

knot Floer homology における二種類の位数と Upsilon torsion invariant

姫野 圭佑 (広島大学先進理工系科学研究科数学プログラム D2)*

概 要

S^3 内の結び目に対し, minus knot Floer homology と unoriented knot Floer homology は $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持つ. ねじれ部分加群を消すために必要な U の作用の最小回数を考えることで knot Floer torsion order Ord , unoriented knot Floer torsion order Ord' という非負整数値結び目不変量をそれぞれ取り出すことができる. 本講演では, 与えられた (unoriented) order を実現する双曲的結び目が存在することを紹介する. 計算は二つの不変量を統合した不変量である Upsilon torsion invariant を用いた.

1. 導入と主結果

\mathbb{F}_2 を位数 2 の有限体とし, $\mathbb{F}_2[U]$ を変数を U とした \mathbb{F}_2 係数一変数多項式環とする. 一般に, $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群 M には, U に関するねじれ部分加群 $\text{Tor}(M) := \{x \in M \mid U^n \cdot x = 0 \text{ for some } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ が定まり, $\text{Ord}(M) := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid U^n \cdot \text{Tor}(M) = \{0\}\}$ と torsion order を定めることができる. $\text{Tor}(M) = \{0\} \iff \text{Ord}(M) = 0$ に注意.

K を S^3 内の結び目とする. この K に対して, minus knot Floer homology $\text{HF}K^-(K)$ [17] と unoriented knot Floer homology $\text{HF}K'(K)$ [16] が定義され, ともに $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持つ. 上の話から, knot Floer torsion order $\text{Ord}(K)$ と unoriented knot Floer torsion order $\text{Ord}'(K)$ を

$$\text{Ord}(K) := \text{Ord}(\text{HF}K^-(K))$$

$$\text{Ord}'(K) := \text{Ord}(\text{HF}K'(K))$$

で定めることができる. これらはともに非負整数値の結び目不変量である.

注意 1. O を unknot とすると, $\text{Tor}(\text{HF}K^-(O)) = \text{Tor}(\text{HF}K'(O)) = \{0\}$ なので $\text{Ord}(O) = \text{Ord}'(O) = 0$ である. 逆に, $\text{HF}K^-(K)$ は unknot を detect することから [18], $\text{Ord}(K) = 0$ ならば $K = O$ が分かる. $\text{HF}K'(K)$ についても同様に, 少し議論をすると, $\text{Ord}'(K) = 0$ ならば $K = O$ が分かる. つまり, $\text{Ord}(K) = 0 \iff \text{Ord}'(K) = 0 \iff K = O$ である.

$\text{Ord}(K)$ は [7] で導入され, 結び目コボルディズムとの関連を調べている. また, $\text{Ord}'(K)$ は, $\text{Ord}(K)$ の向きづけ不可能版として [3] で導入され, 向きづけ不可能結び目コボルディズムとの関連が調べられている. 詳細は, 副節 2.1, 2.2 で紹介する.

不変量の実現問題に着目する, つまり, 与えられた不変量を実現する結び目が存在するか, 存在するならばどのようなものかを考えたい. $\text{Ord}(K)$, $\text{Ord}'(K)$ に関しては次の結果がある.

命題 1 ([3, 7]). $T_{p,q}$ を (p, q) -torus knot とする.

- $\text{Ord}(T_{p,q}) = \min\{p, q\} - 1$,

* e-mail: himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

- $\text{Ord}'(T_{p,p+1}) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$.

注意 2. 一般の torus knot に対する Ord' の公式はまだ与えられていない。

したがって、任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $\text{Ord}(K_1) = N$, $\text{Ord}'(K_2) = N$ をみたす結び目 K_1, K_2 は torus knot として実現できる。では、双曲的結び目ではどうかというのが本研究の主結果である。

定理 1. 任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $\text{Ord}(K_1) = N$, $\text{Ord}'(K_2) = N$ をみたす双曲的結び目 K_1, K_2 がそれぞれ無限個存在する。

この定理を確かめるために、ある twisted torus knot の族に対して *Upsilon torsion invariant* Υ_K^{Tor} [1] を計算した。詳細は次の節で与えるが、 Υ_K^{Tor} は $\text{Ord}(K)$, $\text{Ord}'(K)$ の情報を持った不変量である。 Υ_K^{Tor} が一致するような結び目の組は簡単に見つかる。例えば、torus knot の族 $\{K_{p,pk+1}\}_{k=1}^{\infty}$ はすべて Υ_K^{Tor} が一致する。また、非自明な alternating knot (もっと広く *Floer thin knot*) に対してもすべて Υ_K^{Tor} が一致することが簡単に分かる。そして、今回の計算により副産物として次を得た。

系 1. Υ_K^{Tor} が一致する Floer thin でない双曲的結び目が無限に存在する。

残された問題もある。

問題 1. $M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $\text{Ord}(K) = M$ かつ $\text{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？もう少し弱く、 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $\text{Ord}(K) = \text{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？

今のところ経験的には $\text{Ord}'(K) \leq \text{Ord}(K)$ が成立するのでは無いかと思っているのだが、証明には至っていない。また、非自明な alternating knot K に対して、 $\text{Ord}(K) = \text{Ord}'(K) = 1$ が成立するが、それ以外に $\text{Ord}(K) = \text{Ord}'(K)$ が成立する結び目は知らない。

本稿の内容は [4] に基づく。

2. knot Floer homology, torsion order, Upsilon torsion invariant

この節では torsion order と Upsilon torsion invariant について簡単に紹介する。そのためには knot Floer homology の知識が必要だが、全てを述べるにはページが足りないため省略する。knot Floer homology の詳細は、例えば [5, 13, 17] を参照されたい。

2.1. torsion order $\text{Ord}(K)$

前述した通り、結び目 $K \subset S^3$ から minus knot Floer homology $\text{HFK}^-(K)$ が得られる。これは $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持ち、 $\text{HFK}^-(K) \cong \mathbb{F}_2[U] \oplus \text{Tor}(\text{HFK}^-(K))$ と分解できる。繰り返しになるが、

$$\text{Ord}(K) = \min\{n \mid U^n \cdot \text{Tor}(\text{HFK}^-(K)) = \{0\}\}$$

である。

例 1. 図 2.1 の左は $(3,4)$ -torus knot $T_{3,4}$ の minus knot Floer complex $\text{CFK}^-(T_{3,4})$ を表す。点が \mathbb{F}_2 上の生成元であり、矢印が微分を表す (例えば、 $\partial b = Ua$)。この complex の homology を考えると、

$$\text{HFK}^-(T_{3,4}) = \mathbb{F}_2[U]\langle e \rangle \oplus \langle a, c \mid Ua = 0, U^2c = 0 \rangle$$

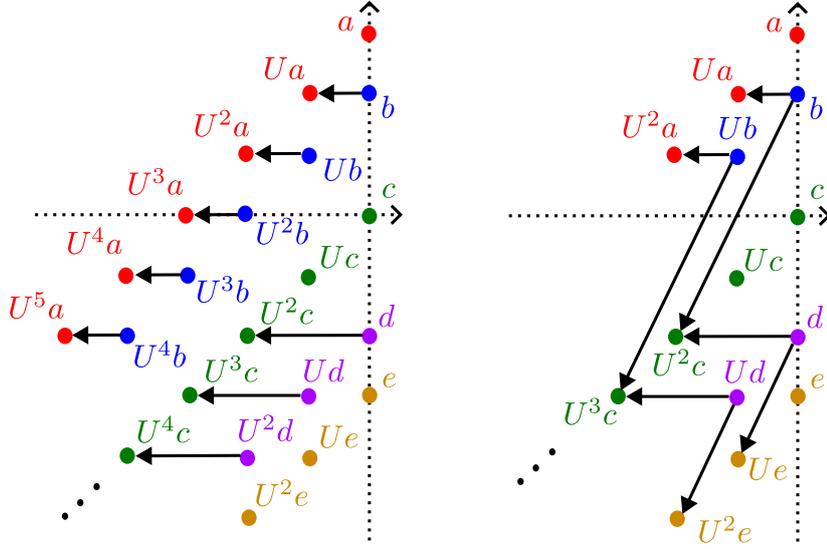


図 1: (左) $\text{CFK}^-(T_{3,4})$. (右) $\text{CFK}'(T_{3,4})$.

を得る. したがって, $\text{Ord}(T_{3,4}) = 2$ である ($c \neq 0$ を消すのに U^2 が必要).

Ord が導入された [7] では, cobordism map (例えば [21]) を活用して次のことが示された: S を K_0 から K_1 へのコボルディズムで極大点が M 個のものとする. このとき, $\text{Ord}(K_0) \leq \max\{M, \text{Ord}(K_1)\} + 2g(S)$ が成立する. さらに, この系として, $\text{Ord}(K) \leq \text{bridge}(K) - 1$ も得られる.

2.2. unoriented torsion order $\text{Ord}'(K)$

例 2. 図 2.1 の右は $(3, 4)$ -torus knot $T_{3,4}$ の unoriented knot Floer complex $\text{CFK}'(T_{3,4})$ を表す. 再び, 点が \mathbb{F}_2 上の生成元であり, 矢印が微分を表す (例えば, $\partial b = Ua + U^2c$). この complex の homology を考えると $\text{HFK}'(T_{3,4})$ を得られ,

$$\text{Tor}(\text{HFK}^-(T_{3,4})) = \{0, a + Uc, Uc + e, a + e\}$$

となる (\mathbb{F}_2 係数であることに注意. 例えば, $U(a + Uc) = Ua + U^2c = 2 \cdot Ua = 0$ となる). したがって, $\text{Ord}'(T_{3,4}) = 1$ である.

Ord' が導入された [3] では次のことが示された: S' を K_0 から K_1 への向きづけ不可能なコボルディズムで極大点が M 個のものとする. このとき, $\text{Ord}'(K_0) \leq \max\{M, \text{Ord}'(K_1)\} + \gamma(S')$ が成立する ($\gamma(S')$ は S' の crosscap の個数, 向きづけ不可能種数とも呼ばれる).

2.3. Upsilon torsion invariant

結び目 K に対し, 関数 $\Upsilon_K^{\text{Tor}}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ が定義できる [1]. これを *Upsilon torsion invariant* と呼ぶ. これは以下の性質を持つ:

1. Υ_K^{Tor} は連続かつ区分線形,
2. $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(2 - t) = \Upsilon_K^{\text{Tor}}(t)$, $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(0) = \Upsilon_K^{\text{Tor}}(2) = 0$,
3. $\frac{d}{dt} \Upsilon_K^{\text{Tor}}(0) = \text{Ord}(K)$, $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(1) = \text{Ord}'(K)$,

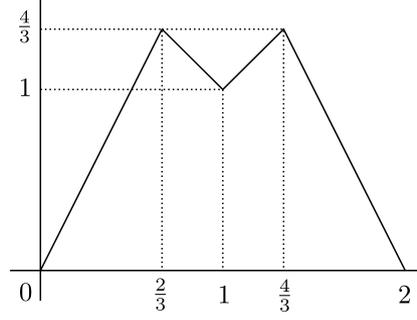


図 2: $T_{3,4}$ の Upsilon torsion invariant.

4. $\text{CFK}^\infty(K)$ から計算可能.

性質 3 より, Upsilon torsion invariant は Ord と Ord' の一般化になっていると言える.

例 3. 図 3 は, $\Upsilon_{T_{3,4}}^{\text{Tor}}$ のグラフである. 原点付近の傾きが 2 で $\Upsilon_{T_{3,4}}^{\text{Tor}}(1) = 1$ であることは, $\text{Ord}(T_{3,4}) = 2$, $\text{Ord}'(T_{3,4}) = 1$ であることと対応している.

Υ_K^{Tor} の細かい定義は省略するが, 具体的な計算例を例 4 で与える.

3. 主結果の概要

定理 1 の証明の概要を述べる. $T(p, q; 2, 1)$ を, (p, q) -torus knot の隣り合った二本のひもを追加で 1 回右手系フルツイストした twisted torus knot とする.

命題 2. $p \geq 4$, $k \geq 1$ のとき, $K = T(p, pk + 1; 2, 1)$ に対して,

$$\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t) = \begin{cases} (p-1)t & (0 \leq t \leq \frac{2}{p}) \\ 2-t & (\frac{2}{p} \leq t \leq \frac{2}{p-2}) \\ (p-3)t & (\frac{2}{p-2} \leq t \leq \frac{4}{p}) \\ 2m + (-m-1)t & (\frac{2m}{p} \leq t \leq \frac{2m}{p-1}, m = 2, \dots, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor) \\ (p-2-m)t & (\frac{2m}{p-1} \leq t \leq \frac{2(m+1)}{p}, m = 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1) \end{cases}$$

が成立する.

$\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t)$ は $t = 1$ で対称的なので, $0 \leq t \leq 1$ のみ考えれば十分である. この計算は非常に煩雑なので, のちに具体例を挙げるのみにとどめておく (例 4). Upsilon torsion invariant の性質より次を得る.

系 2. twisted torus knot $K = T(p, pk + 1; 2, 1)$ ($p \geq 4, k \geq 1$) は次を満たす:

- $\text{Ord}(K) = p - 1$,
- $\text{Ord}'(K) = \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor$.

注意 3. $p = 2, 3$ でも $\text{Ord}(K) = p - 1$ は成立する. しかしこのとき, $\text{Ord}'(K) = 1$ である.

さらに, 次の命題は講演では詳細は述べていなかったが, ここで示しておく.

命題 3. $p \geq 5$ のとき, $K = T(p, pk + 1; 2, 1)$ ($k \geq 1$) は hyperbolic knot.

証明. まず, $K = T(p, pk + 1; 2, 1)$ が torus knot であるのは, $p = 2, 3$ のときのみである [11]. したがって, 今考えている結び目は torus knot ではない.

K が satellite knot であると仮定して矛盾を導く. ここで, K は tunnel number 1 の L -space knot であり [20], companion は torus knot $T_{r,s}$ ($1 < r < s$) とできる [14].

一方, [6] より, pattern は positive n -braid の閉包であり, [14] の構成からその braid は,

$$\beta = \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$$

と表せる. ただし, $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ は positive Artin generator で i は $n - 1$ 次の置換である.

主張 1. $\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$ の閉包は, $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs+1}$ の閉包と同値.

アルゴリズムを与える. 二つの braid β_1 と β_2 の閉包が同値なとき, $\beta_1 \sim \beta_2$ と表すことにし, $F = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^{nrs}$ とおく. つまり, $\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F \sim \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} F$ を示したい.

以下, word といったら空語も含む. $\sigma_i \cdot W \cdot F \sim W \cdot \sigma_i \cdot F$ であることに注意 ($i = 1, \dots, n - 1$, W は任意の word). また, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$) にも注意.

まず, $\sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F = U_1 \sigma_1 U_2 F \sim \sigma_1 U_2 U_1 F$ とできる (U_1, U_2 は σ_1 を含まない word). ここで, $U_2 U_1 = V_1 \sigma_2 V_2$ (V_1, V_2 は σ_1, σ_2 を含まない word) とでき,

$$\begin{aligned} \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F &\sim \sigma_1 U_2 U_1 F \\ &= \sigma_1 V_1 \sigma_2 V_2 F \\ &\sim V_1 \sigma_1 \sigma_2 V_2 F \\ &\sim \sigma_1 \sigma_2 V_2 V_1 F \end{aligned}$$

となる.

次に, $V_2 V_1 = R_1 \sigma_3 R_2$ (R_1, R_2 は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を含まない word) とでき,

$$\begin{aligned} \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(n-1)} F &\sim \sigma_1 \sigma_2 V_2 V_1 F \\ &= \sigma_1 \sigma_2 R_1 \sigma_3 R_2 F \\ &\sim R_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R_2 F \\ &\sim \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R_2 R_1 F \end{aligned}$$

となる.

以上を繰り返すことで, 主張が示される. □

したがって今, K は torus knot $T_{r,s}$ の $(n, nrs + 1)$ -cable である. [12] より, そのような twisted torus knot は $T(4, 4k + 1; 2, 1)$ のみ, つまり $p = 4$ に限られる (Alexander 多項式を見るとわかる). 今, $p \geq 5$ としているので矛盾. □

注意 4. 証明にあるように, $p = 2, 3, 4$ のとき $K = T(p, pk + 1; 2, 1)$ は hyperbolic knot でない. 実際, $T(2, 2k + 1; 2, 1) = T_{2, 2k+3}$, $T(3, 3k + 1; 2, 1) = T_{3, 3k+2}$ であり, $T(4, 4k + 1; 2, 1)$ は $T_{2, 2k+1}$ の $(2, 4k + 1)$ -cable である.

注意 5. 上の証明では、実際は、tunnel number one, fully positive braid ([6] の意味) が satellite ならば cable knot であることを述べている. [12] の Question 1.2 で、ある条件を満たす twisted torus knot が satellite ならば cable か? という問いが与えられており、上はそのことに部分的に答えている.

これらを用いて、定理 1 の証明を与える.

定理 1 の証明. まず、 $\text{Ord}'(K_1)$ の方は上の twisted torus knot のみで示せる: $K_1 = T(2N+3, (2N+3)k+1; 2, 1)$ ($k \geq 1$) とすると、 $\text{Ord}'(K_1) = N$ かつ K_1 は hyperbolic. 次に $\text{Ord}(K_0) = N$ について考える.

- $N \geq 4$ のとき、 $K_0 = T(N+1, (N+1)k+1; 2, 1)$ ($k \geq 1$) とすると、 $\text{Ord}(K_0) = N$ かつ K_0 は hyperbolic.
- 一般に $\text{Ord}(K) \leq \text{br}(K)-1$ なので [7], 2-bridge hyperbolic knot K_0 は $\text{Ord}(K_0) = 1$ (実際には alternating hyperbolic knot で良い).
- $K_0 = T(3, 4; 2, s)$ ($s \geq 2$) は L -space knot [20] で、[9] より $\text{Ord}(K_0) = 2$. $T(3, 4; 2, s)$ が torus knot もしくは satellite knot であるのは $|s| = 1$ のときのみ [10][11]. したがって、 K_0 は hyperbolic.
- $K_0 = [(2, 1, 3, 2)^{2n+1}, -1, 2, 1, 1, 2]$ ($n \geq 1$) は hyperbolic [2] で $\text{Ord}(K_0) = 3$ [9].

□

さて、命題 2 の計算は以下の事実を活用して計算される:

- Υ_K^{Tor} は $\text{CFK}^\infty(K)$ から計算可能 [1].
- L -space knot K の $\text{CFK}^\infty(K)$ は、その Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ から計算可能 (L -space knot は lens space surgery を持つ結び目の Heegaard Floer 理論的な一般化).
- $T(p, pk+1; 2, 1)$ ($p \geq 4, k \geq 1$) は L -space knot [20].
- $T(p, pk+1; 2, 1)$ ($p \geq 4, k \geq 1$) の Alexander 多項式は [15] の公式がある.

最後に具体的な計算例を挙げる.

例 4. $K = T(5, 6; 2, 1)$ の Upsilon torsion invariant Υ_K^{Tor} を計算する. まず、 $\Delta_K(t) = 1 - t + t^5 - t^6 + t^7 - t^8 + t^{10} - t^{11} + t^{12} - t^{14} + t^{15} - t^{16} + t^{17} - t^{21} + t^{22}$ であり、指数の差を見ると 1, 4, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1 となっている. したがって、 $\text{CFK}^\infty(K)$ は図 4 のようになる.

Υ_K^{Tor} の変数 $t \in [0, 2]$ を決め、座標 (u, v) の生成元 x に \mathbb{R} -filtration level $\text{FL}(x)$ を $\text{FL}(x) = tv + (2-t)u$ で与える. filtered base change ($\text{FL}(a) \geq \text{FL}(b)$ かつ a, b の homological grading が一致しているときに、 $a \mapsto a+b$ とすること) で chain complex を “孤立頂点” と “線分型” に分割する. このとき、 $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t) = \max\{\text{線分型の filtration level 差}\}$ である [1].

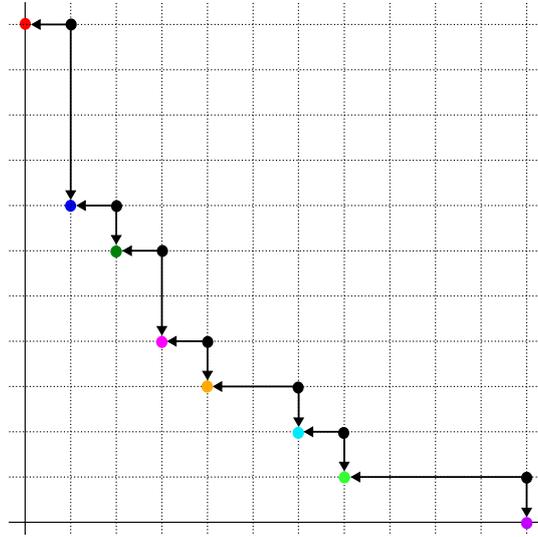


図 3: $\text{CFK}^\infty(T(5, 6; 2, 1))$ (の基本領域). 矢印の“長さ”を左上から読むと, 指数の差の列 $1, 4, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1$ と一致している.

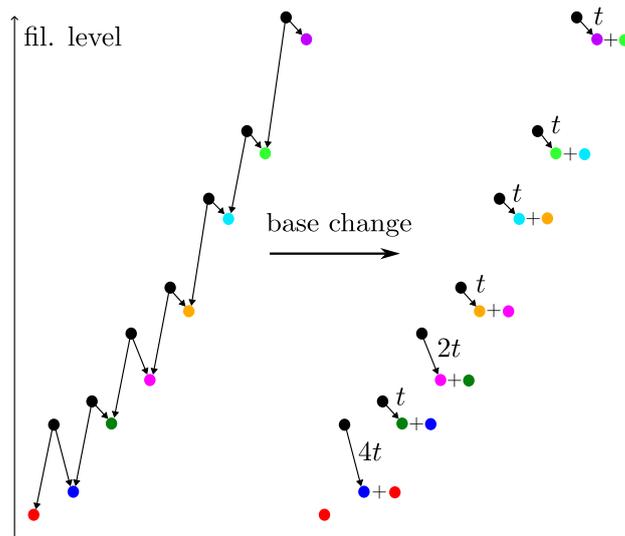


図 4: $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$ における filtered base change の様子. ラベルは filtration level 差.

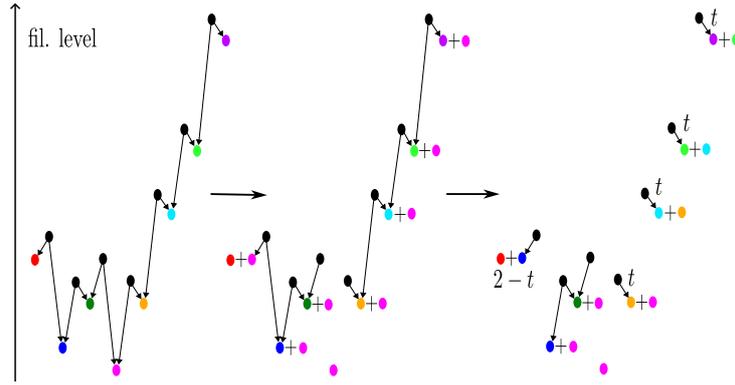


図 5: $\frac{4}{5} \leq t \leq 1$ のときの base change.

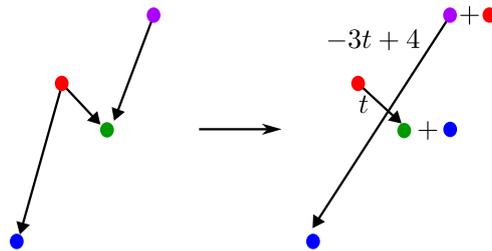


図 6: “N型” complex の処理 (上二つの点の色はここで新しく設定した).

- $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$ のとき. chain complex と filtered base change は図 4 のようにできる. したがって, $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t) = 4t$.
- $\frac{4}{5} \leq t \leq 1$ のとき. まず, 図 4 のように base change 行う.
次に “N型” complex を図 4 のように処理する.
以上より, $\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t) = -3t + 4$ となる.

他の場合も同様にして,

$$\Upsilon_K^{\text{Tor}}(t) = \begin{cases} 4t & (0 \leq t \leq \frac{2}{5}) \\ 2-t & (\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}) \\ 2t & (\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{5}) \\ -3t+4 & (\frac{4}{5} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

を得る. 図 4 はそのグラフである.

謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」において講演の機会を与您てくださった世話人の谷山公規先生, 安原晃先生, 山口祥司先生, 丹下稜斗先生に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] Samantha Allen and Charles Livingston, *An Upsilon torsion function for knot Floer homology*, to appear, Math. Research Letters. arXiv:2208.04768.

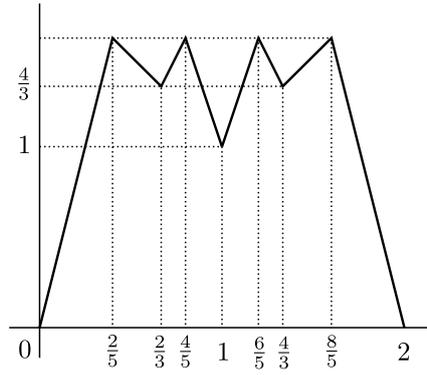


図 7: $\Upsilon_{T(5,6;2,1)}^{\text{Tor}}(t)$ のグラフ.

- [2] Kenneth Baker and Marc Kegel, *Census L -space knots are braid positive, except for one that is not*, *Algebr. Geom. Topol.* **24** (2024), no.1, 569–586.
- [3] Sherry Gong and Marco Marengon, *Nonorientable link cobordisms and torsion order in Floer homologies*, *Algebr. Geom. Topol.* **23** (2023), no.6, 2627–2672.
- [4] Keisuke Himeno and Masakazu Teragaito, *Hyperbolic knots with arbitrarily large torsion order in knot Floer homology*, preprint. arXiv:2412.20652.
- [5] Jennifer Hom, *A survey on Heegaard Floer homology and concordance*, *J. Knot Theory Ramifications* **26** (2017), no.2, 1740015, 24 pp.
- [6] Tetsuya Ito, *Satellite fully positive braid links are braided satellite of fully positive braid links*, preprint. arXiv:2402.01129.
- [7] András Juhász, Maggie Miller and Ian Zemke, *Knot cobordisms, bridge index, and torsion in Floer homology*, *J. Topol.* **13** (2020), no.4, 1701–1724.
- [8] David Kratovich, *The reduced knot Floer complex*, *Topology Appl.* **194** (2015), 171–201.
- [9] Siddhi Krishna and Hugh Morton, *Twist positivity, L -space knots, and concordance*, preprint. arXiv:2211.17109.
- [10] Sangyop Lee, *Satellite knots obtained by twisting torus knots: hyperbolicity of twisted torus knots*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2018), no.3, 785–815.
- [11] Sangyop Lee, *Positively twisted torus knots which are torus knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **28** (2019), no. 3, 1950023, 13 pp.
- [12] Sangyop Lee, *Cable knots obtained by positively twisting torus knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **32** (2023), no. 3, Paper No. 2350018, 15 pp.
- [13] Ciprian Manolescu, *An introduction to knot Floer homology*, *Physics and mathematics of link homology*, *Contemp. Math.*, **680** Centre Rech. Math. Proc. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, 99–135.
- [14] Kanji Morimoto and Makoto Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, *Math. Ann.* **289** (1991), no. 1, 143–167.
- [15] Hugh Morton, *The Alexander polynomial of a torus knot with twists*, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), no.8, 1037–1047.
- [16] Peter Ozsváth, András Stipsicz and Zoltán Szabó, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, *Adv. Math.* **315** (2017), 366–426.
- [17] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, *Adv. Math.* **186** (2004), no.1, 58–116.
- [18] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, *Geom. Topol.* **8** (2004), 311–334.

- [19] Horst Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954), 245–288.
- [20] Faramarz Vafaee, *On the knot Floer homology of twisted torus knots*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. **15**, 6516–6537.
- [21] Ian Zemke, *Link cobordisms and functoriality in link Floer homology*, J. Topol. **12** (2019), no. 1, 94–220.