

曲面結び目の Crossed Module について

三木 亮介 (大阪大学大学院理学研究科 M2) *

概要

Crossed module は Whitehead により導入されたホモトピーと相性の良い道具であり、圏をなすことが知られている。J. F. Martins は crossed module 間の射の数を用いてコンパクト多様体の不変量を定義した。また彼は曲面結び目の外部に対する crossed module を考察し、バンド付きのモーション・ピクチャーを用いた不変量の計算法を確立した。本講演では、この計算法について説明し、いくつかの曲面結び目に計算を行った結果を紹介する。

1 Crossed Module

定義 1.1. (crossed module) **crossed module** は 2つの群 G と E 、群準同型 $\partial: E \rightarrow G$ 、そして群 G の E への左作用 \triangleright の 4つ組 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ で、次の条件を満たすものである。

$$(1) \partial(X \triangleright a) = X \partial(a) X^{-1} (\forall X \in G, \forall a \in E)$$

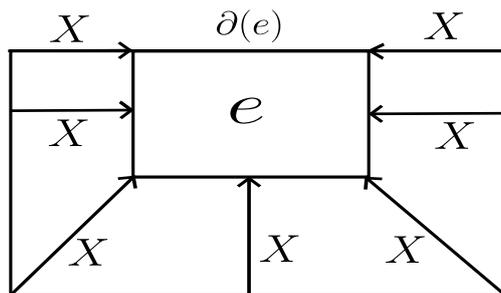
$$(2) \partial(a) \triangleright b = aba^{-1} (\forall a, b \in E)$$

また G を base group、 E を principal group という。

crossed module の基本的な例は fundamental crossed module である。

例 1.1. (M, N) を弧状連結な空間対とし基点 $*$ を N 内にとるとする。

$\partial: \pi_2(M, N, *) \rightarrow \pi_1(N, *)$ を境界写像、 $\pi_1(N, *)$ の $\pi_2(M, N, *)$ への作用 \triangleright を図 1 で与えられる作用とする。



$$X \in \pi_1(N, *), e \in \pi_2(M, N, *)$$

図 1: $\pi_1(N, *)$ の $\pi_2(M, N, *)$ への作用

このとき、 $(\pi_1(N, *), \pi_2(M, N, *), \partial, \triangleright)$ は crossed module になり、 $\Pi_2(M, N, *)$ と書く。これは $(M, N, *)$ 上の **fundamental crossed module** と呼ばれる。

*e-mail : u504176e@ecs.osaka-u.ac.jp

例 1.2. G を群、 E を G の正規部分群とし、 $\partial : E \rightarrow G$ を包含写像、 \triangleright を $X \triangleright a = XaX^{-1} (\forall X \in G, \forall a \in E)$ で定める。このとき、 $(G, E, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

例 1.3. G を群、 $\partial : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ を $g \mapsto \partial(g)$ (ここで $\partial(g)(x) = gxg^{-1} (\forall x \in G)$) で定める境界写像とし、 \triangleright を $\phi \triangleright g = \phi(g) (\forall \phi \in \text{Aut}(G), \forall g \in G)$ で定める。このとき、 $(\text{Aut}(G), G, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

また、crossed module は圏を成すことが知られている。この圏における射は次の様に与えられる。

定義 1.2. $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ と $\mathcal{G}' = (G', E', \partial', \triangleright')$ を crossed module とする。

crossed module の成す圏における射 $F = (\phi, \psi) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ は群準同型 $\phi : G \rightarrow G'$ と群準同型 $\psi : E \rightarrow E'$ の組で次の条件を満たすものとして与えられる。

(1) $\phi \circ \partial = \partial' \circ \psi$;

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\partial} & G \\ \psi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi \\ E' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array}$$

(2) $\phi(X) \triangleright' \psi(a) = \psi(X \triangleright a) \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

2 先行研究

この節では、本研究の契機となった J.F.Martins [1], [2] によってなされた結果を述べる。

2.1 crossed module invariant

[1] の主定理として Martins は次の有理数値の不変量を構成した。

定理 2.1. M をコンパクトな連結多様体とし M のハンドル分解を固定する。ここで、 M の固定したハンドル分解において 0-ハンドルは唯一つであると仮定し、この 0-ハンドル内に基点 $*$ を取る。 $M^{(1)}$ を M の全ての 0、1-ハンドルから成るハンドル体とする。 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする (ここで "finite" は群 G, E が有限群であることを意味する)。このとき、

$$I_{\mathcal{G}}(M) := \frac{\#\text{Hom}(\Pi_2(M, M^{(1)}, *), \mathcal{G})}{(\#E)^{b_1(M^{(1)})}}$$

は有限であり、 M のハンドル分解に依存せず、 M のホモトピー不変量である。

この不変量を M の **crossed module invariant** という。

2.2 crossed module invariant の曲面結び目外部への応用

Martin は [1] でこの crossed module invariant を曲面結び目・絡み目外部に適用し、向き付け可能なケースにおいて計算法を確立した。

Σ を $S^4 = D_{-}^4 \cup S^3 \times [-2, 2] \cup D_{+}^4$ (D_{-}^4, D_{+}^4 は 4次元球体) 内の曲面絡み目で $S^3 \times [-2, 2]$ 内にあると仮定する。また、 M を Σ の外部とする。

$h : S^3 \times [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ を高さ関数と考え、 Σ を動かし $h|_{\Sigma}$ がモース関数となるようにし、 Σ にハンドル分解を与えて固定する。 Σ のハンドル分解は M のハンドル分解を誘導する。このとき、 D_{-}^4 が4次元0-ハンドル、 D_{+}^4 が4次元4-ハンドルになる。4次元1、2、3-ハンドルに関しては下の様に対応し、同時に取り付けが行われることが知られている ([3]、[4])。

Σ の2次元0-ハンドル \longleftrightarrow M の4次元1-ハンドル

Σ の2次元1-ハンドル \longleftrightarrow M の4次元2-ハンドル

Σ の2次元2-ハンドル \longleftrightarrow M の4次元3-ハンドル

Σ の各ハンドルはモーション・ピクチャーにおいて図2の様に対応し、それぞれ「birth of circles」、「saddle points」、「death of circles」と呼ばれる。

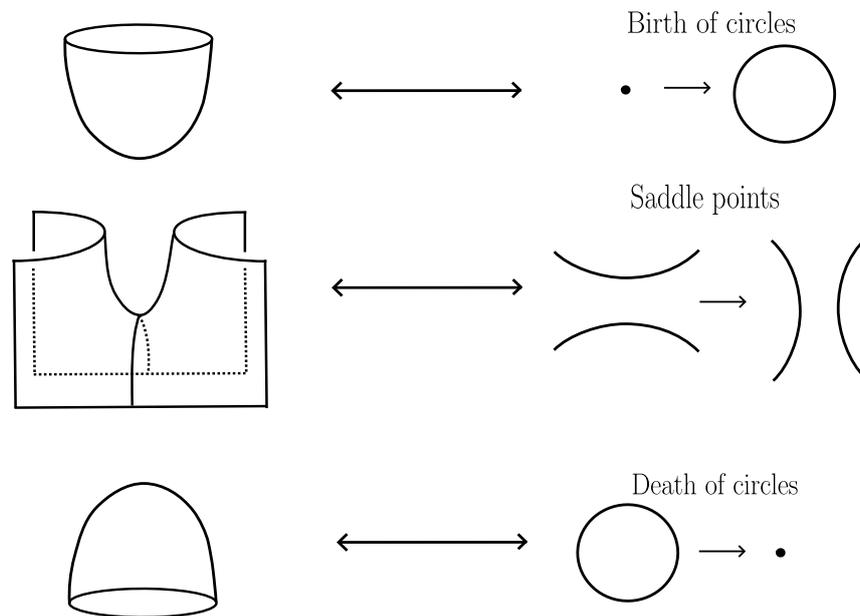


図2： Σ の各ハンドルとそのモーション・ピクチャー

また曲面絡み目に対しては次の定理がよく知られている。

定理 2.2. 任意の S^4 内の曲面絡み目を全同位で変形し、全ての極小点 (birth of circles) が $t = -1$ 、全ての鞍点 (saddle point) が $t = 0$ 、全ての極大点 (death of circles) が $t = 1$ にあるようにできる。

以降、曲面絡み目はこの定理の条件を満たすとする。 $M^{(1)}$ を M の全ての0、1-ハンドルから成るハンドル体とする。

saddle point はバンドで記録でき、便宜上バンドのコアに向きと名前を与えておく (図3上)。

バンドは $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元を表すことができる。ここで境界である $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元 $\partial(e)$ には右手系に向きをとる (図3左下)。

境界 $\partial(e)$ に関する条件は、saddle point 通過前のアークから読み取ることができる。例えば、図3右下の様なケースでは $\partial(e) = Y^{-1}X$ となる。ここで X, Y は対応する名のアークのメリディアンを右手系に回る $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元を表す。

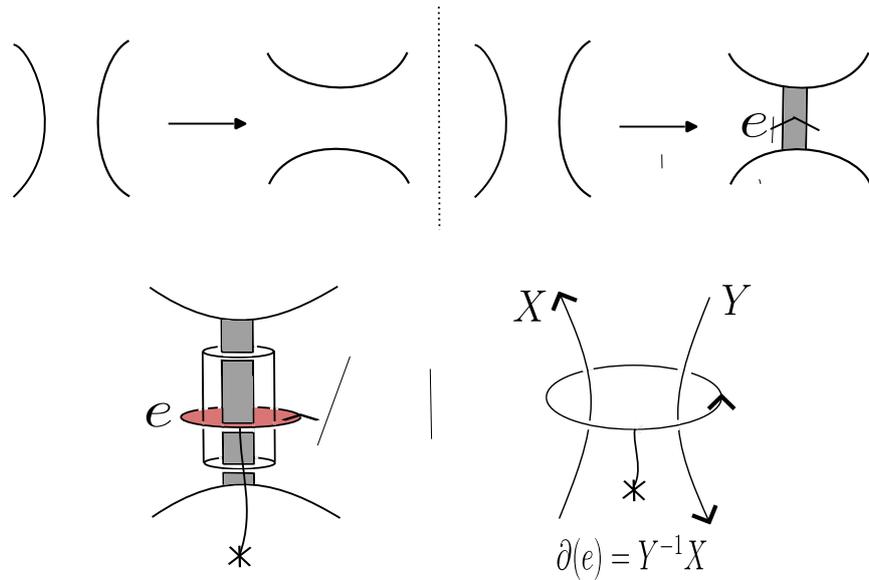


図3：saddle point とバンド

また次が成立する。

命題 2.1. バンドで代表される $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元、アークで代表される $\pi_1(M^{(1)}, *)$ の元の間には次の様な関係が入る。

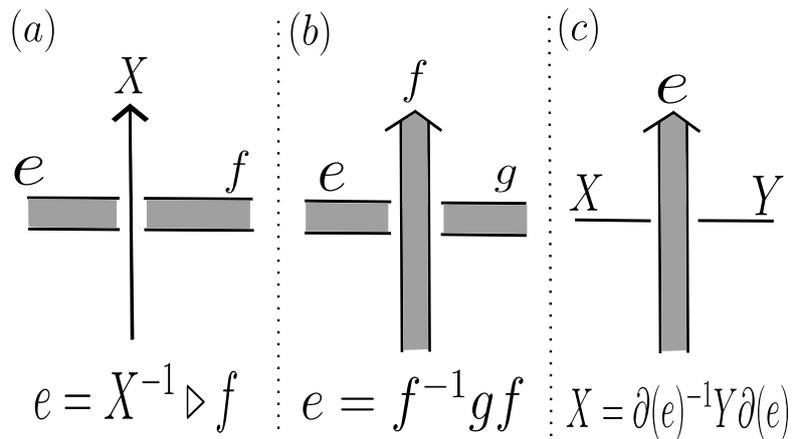


図4：バンドとアークで代表される元の間関係

(証明). CW 複体 N に基点 $*$ をとり、 N 内の 2-cell C にも基点 $*'$ をとり、 $*$ から $*'$ を結ぶ N 内の道を 2 つとり γ_1, γ_2 とする。 γ_1, γ_2 は $\pi_2(N^2, N^1, *)$ の元 $C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}$ を定める。この時、基底を変換する作用の定義より $C_{\gamma_1} = (\gamma_1 \gamma_2^{-1}) \triangleright C_{\gamma_2}$ が成立する。

(a) については、上記の事実よりこのケースにおいては $C_{\gamma_1} \cong e, C_{\gamma_2} \cong f, \gamma_1 \gamma_2^{-1} \cong X^{-1}$ であるので成立する。

(b) については、 $\gamma_1 \gamma_2^{-1} \cong \partial(f)^{-1}$ と crossed module の定義より、 $e = \partial(f)^{-1} \triangleright g = f^{-1} g f$ 。

(c) については、Wirtinger 関係式を適用すればよい。 \square

M の 4 次元 3-ハンドルは $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式を導入する。

図5左の球面は4次元3-ハンドルの attaching sphere を表している。attaching sphere 内の円周は death of circles で消える結び目である。

例えば、図5右の様に attaching sphere とバンドが交わっている様な状況を考える。点で書かれた円周は attaching sphere を表す。

関係式の求め方は次の様になる。

まず、バンドが代表する $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元で、attaching sphere から出る向きのものに指数 +1 を、attaching sphere に入る向きのものに指数 -1 を与える。

次に反時計周りにそれらの元を掛け合わせ得られた元を W とするとき、関係式として $W = 1$ が生じる。

この求め方は、4次元3-ハンドルの attaching sphere が、attaching sphere と交わるバンドの代表する $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元の積とホモトピックであることから従う。

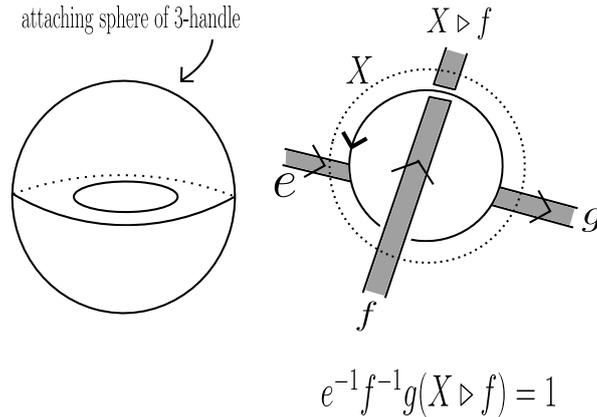


図5： $\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式

$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。

$I_{\mathcal{G}}(M)$ の分子は境界の条件と関係式を満たす G, E の元の組の数で与えられる。また $M^{(1)}$ の各ハンドルをコアに潰すことで、 $M^{(1)}$ とホモトピー同値なブーケが得られるので、 $b_1(M^{(1)}) = (\text{ブーケにおける } S^1 \text{ の数}) = (1\text{-ハンドルの数}) = (\text{birth of circles で生じる circle の数})$ が成立する。よって分母は $(\#E)^{(\text{birth of circles で生じる circle の数})}$ で与えられる。

2.2.1 具体例

計算の具体例を挙げておく。 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。バンドを抜いた図が元のモーション・ピクチャーである。

例 2.1. Σ : spun trefoil

図6はバンド付きの spun trefoil のモーション・ピクチャーである。図7は別のモーション・ピクチャーであり、自明な絡み目から saddle point が同時に起こる、つまりバンドが同時に取り付く様子を描いている。これらは、異なるモーション・ピクチャーだが同一の曲面を表す。

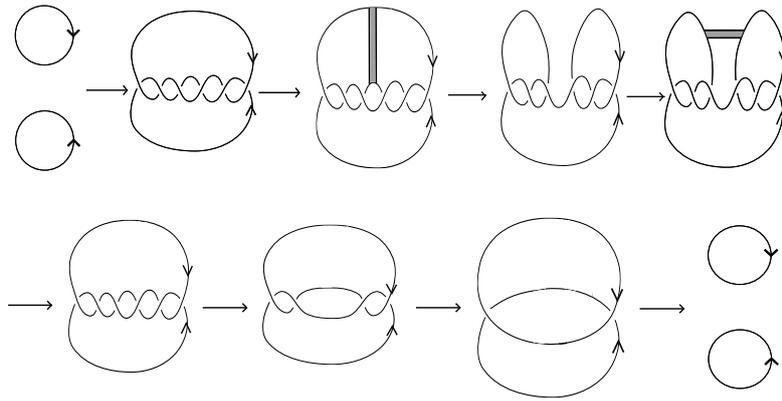


図6：spun trefoil のバンド付きモーション・ピクチャー (0)

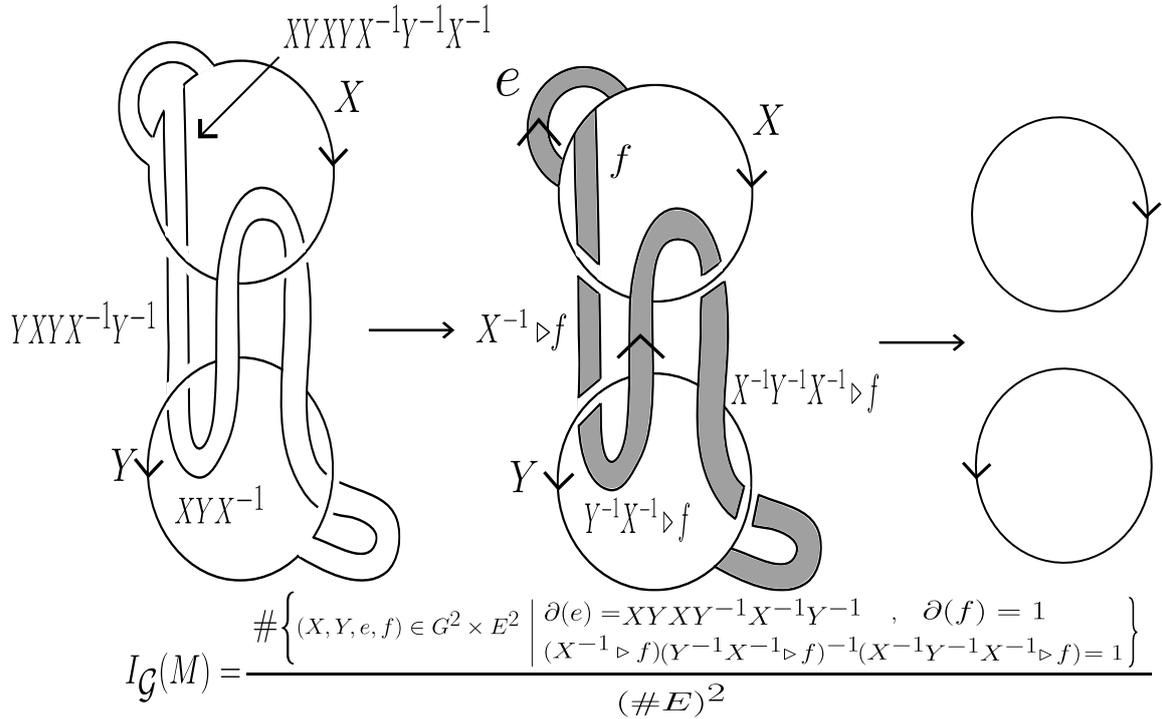


図7：spun trefoil のバンド付きモーション・ピクチャー (1)

3 主結果

主結果について述べる。ここでは記号の簡略化のため、 S^4 内の曲面絡み目 Σ に対し、外部の I_G を $I_G^e(\Sigma)$ と表す。 $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ を finite crossed module とする。

[1], [2] では、Martins により $I_G^e(\Sigma)$ の計算例が2つほど挙げられている。本研究における主結果の1つとして、吉川 [5] の分類表を用い、分類表に現れる全ての向きつけ可能な曲面絡み目に対し計算式を獲得した。次ページからの表が計算結果である。表の左が曲面の表記であり、これは吉川の分類表と対応した表記である。

$I_g^e(\Sigma)$	
Σ	
$6_{1,1}^{0,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = Y^{-1}X^{-1}YX, \quad \partial(f) = 1 \\ f(Y \triangleright f)^{-1} = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
8_1	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX, \quad \partial(f) = 1 \\ f^{-1}(Y \triangleright f)(XY \triangleright f)^{-1} = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
$8_{1,1}^{1,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f, g, h) \in G^2 \times E^4 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = X^{-1}YXY^{-1}, \quad \partial(f) = 1 \\ \partial(g) = X^{-1}Y^{-1}XY, \quad \partial(h) = 1 \\ f(X \triangleright f)^{-1}h(Y \triangleright h)^{-1} = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
9_1	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = YX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}, \quad \partial(f) = 1 \\ f^{-1}(Y^{-1} \triangleright f)(XY^{-1} \triangleright f)^{-1} = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
$9_{1,1}^{0,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = 1, \quad \partial(f) = Y^{-1}X^{-1}YX^{-1}XYX \\ e(Y \triangleright e)^{-1}(XY \triangleright e)(Y^{-1}XY \triangleright e)^{-1} = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
10_1	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = 1, \quad \partial(f) = YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1} \\ (X \triangleright e)(YX \triangleright e)^{-1}(X^{-1}YX \triangleright e)(Y^{-1}X^{-1}YX \triangleright e)^{-1}(XY^{-1}X^{-1}YX \triangleright e) = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$
10_2	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \mid \begin{array}{l} \partial(e) = XYXY^{-1}X^{-1}Y^{-1}, \quad \partial(f) = Y^{-1}X^{-2}YX^2 \\ f^{-1}(A \triangleright f)(Y^{-1}X^{-1} \triangleright e)^{-1}(\partial(e)^{-1}B^{-1}\partial(e)^{-1}B^{-1} \triangleright c)c^{-1}(B^{-1} \triangleright f)c = 1 \end{array} \right\} / (\#E)^2$ $\subset \subset \mathcal{C}, \quad A = Y^{-1}X^{-1}\partial(e)^{-1}XYXY^{-1}X^{-1}\partial(e)XY$ $B = \partial(f)^{-1}XYX^{-1}\partial(f)$ $c = f^{-1}(Y^{-1}X^{-1} \triangleright e)f$

Σ	$I_G^0(\Sigma)$
10_3	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \left \begin{array}{l} \partial(e) = X^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}Y, \quad \partial(f) = YX^{-1}Y^{-1}X^{-1}YX \\ f^{-1}(X \triangleright f)(\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X \triangleright f)^{-1}(X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X \triangleright f)(Y \triangleright f)\partial(e)^{-1}A\partial(e)C \triangleright e)^{-1}(C \triangleright e)e^{-1} = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^2$ <p style="text-align: center;">$\subset \subset \mathcal{C}, A = X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$</p> <p style="text-align: center;">$B = X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$</p> <p style="text-align: center;">$C = \partial(e)^{-1}B\partial(e)$</p>
10_1^1	$\# \left\{ (X, Y, e, f, g, h) \in G^2 \times E^4 \left \begin{array}{l} \partial(e) = 1, \quad \partial(f) = Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX \\ \partial(g) = 1, \quad \partial(h) = X^{-1}Y^{-1}X^{-1}YXY \\ (XY \triangleright e)(Y \triangleright e)^{-1}e(Y \triangleright g)(XY \triangleright g)^{-1}(YXY \triangleright g) = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^2$
$10_1^{0,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \left \begin{array}{l} \partial(e) = YXYX^{-1}Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}X, \quad \partial(f) = 1 \\ f^{-1}(X \triangleright f)(X^{-1}Y^{-1} \triangleright f)^{-1}(Y^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^2$
$10_2^{0,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f) \in G^2 \times E^2 \left \begin{array}{l} \partial(e) = 1, \quad \partial(f) = YX^2Y^{-1}X^{-2} \\ e(X^{-2} \triangleright e)^{-1} = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^2$
$10_1^{1,1}$	$\# \left\{ (X, Y, e, f, g, h) \in G^2 \times E^4 \left \begin{array}{l} \partial(e) = XYX^{-1}Y^{-1}, \quad \partial(f) = XYXY^{-1}X^{-2} \\ \partial(g) = X^2YX^{-1}Y^{-1}X^{-1}, \quad \partial(h) = YXY^{-1}X^{-1} \\ h^{-1}(Y \triangleright h)(Y^{-1} \triangleright g)g^{-1}(XY^{-1} \triangleright e)^{-1}(Y^{-1} \triangleright e)f^{-1}(X^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^2$
$10_1^{0,0,1}$	$\# \left\{ (X, Y, Z, e, f) \in G^3 \times E^2 \left \begin{array}{l} \partial(e) = YZ^{-1}Y^{-1}ZXYX^{-1}Y^{-1}, \quad \partial(f) = 1 \\ (Y^{-1} \triangleright f)(X^{-1}Y^{-1} \triangleright f)^{-1} = 1, \quad (Y^{-1} \triangleright f)^{-1}(ZY^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right. \right\} / (\#E)^3$

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」での講演の機会を与えて下さった世話人の谷山公規先生、安原晃先生、山口 祥司先生、丹下稜斗先生に厚く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] João Faria Martins. The fundamental crossed module of the complement of a knotted surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 361, No. 9, pp. 4593–4630, 2009.
- [2] João Faria Martins. On 2-dimensional homotopy invariants of complements of knotted surfaces. *arXiv preprint math/0507239*, 2005.
- [3] Robert E Gompf and András I Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*, Vol. 20. American Mathematical Society, 2023.
- [4] Scott Carter, Seiichi Kamada, and Masahico Saito. *Surfaces in 4-space*, Vol. 142. Springer Berlin, Heidelberg, 2004.
- [5] Katsuyuki Yoshikawa. An enumeration of surfaces in four-space. *Osaka Journal of Mathematics*, Vol. 31, No. 3, pp. 497 – 522, 1994.