

Iwakiri–Satoh 2-knot に対する カンドルコサイクル不変量

京都大学数理解析研究所 M2 植田 雄大

1 導入

球面 S^2 の 4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 への滑らかな埋め込みの像を 2 次元結び目 (2-knot) と呼ぶ. 2 次元結び目に対して, 1 次元結び目 (1-knot) と同様に, 結び目の補空間の基本群から有限群への準同型写像の個数が不変量として古典的に用いられてきた. その後, 1980 年代にカンドルが導入されて, 結び目の基本カンドルから有限カンドルへ準同型写像の個数であるカンドル彩色数という不変量が上記の不変量の精密化として導入された. さらに, 1990 年代に Carter, Jelsovsky, Kamada, Langford, Saito [1, 2] によってカンドルのコサイクルを用いてカンドル彩色数の精密化であるカンドルコサイクル不変量が定義された.

一方, 2011 年に Iwakiri, Satoh [5] は 2 つの 1 次元結び目から 2 次元結び目を得る次のような構成法を与えている. 2 つの枠付き有向結び目 K, K' に対して, \mathbb{R}^3 へ標準的に埋め込まれた球面 S^2 上に描かれた K' の図式の管状近傍を (K のタングル図式) $\times S^1$ に置き換えて, K' の図式の交点の近傍を図 2.1 のモーショントピックチャが表す図式に置き換えることによって構成される 2 次元結び目を岩切–佐藤の 2 次元結び目 (Iwakiri–Satoh 2-knot) といい, $F(K, K')$ で表す. $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量は K の不変量と K' の不変量を用いて表示されることが期待される.

本稿では, 4 面体カンドル Q_4 に対する Iwakiri–Satoh 2-knot $F(K, K')$ のコサイクル不変量の値が K のコサイクル不変量と K, K' の枠を用いて表されることを示した (定理 3.1). K, K' の枠をそれぞれ $f_K, f_{K'}$ で表すとす. 例えば, $f_K, f_{K'}$ のいずれかが 3 で割り切れる場合, Q_4 に対する $F(K, K')$ のコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ は Q_4 の非自明なコホモロジー類を与えるある 3-コサイクル $\phi_2 : Q_4 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を用いたとき,

$$\Phi_{\phi_2}(F(K, K'), C) = f_{K'} \cdot f_K \cdot \{\Psi_{\phi_2}^*(K, C) + \Psi_{\psi_1}(K, C)\} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

と表されるという定理を得た. ただし, ψ_1 は Q_4 の非自明なコホモロジー類を与える 2-コサイクル, Ψ, Ψ^* はそれぞれ結び目のコサイクル不変量, 結び目のシャドーコサイクル不変量を表すとす. 先行研究の Iwakiri, Satoh[5] では, 「 X の元の語」が定める写像 $H_2(X) \rightarrow H_3(X)$ を用いて $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量を表示しているが, 本論文では 4 面体カンドル Q_4 について, その双対写像 $H^3(Q_4) \rightarrow H^2(Q_4)$ を具体的に計算して $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量の具体的な表示を求めている.

2 定義

2.1 Iwakiri–Satoh 2-knot

K, K' を枠付き有向結び目とし, その枠 (framing) を $f_K, f_{K'}$ で表す. D を K から 1 点の近傍を取り除いた $[0, 1]^2$ 上の black board framing が f_K となる 1-タングル図式, D' を K' の二次元球面 S^2 上の black board framing が $f_{K'}$ となる図式とする. \mathbb{R}^3 に標準的に埋め込まれた S^2 に D' が描かれているとする. D' の管状近傍を $D \times S^1$ に置き換え, D' の交点の近傍を図 2.1 のように置き換える. この部分の図式は D の 2 つの連結和について片方の D をもう一方の D の中を通すようなモーションピクチャによって表されるものである. このようにしてできる 2-knot の図式で 2-knot $F(K, K')$ を定め, これを **Iwakiri–Satoh 2-knot** と呼ぶことにする. この Iwakiri–Satoh 2-knot は Iwakiri, Satoh [5] によって定義された.

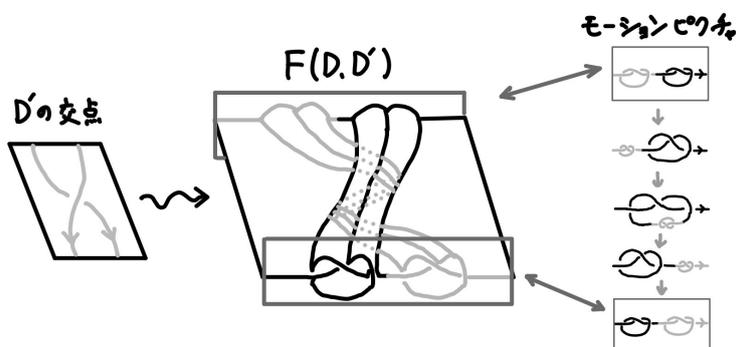


図 2.1 $F(K, K')$ の交点における変形

2.2 カンドル・カンドルコサイクル不変量

集合 X とその二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ が以下の 3 条件を満たすとき組 $(X, *)$ をカンドルと呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.
- 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y: X \rightarrow X, S_y(x) = x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

正 4 面体の頂点の集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ に対し, S_x を x を中心に 120 度回転させる写像と定めるとカンドルとなる. このカンドルを 4 面体カンドルと言い, Q_4 で表す.

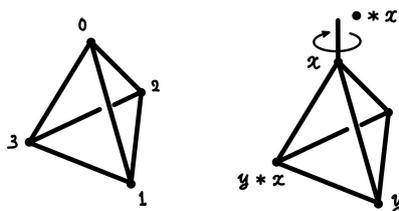


図 2.2 4 面体カンドル Q_4 の定義

D_K を結び目 K の図式, X をカンドルとする. 写像 $C : \{D_K \text{の弧}\} \rightarrow X$ が D_K の X 彩色であるとは, 任意の交点で図 2.3 の左図の状況を満たすことである. D_K の X 彩色全体を $\text{Col}_X(D_K)$ と表す. $\text{Col}_X(D_K)$ の位数は, D_K の取り方によらずに定まるためことが知られており, これを K の X 彩色数といい, $\#\text{Col}_X(K)$ で表す.

同様に D_F を結び目 F の図式とする. 写像 $C : \{D_F \text{のシート}\} \rightarrow X$ が図 2.3 の中図の状況を満たすとき X 彩色という. $\text{Col}_X(D_F)$ と $\#\text{Col}_X(F)$ も同様に定義される.

また, D_K を結び目 K の図式とする. 写像 $C : \{D_K \text{の弧}\} \sqcup \{\mathbb{R}^2 - D_K \text{の連結な領域}\} \rightarrow X$ がシャドー X 彩色であるとは, C の定義域を $\{D_K \text{の弧}\}$ に制限した写像が X 彩色であり, $\mathbb{R}^2 - D_K$ の領域に対して図 2.3 の右図の状況を満たすことを言う. シャドー X 彩色は X 彩色と $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与える元を定めると唯一つに決定されることが知られている.

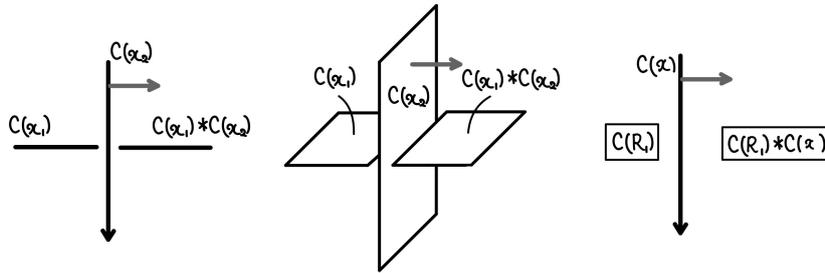


図 2.3 彩色条件

X をカンドル, A をアーベル群とする (演算は和でかく). 写像 $\psi : X^2 \rightarrow A$ が **2-コサイクル** であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $\psi(x, x) = 0$, $\psi(x, y) + \psi(x * y, z) = \psi(x, z) + \psi(x * z, y * z)$ を満たすことである. また, 写像 $\phi : X^3 \rightarrow A$ が **3-コサイクル** であるとは, 任意の $x, y, z, w \in X$ に対して, $\phi(x, x, y) = \phi(x, y, y) = 0$, $\phi(x, y, w) + \phi(x * y, z, w) + \phi(x * w, y * w, z * w) = \phi(x, z, w) + \phi(x * z, y * z, w) + \phi(x, y, z)$ を満たすことである.

Q_4 を四面体カンドルとする. ψ_1 を $H_2^2(Q_4; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明なコホモロジーを与える 2-コサイクルとする (arXiv 上の [2] の第 2 版). また, $H^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ に対する普遍係数定理は以下のようなになる.

$$\text{Ext}(H_2(Q_4; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_3(Q_4; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\text{Ext}(H_2(Q_4; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元を与える元の $H^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における像を ϕ_3 とおく. $\text{Hom}(H_3(Q_4; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので位数 4 の元の $H^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_1 とおく. また, 位数 2 の元で, 「別の元の 2 倍」にならない元を取り, その $H^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_2 とおく.

例として, $\phi_1 : Q_4^3 \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 1 つ固定して具体的に記述すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \left((\phi_1(0, i, j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(1, i, j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(2, i, j))_{i,j=0,1,2,3}, (\phi_1(3, i, j))_{i,j=0,1,2,3} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

本稿では他のコサイクル $\psi_1 : Q_4^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\phi_2 : Q_4^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\phi_3 : Q_4^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ も同様に具体的に 1 つ固定しておくことにする.

X を有限カンドル, A をアーベル群とし, 演算を積で書く. 結び目 K の図式を D_K , D_K の X 彩色を C , X の 2-cocycle を ψ とする. D_K の交点に対して図 2.4 のようにウェイト $W_\psi(x, C)$ を与える.

$$W_\psi \left(\begin{array}{c} \overset{x}{\swarrow} \quad \overset{y}{\searrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{x}{\swarrow} \quad \underset{y}{\searrow} \end{array} \right) = \psi(x, y), \quad W_\psi \left(\begin{array}{c} \overset{y}{\swarrow} \quad \overset{x}{\searrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{y}{\swarrow} \quad \underset{x}{\searrow} \end{array} \right) = \psi(x, y)^{-1}$$

図 2.4 1次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\psi(D_K; C) := \prod_{x: D_K \text{ の交点}} W_\psi(x, C)$ とおく. さらに, $\Psi_\psi(K) := \sum_{C \in \text{Col}_X(K)} \Psi_\psi(D_K; C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られており, これを結び目 K のカンドルコサイクル不変量と呼ぶ [1, 2].

同様に, 2次元結び目 F の図式を D_F , D_F の X 彩色を C , X の 3-cocycle を ϕ とする. D_F の 3重点に対して図 2.5 のようにウェイト $W_\phi(t, C)$ を与える.

$$W_\phi \left(\begin{array}{c} \overset{z}{\swarrow} \quad \overset{y}{\searrow} \quad \overset{x}{\swarrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \quad \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{z}{\swarrow} \quad \underset{y}{\searrow} \quad \underset{x}{\swarrow} \end{array} \right) = \phi(x, y, z), \quad W_\phi \left(\begin{array}{c} \overset{z}{\swarrow} \quad \overset{x}{\searrow} \quad \overset{y}{\swarrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \quad \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{z}{\swarrow} \quad \underset{x}{\searrow} \quad \underset{y}{\swarrow} \end{array} \right) = \phi(x, y, z)^{-1}$$

図 2.5 2次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Phi_\phi(D_F; C) := \prod_{t: D_F \text{ の 3重点}} W_\phi(t, C)$ とおく. さらに, $\Phi_\phi(F) := \sum_{C \in \text{Col}_X(F)} \Phi_\phi(D_F; C)$ とおくと, これは 2次元結び目の不変量であることが知られておりこれを 2次元結び目 F のカンドルコサイクル不変量と呼ぶ [1, 2].

結び目 K の図式を D_K , D_K のシャドー X 彩色を C , C によって $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与えられる元を x_0 , X の 3-cocycle を ϕ とする. D_K の交点に対して図 2.6 のようにウェイト $W_\phi(x^*, C)$ を与える.

$$W_\phi \left(\begin{array}{c} \overset{z}{\swarrow} \quad \overset{y}{\searrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{z}{\swarrow} \quad \underset{y}{\searrow} \end{array} \right) = \phi(x, y, z), \quad W_\phi \left(\begin{array}{c} \overset{z}{\swarrow} \quad \overset{x}{\searrow} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \underset{z}{\swarrow} \quad \underset{x}{\searrow} \end{array} \right) = \phi(x, y, z)^{-1}$$

図 2.6 シャドーコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C) := \prod_{x^*: D_K \text{ の交点}} W_\phi(x^*, C)$ とおく. さらに, $\Psi_\phi^{x_0}(K) := \sum_{C \in \text{Col}_X(K)} \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られておりこれを結び目 K のシャドーコサイクル不変量と呼ぶ [4]. また, X が Q_4 の場合, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ が非有界領域へ与えられる元によらないことが知られているため, $\Psi_\phi^*(D_K; C) := \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$, $\Psi_\phi^*(K) := \Psi_\phi^{x_0}(K)$ と書くことにする.

3 主結果

この節では, Iwakiri-Satoh 2-knot $F(K, K')$ のカンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ を K のカンドルコサイクル不変量 $\Psi_\psi(K, C)$ や K のシャドーコサイクル不変量 $\Psi_\phi^*(K, C)$ などを用いて具体的に表示する式を示す. ただし, $C \in \text{Col}_{Q_4}(K)$ に対し, $\Psi_\psi(K, C)$ で C で彩色された K のカンドルコサイクル不変量を表し, $\Psi_\phi^*(K, C)$ で C で彩色された K のシャドーコサイクル不変量を表す. また, $\iota_2: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 2 倍写像とする. また, Q_4 の 2-コサイクル ψ_1 , Q_4 の 3-コサイクル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を第 2 節で固定したものとする.

定理 3.1. K, K' を枠付き有向結び目とし, その枠を $f_K, f_{K'}, F(K, K')$ を Iwakiri–Satoh 2-knot とする. カンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'))$ について $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ の場合, 以下が成り立つ.

(1) $f_K \notin 3\mathbb{Z}$ かつ $f_{K'} \notin 3\mathbb{Z}$ のとき

$$\Phi_\phi(F(K, K')) = 4 \in \mathbb{Z}[A]$$

(2) $f_K \in 3\mathbb{Z}$ または $f_{K'} \in 3\mathbb{Z}$ のとき

$$\Phi_\phi(F(K, K')) = \begin{cases} \sum_{C \in \text{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} \cdot \{f_K \cdot \Psi_{\phi_1}^*(K, C) + \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K, C))\} & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}] \text{ (if } \phi = \phi_1) \\ \sum_{C \in \text{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} \cdot f_K \cdot \{\Psi_{\phi_2}^*(K, C) + \Psi_{\psi_1}(K, C)\} & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \text{ (if } \phi = \phi_2) \\ \#\text{Col}_{Q_4}(K) & \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \text{ (if } \phi = \phi_3) \end{cases}$$

$f_K \notin 3\mathbb{Z}$ かつ $f_{K'} \notin 3\mathbb{Z}$ のとき, $F(K, K')$ は自明な Q_4 彩色のみであることからカンドルコサイクル不変量は彩色数と等しく 4 である. また, $f_K \in 3\mathbb{Z}$ または $f_{K'} \in 3\mathbb{Z}$ のとき, $F(K, K')$ は非自明な Q_4 彩色を許容するが, K' 由来の情報は $f_{K'}$ のみであることから K' の knot type にはよらないことがわかる.

例 3.2. K を $f_K = m$ であるトーラス結び目 $T(2, 2n+3)$, K' を $f_{K'} = l$ である自明結び目とし, $F := F(K, K')$ で定める. この $F(K, K')$ に対して, Q_4 の 3-コサイクル ϕ_1 を用いたカンドルコサイクル不変量 $\Phi_{\phi_1}(F(K, K'))$ を定理を用いて計算する. ただし, ϕ_1 の終域は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{1, t, t^2, t^3\}$, ψ_1 の終域は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, t\}$ とかくことにする.

$n \notin 3\mathbb{Z}$ のとき, K は自明な彩色しか持たない. $n \in 3\mathbb{Z}$ のとき, $\#\text{Col}_{Q_4}(K) = 16$ で, 内 4 つが自明な彩色である. $C \in \text{Col}_{Q_4}(K)$ について, C が自明な彩色なとき, $\Psi_{\phi_1}^*(K, C) = 1$, $\Psi_{\psi_1}(K, C) = 1$ であり, C が非自明な彩色なとき, $\Psi_{\phi_1}^*(K, C) = t^{(-1)^n}$, $\Psi_{\psi_1}(K, C) = t = t^{(-1)^n}$ である. よって, 以下のように計算できる.

$$\Phi_{\phi_1}(F(K, K')) = \begin{cases} 4 + 12t^{(-1)^n \cdot (m+2) \cdot l} & (n \in 3\mathbb{Z} \text{ かつ } ml \in 3\mathbb{Z}) \\ 4 & (n \notin 3\mathbb{Z} \text{ または } ml \notin 3\mathbb{Z}) \end{cases}$$

また, 以下のことが知られている.

注意 3.3. Iwakiri–Satoh 2-knot は deform-spun knot である [5].

注意 3.4. roll-spun knot は Iwakiri–Satoh 2-knot である [5].

このことから, 今回の主定理の系として roll-spun knot の 4 面体カンドルに対するコサイクル不変量の具体的な表示を求めることができる.

4 定理 3.1 の証明

簡単のため $f_K = 0$ の場合についてのみ示す.

4.1 定理の証明: 方針

まず, $\tilde{C} \in \text{Col}_{Q_4}(F(K, K'))$ を 1 つとる. このとき, K' の球面上図式 D' の交点に対応する $F(K, K')$ の部分的な図式 X について考える (図 2.1). X のモーションピクチャの最初と最後には D' の上方弧と下方弧それぞれに対応する 1-タングル D の連結和が現れる. そこに \tilde{C} から誘導される D の彩色 C_1, C_2, C_3, C_4 が現れる. Iwakiri-Satoh 2-knot の構成法から $C_2 = C_3$ であり, 4 面体カンドル Q_4 の彩色であることから $C_1 = C_4$ であることが示される (後述の Step A). K' が結び目であることから \tilde{C} から誘導される D の彩色 C が唯一つ決まるため, カンドルコサイクル不変量 $\Phi_\phi(F(K, K'), \tilde{C})$ は図式 X に現れる 3 重点の重みの和 $\Phi_\phi(X, C)$ を $f_{K'}$ 倍することで得られる.

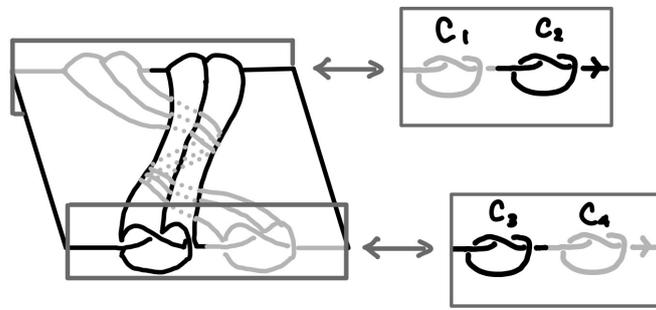


図 4.1 \tilde{C} から誘導される D の彩色

一方, $\Phi_\phi(X, C)$ の 3 重点について考える. D の 2 つの連結和について, 中を通す“小さい”図式を \underline{D} , もう一方の“大きい”図式を \overline{D} と書くことにする. モーションピクチャにおいて \underline{D} が \overline{D} の弧の上を通る場合と下をくぐる場合に分ける. 弧の上を通る場合はそのモーションピクチャでできる部分的な図式の 3 重点がちょうどシャドーコサイクル不変量の計算と対応する. また, 下をくぐる場合は計算すると 3-コサイクル ϕ と K の彩色 C によって定まる 2-コサイクルを用いたカンドルコサイクル不変量になることがわかる (後述の Step B).

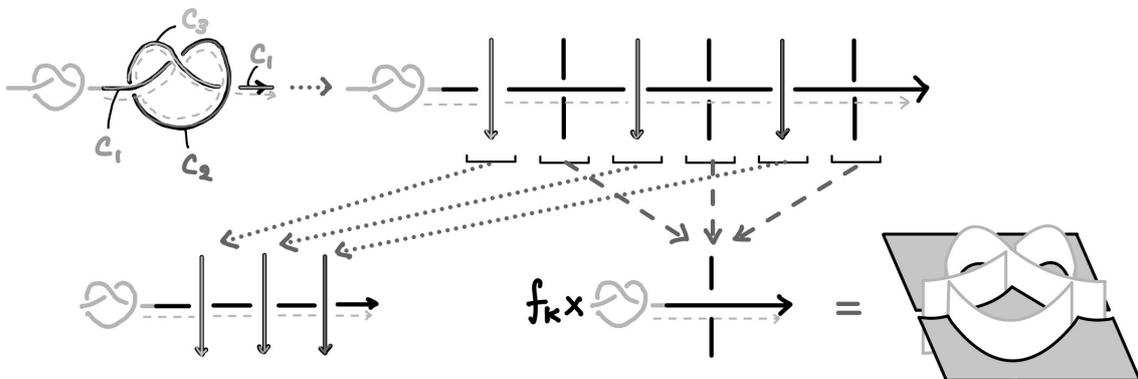


図 4.2 $\Phi_\phi(X, C)$ の計算方針

以上より, $\tilde{C} \in \text{Col}_{Q_4}(F(K, K'))$ を1つとると

$$\begin{aligned}\Phi_\phi(F(K, K'), \tilde{C}) &= f_{K'} \cdot \Phi_\phi(X, C) \\ &= f_{K'} \cdot \{f_K \cdot \Psi_\phi^*(K, C) + \Psi_\psi(K, C)\}\end{aligned}$$

の形で書くことができる. 最後に3-コサイクル ϕ と K の彩色 C を用いて構成する2-コサイクル ψ_C^ϕ が具体的にどのように記述されるかを計算することで定理が得られる (後述の Step B).

4.2 定理の証明: Step A

この節では, 図 4.1 において $C_1 = C_4$ であることを証明する.

Q_4 を4面体カンドルとし, $W(Q_4)$ を Q_4 の元の語の集合とし, 元を $x \in Q_4$ に対して $c_x \in W(Q_4)$ と表すとする.

$W(Q_4)$ の Q_4 への作用を $a \in Q_4, w = c_{x_1}^{\epsilon_1} c_{x_2}^{\epsilon_2} \cdots c_{x_n}^{\epsilon_n} \in W(Q_4)$ に対して

$a \cdot w = (\cdots((a *^{\epsilon_1} x_1) *^{\epsilon_2} x_2) \cdots *^{\epsilon_n} x_n)$ と定める.

また, 有向1-タングル図式の始点からひもに沿って上方弧に現れる色を用いて $C = c_1^{\epsilon_1} c_2^{\epsilon_2} \cdots c_n^{\epsilon_n} \in W(Q_4)$ であるとしてとらえておく.

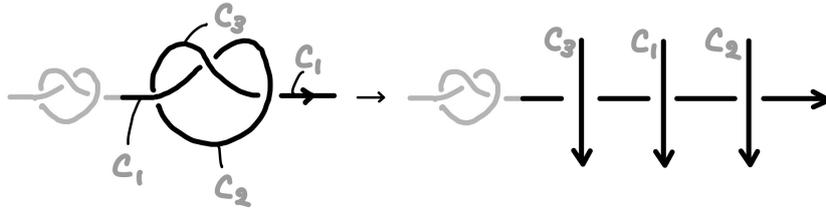


図 4.3 彩色 C の Q_4 の文字列としてのとらえ方

$\{S_x \mid x \in X\}$ で生成される群をカンドル X の内部自己同型群といい, $\text{Inn}(X)$ とかく. $\text{Inn}(Q_4)$ は4次交代群 \mathfrak{A}_4 と同型であることが知られている.

命題 4.1. Q_4 を4面体カンドルとし, K を枠付き有向結び目とする. 任意の $C \in \text{Col}_{Q_4}(K)$ に対して, 写像 $S_C: Q_4 \rightarrow Q_4$ を $S_C(x) = x \cdot C$ で定めると, この写像は恒等写像である.

証明. 以下の可換図式を考える. ただし, $Q(K)$ で K の基本カンドル, \mathfrak{A}_4 は4次交代群とする.

$$\begin{array}{ccccc} Q(K) & \longrightarrow & \pi_1(S^3 - K) & \longrightarrow & H_1(S^3 - K) \simeq \mathbb{Z} \\ c \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow \\ Q_4 & \longrightarrow & \text{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_4^{ab} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{array}$$

彩色 $C: Q(K) \rightarrow Q_4$ を $C: \pi_1(S^3 - K) \rightarrow \text{Inn}(Q_4)$ へ拡張すると標準ロンジチュード $l \in \pi_1(S^3 - K)$ の C での行先は $C(l) = S_C$ となり, メリディアン $m \in \pi_1(S^3 - K)$ の C での行先はある $* \in Q_4$ 用いて $C(m) = S_*$ となる. また, $C(l)$ を $\text{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4 \rightarrow \mathfrak{A}_4^{ab}$ で送ると, $C(l) \mapsto 0$ である. $l, m \in \pi_1(S^3 - K)$ は可換なため, $C(l), C(m) \in \text{Inn}(Q_4)$ は可換であることから, $C(l) \mapsto 0$ かつ $C(l), C(m) \in \text{Inn}(Q_4)$ は可換を満たす $C(l) \in \text{Inn}(Q_4)$ は $C(l) = \text{id}_{Q_4}$ である. したがって $S_C = \text{id}_{Q_4}$ である. ■

以降, $\text{Col}_{Q_4}(F(K, K'))$ と $\text{Col}_{Q_4}(K)$ を同一視して $\text{Col}_{Q_4}(F(K, K'))$ と $\text{Col}_{Q_4}(K)$ の元はともに C で表す.

4.3 定理の証明: Step B

この節では 3-コサイクル ϕ と K の彩色 C を用いて構成する写像 ψ_C^ϕ を定義し、 ψ_C^ϕ が 2-コサイクルであることと ψ_C^ϕ の具体的な表示について述べる.

$\phi: X^3 \rightarrow A$ を X の 3-cocycle とし、 $C = c_1^{\epsilon_1} c_2^{\epsilon_2} \cdots c_n^{\epsilon_n}$ を \bar{D} の彩色とする. $\psi_C^\phi: X^2 \rightarrow A$ を $\psi_C^\phi(x, y) = -\sum_{1 \leq i \leq n} \epsilon_i \phi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, c_i)$ と定める. ただし,

$$x_i := (\dots((x *^{\epsilon_1} c_1) *^{\epsilon_2} c_2) \cdots *^{\epsilon_i} c_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$\tilde{x}_i := \begin{cases} x_{i-1} & \epsilon_i = 1 \\ x_i & \epsilon_i = -1 \end{cases}$$

これは、ある D の交点に彩色によって x, y が与えられているとき、その交点が C で彩色された \bar{D} の上方弧の下を通り抜けるときにできる 3 重点に対するコサイクルによるウェイトを合計した値を $\psi_C^\phi(x, y)$ となるように ψ_C^ϕ を定めている.

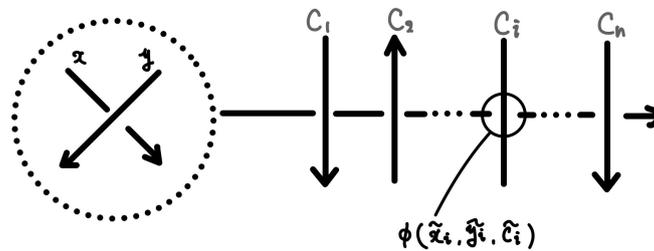


図 4.4 ψ_C^ϕ の定義

補題 4.2. $f_K = 0$ のとき、 ψ_C^ϕ は 2-コサイクル

証明. 2-コサイクル条件を確かめればよい. 実際、 $\psi_C^\phi(x, x) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} & \psi_C^\phi(x, y) - \psi_C^\phi(x, z) + \psi_C^\phi(x * y, z) - \psi_C^\phi(x * z, y * z) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (\phi(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) - \phi(x_i, y_i, z_i)) \\ &= \phi(x_0, y_0, z_0) - \phi(x_n, y_n, z_n) = 0 \end{aligned}$$

である. ■

$[\psi_C^\phi] \in H_Q^2(Q_4; A)$ は $[\psi_C^\phi] = 0$ または $[\psi_C^\phi] = [\psi_1]$ であり、 ϕ と C によって決定される. これを計算するために、 $C(l) \in \text{Inn}(Q_4) \simeq \mathfrak{A}_4$ を考える. $C = c_1^{\epsilon_1} c_2^{\epsilon_2} \cdots c_n^{\epsilon_n}$ に対して、命題 4.1 より、 $C(l) = S_{c_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ S_{c_2}^{\epsilon_2} \circ S_{c_1}^{\epsilon_1} = \text{id}_{Q_4}$ であることから、 \mathfrak{A}_4 のケーリーグラフにおいて $C(l)$ は始点と終点を単位元とする閉じた道として見る事ができる. ただし、 $\mathfrak{A}_4 = \langle S_0, S_1 \mid S_0^3 = S_1^3 = 1, S_1 S_0 S_1 = S_0 S_1 S_0 \rangle$ で、 $S_2 = S_0^{-1} S_1 S_0, S_3 = S_1^{-1} S_0 S_1$ として $C(l)$ を S_0, S_1 のみを用いて表すことで閉じた道としてとらえるものとする. これにより、 $C(l)$ を単位元を始点終点とする三角形および四角形を 1 回だけ回る閉じた道に分解することで計算を行う.

$\psi_1, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ を第 2 節で定めたにある Q_4 のコサイクルとする. また、 $\iota_2: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 2 倍写像とする. ψ_C^ϕ について具体的に計算することで以下のことがわかる.

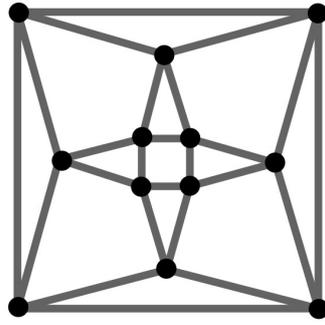


図 4.5 \mathfrak{A}_4 のケーリーグラフ

命題 4.3. $f_K = 0$ のとき, ψ_C^ϕ について $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ に場合に計算すると以下ようになる.

$$\psi_C^\phi(x, y) = \begin{cases} \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K, C) \cdot \psi_1(x, y)) & \phi = \phi_1 \\ 0 & \phi = \phi_2, \phi_3 \end{cases}$$

証明. 三角形および四角形を 1 回だけ回る閉じた道について具体的に計算を行う.

・ $\phi = \phi_1$ の場合

四角形を 1 回だけ回る閉じた道のとき $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\psi_1)$ である. よって, $C(l)$ が囲う四角形の数
が奇数個のとき, $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\psi_1)$ であり, $C(l)$ が囲う四角形の数
が偶数個のとき, $\psi_C^{\phi_1} = 0$ である. 一方, $C(l)$ が囲う四角形
の数
が奇数個のとき $\Psi_{\psi_1}(K, C) = 1$ であり, 偶数個のとき, $\Psi_{\psi_1}(K, C) = 0$
であることも同様にして計算でき, $\psi_C^{\phi_1}$ の非自明性と $\Psi_{\psi_1}(K, C)$ の非自明性が同値であることが
確認できる. まとめると $\psi_C^{\phi_1} = \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K, C) \cdot \psi_1)$ を得る.

・ $\phi = \phi_2$ の場合

三角形を 1 回だけ回る閉じた道のとき $\psi_C^{\phi_2} = \psi_1$ である. $C(l)$ が囲う三角形の数
が奇数個のとき, $\psi_C^{\phi_2} = \psi_1$ であり, $C(l)$ が囲う三角形の数
が偶数個のとき, $\psi_C^{\phi_2} = 0$ である. $C(l)$ が囲う三角形
の数の偶奇は f_K の偶奇に対応しており, $f_K = 0$ であることから $\psi_C^{\phi_2} = 0$.

・ $\phi = \phi_3$ の場合

常に $\psi_C^{\phi_3} = 0$ である. ■

謝辞

本研究集会にて講演の機会を与えてくださった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます. また, 本研究に関して様々な助言をくださった大槻知忠先生, 佐藤進先生, 石川勝巳先生, 和田康載先生に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156.

- [2] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [3] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, M.Saito, *Quandle homology groups, their Betti numbers, and virtual knots*, J.Pure Appl.Algebra **157** (2001) 135-155.
- [4] J.S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology and cocycle knot invariants*, J.Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–358.
- [5] M.Iwakiri, S.Satoh, *Quandle cocycle invariants of roll-spun knots*, RIMS kokyuroku **1766** (2011) 30-37.
- [6] H.Takeda, *The cocycle invariant of twist spun knots for the tetrahedral quandle*, Master thesis, Kyoto University, (2008).

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
Email address: uedayd@kurims.kyoto-u.ac.jp