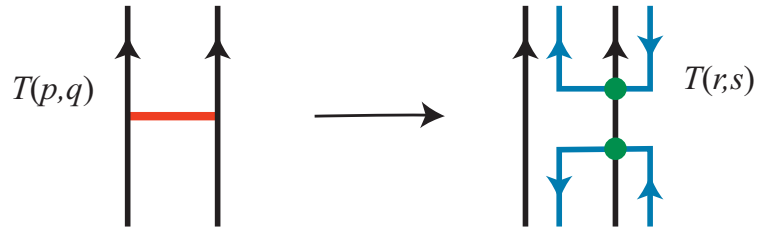


図 2.3.1

上図のように、 $T(p, q)$ と $T(r, s)$ は 2 点で交わる。また、2 つのトーラス結び目の代数的交差数は

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

である。従って、 $ps - qr = \pm 2$ となる。

3. 自己融合数 $sf(p, q)$

3.1 $sf(p, q)$ の定義と問題設定

これ以降、トーラス結び目 $T(p, q)$ は、すべて $p < q$ とする。なぜなら、 $T(p, q)$ と $T(q, p)$ は同値な結び目となるからである。

トーラス結び目の自己融合は、その定義から、1 回の自己融合で p は少なくとも 2 は減少する。従って、有限回の自己融合で、 $p = 0$ または 1 となり、自明な結び目が得られ、下記が定義できる。

$sf(p, q)$ の定義

自明な結び目になるための最小の自己融合回数を、 $T(p, q)$ の自己融合数 (Self-fusion number) と言い、 $sf(p, q)$ と書く。

このとき、次の問題を考える。

問題 A 与えられた $T(p, q)$ に対して、 $sf(p, q)$ を決定せよ。

また、次のような問題設定も考えられる。

問題 B 任意の自然数 $n > 0$ に対して、 $sf(p, q) = n$ となる $T(p, q)$ を決定せよ。

3.2 $sf(p, q) = 1$ であるための条件と証明

3.2.1 $sf(p, q) = 1$ である例

$$T(2, 3) \rightarrow T(0, 1) \text{ より、} sf(2, 3) = 1$$

$$T(5, 7) \rightarrow T(1, 1) \text{ より、} sf(5, 7) = 1$$

$$T(7, 12) \rightarrow T(1, 2) \text{ より、} sf(7, 12) = 1$$

3.2.2 $sf(p, q) = 1$ であるための条件

$sf(p, q) = 1$ であるための条件として、次が得られた。

命題 3.2.1

$1 < p < q, \gcd(p, q) = 1$ とする。 $sf(p, q) = 1$ であるための必要十分条件は、 $p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ である。

証明

$T(p, q)$ から $T(r, s)$ が得られるとすると、定理 2.3.1 より、 $ps - qr = \pm 2$ である。 $sf(p, q) = 1$ とすると、 $T(r, s)$ は自明な結び目より、 $r = 1$ または $s = 1$ である。

(I) $r = 1$ のとき、 $ps - q = \pm 2$ より、 $q = ps \pm 2 \therefore q \equiv \pm 2 \pmod{p}$

(II) $s = 1$ のとき、 $p - qr = \pm 2$ より、 $p = qr \pm 2$

(i) $r = 0$ のとき、 $p > 0$ より、 $p = 2$

(ii) $r = 1$ のとき、 $p = q \pm 2$ より、 $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$

(iii) $r \geq 2$ のとき、 $1 < p < q$ より、 $p \leq q - 1$ であるから、
 $p = rq \pm 2 \geq 2q \pm 2 = 2(q \pm 1) \geq 2p$ よって、 $p \geq 2p$ となり不適。

従って、 $sf(p, q) = 1$ ならば、 $p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ である。

逆に、

(I) $p = 2$ のとき、 $T(2, q)$ に対して、 $\begin{vmatrix} 2 & q \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ より、
 $T(r, s) = T(0, 1)$ が得られる。

(II) $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ のとき、 $q = ps \pm 2$ であり、 $\begin{vmatrix} p & q \\ 1 & s \end{vmatrix} = \pm 2$ より、
 $T(r, s) = T(1, s)$ が得られる。

従って、 $p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ ならば、 $T(r, s)$ は自明な結び目となり、 $sf(p, q) = 1$ である。□

3.3 $sf(p, q) = 2$ であるための条件

3.3.1 $sf(p, q)$ の周期性 $sf(p, q) = 2$ であるための条件について考える。そこで、 $sf(p, q)$ の周期性について見てみる。以下は、 $p = 7$ のときの $sf(p, q)$ についての表である。

$sf(p, q)$ の周期性

$p = 7$ のとき												
q	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	20
$sf(7, q)$	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	22	23	24	25	26	27	29	30	31	32	33	34
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	36	37	38	39	40	41	43	44	45	46	47	48
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3

上記の表から、 $\text{mod } 7$ で周期性をもつことが見てとれる。

一般に、 $\text{mod } p$ で周期性をもつことが、次の補題で示される。

補題 3.3.1

$1 < p < q < q'$, $\gcd(p, q) = 1$ とする。

このとき、 $q \equiv q' \pmod{p}$ ならば、 $sf(p, q) = sf(p, q')$ である。

証明

$sf(p, q) = n$ とすると、次のような自己融合列が得られる。

$$T(p, q) \rightarrow T(p_1, q_1) \rightarrow T(p_2, q_2) \rightarrow \cdots \rightarrow T(p_n, q_n)$$

ただし、自然数 i に対して、 $1 < p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) であり、 $1 < p_i < q_i$, $p_n = 0$ または 1 が成り立つ。 $(p_i < q_i$ の証明は省略する)。

まず、 $q' \equiv q \pmod{p}$ より、 $q' = kp + q$ つまり、 $q = q' - kp$ であるから、 $T(p, q) \rightarrow T(p_1, q_1)$ より、

$$pq_1 - qp_1 = \pm 2$$

$$pq_1 - (q' - kp)p_1 = \pm 2$$

$$p(kp_1 + q_1) - q'p_1 = \pm 2$$

$q'_1 = kp_1 + q_1$ とおくと、 $pq'_1 - q'p_1 = \pm 2$ であるから、 $T(p, q') \rightarrow T(p_1, q'_1)$ が得られる。

次に、 $q'_1 = kp_1 + q_1 \equiv q_1 \pmod{p_1}$ より、同様の議論を用いて $T(p_1, q'_1) \rightarrow T(p_2, q'_2)$ が得られる。これを続けて、

$$T(p, q') \rightarrow T(p_1, q'_1) \rightarrow T(p_2, q'_2) \rightarrow \cdots \rightarrow T(p_{n-1}, q'_{n-1}) \rightarrow T(p_n, q'_n)$$

を得る。すなわち、 $T(p, q)$ の自己融合列と、 $T(p, q')$ の自己融合列の第 1 座標が一致する。

ここで、 $1 < p < q'$ で $1 < p_1$ より $1 < p_1 < q'_1$ であり、同様に $1 < p_i < q'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)、 $p_n = 0$ または 1 が成り立つから、 $sf(p, q') = n$ となる。

従って、 $q \equiv q' \pmod{p}$ ならば、 $sf(p, q) = sf(p, q')$ が成り立つ。

□

3.3.2 $sf(p, q) = 2$ であるための条件

命題 3.2.1 で $sf(p, q) = 1$ であるための必要十分条件を示した。以下で、 $sf(p, q) = 2$ であるための条件を考察する。

次は、 $sf(p, q) = 2$ の例である。

$$T(8, 11) \rightarrow T(2, 3) \rightarrow T(0, 1) \text{ より、} sf(8, 11) = 2$$

$$T(11, 14) \rightarrow T(3, 4) \rightarrow T(1, 2) \text{ より、 } sf(11, 14) = 2$$

$$T(12, 19) \rightarrow T(2, 3) \rightarrow T(0, 1) \text{ より、 } sf(12, 19) = 2$$

p が偶数の場合、次の結果が得られた。

定理 3.3.2

$1 < p < q < 2p$, $\gcd(p, q) = 1$, p は偶数とする。このとき、

$sf(p, q) = 2$ であるための必要十分条件は、 $q = \frac{3}{2}p \pm 1$ である。

証明

p は偶数より、 $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) とする。

$T(p, q)$ から $T(r, s)$ が得られるとすると、定理 2.3.1 より $ps - qr = \pm 2$ である。 $sf(p, q) = 2$ とすると、 $sf(r, s) = 1$ であるから、命題 3.2.1 より $r = 2$ または $s \equiv \pm 2 \pmod{r}$ である。

(I) $r = 2$ のとき、 $ps - qr = 2ks - 2q = \pm 2$ より、 $q = ks \pm 1$ となる。このとき、 $1 < p < q < 2p$ より、 $2k < sk \pm 1 < 4k$ であり、 $\gcd(r, s) = 1, r = 2$ より、 s は奇数。また、 $r < s$ より、 $2 < s$ である。

(i) $s = 3$ のとき、 $q = 3k \pm 1 = \frac{3}{2}p \pm 1$

(ii) $s \geq 5$ のとき、 $sk \pm 1 \geq 5k \pm 1 = 4k + (k \pm 1) \geq 4k$ より不適。

(II) $s \equiv \pm 2 \pmod{r}$ のとき、 $s = mr \pm 2$ ($m \in \mathbb{Z}$) ここで、 r が偶数のとき、 s も偶数であるから、 $\gcd(r, s) = 1$ に反する。よって、 r は奇数となり、

$$\begin{aligned} ps - qr = \pm 2 &\iff 2k(mr \pm 2) - qr = \pm 2 \\ &\iff (2km - q)r = \pm 2 \cdot 2k \pm 2 = 2(\pm 2k \pm 1) \end{aligned}$$

より、 $2km - q$ は偶数となるため、整数 n を用いて、 $2km - q = 2n$ と表される。故に、 $q = 2(km - n)$ より、 q は偶数となり、これは $\gcd(p, q) = 1$ に反するため不適。

逆に、 $q = \frac{3}{2} \cdot 2k \pm 1 = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) とする。 k が奇数ならば、 q は偶数となり不適より、 $k = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) とおける。

$(p, q) = (4\ell, 6\ell \pm 1)$ に対して、 $(r, s) = (2, 3)$ とおくと、 $4\ell \cdot 3 - (6\ell \pm 1) \cdot 2 = \pm 2$ となり、定理 2.3.1 より $T(4\ell, 6\ell \pm 1)$ から $T(2, 3)$ が得られる。次に、 $(r, s) = (2, 3)$ に対して、 $(t, u) = (0, 1)$ とおくと、 $2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$ となり、定理 2.3.1 より $T(2, 3)$ から $T(0, 1)$ が得られる。よって、 $T(4\ell, 6\ell \pm 1) \rightarrow T(2, 3) \rightarrow T(0, 1)$ となり、 $sf(p, q) = 2$ となる。

□