

ラックの G 族に付随しない多重群ラックの構成

新井克典¹

1 空間曲面

空間曲面とは $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ に埋め込まれたコンパクト曲面のことである. 本稿では, 特に断らない限り空間曲面は (i) 有向曲面であり, (ii) 各連結成分は境界を持ち, 2次元閉円板ではないものとする. 2つの空間曲面 F と F' が同値であるとは F と F' が S^3 内で全同位であることをいい, F と F' が同値であることを $F \cong F'$ と書く.

図 1 の対応により, 空間 3 価グラフの図式 D から空間曲面 $F(D)$ が得られる. すなわち, $\mathbb{R}^2$ 上で D の正則近傍 $N(D)$ をとり, D の各交差の近傍で図 1 の右端のように $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つのバンドに取り換える. さらに $\mathbb{R}^2$ の向きから誘導される向きを与えることで $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ 内に空間曲面 $F(D)$ が得られる. 任意の空間曲面 F に対し, ある空間 3 価グラフの図式 D

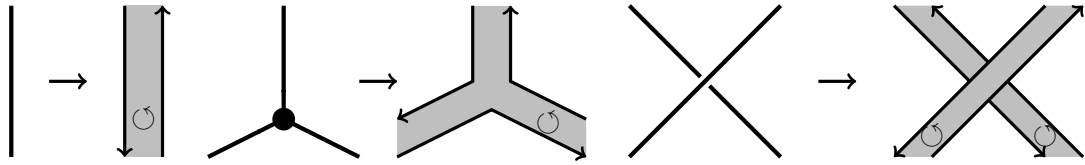


Figure 1: 空間 3 価グラフの図式から空間曲面を構成する方法

が存在して $F \cong F(D)$ を満たす (cf. [6, 8]). 空間曲面 F の図式とは $F \cong F(D)$ を満たす空間 3 価グラフの図式 D のことをいう.

空間 3 価グラフの図式の Y 向きとは, 各頂点において入次数と出次数が 0 でない向き, すなわち, 各頂点周りで沈点や湧点を持たない向きのことをいう (図 2). すべての空間 3



Figure 2: 頂点周りでの向き

価グラフの図式は, すくなくとも 1 つの Y 向きをもつ. Y 向きを 1 つ与えられた空間 3 価グラフの図式のことを Y 向き付けられた図式と呼ぶことにする.

空間曲面の図式に対して, 次の Reidemeister 型の定理が成り立つ.

Theorem 1.1 ([8]). F と F' を空間曲面とし, D と D' をそれぞれ F と F' の Y 向き付けられた図式とする. このとき, $F \cong F'$ であることと D と D' が有向 R2-, R3-変形, Y 向き付けられた R5-, R6-変形 (図 3) と $S^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

¹u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

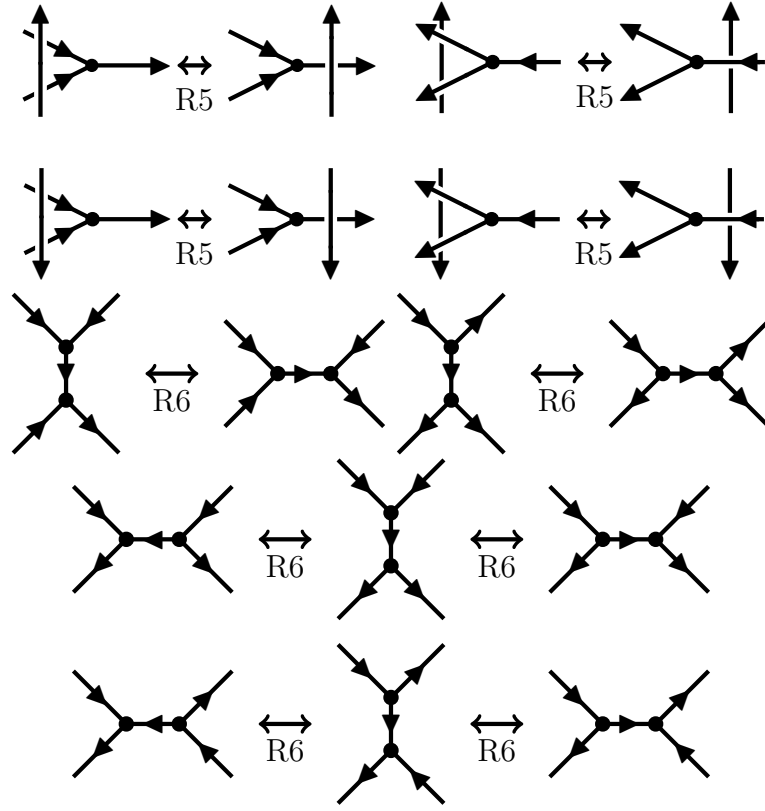


Figure 3: Y 向き付けられた R5-, R6-変形

2 多重群ラック

Definition 2.1 ([3, 7, 10]). R を空でない集合, $\triangleleft: R \times R \rightarrow R$ を R 上の二項演算とする. 組 $(R, \triangleleft)$ がラックであるとは, 次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう.

- (i) 任意の $y \in R$ に対して, $S_y: R \rightarrow R, x \mapsto x \triangleleft y$, は全単射である.
- (ii) 任意の $x, y, z \in R$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ を満たす.

本稿では式を簡略化するため, ラック $(R, \triangleleft)$ の任意の元 x, y に対して, $x \triangleleft y$ を x^y と書くこともある.

Example 2.2. G を群とする. G 上の二項演算 $\triangleleft: G \times G \rightarrow G$ を $x \triangleleft y = y^{-1}xy$ ($x, y \in G$) で定義する. このとき, $\text{Conj}(G) := (G, \triangleleft)$ はラックである. ラック $\text{Conj}(G)$ を共役ラックと呼ぶ.

Example 2.3. G を群とし, N を G の正規部分群とする. 共役ラック $\text{Conj}(G) := (G, \triangleleft)$ を考え, $\triangleleft$ から誘導される N 上の二項演算も同様に $\triangleleft$ と書くことにする. このとき, $\text{Conj}(N) := (N, \triangleleft)$ も共役ラックである. ここで $G \times N$ 上の二項演算 $*: (G \times N) \times (G \times N) \rightarrow G \times N$ を $(x, y) * (z, w) = (x^{zw}, y^{zw})$ ($(x, y), (z, w) \in G \times N$) で定めると, $\text{Conj}(G) \times \text{Conj}(N) := (G \times N, *)$ はラックとなる.

Definition 2.4 ([6]). $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を群の族とし, 各群 G_λ の単位元を e_λ とおく. 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と X 上の二項演算の組 $*: X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が多重群ラックであるとは次の条件 (i)–(iii) を満たすことをいう.

- (i) 任意の $\lambda \in \Lambda$, 任意の $x \in X$, 任意の $g, h \in G_\lambda$ に対して, $x * (gh) = (x * g) * h$ かつ $x * e_\lambda = x$ を満たす.
- (ii) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
- (iii) 任意の $\lambda \in \Lambda$, 任意の $x \in X$, 任意の $g, h \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $g * x, h * x \in G_\mu$ かつ $(gh) * x = (g * x)(h * x)$ を満たす.

Example 2.5. $(R, \triangleleft)$ をラックとする. このとき,

$$n := \min \{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \text{任意の } x, y \in R \text{ に対して, } S_y^k(x) = x\}$$

とおく. ただし, 最小値が存在しない場合は $n = \infty$ と定める. $R \times \mathbb{Z}_n = \bigsqcup_{x \in R} (\{x\} \times \mathbb{Z}_n)$ は次の演算で多重群ラックとなる.

$$(x, i) * (y, j) = (S_y^j(x), i), \quad (x, i)(x, j) = (x, i + j).$$

$(X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, *)$ を多重群ラックとし, D を空間曲面の Y 向き付けられた図式とする. D の弧全体の集合を $\text{Arc}(D)$ とおく. D の X 彩色とは, 写像 $\text{Arc}(D) \rightarrow X$ で各交差と各頂点において図 4 の条件を満たすものをいう. D の X 彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ とおく.

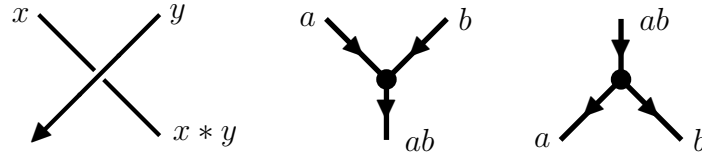


Figure 4: X 彩色条件 ($x, y \in X, a, b \in G_\lambda$)

Theorem 2.6 ([6]). X を多重群ラックとし, D, D' を空間曲面の Y 向き付けられた図式とする. このとき, $F(D) \cong F(D')$ ならば $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, $|\text{Col}_X(D)|$ は D の Y 向きの選び方に依らず, $F(D)$ の不変量である.

Problem 2.7 (cf. [12]). 次の性質 $(*)$ を満たす多重群ラック $(X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, *)$ は存在するか.

- $(*)$ ある空間曲面の Y 向き付けられたある図式 $D = D_1 \sharp D_2$ に対して, ある X 彩色 C が存在して, $C(\alpha) \notin \{e_\lambda \in G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を満たすものが存在する. ここで, α は図 5 で表される弧である.

[12] では, 非自明な結び目 K の結び目カンドル $Q(K)$ (または結び目 n カンドル $Q_n(K)$) に対して, Example 2.5 の方法で得られる多重群ラックの $\mathbb{Z}$ (または $\mathbb{Z}_n$) によるアーベル拡大が性質 $(*)$ を満たす多重群ラックであることを示した (詳しくは [1, 2, 7, 9, 10, 11] を参照せよ).

本稿では, 有限非可換群の非交和上の多重群ラックの構成法を与える.

Definition 2.8 ([5]). G を群とし, e を G の単位元とする. 集合 X と X 上の二項演算の族 $\{*^g : X \times X \rightarrow X\}_{g \in G}$ の組 $(X, \{*^g\}_{g \in G})$ がラックの G 族であるとは次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう.

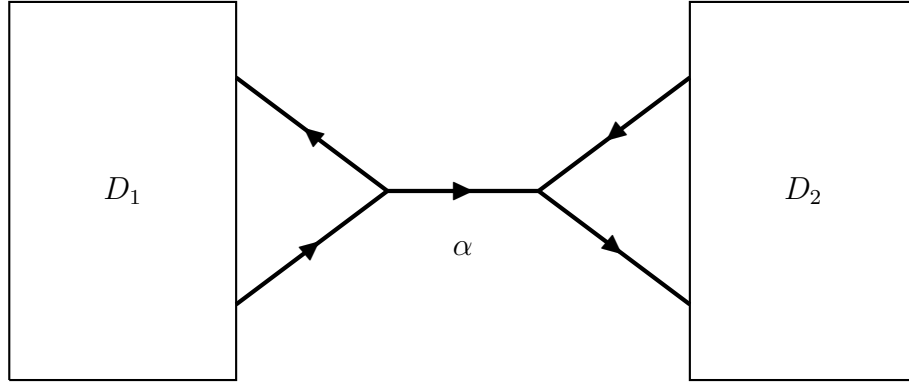


Figure 5: $D = D_1 \# D_2$

- (i) 任意の $x, y \in X$, 任意の $g, h \in G$ に対して, $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$ かつ $x *^e y = x$ を満たす.
- (ii) 任意の $x, y, z \in X$, 任意の $g, h \in G$ に対して, $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$ を満たす.

Example 2.9. $X = \mathbb{Z}_3$, $G = S_3 \cong \langle a, x \mid a^3 = x^2 = e, xax = a^2 \rangle$ とする. $g \in G$ に対して, $*^g : X \times X \rightarrow X$ を次で定義する.

$$i *^g j = \begin{cases} 2j - i & (g = x, ax, a^2x) \\ i & (\text{上記以外}) \end{cases}.$$

このとき, $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ はラックの G 族である.

ラックの G 族から多重群ラックを構成する方法が知られている.

Proposition 2.10 ([4, 6]). $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ をラックの G 族とする. このとき, $X \times G = \bigsqcup_{x \in X} (\{x\} \times G)$ は次の演算で多重群ラックとなる.

$$(x, g) * (y, h) = (x *^h y, h^{-1}gh), \quad (x, g)(x, h) = (x, gh).$$

多重群ラック $X \times G$ をラックの G 族 $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ に付随する多重群ラックという.

Proposition 2.11. D を図 5 の Y 向き付けられた図式とする. 任意のラックの G 族 $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ に対して, $X \times G$ をラックの G 族 $(X, \{ *^g \}_{g \in G})$ に付随する多重群ラックを考える. D の任意の $X \times G$ 彩色 C に対して, ある $x \in X$ が存在して, $C(\alpha) = (x, e)$ を満たす.

Proof. 写像 $\phi : \text{Arc}(D) \rightarrow \pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))})$, $\longrightarrow \longrightarrow \rightarrow \longrightarrow \rightarrow$, を考える.

このとき, ある群準同型 $f : \pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))}) \rightarrow G$ が唯一つ存在して, $\text{pr}_2 \circ C = f \circ \phi$ を満たす. ここで, $\text{pr}_2 : X \times G \rightarrow G$ は $\text{pr}_2(x, g) = g$ で定義される写像である. いま, $\phi(\alpha)$ は $\pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))})$ の単位元であるので, $\text{pr}_2 \circ C(\alpha) = f \circ \phi(\alpha) = e$ が成り立つ. 従って, ある $x \in X$ が存在して, $C(\alpha) = (x, e)$ を満たす. $\square$

Remark 2.12. Proposition 2.11 より, すべてのラックの G 族に対して, それに付随する多重群ラックは Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たさない.

3 主結果

有限非可換群の非交和上の多重群ラックの構成法を与える.

Theorem 3.1 (主結果 1). $(X, \{*\}_g)_{g \in G}$ をラックの G 族とし, N を G の正規部分群とする. このとき, $X \times (G \ltimes N) = \bigsqcup_{x \in X} (\{x\} \times (G \ltimes N))$ は次の演算で多重群ラックとなる.

$$(x, (g_1, n_1)) * (y, (g_2, n_2)) = (x *^{g_2 n_2} y, (g_1^{g_2 n_2}, n_1^{g_2 n_2})), (x, (g_1, n_1))(x, (g_2, n_2)) = (x, (g_1 g_2, n_1^{g_1} n_2)).$$

ここで, $g^h := h^{-1}gh$ ($g, h \in G$) である.

Proof. 直接計算で示すことができる. □

Theorem 3.2 (主結果 2). Theorem 3.1 において, $N \curvearrowright G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ は Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たす.

Proof. $N \curvearrowright G$ が非自明なとき, このとき, ある $A \in G$ とある $B \in N$ が存在して, $[A, B] := ABA^{-1}B^{-1} \neq e$ を満たす. いま, 図 6 の Y 向き付けられた図式と $X \times (G \ltimes N)$ 彩色 C を考える. このとき, $C(\alpha) = ([A, B]^{-1}, [A, B]) \neq (e, e) \in G \ltimes N$ である. よって Problem 2.7

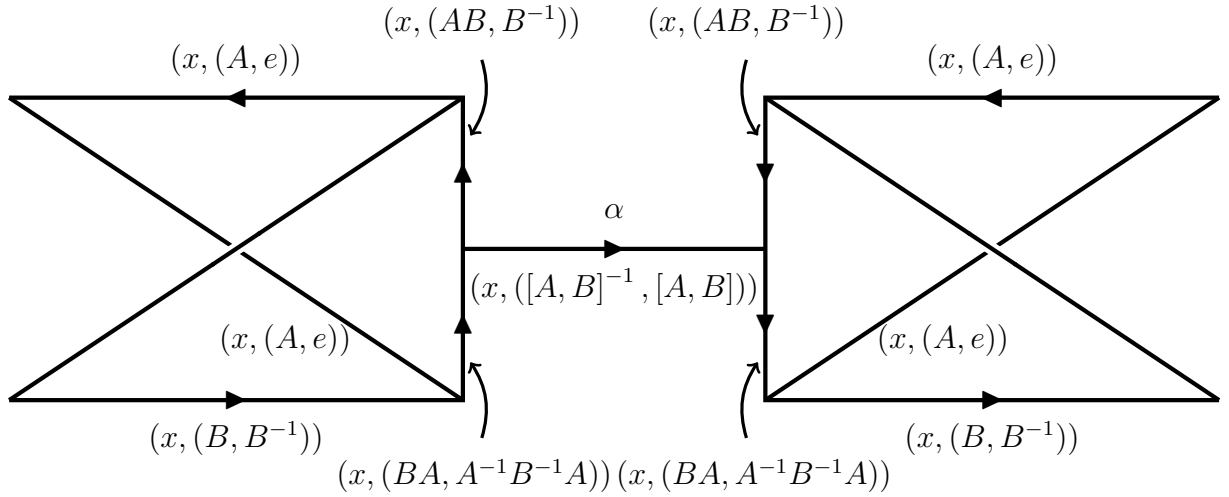


Figure 6: D と $X \times (G \ltimes N)$ 彩色 C

の性質 $(\star)$ を満たす. □

Corollary 3.3. Theorem 3.1 において, $N \curvearrowright G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ はどんなラックの G 族にも付随しない多重群ラックである.

Proof. Proposition 2.11 より, ラックの G 族に付随する多重群ラックは性質 $(\star)$ を満たさないことから従う. □

Example 3.4. $(X, \{*\}_g)_{g \in G}$ を Example 2.9 のラックの G 族とする. いま, $N \langle a \mid a^3 = e \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ を G は正規部分群である. さらに, $a^x = a^2 \neq a$ より, $N \curvearrowright G$ は非自明である. 従って, Theorem 3.1, 3.2 より, $X \times (G \ltimes N)$ は Problem 2.7 の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラックである.

最後に, ラックの G 族に付随しない多重群ラックによる彩色の具体例を与える.

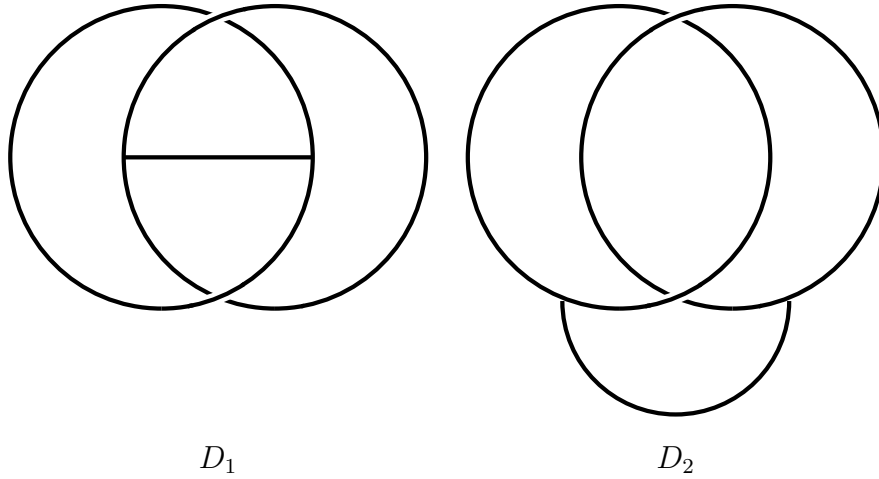


Figure 7: D_1 と D_2

Example 3.5. $(X, \{*\}^g_{g \in G})$ を Example 2.9 のラックの G 族とする. いま, $N = G$ として, Theorem 3.1 の方法で得られる多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ を考える. 図 7 の D_1, D_2 に Y 向きを 1 つ与え, $X \times (G \ltimes N)$ による彩色を考える. このとき, $|\text{Col}_{X \times (G \ltimes N)}(D_1)| = 1458$, $|\text{Col}_{X \times (G \ltimes N)}(D_2)| = 1242$ である. 従って, $F(D_1) \not\cong F(D_2)$ が成り立つ.

Remark 3.6. Example 3.5 において, ラックの G 族に付随する多重群ラック Y を考えると, $|\text{Col}_Y(D_1)| = |\text{Col}_Y(D_2)|$ である. また, ハンドル体結び目として, $N(F(D_1)) \cong N(F(D_2))$ である. さらに, $\partial(F(D_1)) \cong \partial(F(D_2)) \cong \text{L6n1}$ である.

Acknowledgement

本研究集会での講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

References

- [1] S. Carter, A. Ishii, M. Saito, and K. Tanaka, *Homology for quandles with partial group operations*, Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 19–48. MR3613433
- [2] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157. MR1954330
- [3] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995
- [4] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196** (2015), no. part B, 492–500. MR3430992
- [5] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, and K. Oshiro, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, Illinois J. Math. **57** (2013), no. 3, 817–838. MR3275740
- [6] A. Ishii, S. Matsuzaki, and T. Murao, *A multiple group rack and oriented spatial surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 7, 2050046, 20. MR4142996
- [7] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121
- [8] S. Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32.

- [9] S. Matsuzaki and T. Murao, *(co)homology of racks and multiple group racks for compact oriented surfaces in the 3-sphere*, 2023.
- [10] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410
- [11] K. Tanaka and Y. Taniguchi, *The second quandle homology group of the knot n -quandle*, 2023.
- [12] Y. Taniguchi, *Multiple conjugation quandles and G -families of quandles*, Quandles and Symmetric Spaces 2023, 2024, pp. 26–40.