ツイストスパン結び目のツイストスパン結び目について

福田瑞季 (東北大学・MathAM-OIL) *

概要

n 次元結び目から $n+1$ 次元結び目を構成する方法として Zeeman によるツイストスピニングが知られており，ツイストスピニングを繰り返し行うことで 1 次元の結び目から任意の次元の結び目を作ることができる．本稿では 1 次元の結び目に対し 2 回のツイストスピニングで得られるツイストスパン結び目のツイストスパン結び目，つまり 3 次元結び目，について自明であるための十分条件と非自明であるための十分条件をそれぞれ与えることができたので紹介する．証明ではタングルの回転数に着目しながら，Pao の branched twist spin に対する Gluck twist の結果から自明性を，orbifold の基本群の性質から非自明性を，それぞれ考察する．本研究は慶應義塾大学の石川昌治 氏との共同研究である．

1　導入

n 次元結び目とは $n+2$ 次元球面に滑らかに埋め込まれた n 次元球面をいう．多様体の幾何構造の分類において，結び目の分類は盛んに研究されてきた．例えば，1 次元結び目が素なファイバーであるとき，そのモノドロミーは (1) 周期的， (2) 擬 (pseudo) アノソフ， (3) 可約の 3 つに分類され，それぞれ (1) ザイフェルト多様体，(2) 双曲多様体, (3) それらを境界のトーラスで貼り合わせた多様体と対応している．一方で，高次元の結び目補空間上のファイブレーションにおけるモノドロミーの分類というのはほとんど進められていない．

具体的な高次元の結び目のクラスとして，スパン結び目やツイストスパン結び目が挙げられる（詳しい定義は 1.1 節を参照されたい）．これらの結び目は次元が 1 低い結び目からスピニングやツイストスピニングと呼ばれる手法を用いて構成され，低い次元の結び目

* mizuki.fukuda.d2@tohoku.ac.jp

の性質を使って高い次元の結び目の性質を調べることができる．特に 1 次元結び目は性質がよくわかっているクラスが多く，そこから得られるスパン結び目やツイストスパン結び目の性質はよく知られている．

更に大きな 2 次元結び目のクラスとして，S^4 上の S^1 作用で不変な branched twist spin という 2 次元結び目が Pao によって構成された [7]．Branched twist spin は，スパン結び目を除いて，S^1 作用から自然にその補空間にファイブレーションを構成できるためファイバー結び目であり，そのモノドロミーは周期的である．逆に周期的なモノドロミーを持つ 2 次元ファイバー結び目は branched twist spin であることが知られている [8]．

本稿ではツイストスパン結び目のファイバーと次元が 1 低い結び目に沿った分岐被覆の関係に着目し，1 次元結び目に対しツイストスピニングを 2 回行って得られる 3 次元結び目について考察を行う．

1.1　ツイストスパン結び目

この節では Zeeman によるツイストスピニングとそれによって得られるツイストスパン結び目の性質について述べる．

$K \subset S^{n+2}$ を n 次元結び目とし，K 上の点 p を一つ固定する．点 p の S^{n+2} 内で非常に小さい閉近傍 D_p^{n+2} を取る．このとき，D_p^{n+2} には適切に埋め込まれた K の一部が存在するのでそれを K_- と書くことにすると，D_p^{n+2} は $K_- \times B^2$ と微分同相である．また，$(S^{n+2}, K) \setminus \mathrm{Int}(D_p^{n+2}, K_-)$ を (D^{n+2}, K_+) と書く．この分解を用いて，2 つの $n+3$ 次元多様体 X と Y を

$$
\begin{aligned}
X =& \partial(D_p^{n+2}, K_-) \times D^2,\\
Y =& (D^{n+2}, K_+) \times \partial D^2,
\end{aligned}
$$

で定義する．正の整数 m に対し，X と Y を写像

$$
f_m((x, \phi), \theta) = ((x, \phi + m\theta), \theta) \quad ((x, \phi) \in \partial D^3, \theta \in \partial D^2)
$$

で貼り合わせる手法を m ツイストスピニングという．ここで ϕ は赤道の偏角であり，x は K_- の点， θ は ∂D^2 の曲座標である．

ツイストスピニングによって得られる多様体 $X \cup_{f_m} Y$ について次が知られている．

定理 1.1 (Zeeman [10])**.** 任意の整数 m に対して，$X \cup_{f_m} Y$ は S^{n+3} と微分同相である．さらに，$(K_- \times D^2) \cup_{f_m} (K_+ \times \partial D^2)$ は S^{n+1} と微分同相である．

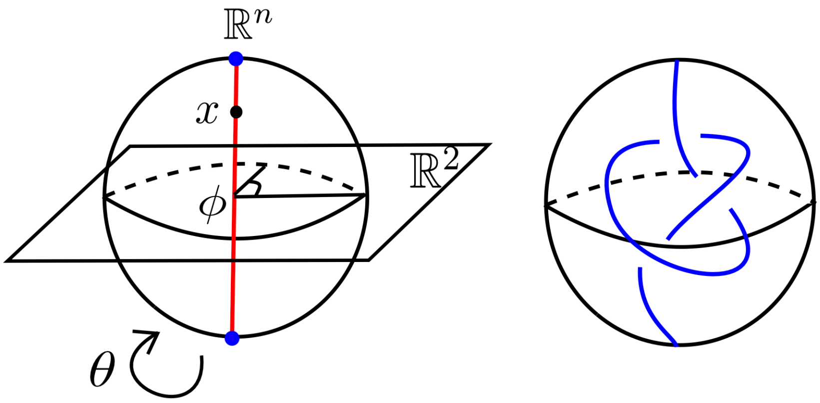

図 1　(D_p^{n+2}, K_-)（左）と (D^{n+2}, K_+)（右）

定義 1.2. 定理 1.4 によって得られる $(K_- \times D^2) \cup_{f_m} (K_+ \times \partial D^2)$ を K の m ツイストスパン結び目といい，$\tau_m(K)$ と書く．

注意 1.3. (1) $m = 0$ の場合は Artin によるスパン結び目と一致する．
(2) m が負の場合も同様に m ツイストスパン結び目を構成できるが，簡単のため非負整数のみを扱う．

次節で紹介する定理 1.7 によりツイストスパン結び目の自明性について次が従う．

定理 1.4 (Zeeman [10]). $\tau_m(K)$ を K の m ツイストスパン結び目とする．$\tau_m(K)$ が自明な 2 次元結び目であるための十分条件は次のどちらかを満たすことである．

(1) K が自明な 1 次元結び目である．
(2) $m = 1$.

1.2 Branched twist spin

この節では 2 次元結び目に限定し，ツイストスパン結び目の一般化の 1 つとして知られる branched twist spin に関して定義と説明を述べる．

K を 1 次元結び目とし，正の整数 m と k に対し，m ツイストスパン結び目 $\tau_m(K)$ に沿った k 重分岐被覆

$$(M^4, \tau_{m,k}(K)) \to (S^4, \tau_m(K))$$

を考える．

定理 1.5 (Fintushel [6], Pao [7])**.** m と k が互いに素ならば M は S^4 と微分同相である．

定理 1.5 により，分岐被覆写像による分岐点の集合の逆像 $\tau_{m,k}(K))$ は 2 次元結び目と捉えることができる．

定義 1.6. 上記 $\tau_{m,k}(K)$ を K の (m,k)-branched twist spin という．

$k=1$ のとき，1 重分岐被覆は恒等写像なので，$\tau_{m,k}(K)$ は m ツイストスパン結び目である．

ツイストスパン結び目および branched twist spin に対し次の 2 つの定理が成り立つ．

定理 1.7 (Zeeman [10], Pao [7])**.** m を 1 以上とする．このとき，$\tau_{m,k}(K)$ はファイバー結び目であり，そのファイバーは K に沿った S^3 の m 重分岐被覆から 3 次元開球体を 1 つ取り除いたものである．特にそのモノドロミーは周期的で，分岐被覆のシートを k 枚ずらすものである．

定理 1.8 (F. [3])**.** $G(\tau_{m,k}(K)))$ を $\tau_{m,k}(K))$ の結び目群とし，K の結び目群の Wirtinger 表示を $\langle x_1,\dots,x_l \mid r_1,\dots,r_l\rangle$ とする．このとき，

$$G(\tau_{m,k}(K))) \cong \langle x_1,\dots,x_l,h \mid r_1,\dots,r_l, x_1hx_1^{-1}h^{-1},\dots x_lhx_l^{-1}h^{-1}, x_1^m h^{\beta}\rangle. \quad (1.1)$$

ただし，β は $k\beta \equiv 1 \pmod m$ を満たす整数である．

1.3 オービフォールド群

本節ではオービフォールドとその基本群について簡単に説明する．詳細は [2, 9] を参照されたい．

連結で可分な距離空間で，局所的に $\mathbb{R}^n$ を有限群の作用で割った商空間と同相になるとき，その距離空間を n オービフォールドといい，特に 3 オービフォールドが円周の非交和のみを分岐軌跡にもつとき cyclic type という．連結な分岐軌跡の位数は一定である．

基底空間 が S^3 で 1 次元結び目 L を位数 m の分岐軌跡としてもつ cyclic type の 3 オービフォールドを $\mathcal{O}(L,m)$ と書く．この $\mathcal{O}(L,m)$ の基本群 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m))$ を，$\mathcal{O}(L,m)$ の普遍被覆の Deck 変換群として定義する．すなわち，

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m)) \cong \langle x_1,\dots,x_l \mid r_1,\dots,r_l, x_1^m\rangle \quad (1.2)$$

である．ここで $\langle x_1,\dots,x_l \mid r_1,\dots,r_l\rangle$ は $G(K)$ の Wirtinger 表示である．

2　主結果

本章では 1 次元結び目に対して 2 回ツイストスピニングを行って得られる 3 次元結び目について得られた結果を紹介する．

定理 2.1 (F.-石川)**.** K を 1 次元結び目とし，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ を K の m_1 ツイストスパン結び目の m_2 ツイストスパン結び目とする．また，$m=\gcd(m_1,m_2)$ とする．$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ が自明であるための十分条件は次のどちらかを満たすことである．

(1) K が自明な 1 次元結び目.
(2) $m=1$.

証明の概要． 定理 1.4 の (1) より，K が自明な n 次元結び目の場合，任意の整数 m に対して m ツイストスパン結び目は自明な $n+1$ 次元結び目である．この考察を 2 回使うことにより，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は自明な 3 次元結び目であることがわかる．

次に K が非自明で $m=1$ の場合を考える．このとき, 定理 1.7 によって, $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ はファイバー結び目で，そのファイバー は $\tau_{m_1}(K)$ に沿った S^4 の m_2 重分岐被覆から 4 次元開球体を 1 つ取り除いたものである．ここで，Pao の結果から τ_{m_1} に沿った S^4 の m_2 重分岐被覆は S^4 になることに注意すると，ファイバーは 4 次元閉球体となる．したがって $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は自明な 3 次元結び目である． □

定理 2.2 (F.-石川)**.** K を 1 次元結び目とし，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ を K の m_1 ツイストスパン結び目の m_2 ツイストスパン結び目とする．また $m=\gcd(m_1,m_2)\neq 1$ とする．$Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ が自明ならば，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は非自明な 3 次元結び目である．ここで $Z(G)$ は群 G の中心を表す．

定理 2.2 の証明のために 2 つ補題を用いる．

補題 2.3 (cf. [5])**.** $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ の結び目群 $G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ は次の表示を持つ．

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))\cong\left\langle x_1,\dots,x_l,h_1,h_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} r_1,\dots,r_l,\\ x_ih_jx_i^{-1}h_j^{-1},\\ x_1^{m_j}h_j,\quad j=1,2 \end{array}\right\rangle.$$

補題 2.4 (cf. [5])**.** $m=\gcd(m_1,m_2)$ に対し，$Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ が自明と仮定する．こ

のとき，

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))/Z(G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))) \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)). \tag{2.1}$$

定理 2.2 の証明の概要． 自明な結び目の結び目群は $\mathbb{Z}$ と同型なので，$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ が $\mathbb{Z}$ と同型でないことを示す．仮定から $Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)))$ は自明であるので補題 2.4 より，

$$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))/Z(G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))) \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m)) \tag{2.2}$$

が成り立つ．また仮定から $m = \gcd(m_1, m_2)$ は 2 以上なので $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ は非自明な群である．したがって，$G(\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K)))$ はアーベル群ではない．特に $\mathbb{Z}$ と同型でないので，$\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K))$ は非自明な 3 次元結び目である． □

参考文献

[1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flachen im* R^4, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1926), 47–72.

[2] M. Boileau and J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.

[3] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, Osaka. J. Math. **54**, no.4, (2017), 679–688.

[4] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, Rev. Mat. Complut., (2024). https://doi.org/10.1007/s13163-024-00504-6

[5] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Twist spun knots of twist spun knots of classical knots*, arXiv:2409.00650, to appear in Dalat University Journal of Science.

[6] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[7] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[8] S.P. Plotnick, *Equivariant intersection forms, knots in* S^4*, and rotations in 2-spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 543–575.

[9] W. P. Thurston, The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Lecture Notes, Princeton (1977).

[10] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.