カンドルのオイラー標数 *

甲斐涼哉 (大阪公立大学) †, 田丸博士 (大阪公立大学) ‡

概要

結び目理論で不変量として導入されたカンドルは，対称空間の一般化とみなすことができる．近年では対称空間論の手法をカンドルに応用する研究が行われている．対称空間のオイラー標数は自然な群作用で計算でき，それを一般化してカンドルにオイラー標数を定義する．また，カンドルのオイラー標数が持つ位相空間のオイラー標数と似た性質をいくつか紹介する．この講演の内容は田丸博士氏との共同研究に基づく．

1 イントロダクション

オイラー標数は古典的な位相不変量のひとつである．その定義はホモロジー群を通して Betti 数の交代和として与えられる．一方で，Hopf と Samelson [1] は，コンパクト Lie 群の等質空間のオイラー標数は，極大トーラスの作用の固定点の数と一致することを示した．特に，各点に点対称が定義された空間である対称空間の場合には，その点対称から自然に導かれる群作用を用いて，オイラー標数が計算できる．

カンドルは結び目理論で導入された代数系で，結び目の射影図の Reidemeister 移動に対応した公理を持つ．一方で，対称空間の点対称はカンドルの公理を満たし，したがって対称空間はカンドルとなる．言い換えると，カンドルは対称空間の位相を忘れて，つまり，対称空間を離散化して点対称の性質のみに着目した代数系とも言える．

本研究では，対称空間論の視点からカンドルにオイラー標数を定義する．つまり，カンドル構造から自然に群作用が定まるが，その作用を用いてカンドルオイラー標数の定義を与える．特に，連結コンパクト Riemann 対称空間の場合には，今回定義するカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と一致する．また，いくつかのカンドルに対するオイラー標数の計算結果も与え，さらに，位相空間のオイラー標数と似たいくつかの性質を見る．

本稿は [4] に基づく．

---

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものである．

† E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

‡ E-mail:tamaru@omu.ac.jp

2　準備

まず，カンドル [3] の定義を与える．カンドル構造を二項演算で与えることも多いが，ここでは対称空間の考え方に基づいて，各点に写像を与えることで定義する．集合 X 上の写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X,X)$ と書く．

定義 2.1 ([3])**.** 空でない集合 X と写像 $s: X \to \mathrm{Map}(X,X)$ ($s_x := s(x)$ と書く) の組 (X,s) が次の 3 条件を満たすとき**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x(x) = x$,
2. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x : X \to X$ は全単射,
3. 任意の $x, y \in X$ に対して，$s_y \circ s_x = s_{s_y(x)} \circ s_y$.

この定義は，集合 X 上の二項演算 $\triangleleft$ を，$x \triangleleft y := s_y(x)$ で定義すると，二項演算による (右分配則を仮定した) カンドルの定義と一致する．対称空間 X の点 x における点対称を s_x とすると，写像 $s: X \to \mathrm{Map}(X,X)$ によって X 上のカンドル構造が定まる [5]．以下，対称空間とは限らないカンドルに対しても，写像 $s_x : X \to X$ を x における**点対称**と呼ぶ．カンドル $(X, s^X), (Y, s^Y)$ に対して，写像 $f: X \to Y$ が任意の $x \in X$ に対して，$f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ を満たすとき，f を**カンドル準同型**という．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型があるとき，二つのカンドルは**同型**であるという．

カンドル X に対して，X 上のカンドル同型全体の集合 $\mathrm{Aut}(X)$ は，写像の合成によって群となり，X の**自己同型群**という．自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**等質**であるという．特に，カンドルの公理から，点対称はカンドル同型である．カンドル X の点対称たち $\{s_x\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Inn}(X)$ を**内部自己同型群**という．内部自己同型 $\mathrm{Inn}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**代数的連結**であるという．代数的連結なカンドルは等質である．次の群作用を用いてカンドルにオイラー標数を定義する．

定義 2.2. カンドル X に対して，$\{s_x \circ s_y \mid x, y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Dis}(X)$ を ***displacement* 群**という．

displacement 群は transvection group などとも呼ばれ，様々な良い性質を持つことが知られている．詳細は [2] などを参照せよ．displacement 群の作用を用いて，カンドルのオイラー標数を次で定義する．

定義 2.3. カンドル X の**カンドルオイラー標数** $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X)$ を次で定義する：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g,X) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

ここで，$\#A$ は集合 A の濃度，$\mathrm{Fix}(g,X)$ は g の作用の X における固定点集合を表す．

3　対称空間のカンドルオイラー標数

まず典型的な具体例として n 次元球面を考える．

例 3.1. 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ は次で定義される点対称 s によって対称空間となる:

$$s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x.$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．このとき，内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(S^n)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は以下の通りである：

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \quad \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

ここで，$\mathrm{Dis}(S^n)$ の元 g は，次元に応じて以下の形の元に $\mathrm{Dis}(X)$ 内で共役である：

$$g \sim_{\text{共役}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 偶数}, \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 奇数}, \end{cases} \quad (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)).$$

一般的な θ_i をとると，S^n 上の固定点の数は，n が偶数のときは 2 個，n が奇数のときは固定点が 0 個となることがわかる．固定点の数は共役で不変なので，g の固定点の数も同じである．よって，球面のカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と等しい．

この例を一般化することで，コンパクト Riemann 対称空間のカンドルオイラー標数は，位相空間としてのオイラー標数に一致することがわかる．その鍵となるのは次の Hopf と Samelson の結果 [1] である．位相空間 X のオイラー標数を $\chi^{\mathrm{Top}}(X)$ と書く．

命題 3.2 ([1], [6])**.** M をコンパクト Lie 群 G の等質空間とする．また，T を G の極大トーラスとして，その生成元 t_0 を取る．このとき，次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T, M) = \#\mathrm{Fix}(t_0, M).$$

χ^{Qdle} をオイラー標数と呼ぶ理由は次の定理が成り立つからである．

定理 3.3. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X に対して，

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X).$$

4　カンドルオイラー標数の例

この節では，具体的なカンドルに対する計算例を紹介する．

例 4.1. X を空でない集合する．X 上の点対称を $s_x := \mathrm{id}$ で定義する．このとき，(X, s) を**自明カンドル**といい，カンドルオイラー標数は X の濃度 $\#X$ と一致する．実際，自明カンドルの displacement 群は自明群であることから従う．

例 4.2. 自然数 $n > 2$ に対して，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の点対称を $s_x(y) := 2x - y$ と定義し，$R_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, s)$ を**二面体カンドル**という．R_n の各点を正 n 角形の頂点とみなすと，円周 S^1 の離散部分カンドルとみなせる．R_n のカンドルオイラー標数は，円周の位相空間としてのオイラー標数と同じく 0 となる．実際，$s_0 \circ s_1$ は固定点を持たない．

例 4.3. 群 G と群の自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，G 上の点対称を $s_x(y) := \sigma(yx^{-1})x$ で定義し，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) = (G, \sigma)$ を**一般化 *Alexander* カンドル**という．$\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ が非自明，つまり σ が恒等写像でないとき，カンドルオイラー標数は 0 となる．実際，任意の $g, x \in G$ に対して，

$$s_g \circ s_e(x) = g\sigma(g)^{-1}x$$

が成り立つことから従う．ただし，e は G の単位元を表す．

注意 4.4. 一般化 Alexander カンドルは等質カンドルである．また，任意の等質カンドルは，ある一般化 Alexander カンドルからの全射カンドル準同型を持つ．カンドルのオイラー標数は，非自明なカンドルが一般化 Alexander カンドルであるかの判定条件を与えている．

例 4.5. 群 G 上の点対称を $s_x(y) := xy^{-1}x$ で定義し，$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$ を G 上の**コアカンドル**という．一般に，コアカンドルとしての点対称によって，Lie 群は対称空間とみなされる．$\mathrm{Core}(G)$ が非自明カンドルのとき，つまり，G が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいくつかの直積と同型でないとき，カンドルオイラー標数は非自明な連結コンパクト Lie 群のオイラー標数と同じく 0 になる．実際，G がアーベル群の場合は，一般化 Alexander カンドルの場合の特別な場合である．G が非可換群の場合は，任意の $g, h, x \in G$ に対して，

$$s_{g^{-1}h^{-1}} \circ s_1^{-1} \circ s_h \circ s_{g^{-1}}^{-1}(x) = x[g, h]$$

が成り立つことから従う．

ここまでは，$\chi^{\mathrm{Qdle}} = 0$ となる例を挙げたが，$\chi^{\mathrm{Qdle}} \neq 0$ となる例も存在する．

例 4.6. n 次元球面 S^n の離散部分カンドル $DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ を**離散** n-**球面**とよぶ．ここで，$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．離散 n-球面のカンドルオイラー標数は

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

5　カンドルオイラー標数の性質

この節では，カンドルオイラー標数の一般的性質として，位相空間のオイラー標数に似た性質を紹介する．

$X_1 = (X_1, s^1), X_2 = (X_2, s^2)$ をカンドルとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上に

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$ を X_1 と X_2 の**直積カンドル**という．キネットの公式から，CW 複体の直積のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の積となることが知られている．カンドルのオイラー標数についても同様に次が成り立つ．

定理 5.1. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

また，直和集合 $X_1 \sqcup X_2$ 上に

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s^i_x(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 = (X_1 \sqcup X_2, s)$ を X_1 と X_2 の *interaction-free union* という．位相空間の直和のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の和になることが知られている．interaction-free union のカンドルオイラー標数は，オイラー標数の和によって上から評価できる．

定理 5.2. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

定理 5.2 の不等式で，等号が成り立たない例を $\mathrm{Inn}(X)$ がアーベル群であるような等質カンドルで構成することができる．

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」での講演機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生，安原晃先生，山口祥司先生，丹下稜斗先生に
感謝申し上げます．また，講演後に有益なコメントをくださいました方々に感謝いたします．

参考文献

[1] Hopf, H., Samelson, H.: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. Commentarii Mathematici Helvetici **13**, 240–251 (1941).

[2] Hulpke, A., Stanovský, D., Vojtěchovský, P.: Connected quandles and transitive groups. Journal of Pure and Applied Algebra **220**(2), 735–758 (2016).

[3] Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle. Journal of Pure and Applied Algebra **23**(1), 37–65 (1982).

[4] Kai, R., Tamaru, H.: On the Euler characteristics for quandles (2024). arXiv.2411.08319

[5] Loos, O.: Symmetric Spaces. I: General Theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969)

[6] Püttmann, T.: Homogeneity rank and atoms of actions. Annals of Global Analysis and Geometry **22**(4), 375–399 (2002).