

負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開と 量子モジュラー性

九州大学大学院数理学研究院 PD 村上友哉

1 序

3次元多様体の量子不変量の発散の様子を求める問題は、量子トポロジーにおける最重要課題の一つである。本稿ではこの問題を部分的に解決できたことを報告する。

主役を務めるのは3次元多様体に対して定まる **Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量** と呼ばれる複素数列に値を取る位相不変量である。この複素数列の発散の様子が Chern–Simons 不変量で記述されるだろうというのが Witten や Andersen らによる **漸近展開予想** である。本稿の主結果は、3次元多様体を負定値鉛管多様体というクラスから取るときに、WRT 不変量の漸近展開を決定したというものである。証明にあたり、「モジュラー級数」と命名した新しい枠組みを用いて漸近展開や量子モジュラー性を与える一般論を構築した。この枠組みは近年量子トポロジーや数理論理において重要視されている resurgence 理論のうち Borel–Laplace 変換の内容を多変数化するものにもなっており、また「多重 Eisenstein 級数」と呼ばれる数論的対象に関する 19 年来の最重要問題の一つを解決するという応用もある。

少しだけ個人的な話をさせて頂きたい。私は元々整数論のモジュラー形式という対象を専門に研究していたが、2021 年に東北大学の寺嶋郁二先生の元で当時博士学生をしていた同級生の森祥仁氏から「量子不変量の計算にモジュラー形式というものが現れるみたいだがこれは何なのか」というような相談をもらったことがきっかけで、量子トポロジーという分野に足を踏み入ることとなった。量子不変量の研究をし始めてからひしひしと感じるのは、量子不変量は量子トポロジーという肥沃な土壌に咲いた大輪の花のような美しく実り豊かな対象だという実感である。当初は「数論側から量子トポロジーに貢献できればいいな」というような意識だったが、今では「量子不変量を育てよう、必ず数論の美果が実るから」という気持ちでいる。本稿で紹介する「モジュラー級数」の枠組みは、量子不変量の研究を通して収穫できた一つの数論的成果と言える。

本稿の構成を述べる。2 節では先行研究と主結果を述べる。3 節では証明の方針を概説する。4 節では証明の核心部を担う「モジュラー級数」という枠組みを紹介する。証明の詳細は述べず、トイモデルやアイデアの要点の解説を中心に紹介することにする。

2 主結果

2.1 漸近展開予想

有向閉 3 次元多様体 M と正整数 k に対し、 M のレベル k の $SU(2)$ WRT 不変量を $Z_k(M) \in \mathbb{C}$ と書くことにする。これは Witten [Wit89] により経路積分を用いて物理の立場から定義された後、Reshetikhin–Turaev [RT91, Theorem 3.3.2] によって数学的に構成された位相不変量である。Reshetikhin–Turaev の構成法を非常に大雑把に説明すると、まず Dehn 手術の結果が M になるような絡み目と手術係数を取り、 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ とするときに量子群 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の表現を絡み目の組み紐表示に乗せて勘定した後、3次元多様体の位相不変量となるよう補正するというものである。詳細は [Tur16, Chapter II, Section 2] を参照頂きたい。

WRT 不変量の研究における最重要課題の一つが Witten [Wit89] や Andersen [And13, Conjecture 1.1] らによる **漸近展開予想 (asymptotic expansion conjecture)** である。これは $k \rightarrow \infty$ としたときに WRT 不

変量 $Z_k(M)$ の発散の様子や、より精密な情報である漸近展開の主要項に Chern–Simons 不変量が現れるというものである。ここで Chern–Simons 不変量とは、Chern–Simons 作用

$$R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) \xleftarrow[1:1]{\frac{\{M \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ の平坦接続}\}}{\text{ゲージ変換}}} \xrightarrow{[A]} \mathbb{C}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \bmod \mathbb{Z}$$

による像のことである。ただし $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) := \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{共役}$ は指標多様体と呼ばれ、複素代数多様体の構造を持つことが知られている。また上の写像 $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ は $R_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(M)$ の各連結成分ごとに定数関数になることが知られている。そのため、 M に対する Chern–Simons 不変量の集合を $\mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ と書くと、これは有限集合である。以上の準備の下で漸近展開予想は以下のように述べられる。

予想 2.1 (漸近展開予想, [AHJ⁺17, Conjecture 1.1]). 各 Chern–Simons 不変量 $\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ に対しある Puiseux 級数 $Z_\theta(x) \in \mathbb{C}[x^{1/p} \mid p \in \mathbb{Z}_{>0}][[x^{-1}]]$ が存在して漸近展開

$$Z_k(M) \sim \sum_{\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

が成り立つ。

ここで式 (2.1) は Poincaré による漸近展開の記法であり、各 θ に対し $Z_\theta(x) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{\theta,m} x^{-m/P}$ と書くとき、任意の正整数 M に対してある $C > 0$ が存在して

$$\left| Z_k(M) - \sum_{\theta \in \mathrm{CS}_{\mathbb{C}}(M)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} \sum_{m=m_0}^M a_{\theta,m} k^{-m/P} \right| \leq C k^{-(M+1)/P} \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

が成り立つことを意味する。

2.2 負定値鉛管多様体

本稿で扱う 3 次元多様体のクラスである**負定値鉛管多様体**は以下のように定義される。

- 定義 2.2.** (i) **鉛管グラフ (plumbed graph)** とは、各頂点を整数で重み付けられた木（すなわち連結有限無向グラフで閉路を持たないもの）のことである。
- (ii) 鉛管グラフ Γ に対し、各頂点を自明な結び目に、各辺を自明な結び目を絡ませることに、頂点の重みを手術係数に対応させることで手術係数付き絡み目を得る（図 1, 2 参照）。この絡み目に沿った Dehn 手術で得られる 3 次元多様体を $M(\Gamma)$ と書き、このようにして得られる 3 次元多様体を**鉛管多様体**と呼ぶ。
- (iii) 鉛管多様体 $M(\Gamma)$ が**負定値**であるとは、それを定める鉛管グラフ Γ の隣接行列が負定値であることを言う。ただし隣接行列の対角成分には頂点の重さを割り当てることとする。

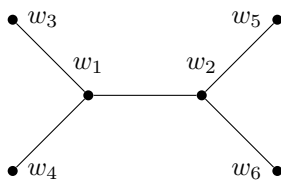


図 1: 鉛管グラフの例

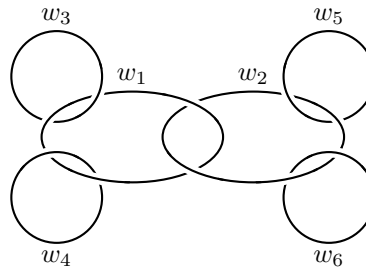


図 2: 図 1 の鉛管グラフに対応する絡み目

注意 2.3. 負定値鉛管多様体は他の多様体のクラスと以下の包含関係にある.

$$\begin{array}{ccccc} \text{有理ホモロジー球面} & \supset & \text{負定値鉛管多様体} & \supset & \text{Seifert ホモロジー球面} \\ & & \cup & & \\ & & \text{レンズ空間} & & \end{array}$$

このことは以下の事実から従う:

- 鉛管グラフ Γ の頂点集合を V , 隣接行列を $W \in \text{Sym}(\mathbb{Z}^V)$ とすると $H_1(M(\Gamma), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V)$ が成り立つ ([村 22, 補題 3.4]) ので, 負定値鉛管多様体は有理ホモロジー球面である.
- 次数 3 以上の頂点を唯一持ち $\det W = \pm 1$ を満たす鉛管グラフから定まる鉛管多様体は Seifert ホモロジー球面であり, 逆に全ての Seifert ホモロジー球面はそのような負定値鉛管グラフから得られる ([AM22, Subsection 4.1]) .
- 互いに素な正整数 $p > q$ を取り, レンズ空間 $L(p, q)$ を考える. $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を負の連分数展開

$$\frac{p}{q} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{k_r}}} \quad \text{で定めると,} \quad \begin{array}{ccccccc} & -k_1 & & -k_2 & & & -k_{s-1} & -k_s \\ & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array} \quad \text{という負定値鉛管グラフ}$$

から定まる負定値鉛管多様体が $L(p, q)$ である.

2.3 主結果

本稿の主結果は以下のように述べられる.

定理 2.4. 負定値鉛管多様体 $M = M(\Gamma)$ に対し, 明示的に記述される有限集合 $C(\Gamma) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ および各 $\theta \in C(\Gamma)$ に対する Puiseux 級数 $Z_\theta(x) \in \mathbb{C}((x^{-1/2}))$ が存在して漸近展開

$$Z_k(M) \sim \sum_{\theta \in C(\Gamma)} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

が成り立つ.

この結果によって負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開を完全に決定することができた. ここから更に歩を進めて漸近展開予想 (予想 2.1) を解決するには集合 $C(\Gamma)$ と Chern–Simons 不変量との関係を調べる必要がある. これについては現在寺嶋郁二氏と共同研究を行っているところである.

注意 2.5. 定理 2.4 の集合 $C(\Gamma)$ は明示的に

$$C(\Gamma) = \{0\} \cup \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V), \\ V' \subset V^\Psi, (a)}} \left\{ -{}^t a W^{-1} a + \frac{1}{4} {}^t n P_V^{-1} n + {}^t n U_{V'} P_{V'^c} m \bmod \mathbb{Z} \mid n \in \prod_{v \in V'} \mathcal{P}_v^{(a)}, m \in \prod_{v \in V'^c} \frac{1}{P_v} (1 + 2\mathbb{Z}) \right\}$$

と書ける. ただしここで以下の記号を用いた:

- V は M を定める鉛管グラフ Γ の頂点集合.
- 各頂点 $v \in V$ の次数を $\deg v := \#\{v \text{ から伸びる辺}\}$ で定める.
- $V^\Psi := \{v \in V \mid \deg v \geq 3\}$ とおく.*1

*1 ここで Ψ という記号は 3 本の辺が集まっている頂点をイメージしている. Unicode は U+2A5B で, TeX で入力する際は `stix` パッケージや `unicode-math` パッケージを用いて「`\veemidvert`」と入力することで出力できる.

- $V' \subset V^\vee$ に対し $V'^c := V^\vee \setminus V'$ とおく.
- $a \in \mathbb{Z}^V$ に対し $V^{\vee, (a)} := \{v \in V^\vee \mid (W^{-1}a)_v \in \mathbb{Z}\}$ とおく.
- W は Γ の隣接行列.
- P^{-1} は W^{-1} の $V^\vee \times V^\vee$ 部分行列.
- $V' \subset V^\vee$ に対し P を $(V' \sqcup V'^c) \times (V' \sqcup V'^c)$ ブロック行列と見たときの各成分を以下のように定める:

$$\begin{pmatrix} P_{V'} & U_{V'}^\vee \\ U_{V'}^\vee & P_{V'^c}^\vee \end{pmatrix} := P.$$

- 各 $v \in V^\vee$ に対し

$\bar{v} := \{v \text{ と次数 } 1 \text{ の頂点を結ぶ } \Gamma \text{ 内のパスで, 途中経路の頂点の次数は全て } 2\}$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{ } \\ \diagdown \end{array} v \text{ --- } \bullet \text{ --- } \cdots \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \right\}.$$

- 各 $v \in V^\vee$ と $\beta \in \bar{v}$ に対し, パス β から頂点 v を除いたグラフの隣接行列を W_β とおき, その行列式を $p_\beta := \det W_\beta$ とおく.
- 各 $v \in V^\vee$ に対し $P_v := \prod_{\beta \in \bar{v}} p_\beta$ とおく.
- $a \in \mathbb{Z}^V$ と $v \in V^{\vee, (\alpha)}$ に対し

$$\mathcal{P}_v^{(a)} := \left\{ n_v \in \mathbb{Z} \mid \# \left\{ \beta \in \bar{v} \mid (W^{-1}a)_{i_\beta} + \frac{n_v}{p_\beta} \in \mathbb{Z} \right\} \leq \deg v - 3 \right\}.$$

例 2.6. 上で述べた $C(\Gamma)$ の表示式はあまりにも煩雑なため, 例を挙げる. M が Seifert ホモロジー球面 $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$ のとき, 注意 2.3 で述べたように鉛管グラフ Γ として $V^\vee = \{v_0\}$ となるものが取れる. このとき

$$\{p_\beta \mid \beta \in \bar{v}\} = \{p_1, \dots, p_n\}, \quad P = p_1 \cdots p_n,$$

$$C(\Gamma) = \{0\} \cup \left\{ -\frac{m^2}{4P} \bmod \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}, p_i \mid m \text{ となる } 1 \leq i \leq n \text{ は高々 } n-3 \text{ 個} \right\}$$

が成り立つ. これは Andersen–Mistegård [AM22, Corollary 9] によって求められた Seifert ホモロジー球面の Chern–Simons 不変量の集合 $\text{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ の表示式に一致する. 従って Seifert ホモロジー球面の場合は $C(\Gamma) = \text{CS}_{\mathbb{C}}(M)$ である.

3 証明の方針

3.1 証明の方針の概略

定理 2.4 の証明の方針は以下の図式にまとめることが出来る.

$$\begin{array}{ccc} Z_k(M) & \xleftarrow[(1)]{\tau \rightarrow 1/k} & \widehat{Z}(q; M) \\ \downarrow k \rightarrow \infty \text{ } ?? & & \downarrow (2) \tau \mapsto -1/\tau \\ \sum_{\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta} Z_\theta(k) & \xleftarrow[(3)]{\tau = -k, k \rightarrow \infty} & \widehat{Z}^*(q) + \int \widehat{Z}^{**}(\tau; x) dx \end{array}$$

左側の矢印が目標としている WRT 不変量の漸近展開である. これをコの字型, (1)(2)(3) の順に図式を迂回することで解決することを試みる. ここで右上の $\widehat{Z}(q; M)$ は M の **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量** と呼ばれる q 級数不変量であり, 上側の矢印は**円周極限予想 (radial limit conjecture)** と呼ばれる主張であり, 右側の矢印は**モジュラー変換公式** と呼ばれるタイプの等式である. ただしここで $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ と

する。 $\tau \rightarrow 1/k$ という極限は q を 1 の冪根 $e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ に飛ばす極限と同じなので radial limit と呼ばれるが、ここでは「円周極限」という訳語を当てることにする*2。なお下側の矢印は特に名の付いた主張では無いが、本稿で新しく準備する「モジュラー級数」の枠組みと定常位相近似と呼ばれる手法を用いることで示される。これから証明の各ステップについては次項以降で詳しく説明する。

歴史的な経緯について述べておく。上の方針は Lawrence–Zagier [LZ99] に端を発するものである。彼らは初めて WRT 不変量が**偽テータ関数 (false theta function)** というある種の q 級数の円周極限で表されることを明らかにし、上の方針を取ることで Poincaré ホモロジー球面に対して漸近展開予想（予想 2.1）を解決した。その後、樋上 [Hik05, Hik06] はこの手法を発展させて Seifert ホモロジー球面の場合の漸近展開予想を解決した。これらの研究が示唆するのは「より一般の 3 次元多様体に対しても WRT 不変量を円周極限に持つ偽テータ関数が存在するのではないか？」という問いである。更にそのような偽テータ関数が多様体の位相不変量として実現できたら一層良い。これを実行したのが Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] である。彼らは負定値鉛管多様体に対して GPPV 不変量 $\widehat{Z}(q; M)$ と呼ばれる偽テータ関数を構成し、その円周極限が WRT 不変量になること、すなわち円周極限予想を定式化した。この研究はトポロジーのみならず数理論理、数論、表現論に対してもインパクトを与え、現在様々な側面に基づいた研究が数多く行われている [CCF⁺19, CDGG23, CFS20, CGP23, EGG⁺22, GHN⁺21, GM21, Par20a, Par20b, Whe25]。筆者の研究もこの流れを汲むものである。

3.2 Gukov–Pei–Putrov–Vafa 不変量

それでは GPPV 不変量の定義を与えよう。

定義 3.1 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Subsection 3.4])。負定値鉛管多様体 M とそのスピンの構造 $b \in \text{Spin}^c(M)$ に対し **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量**を

$$\widehat{Z}_b(q; M) := q^\Delta \sum_{l \in b+2W(\mathbb{Z}^V)} \widetilde{F}_l q^{-\langle l, W^{-1}l \rangle/4}.$$

によって定義する。ただし以下の記号を用いる：

- 注意 2.5 と同様に、 M を定める鉛管グラフを Γ 、その頂点集合を V 、頂点 v の次数を $\deg v$ 、隣接行列を W とする。
- 標準的な同型 $\text{Spin}^c(M) \cong ((\deg v)_{v \in V} + 2\mathbb{Z}^V)/2W(\mathbb{Z}^V)$ ([GM21, Subsection 4.1]) により b を右辺の元とみなす。
- $\Delta := -(3|V| + \text{tr } W)/4$ 。
- $v \in V$ に対し $F_v(z_v) := (z_v - z_v^{-1})^{2-\deg v}$ 。
- Cauchy の主値

$$\text{v.p.} := \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{|z|=1+\varepsilon} + \int_{|z|=1-\varepsilon} \right).$$

- $l = (l_v)_{v \in V} \in \mathbb{Z}^V$ に対し

$$\widetilde{F}_l := \prod_{v \in V} \widetilde{F}_{v, l_v}, \quad \widetilde{F}_{v, l_v} := \text{v.p.} \int_{|\xi_v|=1} F_v(z_v) \frac{z_v^{l_v} d\xi_v}{2\pi\sqrt{-1}z_v}.$$

*2 「動径極限」と訳されることもあるようである。

注意 3.2. [AM22, p. 743] より

$$\tilde{F}_{v,l_v} = \begin{cases} -l_v, & \text{if } \deg v = 1, l_v \in \{\pm 1\}, \\ 1, & \text{if } \deg v = 2, l_v = 0, \\ \frac{1}{2} \binom{m + \deg v - 3}{\deg v - 3}, & \text{if } \deg v \geq 3, l_v = \deg v - 2 + 2m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \frac{(-1)^{\deg v}}{2} \binom{m + \deg v - 3}{\deg v - 3}, & \text{if } \deg v \geq 3, -l_v = \deg v - 2 + 2m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と書ける. 特にこれは整数なので $\hat{Z}_b(q; M) \in q^{\Delta} \mathbb{Z}[[q]]$ が成り立つ.

命題 3.3 (Gukov–Manolescu [GM21, Proposition 4.6]). GPPV 不変量は負定値鉛管多様体の位相不変量.

3.3 円周極限予想

円周極限予想は以下のように述べられる.

定理 3.4 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Equation (A.28), Conjecture 2.1] により予想, 筆者 [Mur23, Theorem 1.2] により解決). 負定値鉛管多様体 M に対し以下が成り立つ:

$$Z_k(M) = \frac{1}{2(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})\sqrt{|\det W|}} \lim_{\tau \rightarrow 1/k} \sum_{a \in H_1(M, \mathbb{Z})} e^{-2\pi\sqrt{-1}k^t a W^{-1} a} \sum_{b \in \text{Spin}^c(M)} e^{-2\pi\sqrt{-1}^t a W^{-1} b} \hat{Z}_b(q; M).$$

なお円周極限予想の動機や先行研究のより詳しい説明が [村 24, 3 節] にまとめている.

3.4 モジュラー変換公式と下側の矢印

以上から, 本節冒頭の図式のうち上側の矢印は解決されており, 後は右側の矢印 (モジュラー変換公式) と下側の矢印を解決すれば WRT 不変量の漸近展開を決定できることが分かった. 本稿の技術的核心部である「モジュラー級数」の枠組みは, まさにこの二つを解決するために構築したものである. 「モジュラー級数」の説明は次節に回し, ここではアイデアを説明する.

まずモジュラー変換公式に関する先行研究を振り返ろう. Lawrence–Zagier [LZ99] や樋上 [Hik05, Hik06] は偽テータ関数を直接扱わず, 非正則 Eichler 積分と呼ばれる別種の関数のモジュラー変換公式を考えることで対処している. 数論側ではその後, 偽テータ関数のモジュラー変換公式を与える方法が Bringmann–Nazaroglu [BN19] によって整備され, 松坂–寺嶋 [MT21] によって Seifert ホモロジー球面の場合に, また Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] によって H グラフから定まる負定値鉛管ホモロジー球面の場合に GPPV 不変量のモジュラー変換公式が与えられるに至った. 彼らの方法は誤差関数を用いて偽テータ関数のモジュラー補完 (綺麗なモジュラー変換公式を持つように変形された関数) を与えるというもので, アイデアの源流は Ramanujan の擬テータ関数 (mock theta function) のモジュラー変換公式を与えた Zwegers [Zwe02] の研究に遡る. この手法は数論的には目覚ましいものであり, 擬テータ関数と調和 Maass 形式の関係が明らかになることや ([BFOR17] に詳しい), 偽テータ関数を包括する「偽モジュラー形式」の枠組みを構築する試み ([BKMN21]) などの大きな進展を生んでいる. 一方でトポロジーの立場からは不満も大きいと筆者には感じられる. この方法では GPPV 不変量の係数の表示式 (注意 3.2) の二項係数を単項式の和に分解して各パーツごとに計算を実行するため, 漸近展開を導出する上での見通しが良いとは言えないのである.

折角なら, 多様体の情報が詰まっている GPPV 不変量の係数をそのまま扱うような手法が望ましい. Andersen–Mistergård [AM22] の手法はまさにそのようなものである. 彼らの方法は Écalte の回生理論^{*3}

^{*3} この訳は筆者による. 素直な訳は「再生理論」だが, 再生核 (reproducing kernel) の理論や再生過程 (renewal process) の理論と訳語が衝突するためこの訳を提案したい.

(resurgence theory) に基づくもので、多様体の情報がそのまま生きる計算になっている。また彼らの手法は Han–Li–Sauzin–Sun [HLSS21] によってトポロジーの文脈から独立した立場から整理されている。

回生理論は Borel–Laplace 総和法に基礎を置き、発散級数の Borel–Laplace 変換の特異性を「エイリアン解析 (alien calculus)」や「ブリッジ方程式 (bridge equation)」によって研究する理論である。応用先は微分方程式解の Stokes 現象や Riemann–Hilbert 問題、ベクトル場の解析的同値問題の他、近年では場の量子論の摂動論、量子トポロジー、WKB 解析など多岐にわたる。より詳しく知りたい方は [Del16, LR16, MS16, Sau06, Sau09, 高 94, 藤 18] などの教科書や解説論文を参照頂きたい。中でも書籍 [MS16] 中の Sauzin の担当章 (arXiv 版 [Sau14] もある) は大変丁寧に書かれており、初学の身には大変重宝した。

[AM22, HLSS21] の手法を大雑把に解説しよう。彼らはまず GPPV 不変量あるいは偽テータ関数 $\hat{Z}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)q^{n^2/4P}$ をある有理型関数 $\varphi(x)$ (これは回生関数の例である) を用いて

$$\hat{Z}(q) = \int_{\mathbb{R}+\varepsilon\sqrt{-1}} \varphi(x) \tilde{q}^{2Px^2} dx, \quad \text{ただし } \tilde{q} := e^{2\pi\sqrt{-1}\cdot(-1/\tau)}$$

と書き、更に $x^2 = u$ という変形により

$$\hat{Z}(q) = \int_C \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{u}} \tilde{q}^{2Pu} du, \quad \text{ただし積分路 } C \text{ は原点を中心に反時計回りに取った Hankel 積分路}$$

という Laplace 変換表示を得た。この式に留数定理を適用することで GPPV 不変量や偽テータ関数のモジュラー変換公式が得られ、更に Borel–Laplace 総和法の要である Watson の補題 ([Won01, Page 22]) を適用することで本節冒頭の図式における下側の矢印に相当する漸近公式が得られるというのが [AM22, HLSS21] の証明のあらましである。この証明は実のところ、回生理論の精髓であるエイリアン解析やブリッジ方程式は用いていない。証明の肝は Borel–Laplace 総和法と留数解析である。

一般の負定値鉛管多様体に対する GPPV 不変量のモジュラー変換公式を同様の方法で求めようとする、 $\tilde{q}$ の肩に乗っている $2Px^2$ が一般の二次形式になるという問題がある。この場合、 $x^2 = u$ という変形に相当するのは二次形式を標準形に直すことだが、これは自然な操作とは言い難い。そこで、上の計算における Hankel 積分や回生理論における Laplace 変換 $\int_0^\infty \varphi(x)e^{-x/\tau}$ の代わりに、一般の重積分 $\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(x) \hat{\gamma}(\tau; x) dx$ に基づく漸近解析の枠組みを作るという方針が見えてくる。上の議論を見ると、量子不変量や量子モジュラー形式を扱う上では、その方が Laplace 変換よりも自然なのでは無いかと筆者には思えてくる。これが次節で述べる「モジュラー級数」の枠組みの動機である。

4 「モジュラー級数」の枠組み

それでは残りの紙面で「モジュラー級数」の枠組みを説明しよう。GPPV 不変量の定義式 $q^\Delta \hat{Z}_b(q; M) = \sum_{l \in b+2W(\mathbb{Z}^V)} \tilde{F}_l q^{-lW^{-1}l/4}$ を $\Phi[\tilde{g}, \gamma](\tau) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^r} \tilde{g}(l) \gamma(\tau; l)$ という式に一般化し、これを偽モジュラー級数と呼ぶことにする。ただしここで $r \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\tilde{g}(y) \in \tilde{\Omega}_r := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \text{sgn}(y_1 - \lambda_1) \cdot \text{sgn}(y_r - \lambda_r) \cdot \mathbb{Q}[y_i, \mathbf{1}_{a+k\mathbb{Z}}(y_i) \mid 1 \leq i \leq r, a, k \in \mathbb{Z}] \subset \{g: \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Q}\}$$

とし、 $\gamma: \mathbb{H} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{C}$ は連続かつ $\tau \in \mathbb{H}$ について正則で、 τ について一様に $y \in \mathbb{R}^r$ について指数減少なものとする。このとき次を示せる。

定理 4.1. (i) (係数 $\tilde{F}_l$ と有理関数 $\prod_{v \in V} (z_v - z_v^{-1})^{2-\deg v}$ の対応の一般化)

$$\mathfrak{R}_r := \mathbb{Q} \left[z_i^{\pm 1}, \frac{1}{1 - z_i^k} \mid 1 \leq i \leq r, k \in \mathbb{Z}_{>0} \right]$$

とおき、 $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\widetilde{\text{coe}}: \mathfrak{R}_r \rightarrow \tilde{\Omega}_r$ を $G(z) \in \mathfrak{R}_r$ に対し $\widetilde{\text{coe}}[G](y) \in \tilde{\Omega}_r$ を

$$\widetilde{\text{coe}}[G](l) := \text{v.p.} \int_{|z_i|=1, 1 \leq i \leq r} G(z) \prod_{1 \leq i \leq r} \frac{z_i^{-l_i} dz_i}{2\pi\sqrt{-1}z_i}$$

とおくことで定めると、この写像 coe は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の間の同型である。

(ii) (積分表示)

$$\Phi[\tilde{g}, \gamma](\tau) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^r} \varphi(x) \hat{\gamma}(\tau; x) dx$$

が成り立つ。ただしここで $\varphi(x_1, \dots, x_r) := \text{coe}^{-1}[\tilde{g}](e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_r})$ は実軸上に極を持つ有理型関数であり（各変数ごとの回生関数の積でもある）,

$$\hat{\gamma}(\tau; x) = \int_{\mathbb{R}^r} \gamma(\tau; y) e^{-2\pi\sqrt{-1}xy} dy$$

は Fourier 変換である。

(iii) (モジュラー変換公式)

$$\Phi[\tilde{g}, \gamma](\tau) = \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \left(\sum_{m_i \in \mathbb{R}} \text{sgn}(m_i) \text{Res}_{x_i=m_i} + \int_{C_+} dx_i \right) \right) \varphi(x) \hat{\gamma}(\tau; x)$$

が成り立つ。ただし積分路 C_+ を図 3 で定める。

(iv) (漸近公式) $\gamma(\tau; x) = f(\tau^\kappa x)$ (ただし $\kappa \in \mathbb{Q}_{>0}$) と書けるととき、漸近展開

$$\Phi[\tilde{g}, \gamma](\tau) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^r} B_m \tau^{\kappa(m_1 + \dots + m_r)} \int_{e^{-\sqrt{-1} \arg(\tau)} \mathbb{R}^r} x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} \hat{f}(x) dx \quad \text{as } \tau \rightarrow 0$$

が成り立つ。ただしここで複素数列 $(B_m)_{m \in \mathbb{Z}^r}$ を

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^r} B_m x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} := \varphi(x)$$

で定める。

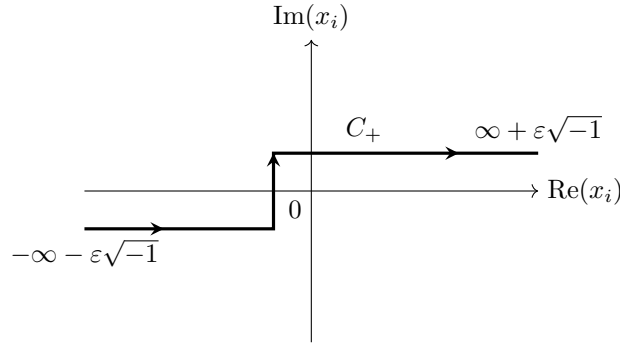


図 3: 積分路 C_+

これがモジュラー級数の枠組みである。定理 2.4 は定理 4.1 を GPPV 不変量に適用し、更に積分の漸近展開に関する追加の議論を行うことで示される。ただし実際には、GPPV 不変量の定義式をそのまま適用するのではなく、「次数 3 以上の頂点でまとめた表示式」を準備して適用する必要がある。これは Seifert ホモロジー球面の場合に GPPV 不変量を一変数の二次形式に関する偽テータ関数で表示し、一変数の Laplace 変換で表示したことに対応している。

本稿冒頭で述べたように、モジュラー級数は「多重 Eisenstein 級数」という数論的な対象への応用もある。モジュラー級数は一般的な枠組みとなっているため、多重 Eisenstein 級数を特別な例として含んでおり、定理 4.1 の系としてそのモジュラー変換公式や漸近公式が得られるのである。

負定値鉛管多様体の WRT 不変量の漸近展開はこれで得られたが、モジュラー級数という枠組みにはまだまだ拡張の余地があるように思われる。今後の課題を列挙して本稿の締めくくりとしたいと思う。

- 他の 3 次元多様体の WRT 不変量や GPPV 不変量もモジュラー級数の枠組みで捉えられるか？
- Borel–Laplace 変換と微分方程式との関係をモジュラー級数に拡張できるか？
- 回生理論におけるエイリアン解析, ブリッジ方程式, 回生単項式 (resurgent monomial) をモジュラー級数に拡張できるか？
- モジュラー級数を「ベクトル値量子モジュラー形式」とみなす一般論を構築できるか？
- 概均質ベクトル空間に拡張できるか？

謝辞

本稿は 2024 年 12 月 24 日の研究集会「結び目の数理 VII」における筆者の同題の講演の解説記事です。集会では大変実りある充実した時間を過ごすことが出来ました。世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生と, 運営に携われた木村直記さんに深く感謝いたします。また私の講演に関して集会中に質問やコメントをくださった聴衆の方々に深く感謝いたします。また, 研究に際して様々な助言を下さった金子昌信先生 (九州大学), 山内卓也先生 (東北大学), 寺嶋郁二先生 (東北大学), 樋上和弘先生 (九州大学), 長谷川浩司先生 (東北大学), 松坂俊輝さん (九州大学), William Mistegård さん (南デンマーク大学) に感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 23KJ1675 の助成を受けたものです。

参考文献

- [AHJ⁺17] J. E. Andersen, B. Himpel, S. F. Jørgensen, J. Martens, and B. McLellan. The Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for links in finite order mapping tori I. *Adv. Math.*, 304:131–178, 2017.
- [AM22] J. E. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. *Journal of the London Mathematical Society*, 105(2):709–764, 2022.
- [And13] J. E. Andersen. The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I. *J. Reine Angew. Math.*, 681:1–38, 2013.
- [BFOR17] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, and L. Rolin. *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, volume 64 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [BKMN21] K. Bringmann, J. Kaszian, A. Milas, and C. Nazaroglu. Higher depth false modular forms. *arXiv:2109.00394*, 2021.
- [BMM20] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.
- [BN19] K. Bringmann and C. Nazaroglu. A framework for modular properties of false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 30, 23, 2019.
- [CCF⁺19] M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov, and S. M. Harrison. 3d modularity. *Journal of High Energy Physics*, 2019(10):1–95, 2019.
- [CDGG23] O. Costin, G. V. Dunne, A. Gruen, and S. Gukov. Going to the other side via the resurgent bridge. *arXiv preprint arXiv:2310.12317*, 2023.
- [CFS20] M. C. N. Cheng, F. Ferrari, and G. Sgroi. Three-manifold quantum invariants and mock theta functions. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 378(2163):20180439, 2020.
- [CGP23] F. Costantino, S. Gukov, and P. Putrov. Non-semisimple tqft’s and bps q-series. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 19:010, 2023.
- [Del16] E. Delabaere. *Divergent series, summability and resurgence. III*, volume 2155 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Resurgent methods and the first Painlevé equation, With prefaces by Jean-Pierre Ramis, Michèle Loday-Richaud, Claude Mitschi and David Sauzin.
- [EGG⁺22] T. Ekhholm, A. Gruen, S. Gukov, P. Kucharski, S. Park, and P. Sułkowski. $\widehat{Z}$ at large n : from curve counts to quantum modularity. *Communications in Mathematical Physics*, 396(1):143–186, 2022.
- [GHN⁺21] S. Gukov, P.-S. Hsin, H. Nakajima, S. Park, D. Pei, and N. Sopenko. Rozansky–Witten geometry of Coulomb branches and logarithmic knot invariants. *Journal of Geometry and Physics*, 168:104311,

2021. arXiv:2005.05347.
- [GM21] S. Gukov and C. Manolescu. A two-variable series for knot complements. *Quantum Topology*, 12(1), 2021. arXiv:1904.06057.
- [GPPV20] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.
- [Hik05] K. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6):661–685, 2005.
- [Hik06] K. Hikami. On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 268(2):285–319, 2006.
- [HLSS21] L. Han, Y. Li, D. Sauzin, and S. Sun. Resurgence and partial theta series. arXiv:2112.15223, 2021.
- [LR16] M. Loday-Richaud. *Divergent series, summability and resurgence. II*, volume 2154 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Simple and multiple summability, With prefaces by Jean-Pierre Ramis, Éric Delabaere, Claude Mitschi and David Sauzin.
- [LZ99] R. Lawrence and D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. *Asian J. Math.*, 3(1):93–107, 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.
- [MS16] C. Mitschi and D. Sauzin. *Divergent series, summability and resurgence. I*, volume 2153 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Monodromy and resurgence, With a foreword by Jean-Pierre Ramis and a preface by Éric Delabaere, Michèle Loday-Richaud, Claude Mitschi and David Sauzin.
- [MT21] T. Matsusaka and Y. Terashima. Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres. arXiv:2112.06210, 2021.
- [Mur23] Y. Murakami. A proof of a conjecture of Gukov–Pei–Putrov–Vafa. to appear in *Communications in Mathematical Physics*, arXiv:2302.13526, 2023.
- [Par20a] S. Park. Higher rank $\hat{Z}$ and f_k . *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 16:044, 2020.
- [Par20b] S. Park. Large color R -matrix for knot complements and strange identities. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(14):2050097, 32, 2020.
- [RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.
- [Sau06] D. Sauzin. Resurgent functions and splitting problems (new trends and applications of complex asymptotic analysis : around dynamical systems, summability, continued fractions). *数理解析研究所講究録*, 1493, 5 2006.
- [Sau09] David Sauzin. Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 83–163. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Sau14] David Sauzin. Introduction to 1-summability and resurgence. arXiv preprint arXiv:1405.0356, 2014.
- [Tur16] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, third edition, 2016.
- [Whe25] C. Wheeler. Quantum modularity for a closed hyperbolic 3-manifold. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 21:Paper No. 004, 2025.
- [Wit89] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.
- [Won01] R. Wong. *Asymptotic approximations of integrals*, volume 34 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001. Corrected reprint of the 1989 original.
- [Zwe02] S. P. Zweegers. *Mock theta functions*. PhD thesis, Universiteit Utrecht, 2002.
- [村 22] 村上友哉. 非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性. *数理解析研究所講究録*, (2230):126–142, 10 2022.
- [村 24] 村上友哉. 量子不変量と偽テータ関数の冪根での極限值. *数理解析研究所講究録*, (2292), 2024.
- [藤 18] 坂井典佑 藤森俊明, 三角樹弘. リサージェンス理論: 摂動論から非摂動効果を理解する. *日本物理学会誌*, 73(6):352–360, 2018.
- [高 94] 高崎金久. 漸近解析入門: なぜ漸近級数は発散するか? (巾零幾何と解析). *数理解析研究所講究録*, 875:129–145, 1994.