

結び目ホモロジーとシンプレクティック・コンタクト幾何学

飯田暢生

2025 年 1 月 30 日

概要

種々の結び目ホモロジーのサーベイを行い、さらに筆者らの共同研究で $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten 理論を用いて新しく導入した結び目コホモロジー理論およびそれから構成されるスライス–トラス不変量 q_M について概説する。

3 次元多様体 Y 内の成分数 l の絡み目とは、 l 個の S^1 の非交和の S^3 への埋め込み $L : \amalg_l S^1 \hookrightarrow Y$ のことをいい、その中でも成分数 l が 1 であるものを Y 内の結び目という。例えば、 l 枚の D^2 の滑らかな埋め込み $\amalg_l D^2 \hookrightarrow Y$ の境界である絡み目を Y 内の l 成分の自明絡み目 (unlink) といい $U_l \subset Y$ と書く。特に成分数 l が 1 であるものを自明結び目 (unknot) といい、 $U \subset Y$ と書く。結び目を (up to アイソトピーで) 分類すること、結び目の不変量を構成したりそれらの代数的性質や幾何との関係を調べることは結び目理論における基本的な問題であり、組み合わせ的アプローチ、幾何的なアプローチなどさまざまな研究方法がある。また、結び目は、低次元トポロジーにおいて、分岐被覆やさまざまな手術 (例えば、3 次元多様体の Dehn 手術、 $T^2 \times D^2$ が埋め込まれた 4 次元多様体の Fintushel–Stern 手術はその代表例である) を通して、豊富な具体例や問を提供する。本稿では 4 次元の視点および、シンプレクティック・コンタクト幾何の視点で結び目理論を論じたい。

*1

1 結び目理論のサーベイ: 4 次元 & シンプレクティック・コンタクト幾何の視点から

1.1 Seifert 曲面/種数 (絡み目の種数) と, Murasugi 曲面/種数 (4-ball 種数, スライス種数), その古典的アプローチ

最も基本的で盛んに研究されているのは $Y = S^3$ 内の絡み目であり、以下これを考える。与えられた有向絡み目 $L \subset S^3$ の Seifert 曲面とは、 S^3 に滑らかに埋め込まれた有向曲面 S であって、 $\partial S = L$ であるもののことをいい、 L の Murasugi 曲面とは、 D^4 に滑らかかつ proper に埋め込まれた有向曲面 S であって、 $\partial S = L$ であるものをいう。

結び目 K の連結 Seifert 曲面の種数の最小値は Seifert 種数 (あるいは単に結び目/絡み目の種数) とよばれ、ここではこれを $g_3(K)$ と書く。結び目 K の連結 Murasugi 曲面の最小値は 4-ball 種数 (あるいはスライス種数, Murasugi 種数) とよばれ、ここではこれを $g_4(K)$ と書く。 g_3, g_4 の有向絡み目への拡張を考えると、連結な曲面に限る場合もあれば (closed component を持たない) 非連結な曲面を許して考える場合もあり、種数概念にもさまざまな可能性があり得る。連結な Seifert/Murasugi 曲面を考える際には、同様に種数の最小値を $g_3(L), g_4(L)$ のように書くことにする。非連結な曲面を許し、Euler 数 $\chi(S)$ の最大値 $\chi_3(L), \chi_4(L)$ を考えるというのはまた一つの立場である。後述する locally flat なものに対しては同様である。Murasugi 曲面の定義で、滑らかな埋め込みの代わりに、locally flat な埋め込み*2 を考えたバージョンは位相的 4-ball 種数とよばれ、ここでは $g_4^{top}(K)$ と書く。これらは向き付き絡み目のアイソトピー不変量であり、全ての成分の向きを一斉に逆にしても不変であるが、個々の成分の向きには依存することに注意する。Seifert のアルゴリズムにより、Seifert 曲面は少なくとも一つは存在する。また、Seifert 曲面が一つあったとき、それに T^2 を連結和することで、種数が 1 だけ大きなものを作ることができるので、Seifert 種数の最小値 $g_3(K)$ を知ることは、種数のとりうる値の全体を知ることと等価である。 $g_4(K), g_4^{top}(K)$ についても同様である。

任意の結び目 K (あるいは有向絡み目) に対し不等式

$$g_4^{top}(K) \leq g_4(K) \leq g_3(K)$$

が成り立つことは容易にわかる。実際、一つ目の不等式は定義から明らかであり、二つ目の不等式は Seifert 曲面が与えられたとき、それを D^4 の内部に押し出して、同じ種数を持つ Murasugi 曲面が作れることからわかる。

♣ 1.1.1 曲面コボルディズムとコンコーダンス群, スライス結び目

$L_0, L_1 \subset S^3$ を二つの有向絡み目とする。曲面コボルディズム $S : L_0 \rightarrow L_1$ とは、滑らかかつ proper に埋め込まれた曲面 $S \subset [0, 1] \times S^3$ であって、 $S \cap \{i\} \times S^3 = L_i$, ($i = 0, 1$) かつ向き込みで $\partial S = -L_0 \amalg L_1$ となっているもののことをいう。

*1 謝辞: 議論やコメント、指摘、質問への回答をしてくださった、谷口正樹さん、佐藤光樹さん、佐野岳人さん、磯島司さん、鈴木龍正さん、古田幹雄先生に感謝を申し上げる。

*2 曲面の位相的 4 次元多様体への proper な C^0 埋め込み $\Sigma \hookrightarrow X$ が locally flat であるとは、 Σ の各点が X におけるある近傍 U であって、 $(U, U \cap \Sigma)$ が $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ に同相な (境界の点では $(\mathbb{R}_+^4, \mathbb{R}_+^2)$ に同相な) 近傍を持つことをいう。locally flat な部分多様体の法束とは、ベクトル束 $E \rightarrow \Sigma$ と埋め込み $E \rightarrow M$ であって、ゼロ切断が Σ の埋め込みに一致しかつ、 E は拡大可能 (extendable)、すなわち、 E が別のベクトル束 $F \rightarrow \Sigma$ に open unit disk bundle として埋め込まれているならば、 $E \rightarrow X$ は埋め込み $F \rightarrow M$ に拡張できることをいう。位相的 4 次元多様体の locally flat proper 部分多様体は、法束をもち、それは ambient アイソトピーを除いて一意であることが知られている。[15] の 1.6.1 節や [40] の 9.3 節を参照。なお、単に Murasugi 曲面の定義において、 D^4 への埋め込みを (locally flat を課さずに) C^0 に変えただけでは、結び目 K のコーンをとることで種数の最小値は常にゼロとなってしまう、興味深いものではなくってしまう。

ここで、絡み目 $L \subset S^3$ に対し、その向きを逆向きにしたものを L^r 、 L の鏡像を $m(L)$ とかき、 $-L = m(L^r)$ (これはしばしば L のコンコダンス逆とよばれる) と書いた。有向結び目 $K_0, K_1 \subset S^3$ に対し、連結な種数 0 の (i.e. アニュラスに同様な) 曲面コボルディズム $A: K_0 \rightarrow K_1$ が存在するとき、 K_0 と K_1 はコンコダントであるという。^{*3} これは同値関係であり、 K_0 と K_1 がコンコダントであることと $g_4(K_0 \# -K_1) = 0$ であることは同値であることが確かめられる。また、 g_4 は明らかにコンコダンス不変である。集合

$$\mathcal{C} = \{S^3 \text{ 内の有向結び目} \} / \text{コンコダント}$$

は、連結和を加法、コンコダンス逆を逆元とするアーベル群の構造を持つ。これをコンコダンス群という。

結び目 $K \subset S^3$ であって、 $g_4(K) = 0$ を満たす、すなわち、種数 0 の連結 Murasugi 曲面 (スライス円版) を持つものは豊富に存在する。^{*4} そのような結び目をスライス結び目とよぶ。例えば、任意の有向結び目 K に対し $K \# (-K)$ はスライス結び目である。同様に $g_4^{\text{top}}(K) = 0$ である結び目 $K \subset S^3$ を位相的スライス結び目とよぶ。「スライス結び目=自明結び目にコンコダントな結び目=コンコダンス群の単位元を代表する結び目」である。

コンコダンス群やスライス結び目は Fox-Milnor が 1960 年台に導入した [39]。

♠ 1.1.2 絡み目解消数 (Goridan 数)

l 成分絡み目 $L \subset S^3$ に対し、それを crossing change により unlink U_l にするために必要な crossing change の最小数は絡み目/結び目解消数 (あるいは、Gordian 数) とよばれ、これを $u(L)$ と書く。これは、向きによらないアイソトピー不変量である。結び目 $K \subset S^3$ に対し、 $u(K)$ の定義に出てくるような crossing change の列は、 $[0, 1] \times S^3$ 内に U から K への immersed コボルディズムを定め、これを改変することで、種数 $u(K)$ の有向 Murasugi 曲面を構成できる。よって、

$$g_4(K) \leq u(K)$$

が成り立つ。^{*5}

与えられた結び目 $K \subset S^3$ に対し $g_3(K), g_4(K), u(K)$ など決定することは古典的問題である。現在では、KnotInfo など、多くの結び目に対するこれらの値を知ることができる。

♠ 1.1.3 例: 代数的絡み目、特にトーラス絡み目/結び目

絡み目の例として、代数的絡み目というクラスを説明する。 $f(x, y): (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を既約多項式あるいは異なる既約多項式の積であって、原点での微分がゼロであるものとする。^{*6} $S_\delta^3 \subset \mathbb{C}^2$ を半径 $\delta > 0$ を持つ球面とする。このとき、部分空間

$$L_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = \epsilon\} \cap S_\delta^3$$

は十分小さな $\epsilon \geq 0, \delta > 0$ に対し絡み目をなし、そのアイソトピー類が一意に定まる。このような絡み目を代数的絡み目という。^{*7} さらに、

$$M_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = \epsilon\} \cap D_\delta^4$$

は $\epsilon = 0$ では特異点を持つが、十分小さな $\epsilon > 0$ に対しては連結かつ滑らかとなり、Murasugi 曲面を与える。これを f の Milnor ファイバーという。 L_f には M_f の複素構造から定まる向きの境界としての向きを与える。特に、正の整数 p, q に対し、 $f(x, y) = x^p - y^q$ の場合の L_f を $T_{p,q}$ とかき、トーラス絡み目とよぶ。これは成分数 $l = \gcd(p, q)$ を持つ絡み目であり、特に、 p と q が互いに素ならば結び目であり、トーラス結び目とよばれる。 $T_{p,q}$ は 2 次元トーラス内で、メリディアン方向に p 周する間にロンジチュード方向に q 周する軌跡として描くこともできる。

Boileau-Weber による、Milnor 予想と Thom 予想に関するフランス語のサーベイ [19] が書かれた 1984 年の時点では代数的絡み目 L_f に対し、

$$g_4(L_f) \leq u(L_f) \leq g(M_f)$$

$$g_4(L_f) \leq g_3(L_f) = g(M_f)$$

がわかっていた。前者はブレイド表示から具体的に解消手順を与えることで確かめられる。後者は、Milnor のファイブレーション定理により (トーラス絡み目を含む) 代数的絡み目はファイバー絡み目であり、さらに Stallings のファイブレーション定理により g_3 はそのファイバーの種数に等しいという事実から従う。しかし、この時代には、これより種数の小さな Murasugi 曲面が存在するか、あるいは、これより少ない crossing change で絡み目を解消できるか、という問いに答えることはできなかった。後述するが、代数的絡み目の 4-ball 種数の下からの評価 $g(M_f) \leq g_4(L_f)$ を初めて示したのは Kronheimer-Mrowka であり、その証明はゲージ理論に基づく。特に、トーラス絡み目に対し

$$g_4(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1) + 1 - l}{2}$$

^{*3} 有向絡み目に対してはコンコダントの概念が複数ある。ここでは有向結び目に限って考える。

^{*4} なお、結び目 $K \subset S^3$ であって、 $g_3(K) = 0$ であるもの、すなわち種数 0 の Seifert 曲面を持つものは unknot のみである。絡み目 L に対しては $g_3(L) = 0$ である絡み目のアイソトピー類は一意ではない。例えば、Hopf link は種数 0 の連結 Seifert 曲面を持つ。

^{*5} 絡み目に対しては一般にこうしてできる Murasugi 曲面は連結とは限らないのでここでは除いて考えた。[19] ではラージ Murasugi 種数という概念を用いて不等式 $g_4(K) \leq u(K)$ の有向絡み目への拡張を考察している。

^{*6} これにより原点が孤立特異点であることが保証される。Milnor の教科書 [115] の 10 章を見よ。

^{*7} 代数的絡み目の up to isotopy での分類は Bonahon-Siebenmann の unpublished work である「The classification of algebraic links」で与えられ、Eisenbud-Neumann の本 [34] に載っている。全ての代数的絡み目はある iterated torus knot にアイソトピックである。iterated torus knot とは、結び目 K に対して $C_{p,q}(K)$ を、 K の管状近傍の境界上、メリディアン方向に p 周する間にロンジチュード方向に q 周するときの軌跡として得られる結び目とする、という操作を unknot から繰り返していつて得られる結び目のことである。

が成り立つ。トールス結び目, すなわち成分数 $l = \gcd(p, q)$ が 1 である場合のこの等式はしばしば Milnor 予想とよばれる。
*8

♠ 1.1.4 古典的アプローチ 1. Alexander 多項式

結び目 $K \subset S^3$ の Alexander 多項式 $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ (これは $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ の単元倍 ($\pm t^k$ 倍) の不定性を除いて定まり, ここでは規格化は $t \leftrightarrow t^{-1}$ について対称かつ $\Delta_K(1) = 1$ という規格化を採用する) は, 1920 年代に Alexander により発見された, 結び目の多項式不変量である。定義の仕方はいくつかあり, 例えば, Seifert 行列を用いるものやスケイン関係式を用いるものがある。結び目に対しては, M を K の一つの Seifert 行列として

$$\Delta_K(t) = \left(M t^{1/2} - M^T t^{-1/2} \right)$$

で与えられる。Alexander 多項式の次数 $\deg(\Delta(t))$ を最大次数と最小次数の差として定義する。不等式

$$2g_4^{\text{top}}(K) \leq \deg(\Delta(t)) \leq 2g_3(K)$$

が知られている。二つ目の不等式は古典的に知られていた。一つ目の不等式は比較的新しく 2015 年に Feller[37] により示されたもので, 「Alexander 多項式が自明 (i.e. $\Delta_K(t) = \pm 1$) な結び目は位相的スライスである」という 1980 年代の Freedman の結果*9の拡張である。*10 *11

Fox–Milnor[39] はスライス結び目 $K \subset S^3$ の Alexander 多項式は, ある $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して $\Delta_K(t) = f(t)f(t^{-1})$ と書くことができることを示した。特に, 結び目行列式 $\det K = \Delta_K(-1)$ は平方数となる。例えば, 8 の字結び目 4_1 に対しては $\det 4_1 = 5$ でありこれは平方数でないので, $g_4(4_1) \geq 1$ である。絵から明らかに $u(4_1) \leq 1$ であるから, $g_4 \leq u$ より, $g_4(4_1) = u(4_1) = 1$ がわかる。
*12

♠ 1.1.5 古典的アプローチ 2. 絡み目符号数 (Murasugi–Trotter 符号数)

ゲージ理論以前に $g_4(L)$, $g_4^{\text{top}}(L)$ を下から評価するやり方としてよく知られていたのは絡み目符号数 (Murasugi–Trotter 符号数) $\sigma(L)$ である。その一つの定義と, その種数評価の導出を説明する。有向絡み目 $L \subset S^3$ (成分数を $|L|$ と書く) の locally flat な連結有向 Murasugi 曲面 $S \subset D^4$ に対し, その $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆

$$\Sigma_2(S) = S \times D^2 \cup_h E_2(S)$$

を考える。ここで, $E_2(S) \rightarrow E(S)$ は S の外部空間 $D^4 - \overset{\circ}{N}(S)$ の $\mathbb{Z}_2$ 被覆であり, 貼り合わせ写像 $h: \partial S \times D^2 \cup S \times \partial D^2 \rightarrow \partial E_2(S)$ は $* \times \partial D^2$ が S のメリディアンのリフトに写るようなものである。4 次元多様体 $\Sigma_2(S)$ の境界は, 同様に構成される L の $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(L)$ であり, $\det(L) = |\Delta_L(-1)| \neq 0$ ならばこれは $\mathbb{Q}HS^3$ になることが知られている。(ちなみに結び目は $\det(L) > 0$ を常に満たす。) 有向絡み目 L の符号数 $\sigma(L)$ は $\Sigma_2(S)$ の 4 次元多様体としての符号数 $\sigma(L) := \sigma(\Sigma_2(S))$

*8 Milnor が教科書 [115] の 10 章において, 原点に孤立特異点を持つ多項式関数 $f(x, y): (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対し, 「二重点の個数」とよばれる δ_f という量を導入, それが f に付随する代数的絡み目 $L = f^{-1}(0) \cap S^3_\circ$ の絡み目解消数 $u(L)$ に等しいかを問うたのが Milnor 予想の由来である。

Milnor はその教科書中で $\delta_f = \frac{\mu + |L| - 1}{2}$ を示した。ここで, $\mu = b_1(M_f)$ であり, $|L|$ は絡み目 L の成分数である。Boileau–Weber のサーベイ [19] によると, 一方, Pinkham は $u(L) \leq \delta_f$ を示した。Boileau–Weber は Bennequin との議論に基づき, この Pinkham の定理にブレイドを用いた初等的な証明を与えた。なお, Kronheimer–Mrowka の議論は, Milnor の元の問いにも肯定的に答えるものである。一方で, トールス結び目に対する

$$g_4(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

だけから, より一般の slice–Bennequin 不等式を導くことができ, 特に代数的絡み目に対する $g_4(L_f) = g(M_f)$ が従うことが, Rudolph [141] により示された。なので, トールス結び目の 4-ball 種数の公式を Milnor 予想とよぶことも, Kronheimer–Mrowka が Milnor 予想を解決したということも妥当であるといえよう。

*9 Freedman のこの結果に関する議論が修正されていった経緯や証明については Garoufalidis–Teichner の [45][15] を参照。証明には 4 次元位相多様体論の深い結果である disk embedding theorem を用いる。

*10 Gompf [48] は, Alexander 多項式が自明な結び目のうち, 三葉結び目 $T_{2,3}$ の Whitehead ダブルや $(-3, 5, 7)$ プレッツェル結び目を含むいくつかの結び目はスライスでないことをゲージ理論を用いて示した (これは後述する Rasmussen 不変量を使って組み合わせ的な別証明を与えることができる)。さらに彼は, 位相的にスライスかつスライスでない結び目の存在からエキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在を従うことも示した。これは, (トレース埋め込み定理「結び目 $K \subset S^3$ がスライス (resp. 位相的スライス) であること, 0-trace $X_0(K)K = D^4 \cup_{K,0} (2 \text{ ハンドル})$ が $\mathbb{R}^4$ に滑らかな (resp. 位相的) 埋め込みを持つことは同値」の帰結である。 $\mathbb{R}^4$ への $X_0(K)$ の位相的埋め込みの像の補空間 (これは非コンパクトなので微分構造を持つ) と $X_0(K)$ を貼り合わせてエキゾチック $\mathbb{R}^4$ が構成される。詳細は例えば Gompf–Stipsicz の教科書 [49] の 522 ページを見よ。) も示した。(例えば [42] や Mathoverflow の「Slice knots and exotic $\mathbb{R}^4$ 」を見よ。)

*11 一方で, 位相的スライスであるが, Alexander 多項式が非自明な (より強く Alexander 多項式が非自明な結び目に smoothly コンコダントでならない) 結び目が豊富に存在することが 2012 年に Hedden–Livingstone–Ruberman[57] により示された。

*12 なお, $4_1 \# 4_1$ はスライス結び目であることが確かめられる。すなわち, 4_1 はコンコダンス群において位数 2 である。この例は, g_4 が結び目の連結和に対して一般には加法的でないことを意味している。一方で, 結び目の連結和に対する劣加法的性 $g_4(K \# K') \leq g_4(K) + g_4(K')$ は容易に確かめられる。一般に, 結び目の Seifert 種数 g_3 は連結和に対して加法的である (i.e. $g_3(K \# K') = g_3(K) + g_3(K')$) ことが知られている。(証明は例えば Lickorish の教科書 [102] の定理 2.4 をみよ) このことは, 直ちに, 連結和について加法的逆が存在する結び目は unknot のみであることを意味する。

結び目の Gordian 数 u が加法的であるかは未解決問題である ($u(K \# K') \leq u(K) + u(K')$ は明らかである)。

として定義される. ^{*13} $b_2(\Sigma_2(S)) = b_1(S) = 2g(S) + |L| - 1$ が Euler 数の Mayer-Vietoris property により計算でき, 定義から $\sigma(\Sigma_2(S)) = \sigma(L)$ であるから

$$b^\pm(\Sigma_2(S)) = \frac{b_1(S) \pm \sigma(L)}{2} = g(S) + \frac{|L| - 1 \pm \sigma(L)}{2}$$

が成り立つ. これはゼロ以上であるから

$$g(S) \geq \frac{|\sigma(L)| + 1 - |L|}{2}$$

が成り立つ. よって,

$$(g_4(L) \geq) g_4^{\text{top}}(L) \geq \frac{|\sigma(L)| + 1 - |L|}{2}$$

を得る.

結び目の符号数は, 結び目の射影図 D から定まる Goeritz 行列 G_D と正負の交点数 $n_\pm$ を用いて Gordon-Litherland の公式 $\sigma(K) = \sigma(G_D) + n_+ - n_-$ により組み合わせ的に計算できる. 例えば [114] の 3 章を見よ. 符号数は連結和に対して加法的である. 計算例として, $\sigma(T_{2,3}) = \pm 2$, $\sigma(\#_n T_{2,3}) = \pm 2n$ である. このことから $n \geq 1$ に対し $\#_n T_{2,3}$ はスライスではない (すなわち $T_{2,3}$ のコンコルダンス群における位数は無有限大である) ことがわかる. 結び目の符号数を用いて, $T_{2,q}$ を含むいくつかのトーラス結び目に対し Milnor 予想を証明することができたが, 全てのトーラス結び目について最善の下界が得られたわけではなかった. また, Murasugi-Trotter 符号数には, Tristram-Levine 符号数という一般化があるがここでは紹介しない.

1.2 ゲージ理論: Milnor 予想と Thom 予想の解決

1982 年, Donaldson が ASD (インスタントン) 方程式という物理学に由来する非線形偏微分方程式の 4 次元トポロジーへの最初の応用を見出した (対角化定理). それ以来, ASD 方程式が 4 次元トポロジーに盛んに応用されるようになった. これを Donaldson 理論とよぶ. Donaldson は後に Donaldson 不変量とよばれる微分同相不変量を導入した. ここでは, 少し後の時代になって $U(N)$ 束に一般化されたバージョンの Donaldson 不変量を説明する. $b^+ \geq 2$ である有向閉 4 次元多様体 X の $U(N)$ Donaldson 不変量は, X 上の $U(N)$ 束 P と, ASD モジュライ空間上のコホモロジー類を指定するデータとして $A(X) = \text{Sym}^*(H_0(X; \mathbb{Q}) \oplus H_2(X; \mathbb{Q})) \otimes \Lambda^* H_1(X; \mathbb{Q})$ の $N-1$ 回テンソル積の元 (と N が偶数のときには homology orientation という符号を決めるためのデータ) を固定することにより有理数が定まるという不変量である. すなわち,

$$D_{X,P}^N : A(X)^{\otimes(N-1)} \rightarrow \mathbb{Q}$$

という関数である. そのようなバンドルと $A(X)^{\otimes(N-1)}$ の元の選び方は無限個あるが, $N=2$ では Kronheimer-Mrowka が, 多くの 4 次元多様体 X に対してはそれらが有限個のデータ^{*14}で決定されるという, Donaldson 不変量の構造定理を証明し, その副産物として, 随伴不等式という, X 内の有向閉曲面に対する種数評価を得た. [86][89][88] これは特に $K3$ 曲面に対しては次の結果を与える. 「滑らかに埋め込まれた種数 $g \geq 1$ の連結有向閉曲面 $\Sigma \subset X$ であって, $[\Sigma] \cdot [\Sigma] \geq 0$ であるものに対し, $[\Sigma] \cdot [\Sigma] \leq 2g-2$ が成り立つ.」この $K3$ 曲面に対する随伴不等式と, $K3$ 曲面が $\mathbb{C}P^2$ の分岐被覆であるという事実を用いて, 代数的絡み目の 4-ball 種数の下からの評価 $g(M_f) \leq g_4(L_f)$ が得られ, Minor 予想 $g(M_f) = g_4(L_f) = u(L_f)$ は解決した. ^{*15 *16}

1994 年, 物理学者 Witten [152] は, $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論に関する Seiberg との共同研究に基づき, Seiberg-Witten (SW) 方程式とよばれる新しい非線形偏微分方程式を導入し, その解のモジュライ空間を用いて SW 不変量を導入した. Seiberg-Witten 方程式の解析は ASD 方程式の解析よりずっと簡単であり, その上 Donaldson 不変量やそれまで Donaldson 理論で得られてきた 4 次元トポロジーの結果の多くが, より簡単にあるいはより強力な形で証明できることが明らかになっていった. その代表例として, SW 理論が登場するとすぐに, Kronheimer-Mrowka により Thom 予想が証明された [87]. Thom 予想は, $\mathbb{C}P^2$ 内のホモロジー類 $d[\mathbb{C}P^1]$, ($d \geq 1$) を代表する滑らかに埋め込まれた種数 $g \geq 1$ の連結有向閉曲面 Σ は

$$g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = g(S_d)$$

を満たすという主張である. ここで, $S_d \subset \mathbb{C}P^2$ は d 次の斉次方程式 $x^d + y^d = 0$ で表される複素曲線である. Thom 予想から Milnor 予想が従うことは古典的に知られていた (例えば [19] 参照) ので, Milnor 予想の再証明を与えたことにもなる. ^{*17}

これで, Milnor 予想は解決したのであるが, この手法は代数的絡み目の複素代数幾何的な特殊性に依存するものであった. Milnor 予想や Thom 予想が重要視されてきたのは, 代数幾何学と低次元トポロジーにまたがる問題であるというのが一つの理由であろう. 従って, その先の自然な発展の方向性としては,

^{*13} これが Murasugi 曲面 S の選び方によらないことは次のように確かめられる. 二通りの Murasugi 曲面 S_1, S_2 があつたとき, 埋め込まれた曲面 $S_1 \cup_L -S_2 \subset S^4$ はある 3 次元多様体 $H \subset D^5$ の境界となり, 符号数の同境不変性と Novikov 加法性より $0 = \sigma(\partial \Sigma_2(H)) = \sigma(\Sigma_2(S_1)) - \sigma(\Sigma_2(S_2))$ である.

^{*14} 後に, Witten はこれらは本質的に後述する SW 理論から定まるデータ (SW 不変量と SW 基本類) であると予想した (Witten 予想).

^{*15} 最近 Daemi-筆者-Scaduto [27] は $N=3$ の場合の構造定理を証明し, やはり同様に Milnor 予想の証明が得られることを確認した.

^{*16} 歴史的により正確に述べるならば, 特異インスタントンを使った構造定理の元の証明で用いられる一部だけの議論で $K3$ 曲面に対しては随伴不等式を証明することができ, それを用いて Milnor 予想が証明された (この時点では basic class の概念は見出されていなかった). その後で, その議論を拡張することで単純型 4 次元多様体に対する構造定理および随伴不等式が証明された.

^{*17} なお, Donaldson 理論で Thom 予想を証明することは現在でもなされていない. これは $b^+ = 1$ である 4 次元多様体の Donaldson 不変量が難しいためであると考えられる.

- シンプレクティック、コンタクト幾何学は、複素代数幾何学のカテゴリーよりも広く、複素幾何的な硬さと可微分のカテゴリーのような手術で扱える柔らかさの両面を持つ。これらの幾何構造の低次元トポロジーにおける位置付けはどのようなものであるか？
- 代数的絡み目に限らないより広いクラスの絡み目を系統的に、(特に、組み合わせ的に) 調べる手法を開発せよ。

ということが挙げられる。例えば前者については、Taubes によるシンプレクティック多様体上の SW 不変量の研究や、Ozsváth–Szabó が Thom 予想の一般化として、シンプレクティック Thom 予想、すなわち「シンプレクティック閉 4 次元多様体内の連結シンプレクティック曲面はそのホモロジー類を代表する滑らかに埋め込まれた連結有向曲面の中で種数を最小化する」主張を SW 理論を用いて証明したこと [123] や、Rudolph による slice-Bennequin 不等式の証明、種々の Floer ホモロジーに値を取るコンタクト構造の不変量が導入されたことが挙げられる。後者についてはこれから見るように、種々の結び目ホモロジー理論の研究は現在まで続く低次元トポロジーにおける大きな流れになっている。

1.3 シンプレクティック構造とコンタクト構造

Rudolph が証明した、slice-Bennequin 不等式は、コンタクト構造を用いて 4-ball 種数の下からの評価を与えるもので、Milnor 予想の一般化である。これを説明するために、ここではシンプレクティック・コンタクト構造を、4 次元と 3 次元を中心に説明する。

定義 1.1. 1. X を偶数次元 $2n$ を持つ可微分多様体とする。 X 上のシンプレクティック構造とは、 X 上の閉 2 形式 ω であって、 ω^n がどの点でもゼロでないもののことをいう。 ω をシンプレクティック形式とよぶ。このとき、 ω^n は X の多様体としての向きを定めることに注意する。

2. Y を奇数次元 $2n+1$ を持つ可微分多様体とする。 Y 上のコンタクト構造とは、ランク $2n$ 部分束 $\xi \subset TY$ (すなわち、 Y 上の余次元 1 接分布) であって、ある 1 形式 λ であって、 $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ がどの点でもゼロでないもののことをいう。 λ をコンタクト形式とよぶ。商直線束 TY/ξ の向きを ξ の coorientation とよぶ。ここでは、coorientation を固定し、 λ の取り方に対する条件として、 λ が与える自明化 $TY/\xi \rightarrow \mathbb{R}$ が向きを保つことを課す。これにより、 λ の取り方の不定性は、ちょうど正の関数倍で尽くされる。また、 $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ の向きは Y の多様体としての向きを定めることに注意する。

シンプレクティック構造の由来は物理の古典力学や Kähler 幾何にある。コンタクト構造のさまざまな由来は例えば Geiges の教科書 [46] を参照するとよい。シンプレクティック多様体同士の連結和は一般にはシンプレクティック構造を持たない。シンプレクティック $2n$ 次元多様体を、余次元 1 部分多様体に沿って切りはりする操作を、シンプレクティック構造込みで行うとき、その切り口の $2n-1$ 次元のコンタクト構造を考察することが、便利であることが多い。しかし、本稿ではこの側面は重要でないので詳細は説明しない。また、境界付きシンプレクティック $2n$ 次元多様体 (X, ω) の境界には勝手にコンタクト構造が誘導されるというわけではないのだが、境界上にコンタクト構造 ξ が与えられているとき、 ω と ξ にはいくつかのクラスの整合性条件が定義される。この意味で、コンタクト多様体はシンプレクティック多様体の境界条件的な役割を果たす。本稿で用いる整合性条件は、3, 4 次元における次の定義である。

定義 1.2. (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体、 (X, ω) を $\partial X = Y$ であるシンプレクティック 4 次元多様体とする。 (X, ω) が (Y, ξ) の弱シンプレクティック充填であるとは、 $\omega|_{\xi} > 0$ であることをいう。 (X, ω) が (Y, ξ) の強シンプレクティック充填であるとは、 Y のカラー近傍上定義され、 Y 上外向きである Liouville ベクトル場 v (i.e. $\mathcal{L}_v \omega = \omega$) であって、 $\lambda = \iota_v \omega$ が ξ のコンタクト形式になっているようなものが存在することをいう。

強シンプレクティック充填ならば弱シンプレクティック充填であることが確かめられる。

次に、シンプレクティック、コンタクト多様体の部分多様体には、いくつかの特別なクラスがあることを説明する。ここでは、この予稿に関係する 3, 4 次元での定義に限って書く。

定義 1.3. • (X, ω) をシンプレクティック 4 次元多様体とする。 $S \subset X$ を proper かつ滑らかに埋め込まれた 2 次元部分多様体とする。 S がシンプレクティック曲面であるとは、 $\omega|_S$ が S 上シンプレクティック形式であることをいい、 S が Lagrange 曲面であるとは、 $\omega|_S = 0$ であることをいう。

• (Y, ξ) をコンタクト 3 次元多様体とする。 $L \subset Y$ を滑らかに埋め込まれた絡み目とする。 L が transverse link であるとは、 K のすべての点で接ベクトル $\dot{L}$ が ξ に横断的に交わることをいい、 L が Legendrian link であるとは K のすべての点で $\dot{L}$ が ξ に接する (i.e. $\dot{L} \subset \xi$ である) ことをいう。

ξ の coorientation は、条件 $\lambda(\dot{T}) > 0$ により、transverse link T に向きを定める。この向きを与えた transverse link を正の transverse link とよぶ。以下では、断らない限り、transverse link といったら正のもののことを指す。

♠ 1.3.1 transverse knot の古典的不変量 sl と、Legendrian knot の古典的不変量 tb, rot

ここでの解説は Etnyre のサーベイ [35] や Ozsváth–Szabó–Thurston の [131] 2 節に従う。 (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体、 $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (Y, \xi = \text{Ker} \lambda)$ をそれぞれ、positive transverse knot, 有向 Legendrian knot とする。これらの knot には Seifert 曲面 $\Sigma \subset Y$ (向きが与えられていて、結び目を向きこみで境界に持つようなもの) が与えられているとする (特に、ヌルホモトプスな結び目であることが仮定されている)。

positive transverse knot $\mathcal{T}$ に対し、self-linking number とよばれる不変量 $sl_{\Sigma}(\mathcal{T})$ が、相対 Chern 数

$$sl_{\Sigma}(\mathcal{T}) = -\langle c_1(\xi, \vec{n}), [\Sigma, \partial \Sigma] \rangle$$

として定義される。ここで、 $\vec{n}$ は Σ の外向き法ベクトルであって $\xi \cap T\Sigma$ に含まれるものである。

有向 Legendrian knot $\mathcal{L}$ に対し、二つの不変量、Thurston–Bennequin 不変量 $tb_{\Sigma}(\mathcal{L})$ ($\mathcal{L}$ の向きに非依存) と、rotation number $rot_{\Sigma}(\mathcal{L})$ ($\mathcal{L}$ の向きに応じて符号が変わる) が定義され、これら二つの不変量は、Legendrian knot の古典的不変量 (classical invariant) とよばれる。Thurston–Bennequin 不変量は、 $\mathcal{L}$ に定まる二つの framing の差

$$tb_{\Sigma}(\mathcal{L}) := (\xi \text{ が定める contact framing}) - (\Sigma \text{ が定める surface framing})$$

として定義され、rotation number は、相対 Chern 数

$$rot_{\Sigma}(\mathcal{L}) := \langle c_1(\xi, \dot{\mathcal{L}}), [\Sigma, \partial \Sigma] \rangle$$

として定義される。^{*18} classical invariant の定義は, Legendrian/transverse link にも自然に拡張できる。

♠ 1.3.2 transverse-push off

与えられた有向 Legendrian knot $\mathcal{L}$ に対し, それを「管状近傍において少しずらす」ことで C^∞ 位相においていくらでも近い positive transverse knot $T_+(\mathcal{L})$ が構成でき, この構成により写像

$$T_+ : \frac{\{(Y, \xi) \text{ 内の Legendrian knot}\}}{\text{Legendrian isotopy}} \rightarrow \frac{\{(Y, \xi) \text{ 内の transverse knot}\}}{\text{transverse isotopy}}$$

が well-defined に定まる。 $T_+(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の transverse-push off とよばれる。 また, Legendrian knot の negative stabilisation という改変操作があり,

$$T_+ : \frac{\{(Y, \xi) \text{ 内の有向 Legendrian knot}\}}{\text{Legendrian isotopy \& negative stabilisation}} \rightarrow \frac{\{(Y, \xi) \text{ 内の positive transverse knot}\}}{\text{transverse isotopy}}$$

は well-defined かつ全単射となる。 逆写像は, Legendrian approximation とよばれる構成で与えられる。 このことは, transverse アイソトピーで不変な transverse knot 不変量は, Legendrian isotopy と negative stabilisation で不変な Legendrian knot 不変量と等価であることを主張している。

有向 Legendrian knot $\mathcal{L}$ が Seifert 曲面 Σ を持つとき, transverse push-off の下で, 古典的不変量には

$$sl_\Sigma(T_+(\mathcal{L})) = tb_\Sigma(\mathcal{L}) - rot_\Sigma(\mathcal{L})$$

という関係式が成り立つ。

♠ 1.3.3 front projection と sl, tb, rot の計算公式

S^3 (あるいは $\mathbb{R}^3$) 上の標準的コンタクト構造を ξ_{std} と書く。 この 2-平面場は, $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ 上, $\text{Ker}(dz - ydx)$ で与えられる。 $(Y, \xi) = (S^3, \xi_{std})$ の場合, これら三つの古典的不変量は Σ のとり方によらず, $sl(\mathcal{T}), tb(\mathcal{L}), rot(\mathcal{L})$ と書かれる。 このとき (ただし $\mathcal{T}, \mathcal{L}$ は $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の無限遠に交わらないとする) には, front projection を用いた公式がある。 ここで, front projection とは射影 $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, z)$ のことをいう。 transverse knot の front projection は, 垂直方向下向き $-\partial_z$ と平行になることはなく, generic な場合, 特異点は二重点のみである。 self-linking number は writhe

$$sl(\mathcal{T}) = writhe(\Pi)$$

で与えられる。 Legendrian knot の front projection は, 垂直方向 $\pm\partial_z$ と平行になることはなく, generic な場合, 特異点は二重点とカスプのみである。 古典的不変量は

$$\begin{aligned} tb(\mathcal{L}) &= writhe(\Pi) - \frac{1}{2} \# \{ \Pi \text{ 内のカスプ} \} \\ rot(\mathcal{L}) &= \frac{1}{2} (\# \{ \Pi \text{ 内の下向きカスプ} \} - \# \{ \Pi \text{ 内の上向きカスプ} \}) \\ &= \# \{ \Pi \text{ 内の下向き左カスプ} \} - \# \{ \Pi \text{ 内の上向き右カスプ} \} \end{aligned}$$

で与えられる。 front projection において stabilization や transverse push-off は, 射影図に対する具体的な改変操作として書くことができる。 例えば Enyre のサーベイ [35] を参照。

♠ 1.3.4 transverse Markov 定理: transverse link と braid の対応

B_n を n -ストランドブレイド群とし, $Braids = \coprod_{n \geq 1} B_n$ と書く。 S^3 内の任意の絡み目があるブレイドのブレイド閉包として表示できることは, Alexander の定理としてよく知られ, さらに, ブレイド閉包をとる操作が

$$\bullet : \frac{Braids}{\text{conjugate, positive stabilization/destabilization, negative stabilization/destabilization}} \rightarrow \frac{\{S^3 \text{ 内の絡み目}\}}{\text{isotopy}}$$

という全単射を与えることは Markov の定理としてよく知られている。 左辺の分母の同値関係がいわゆる Markov ムーブである。 positive (resp. negative) stabilization とは, $B_{m-1} \rightarrow B_m, \beta \mapsto \beta\sigma_m$ (resp. $B_{m-1} \rightarrow B_m, \beta \mapsto \beta\sigma_m^{-1}$) という操作であり, destabilization は, $\beta\sigma_m\beta'$ (resp. $\beta\sigma_m^{-1}\beta'$) (ここで $\beta, \beta' \in B_{m-1}$) という形の B_m の元に対し, $\beta\beta' \in B_{m-1}$ を対応させる操作である。 例えばトース絡み目 $T_{p,q}$ はブレイド $(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q$ の閉包である。

このような絡み目とブレイドの対応には, transverse link 版がある。 Bennequin は, 任意のブレイドは, 自然な閉包の取り方があって, $\mathbb{R}^3$ 内の transverse link を与えることができ, 逆に, 任意の transverse link はあるブレイド閉包にアイソトピックであることを示した。 さらに, 2002 年, Orevkov-Shevchishin[122] と Wrinkle[154] は独立に, 二つのブレイドが transversely isotopic な transverse link を represent することは, それらのブレイドが, 共役と positive stabilization/destabilization で関係し合うことと同値であるということを証明した。 すなわち, 全単射

$$\frac{Braids}{\text{conjugation, positive stabilization/destabilization}} \cong \frac{\{\text{transverse links in}(S^3, \xi_{std})\}}{\text{transverse isotopy}}$$

^{*18} 古典的不変量について, 閉 3 次元多様体上のコンタクト構造が tight であることを特徴づける Eliashberg-Bennequin の不等式が有名であるが, ここでは割愛する。

がある。この対応の下でブレイド β に対し、その閉包として得られる transverse link の self-linking number は、次の Bennequin の公式で与えられる:

$$sl(\hat{\beta}) = \text{writhe}(\beta) - n(\beta)$$

ここで、 $n(\beta)$ は β のストランドの本数である。

この、transverse link とブレイドの対応は、Pavalescu により、一般の開コンタクト 3 次元多様体内の transverse link とオープンブック内のブレイドの対応として拡張された [132]。これにより、任意の開コンタクト 3 次元多様体内の transverse link を pointed open book という diagram により表示できるようになった。これは後述する、Heegaard knot Floer ホモロジーの transverse knot 元である Braid 不変量の定義に用いられた。

♠ 1.3.5 絡み目の positivity と fillability

Hedden の [56] に従い、 S^3 内の有向絡み目 (up to アイソトピー) に対し、

$$\text{positive braid} \subsetneq \text{positive} \subsetneq \text{strongly quasi positive} \subsetneq \text{quasi positive} = \text{transvers } \mathbb{C}\text{-link}$$

というクラスを説明する。

1. S^3 内の絡み目が positive braid であるとは、正のブレイド (=writhe が負の交点を持たないブレイド) の閉包にアイソトピックであることをいう。Stallings の古典的な結果「Stallings, Constructions of fibered knots and links」によれば、positive braid 絡み目はファイバー絡み目である。すなわち、絡み目の補集合が S^1 上のファイバー束の全空間の構造を持つ絡み目にアイソトピックである。
なお、代数的ならば positive braid であることは、Weierstrass 予備定理の帰結である。[19]
2. S^3 内の絡み目が positive であるとは、writhe が負の交点を持たない射影図を持つ結び目にアイソトピックであることをいう。「positive braid $\subset$ positive」は by definition である。「positive braid $\neq$ positive」は (KnotInfo で検索すればたくさん見つかるが) 例えば $5_2, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5$ が例を与える。これらが positive braid でないことは、ファイバー結び目でないことから確かめられる。
3. S^3 内の絡み目が strongly quasipositive であるとは、 $i \leq j-2$ に対する

$$(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2}) \sigma_{j-1} (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})^{-1}$$

の形の因子 (positive embedded band) の積であるブレイドの閉包にアイソトピックであることをいう。「positive $\subset$ strongly quasipositive」は Rudolph[142] が示した。「positive $\neq$ strongly quasipositive」は、KnotInfo によると $12n_{148}, 12n_{149}$ が例を与える。

4. S^3 内の絡み目が quasipositive であるとは、

$$w_i \sigma_{j_i} w_i^{-1}, \quad w_i \in B_n$$

という形の因子 (positive band) の積でかけるブレイドの閉包にアイソトピックであることをいう。「strongly quasipositive $\subset$ quasipositive」は by definition である。「strongly quasipositive $\neq$ quasipositive」は、 8_{20} が例えば例である。これが strongly quasipositive でないことは、[56] によると、strongly quasipositive knot は $g_3 = g_4 = \tau$ を満たすが、 $g_3(8_{20}) = 2 \neq 0 = g_4(8_{20})$ であることからわかる。

5. S^3 内の絡み目が transverse $\mathbb{C}$ -link であるとは単位球面 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ と滑らかな複素曲線の横断的交わりにアイソトピックであることをいう。^{*19} 「quasi positive $\subset$ transverse $\mathbb{C}$ link」は Rudolph が示した [140]。「quasi positive $\supset$ transverse $\mathbb{C}$ link」は Boileau–Orekov が擬正則曲線を用いて証明した [18]。^{*20} quasipositive でない結び目は豊富にある。例えば 8 の字結び目はそうである。

Hayden により、quasipositive link の概念は S^3 とは限らない任意の開コンタクト 3 次元多様体へ拡張された [54]。ここでは、Boileau–Orekov の結果「quasi positive $\supset$ transverse $\mathbb{C}$ link」の擬正則曲線によらない証明が与えられた。さらに、この論文で扱われた ascending surface の概念は、後に、Heegaard knot Floer ホモロジー、Khovanov ホモロジーの transverse knot 不変量の naturality およびそれを用いた、4-ball 内のエキゾチック曲面の存在証明に用いられた (前者は Juhasz–Miller–Zemke[73] による。後者は Hayden–Sundberg による [55] による)。

♠ 1.3.6 Rudolph による slice–Bennequin 不等式

Kronheimer–Mrowka による Milnor 予想の解決の帰結として、Rudolph は、次の slice–Bennequin 不等式を証明した。これは、Milnor 予想の一般化と見ることができる。

定理 1.4. (slice–Bennequin 不等式, Rudolph[141])

1. β をブレイドとする。このとき、ブレイド閉包である絡み目 $\hat{\beta}$ の任意の Murasugi 曲面 ($\hat{\beta} = \partial \Sigma$ を満たす proper か C^∞ に埋め込まれたコンパクト有向曲面) に対し

$$\text{writhe}(\beta) - n(\beta) \leq \chi(\Sigma)$$

が成り立つ。

^{*19} このときこの滑らかな複素曲線と D^4 との共通部分 $S \subset (D^4, \omega_{std}, J_{std}, g_{std})$ はシンプレクティック曲面であり、 $K = \partial S$ は標準的コンタクト構造 $\xi_{std} = TS^3 \cap J_{std} TS^3$ について transverse link である。実際、 S は複素部分多様体であることより、 $v \neq 0 \in T_x S$ ならば $Jv \in T_x S$ であり、 $\omega_{std}(v, Jv) = g_{std}(v, v) > 0$ であるから、 $\omega|_S$ はシンプレクティックである。さらに、 S と S^3 が横断的に交わっているという仮定より、 $TS|_K \cap TS^3|_K = TK$ である。もし $TK \subset \xi = TS^3 \cap J_{std} TS^3$ であったとすると、特に $TK \subset J_{std} TS^3$ すなわち $JTK \subset TS^3$ となっていないわけではないが、すると $TS|_K = TK + JTK \subset TS^3|_K$ となり、 S と S^3 が横断的に交わることに反する。

^{*20} 定数ではないある $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ に対し、 $V_f := f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^2$ のことを 平面複素曲線という。 V_f は有限個の特異点の集合を除いて滑らかな有向 2 次元多様体である。[141] は、絡み目が quasipositive であることは、 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ とある $\mathbb{C}^2$ 内の平面複素曲線の交わり $S^3 \cap V_f$ にアイソトピックな絡み目であることと同値であることを示した。さらに、transverse $\mathbb{C}$ -link は quasi positive であることを予想した。つまり、この予想は、Boileau–Orekov が擬正則曲線を用いて証明した.[18]。([54] も参照。)

2. $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std} = \text{Ker}(dz - ydx))$ をそれぞれ, transverse knot, Legendrian knot とする. このとき, 不等式

$$sl(\mathcal{T}) \leq 2g_4(\mathcal{T}) - 1$$

$$tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| \leq 2g_4(\mathcal{L}) - 1$$

が成り立つ.

*21 さらに, quasipositive knot に対しては, 等号が成り立つ transverse/Legendrian representative が存在する.

証明. ブレイドに対する主張は, crossing change により positive braid の場合に帰着され, positive braid の場合はトラス結び目に対する Milnor 予想に帰着される. transverse knot に対する主張は, ブレイドに対する主張と, transverse Markov 定理から従う. transverse push-off により, Legendrian knot に対する主張は transverse knot に対する主張から従う. quasi positive knot に対する主張は, quasi positive knot に対しては transverse $\mathbb{C}$ -knot との同値性から, symplectic surface $S \subset (D^4, \omega_{std})$ であって, その境界 $\partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse representative になっているものがとれ, $sl(\partial S) = 2g(S) - 1$ が成り立つことからわかる ([36] の補題 2.13 の帰結 (2) をみよ. *22). $\square$

どんな結び目であっても, その Legendrian approximation の front projection を手で描いて古典的不変量を計算することで, (最善である保証はないにせよ) g_4 の下からの評価を与えることができるのである.

上の定理は, symplectic surface $S \subset (D^4, \omega_{std})$ であって, その境界 $\partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse knot であるものは, 種数を最小化しているということをいっている. D^4 を strong symplectic filling に一般化した結果があり, 相対版シンプレクティック Thom 予想とよばれる.

定理 1.5. (Gadgil–Kulkarni [44] ([36] 定理 1.20 も見よ) (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体, (X, ω) を (Y, ξ) の強シンプレクティック充填とする. $S \subset X$ を proper に埋め込まれた連結シンプレクティック曲面であって, ∂S が transverse link であるものとする. このとき, S はその相対ホモロジー類において種数最小である.

証明. 証明には 2 通りある. Mrowka–Rollin の一般化された Benequin 不等式を使うものと Relative symplectic cap(symplectic hat) を使って, 閉のシンプレクティック Thom 予想に帰着させるものである. $\square$

他にも, Akbulut–Matveyev による Stein 多様体内の閉曲面に対する adjunction 不等式 [3] も知られており, これは閉 Kähler 多様体への埋め込みを利用する証明がある. 他にも, H -slice 種数の評価など, S^3 や D^4 以外の多様体に境界付き種数評価を拡張するというのは今後発展していく可能性のある方向性であると言える.

1.4 2000 年以降: 結び目ホモロジー理論

2000 年代になると, いくつかの結び目ホモロジー理論が導入されたことで, 結び目理論の研究は大きく発展した. 特に, 複素幾何や解析に依拠しないトポロジカルな, あるいは, 組み合わせ的なアプローチにより, これまで得られてきた成果が復元, 拡大されていき, その傾向は今後も続いていくと思われる.

♠ 1.4.1 結び目ホモロジーの序章としての Floer ホモロジー: 「圏化」と「TQFT」

結び目ホモロジー理論は, 結び目の多項式不変量の「圏化」を与える「TQFT」として発見された. その元祖が Khovanov ホモロジーである. これは普通の意味では Floer ホモロジーではない. しかし, 「圏化」や「TQFT」の思想的由来は Floer ホモロジー理論にあり, Floer 理論の変種としての結び目ホモロジー理論ものに導入されていたので, ここではまず Floer ホモロジーについて説明する. 「Floer ホモロジーは無限次元版の Morse ホモロジーである」というのはよく言われる標語である. Morse ホモロジーのアイディアは, 与えられた有限次元可微分多様体 B に対し, その上の「よい」Morse 関数 $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ をとり, Morse 指数 i の臨界点全体の生成する加群 $C_i(B, f)$ に, 適切に微分 $\partial_i: C_i(B, f) \rightarrow C_{i-1}(B, f)$ を定義し, そのホモロジーが B のホモロジーを復元するようになるというものである. Morse ホモロジーは, Morse 関数 f により B をハンドル分解し, そのハンドルの太さの方向を潰して得られる胞対複体の cellular ホモロジーと実質同じものである. これは例えば 1960 年代, Smale が h 同境界定理, 高次元 Poincaré 予想を解いた際に用いられた. 物理学者 Witten は [150] において, 微分 ∂_i を f の負の gradient フローの本数の数え上げとして解釈できるという見方を提示した. それに触発され, Floer は, 無限次元版 Morse ホモロジーと称される, 「Floer ホモロジー」を導入した. Floer ホモロジーは大きく分けて, シンプレクティック幾何における Floer ホモロジー (Hamilton Floer ホモロジーと Lagrangian intersection Floer ホモロジー) と, ゲージ理論における Floer ホモロジー (インスタントン Floer ホモロジーと SW モノポール Floer ホモロジー) に大別される. Y インスタントン Floer ホモロジーは, 技術的なことに目を瞑れば, 有限次元多様体 B の代わりに閉 3 次元多様体 Y 上の $SU(2)/SO(3)$ 接続のゲージ同値類の空間を, Morse 関数の代わりに Chern-Simons 汎関数を用いて, Morse ホモロジーを真似て作られる. 微分を与える負の gradient フローは $\mathbb{R} \times Y$ 上の ASD 解のゲージ同値類に他ならない. インスタントン Floer ホモロジーは Casson 不変量 $\lambda(Y)$ とよばれる $\mathbb{Z}HS^3$ に対する整数値不変量の「圏化」であり, 同時に Donaldson 不変量の「 $(3+1)$ TQFT 化」でもある. 「圏化」は, インスタントン Floer ホモロジーは Euler 数をとると Casson 不変量が

*21 なお, Legendre 版で g_4 を g_3 に置き換えたより弱い主張は Bennequin が最初に発見した. これを用いて S^3 上に ξ_{std} とアイソトピックでないコンタクト構造 (これは overtwisted なコンタクト構造である. overtwisted disk は Bennequin 不等式を破る!) が見出されたことはコンタクトトポロジー初期の重要な結果である.

*22 そこでの $sl(\partial S) = 2g(S) - 1$ の証明は次のとおり. $-K$ の Seifert 曲面 $\Sigma \subset S^3$ を一つとる. $TD^4|_{S \cup \Sigma} = (TS \cup \xi^\perp) \oplus (\nu_S \cup \xi)$ であり,

$$0 = c_1(TD^4|_{S \cup \Sigma})[S \cup \Sigma] = c_1(TS \cup \xi^\perp)[S \cup \Sigma] + c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma]$$

であり, 境界付き版の Poincaré–Hopf の定理 (境界上外向きなら ok) より第一項は

$$c_1(TS \cup \xi^\perp)[S \cup \Sigma] = \chi(S)$$

である. 第二項 $c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma]$ を切断のゼロ点の個数の数え上げとして数えたい. まず, Σ 上には切断を $\xi \cap T\Sigma$ で与える. 今 S の境界は空でないで, ν_S は自明束であり, 同一視 $\nu_S|_K = \xi|_K$ の下で, $\nu_S \rightarrow S$ は境界 K 上に nowhere vanishing section が与えられたことになる. これは写像度 0 であるから, nowhere vanishing に S 上に拡張する. よって, ゼロ点は S 上ではなく, $-\Sigma$ が K の Seifert 曲面であることに注意するとよって, $c_1(\nu_S \cup \xi)[S \cup \Sigma] = sl(K)$ である. よって, $sl(K) = -\chi(S) = 2g(S) - 1$ を得る.

得られるという意味で, Casson 不変量を精密化しているということを指す. 「(3+1)TQFT 化」は, インスタントン Floer ホモロジーは Donaldson 不変量を境界つき 4 次元多様体や (3+1) 次元コボルディズムに拡張する枠組みであって, コボルディズムの合成についてしかるべき合成則を持つことを指している. すなわち, しかるべき (3+1) コボルディズム圏から加群の圏への関手にしたということである. Kronheimer–Mrowka の構造定理の証明でもインスタントン Floer ホモロジーのあるバージョンが用いられた. インスタントン Floer ホモロジーは, reducible 平坦接続が出てくる理論と出てこない理論の二つに大別できる. Floer の時代よりも後になって一般化された形のことを説明する.

- reducible 平坦接続が出てくる理論 ($SU(2)$ 束を用いる $SO(3)$ 同変理論). これは, Floer が定義した整ホモロジー球面の場合に, 自明接続を無視して既約接続のみで Floer ホモロジーを定義するということがなされていた. 比較的最近, Daemi–Miller [26] により次のように拡張された定式化がなされた. 任意の PID R および有理ホモロジー球面 Y に対し, 3 種類の $\mathbb{Z}/8$ 次数づけられた $H^{-*}(BSO(3); R)$ 加群であって, 長い完全列

$$\dots \xrightarrow{[-4]} I_*^+(Y; R) \xrightarrow{[3]} I_*^-(Y; R) \rightarrow I_*^\infty(Y; R) \xrightarrow{[-4]} \dots$$

をなすものが定義される. さらに, これらは $1/2 \in R$ であるという条件のもとで, 次のような関手を与える. ^{*23}

$$I^+, I^-, I^\infty : (3+1)\text{Cob}_*^{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{gr}^{\mathbb{Z}/8} H^{-*}(BSO(3); R)\text{-Mod}$$

^{*24} また, signature data とよばれるデータ σ (摂動のデータ) を選ぶごとに, irreducible Floer homology group とよばれる $\mathbb{Z}/8$ 次数づけられた加群 $I_*(Y, \sigma)$ が定まり, σ を取り替えたときにどう変化するかを記述する exact triangle がある. また, nearly good とよばれるクラスのコボルディズムに対し関手性がある. $I_*(Y, \sigma)$ は, Casson–Walker 不変量を圏化すると予想されている. 整ホモロジー球面の場合には, σ の選び方はなく, Floer が元々定義した Floer ホモロジー $I_*(Y)$ に一致し, これは Casson 不変量を圏化する.

- reducible 平坦接続が出てこない理論 (N -admissible な $U(N)$ 束上の $PU(N)$ 接続を用いる). これは, 有向閉 3 次元多様体 Y と, その上の N -admissible バンドル, すなわち, $U(N)$ 束 P であって, ある $\sigma \in H_2(Y; \mathbb{Z})$ であって $\langle c_1(P), \sigma \rangle$ が N と互いに素であるもの, および単位的可換環 R に対し, 相対 $\mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}$ -次数を持つ加群 $I_*^N(Y, P; R)$ を与える. さらにこれは,

$$I_*^N : (3+1)\text{Cob}^{N\text{-adm}} \rightarrow \text{gr}^{\text{rel.}\mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}}\text{-Mod}$$

という関手を与える. また, 係数が例えば $R = \mathbb{C}$ のときには, $I_*^N(Y, P; \mathbb{C})$ は $\mathbb{A}(Y)^{\otimes(N-1)}$ 加群の構造を持つ. ここで, $\mathbb{A}(Y) := \text{Sym}^*(H_0(Y; \mathbb{C}) \oplus H_2(Y; \mathbb{C})) \otimes \Lambda^* H_1(Y; \mathbb{C})$ であり, $\mathbb{A}(Y)^{\otimes(N-1)}$ の第 i 因子 ($2 \leq i \leq N$) の作用は

$$\mu_i : \mathbb{A}(Y; \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(I_*^N(Y, P; \mathbb{C})), \quad 2 \leq i \leq N$$

と書かれ, 第 i μ -map とよばれる. ^{*25}

$U(N)$ 束は 3 次元多様体上では 1 サイクル, 4 次元多様体上で 2 サイクルで指定できるので, そうすることが多い. さらに, 有向閉 3 次元多様体 Y に対し, 加群 $I_*^{\#,N}(Y) := I_*^N(Y \# T^3, S^1 \times pt) \cap \text{Ker}(\mu_2(pt) - N)$ が定義される. 最もよく研究されているのが $N = 2$ の場合でありこの時は N を省略して書く. $I_*^{\#,N}(Y)$ は, Euler 数が $|H_1(Y; \mathbb{Z})|^{N-1}$ (有理ホモロジー球面でなければゼロ) であり, 連結和に対する Kunneth 性, コボルディズム写像に対する関手性などが成り立つことを, Daemi–筆者–Scaduto は示した [27].

♠ 1.4.2 Jones 多項式, 量子不変量, Crane–Frenkel のプログラム, そして Khovanov ホモロジー

1980 年代, Jones によって Jones 多項式とよばれる結び目の多項式不変量が発見された [69]. これは S^3 内の結び目に対して, 射影図を用いて組み合わせ的に計算できるものである. Jones は元々作用素環論の研究から Jones 多項式を見出したが, 作用素環論の理解を要するものでもなければ, ゲージ理論のように PDE の解析を要するようなものでもない. Jones 多項式の発見を受けて, 複数の数学者により同時期に独立にその一般化である HOMFLY-PT 多項式が発見された [41]. ^{*26} これは特殊化として Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 ($n = 2$ が元の Jones 多項式) を含む.

具体的には, 有向絡み目 $L \subset S^3$ に対し, normalized HOMFLY-PT 多項式 $\bar{P}_\infty(a, q) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ が

$$a\bar{P}_\infty(\sigma^{-1}) - a^{-1}\bar{P}_\infty(\sigma) = (q^{-1} - q)\bar{P}_\infty(\uparrow\uparrow), \quad \bar{P}_\infty(U) = 1$$

により定まる (σ, σ^{-1} はブレイド群の生成元と同じもの, $\uparrow\uparrow$ はブレイドに平行な方向への smoothing である). 特に, $a = q^n$ とおいたものが normalized Rehetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 $\bar{P}_n(q) = \bar{P}_\infty(a = q^n, q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ であり,

$$q^n\bar{P}_n(\sigma^{-1}) - q^{-n}\bar{P}_n(\sigma) = (q^{-1} - q)\bar{P}_n(\uparrow\uparrow), \quad \bar{P}_n(U) = 1$$

を満たす. $n = 0$ (ただし $\bar{P}_0(U) = 1$ とする) の場合 $\bar{P}_0$ が Alexander 多項式である. $n = 1$ に対しては全ての絡み目に対し $\bar{P}_1 = 1$ となってしまう. $n = 2$ が (normalized) Jones 多項式である. $\mathfrak{sl}_n$ 多項式不変量が, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ のベクトル表現

^{*23} $1/2 \in R$ であるという条件なしでも関手性を持つかは未解決である. 負定値コボルディズムに対しては, $1/2 \in R$ であるという条件なしでも関手性を持つことが示されている.

^{*24} $(3+1)\text{Cob}_*^{\mathbb{Q}}$ の object は基点付き (連結) $\mathbb{Q}HS^3$ であり, morphism はホモロジー orientation と基点を結ぶ path が与えられた滑らかな連結有向コボルディズムである.

^{*25} universal bundle が $PU(N)$ 束であり, その $PU(N)$ 特性類に対応する μ -map がある. 今の場合 $H^*(BPU(N); \mathbb{C}) = \mathbb{K}[2, \dots, N]$ であり, $U(N)$ 束 E に対して $i_*(E) \in H^{2i}(BPU(N); \mathbb{Q})$ は, 有理 K 理論類 $E \otimes (\det E)^{-1/N}$ の第 i Chern 類として定義される. 例えば $2(E) = c_2(E) - \frac{N-1}{2N} c_1^2(E)$ である.

^{*26} [41] の最初のページの Editor's note によると 1984 年 9 月末から 10 月初めあたりの数日間において, ほぼ同じ結果を述べた 4 つの独立のリサーチアナウンスメントがあった. それらが 1 つの共著論文として統合されることになりこの論文が書かれた.

$\mathbb{C}^2$ に対応する R 行列を使って解釈できることを最初に示したのは Turaev[148] である。 $\mathfrak{sl}_n$ 多項式という名前の一つの由来はこのことにある。 Murakami–Ohtsuki–Yamada [119] は $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に対し、今日 MOY グラフとよばれている trivalent planar ダイアグラムを用いた state sum 表示を与えた。*27

量子群は Hopf 代数の例であり、Drinfeld と神保により独立に導入され、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のある 1 パラメタ変形 $U_q(\mathfrak{g})$ として定義される。その出自は、量子可積分系に分類されるいくつかの統計力学模型が持つ普遍的な構造として見出された Yang–Baxter 方程式にある。Yang–Baxter 方程式の解を R 行列というが、これは、ブレイド群の表現の構成に用いることができ、量子群を用いて系統的に R 行列、結び目不変量が得られるようになった。その後、量子群は共形場理論の持つ対称性としても研究されていった。

後に、Witten は、3 次元 Chern–Simons 汎関数を Lagrangian とする 3 次元 TQFT と、2 次元共形場理論である Wess–Zumino–Witten 理論の間のある種の等価性と、これらの理論により Jones 多項式が (1 の冪根において) 記述でき、さらに一般の閉 3 次元多様体に拡張できることを提唱した [151]。Witten の提案は Reshetikhin–Turaev により数学的に定式化され [138]、Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量という閉 3 次元多様体の不変量が定式化された。WRT 不変量の定式化でも量子群が用いられた。

Crane–Frenkel [25] は、インスタントン Floer ホモロジーを含む種々の TQFT が構成されていたことや、Lusztig により、量子群の基底であって、構造定数が正値性、整数性を満たすようなもの (標準基底) が見出されていた (正の整数でなければ何かのベクトル空間の次元になっていることは期待できない!) ことを背景に、WRT 不変量を圏化した 4 次元 TQFT を構成するプログラムを提唱した。*28 彼らは Hopf 圏という概念を導入した。Frobenius 代数が 2 次元 TQFT を与え、Hopf 代数が 3 次元 TQFT を与えるように、Hopf 圏が 4 次元 TQFT を与えるはずであるということが彼らの構想である。WRT 不変量の圏化は現在でもまだ構成されていないが、この構想は、Khovanov が Jones 多項式の圏化である Khovanov ホモロジー [78] を定式化する動機の一つとなった。*29

Khovanov–Rozansky により、 $\mathfrak{sl}_n$ -Khovanov–Rozansky ホモロジー KhR_n ($n = 2$ が Khovanov ホモロジー $Kh = KhR_2$ である) およびその reduced 版 $\overline{KhR}_n$ が定義された [80]。 KhR_n の構成方法は、MOY グラフに、あるやり方で行列因子化 (matrix factorization) を付随させ、それに基づいて絡み目図式に対してチェイン複体を構成するというものである。

KhR_n は Maslov (あるいはホモロジカル) 次数と Alexander 次数とよばれる二重次数をもち、 $\mathfrak{sl}_n$ 多項式を圏化する。すなわち、unreduced 版の graded Euler 数は unknoralized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に等しいという等式

$$\sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{C}} KhR_n(K) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \overline{P}_n(q) =: P_n(q)$$

(最右辺を unnormalized Reshetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式とよぶ) および、reduced 版の graded Euler 数は normalized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式に等しいという等式

$$\sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{C}} \overline{KhR}_n(K) = \overline{P}_n(q)$$

が成り立つ。

さらに、曲面コボルディズム写像が定義され、関手

$$KhR_n : Link \rightarrow gr^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} AbGrp$$

を与える ([117] 定理 4.9)。ここで、 $Link$ は S^3 内の有向絡み目を object とし、 $[0, 1] \times S^3$ 内の曲面コボルディズム (up to 境界を固定するアイソトピー) を射とする圏であり、 $gr^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} AbGrp$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 次数を持つアーベル群を object とし、斉次な準同型を morphism とする圏である。*30 *31

$\mathfrak{sl}_n$ -Khovanov–Rozansky ホモロジーの変種として、ポテンシャル関数 $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ とよばれる次数 n の monic 多項式のデータを入れて変形したもの $KhR_{\partial w}$ ($\partial w = x^n$ の場合が元の KhR_n^{**}) がある (例えば、[100] を見よ)。また、 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 3 重次数を持つ HOMFLY-PT-Khovanov–Rozansky ホモロジー KhR_{∞}^{***} およびその reduced 版 $\overline{KhR}_{\infty}^{***}$ も定式化され、

*27 Reshetikhin–Turaev [139] は単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し、絡み目の各成分に量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ のある既約表現 (いわゆる「色」) を付与したものに對する多項式不変量を定義した。例えば、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に表現 $V_n = Sym^n(\mathbb{C}^2)$ 上の表現を全ての絡み目成分に与えたものに對して定まるのが n -colored Jones 多項式 $J_n(K, q)$ であり、 $n = 1$ の場合が通常の Jones 多項式である。絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup L_l$ の成分 L_i に表現 V_{n_i} を与えたものに對して定まるのがより一般的な colored Jones 多項式 $J(L_n, q)$ 多項式である。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合に、絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_l$ の第 i 成分 L_i に $V_{k_i} = \Lambda^{k_i} \mathbb{C}^n$ 上の表現 (基本表現) を与えたものは colored Reshetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式 $P_n(L_k, q)$ とよばれ、全ての絡み目成分に對して表現 V_1 を与えた場合が元の Reshetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式である。Murakami–Ohtsuki–Yamada [119] は、colored 版の Reshetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式にも state sum 表示を与えていた。colored Reshetikhin–Turaev $\mathfrak{sl}_n$ 多項式の圏化については、例えば Wedrich のスライド「Some differentials on colored Khovanov–Rozansky link homology」や、[33] とそこから辿れる文献などを参照。

*28 Wikipedia によると「圏化」は Crane による造語である。

*29 Khovanov ホモロジーを定式化した動機については Khovanov の元論文 [78] や Lauda–Sissan によるサーベイ [97] Khovanov–Lipshitz によるサーベイ [79] で説明されている。

*30 Rasmussen の [136] 2.9 節によると、reduced 版 $\overline{KhR}_n^{**}$ の方は、絡み目に対しては、marked component に依存することが知られている。

*31 $\mathfrak{sl}_n$ -Khovanov–Rozansky ホモロジーには、いくつかの別構成が知られている。一つは、シンプレクティック Khovanov ホモロジーで、ある種の Lagrangian intersection Floer ホモロジーとして構成される。 $\mathfrak{sl}_2$ 版を Seidel–Smith [145] が構成し、Manolescu [111] がそれを $\mathfrak{sl}_n$ に拡張した。 $\mathfrak{sl}_2$ のとき、標数 0 の体上では、Abouzaid–Smith により元の Khovanov ホモロジーと同型であることが証明されている [1]。また一つの構成は、シンプレクティック Khovanov ホモロジーのホモロジカルミラーとされている、Cautis–Kamnitzer の導来代数幾何的 $\mathfrak{sl}_n$ -Khovanov–Rozansky ホモロジー [20] [21] である。現在 $\mathbb{C}$ 係数上定義されており、これも $n = 2$ の場合は元の Khovanov ホモロジーと同型であることが証明されている。また一つの構成は、Webster [149] が任意の複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して構成した絡み目ホモロジーである。これは higher representation theory (量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の 2 圏類似) を用いるもので、 $\mathfrak{sl}(2)$ の場合に元の Khovanov ホモロジーを復元することが示されている。他にも数学的に厳密ではないが、物理学者たちが Khovanov–Rozansky ホモロジーの構成についていくつかのアプローチを提唱している。Gukov–Schwarz–Vafa ([53])、Witten ([153])、Aganagic ([2] とその続編) などが挙げられる。

HOMFLY-PT 多項式を圏化する [81]. すなわち全ての絡み目 $L \subset S^3$ に対し, unreduced 版に対しては,

$$\sum_{i,j,k} (-1)^{\frac{k-j}{2}} a^j q^i \dim KhR_{\infty}^{i,j,k}(L) = \frac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}} \bar{P}_{\infty}(a, q)$$

が成り立ち, 右辺を unnormalized $\mathfrak{sl}_n$ 多項式とよぶ. reduced 版に対しては,

$$\sum_{i,j,k} (-1)^{\frac{k-j}{2}} a^j q^i \dim \overline{KhR}_{\infty}^{i,j,k}(L) = \bar{P}_{\infty}(a, q)$$

が成り立つ.

♠ 1.4.3 Heegaard/モノポール/ インスタント Floer ホモロジーとその knot 版, sutured 版

ここまでは 2000 年ごろからの Khovanov ホモロジーの発展の話振り返ったが, 今度はそれとほぼ同時期のゲージ理論, Heegaard Floer 理論の展開をみよう. 1994 年に Seiberg–Witten 方程式が発見されて以来, インスタント Floer ホモロジーの SW 版, すなわち, モノポール Floer ホモロジーを定式化する試みはいくつかなされてきた. 2007 年に本として出版された, Kronheimer–Mrowka による SW 方程式の実 blow up を用いた定式化 [94] が, 一つの完成形であると広く認識されている. ^{*32} モノポール Floer ホモロジーが持つ $U(1)$ 対称性についての同変理論として, 長い完全列で結ばれる 3 つの $\mathbb{Z}[U]$ 加群

$$\cdots \xrightarrow{p} H\bar{M}_{\bullet}(Y) \xrightarrow{i} H\check{M}_{\bullet}(Y) \xrightarrow{j} H\hat{M}_{\bullet}(Y) \xrightarrow{p} \cdots$$

^{*33} および, reduced フレーバー $HM_{\bullet}^{red}(Y) = \text{Im } j$ ^{*34}, そして, Bloom[17] が定式化 $U(1)$ 対称性を無視した非同変理論 $\widetilde{HM}_{\bullet}(Y)$ ^{*35}があり, 「Thom–Gysin 完全列」

$$\rightarrow H\check{M}_{\bullet+2}(Y) \xrightarrow{U} H\check{M}_{\bullet}(Y) \rightarrow \widetilde{HM}_{\bullet}(Y) \rightarrow$$

をなす. これらの Floer ホモロジー群は, 関手

$$H\bar{M}_{\bullet}(Y), H\check{M}_{\bullet}, H\hat{M}_{\bullet} : (3+1)\text{Cob} \rightarrow \mathbb{Z}[U]\text{-Mod}$$

をなす. ^{*36} また, これら 5 種類のモノポール Floer ホモロジー群は $Spin^c$ 構造の同型類に応じた分解 $\overset{\circ}{HM}(Y) = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in Spin^c(Y)} \overset{\circ}{HM}(Y, \mathfrak{s})$ および, 有向 2 平面場のホモトピー類の集合 $\pi_0(\Xi(Y)) = \coprod_{\mathfrak{s} \in Spin^c(Y)} \pi_0(\Xi(Y, \mathfrak{s}))$ ^{*37}による次数付けを持つ. $c_1(\mathfrak{s})$ がトージョンである $Spin^c$ 構造に対しては, (特に $\mathbb{Q}HS^3$ ならばいつでも) 有理数 $\mathbb{Q}$ による絶対次数も定まる. Floer コホモロジー群, 局所係数付き版なども定義される.

Heegaard Floer ホモロジー [127] は, SW 版の Atiyah–Floer 予想におけるモノポール Floer ホモロジーの Lagrangian intersection Floer 的対応物であり, モノポール Floer ホモロジーよりもトポロジカル, 組み合わせ的計算に適したものを意図して Ozsváth–Szabó が構成した理論である. モノポール Floer ホモロジーとの同型

$$HF^{\infty}(Y, \mathfrak{s}) \cong H\bar{M}(Y, \mathfrak{s}), \quad HF^{+}(Y, \mathfrak{s}) \cong H\check{M}(Y, \mathfrak{s}), \quad HF^{-}(Y, \mathfrak{s}) \cong H\hat{M}(Y, \mathfrak{s})$$

$$H\hat{F}(Y, \mathfrak{s}) \cong \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}), \quad HF^{red}(Y, \mathfrak{s}) \cong HM^{red}(Y, \mathfrak{s})$$

^{*38} が証明されており, コボルディズム写像, (i, j, p) 長完全列, コホモロジー群などもモノポール Floer 理論と同様に存在する. ^{*39}

Ozsváth–Szabó[125] と Rasmussen [137] は独立に, Heegaard Floer 理論の結び目入り版として, knot Floer ホモロジーを導入した.

$$H\hat{F}K(Y, K), \quad HFK^{+}(Y, K), \quad HFK^{-}(Y, K), \quad HFK^{\infty}(Y, K),$$

^{*32} モノポール Floer ホモロジーよりも, それに触発されて構成されたであろう SW Floer 安定ホモトピー型, Heegaard Floer ホモロジーの方が時系列としては先に発表されたことになっており, 時系列が一見奇妙に見えるが, Kronheimer–Mrowka は 1996 年の講演で, $\mathbb{Q}HS^3$ に対しては $U(1)$ 同変モノポール Floer ホモロジーの構成を実 blow up なしで行えることを説明していた. [126] の 4.1 節を参照. Kronheimer–Mrowka が $b_1 = 0$ とは限らない場合まで含めて扱えるように実 blow up を定式化とし, 境界付き多様体の Morse ホモロジーの無限次元版という描像を精巧に実現することに, 時間と労力をかけたことが想像される.

^{*33} それぞれ HM バー, from, to とよばれ, 境界付き多様体 B の全体と境界との対の完全列

$$\cdots \xrightarrow{p} H_{*}(\partial B) \xrightarrow{i} H_{*}(B) \xrightarrow{j} H_{*}(B, \partial B) \xrightarrow{p} \cdots$$

の Morse ホモロジーとしての実現の無限次元版と解釈される.

^{*34} $\mathbb{Q}HS^3$ に対し, これがゼロであることは $\mathbb{Z}$ 係数で L-space であることと同値である

^{*35} $\mathbb{Q}HS^3$ に対し, どの $Spin^c$ 構造に対してもこれのランクが対しても 1 であることは $\mathbb{Z}$ 係数で L-space であることと同値である

^{*36} $(3+1)$ コボルディズム圏の object としては連結有向閉 3 次元多様体のみを考える. また, 射には, homology orientation のデータを付与するか, さもなくば ± 1 倍を除いてしかコボルディズム写像が定まらない, 終域を射影的 $\mathbb{Z}[U]$ 加群の圏にする. また, 閉 4 次元多様体の SW 不変量を再現するには, もう一つのコボルディズム写像 $H\check{M}(W)$ を用いる必要がある.

^{*37} $\pi_0(\Xi(Y, \mathfrak{s}))$ には $\mathbb{Z}/\text{div}(c_1(\mathfrak{s}))$ が free かつ transitive に作用する. ここで, $\text{div}(c_1(\mathfrak{s})) \in \mathbb{Z}$ は $c_1(\mathfrak{s}) : H_2(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ の像である.

^{*38} 正確には HM 側では balanced perturbation をとる.

^{*39} ただし, コボルディズム写像の合成則は $\mathbb{Z}$ 係数では証明されていない.

さらに, Ozsváth–Szabó はその有向絡み目への拡張として, link Floer ホモロジー

$$H\hat{F}L(Y, K), \quad HFK^-(Y, L)$$

も導入した [130]. $Y = S^3$ のときには, $H\hat{F}K(K)$ は Alexander 多項式を圏化し, $H\hat{F}L(K)$ は多変数 Alexander 多項式を復元する. Heegaard knot Floer ホモロジーの元々の定義には, 擬正則曲線 (非線形 Cauchy–Riemann 方程式) の解析が使われていたが, S^3 内の結び目に対しては, Manolescu–Ozsváth–Sarkar [113] により, grid diagram を用いた組み合わせ的構成が与えられた. これは grid homology とよばれる.

Juhász により導入された, Heegaard sutured Floer ホモロジー [70] は, balanced sutured 3-manifold $(M, \gamma)^{*40}$ に対して, 加群 $SHF(M, \gamma)$ を与える Heegaard Floer ホモロジー群の変種である. $M = Y - \text{Int}(D^3)$ に $\gamma = (\text{赤道}) \subset \partial M = S^2$ を suture として与えると閉 3 次元多様体の $HF(Y)$ を復元し, knot exterior $M = Y - \text{Int}(N_K)$ にメリディアンとそれを平行にずらして向きを逆にしたもの $\gamma = \mu \amalg -\mu$ を suture として与えると Heegaard $H\hat{F}K(Y, K)$ を復元する. これらの 3 次元での関手性 (すなわちホモロジー群が群の同型類としてだけでなく, その間のカノニカルな同型射を与えた) については, Juhász–Thurston–Zemke [75] で確立された.

$$HF, HF^-, HF^+, HF^\infty : 3Man_* \rightarrow \mathbb{F}_2[U]\text{-Mod}$$

$$SFH : \text{Sut}_{\text{bal}} \rightarrow \mathbb{F}_2\text{-Vect}$$

$$H\hat{F}L, HFL^- : \text{Link}_* \rightarrow \mathbb{F}_2[U]\text{-Mod}$$

ただし $H\hat{F}, H\hat{F}L$ の $\mathbb{F}_2[U]$ 加群作用は自明である. $3Man_*$ は基点付き有向閉 3 次元多様体を object とし, 基点と向きを保つ微分同相を射とする圏であり, Sut_{bal} は balanced sutured 3-manifold を object とし, その間のしかるべき向きを保つ微分同相を射とする圏である. Link_* は, object が S^3 内の based link, すなわち, 各成分にちょうど一つの基点を持つ絡み目であり, morphism が, 絡み目および基点を保つような向きを保つ微分同相である圏である. 後述するコンタクト元や Legendre/transverse knot 元を考えると, Floer ホモロジーを加群の同型類として扱うのでは, 元は up to 自己同型でしか定まらないのに対し, このように 3 次元での関手性を示しておけば, 元が意味をなすことになるという意味で重要である. balanced sutured 3-manifold の間の sutured コボルディズムに対するコボルディズム写像に関する関手性, およびその帰結としての link Floer ホモロジーとしての関手性については Juhász の [72] をみよ.

Kronheimer–Mrowka は Heegaard sutured Floer ホモロジーのモノポール, インスタントン版として, モノポール/インスタントン sutured Floer ホモロジー $SHM(M, \gamma)$, $SHI(M, \gamma)$ を構成し, その特別な場合として knot exterior を考えることで, モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジー $KHM(Y, K)(\mathbb{Z}\text{ 係数})$, $KHI(Y, K)(\mathbb{C}\text{ 係数})$ を構成した [95]. スルホモロガスな種数 g の連結 Seifert 曲面 $\Sigma \subset Y$ が与えられると, 相対ホモロジー類 $[\Sigma]$ に応じた分解

$$H\hat{F}K(Y, K) = \bigoplus_{i=-g}^g H\hat{F}K(Y, K, [\Sigma], i), \quad KHM(Y, K) = \bigoplus_{i=-g}^g KHM(Y, K, [\Sigma], i), \quad KHI(Y, K) = \bigoplus_{i=-g}^g KHI(Y, K, [\Sigma], i),$$

が定まり, 特に $Y = S^3$ の場合この分解は Σ によらないので, (Y, Σ) を表記から省略する. この i を Alexander 次数とよぶ. 結び目 $K \subset S^3$ に対して, 次が知られている.

1. Alexander 次数について次の対称性 (conjugation symmetry) がある

$$H\hat{F}K_d(K, i) \cong H\hat{F}K_{d-2i}(K, -i), \quad KHM(K, i) \cong KHM(K, -i), \quad KHI(K, i) \cong KHI(K, -i)$$

2. 次の意味で, Heegaard/モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーは Seifert 種数を detect する: $\max\{i | H\hat{F}K(K, i) \neq 0\} = \max\{i | KHM(K, i) \neq 0\} = \max\{i | KHI(K, i) \neq 0\} = g_3(K)$
従って, 上の項目と合わせると, 非自明な最大および最小 Alexander 次数は $\pm g_3(K)$ に等しく, $g_3(K) = 0$ である結び目は unknot だけであったから, $K \neq U$ に対しては, $H\hat{F}K(K)$, $KHM(K)$, $KHI(K)$ はランク 2 以上である (一方で, unknot に対してはランク 1 である).
3. 次の意味で, Heegaard/モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーはファイバー結び目を detect する $H\hat{F}K(K, g_3(K)) \cong \mathbb{Z}$ であることは K がファイバー結び目であることと同値である. KHM , KHI についても同様に Alexander 次数最高部分がランク 1 であることファイバー結び目であることが同値である. (Heegaard では, Ni [121] が sutured manifold 理論を使って証明し, Juhász [71] は sutured Floer を用いた別証明を与えた. モノポール/インスタントンでの証明は Kronheimer–Mrowka [95] によりあたえられ, その議論は Juhász のものとほぼ並行している):

^{*40} balanced sutured manifold (M, γ) とは, closed component を持たない境界付きコンパクト有向 3 次元多様体 M に次のデータを与えたものである:

1. 有向閉 1 次元部分多様体 $\gamma \subset \partial M$ (i.e. M の境界上の disjoint な有向円周の集まり). これを suture という.
 2. γ の管状近傍 $A(\gamma) \subset \partial M$. $R(\gamma) := \partial M - A(\gamma)$ である.
さらにこれらが次の条件を満たすことを要請する.
 1. $R(\gamma)$ は closed component を持たない.
 2. $R(\gamma)$ には, 次を満たす向き (canonical orientation) を与える: $R(\gamma)$ が境界に誘導する向きは, γ の向きと一致する.
 3. $R(\gamma)$ の成分を次のように二つに分ける. $R(\gamma) = R_+(\gamma) \amalg R_-(\gamma)$, ここで, $R_+(\gamma)$ (resp. $R_-(\gamma)$) は canonical orientation が ∂M の向きと一致している (resp. 逆である) 成分の集まり. このとき, $\chi(R_+(\gamma)) = \chi(R_-(\gamma))$ であることを要請する.
- なお, sutured manifold は元々 Gabai により導入されたものであり, Floer ホモロジーが定義されている balanced sutured 3-manifold はそれより狭いクラスである.

4. $H\hat{F}K(K)$ は Maslov 次数 (ホモロジカル次数) と Alexander 次数の二つの $\mathbb{Z}$ 次数 $H\hat{F}K(K) = \bigoplus_{(d,i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} H\hat{F}K_d(K, i)$ をもち, Alexander 多項式を圏化する. $KHM(K)$, $KHI(K)$ はカノニカル $\mathbb{Z}_2$ 次数と Alexander 次数の二つの次数 $KHM(K) = \bigoplus_{(d,i) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}} KHM_d(K, i)$, $KHI(K) = \bigoplus_{(d,i) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}} KHI_d(K, i)$ を持ち, Alexander 多項式を圏化する. ^{*41} すなわち,

$$\sum_i \chi(H\hat{F}K(K))t^i = \sum_i \chi(KHM(K, i))t^i = \sum_i \chi(KHI(K, i))t^i = \Delta_K(t)$$

が成り立つ [125][95][93].

sutured Floer ホモロジーの間の同型

$$SFH(M, \gamma) \cong SHM(M, \gamma) \cong_{\mathbb{C}} SHI(M, \gamma)$$

($\cong_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ をテンソルすると同型の略記) およびその特別な場合として, $H\hat{F}(Y) \cong H\tilde{M}(Y) \cong_{\mathbb{C}} I^{\#}(Y)$ や $H\hat{F}K(K) \cong KHM(K) \cong_{\mathbb{C}} KHI(K)$ が予想されているが, 未解決である.

♠ 1.4.4 分岐被覆の Floer ホモロジー

結び目や曲面コボルディズムの分岐被覆に, 適切な (同変)Floer 理論を適用して, 結び目ホモロジー理論を作ることができる. Heegaard Floer ホモロジー Ozsváth–Szabó [129] は $H\hat{F}(\Sigma_2(K); \mathbb{F}_2)$ を調べ, スケイン完全列や, reduced Khovanov ホモロジーからのスペクトル系列を構成した. Manolescu–Owens [112] は 二重分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ の Heegaard Floer d 不変量 (Froyshov 不変量の HF 対応物) を調べ, Jabuka [68] は素数べき次の巡回分岐被覆 $\Sigma_{p^n}(K)$ (p : 素数) に拡張した. これらはコンコードダンス準同型 $\delta_{p^n} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ を与える. Hendricks–Lipshitz–Sarker [60][61] は Lie 群 G について同変な Lagrangian intersection Floer 理論を展開し, 特に $\mathbb{Z}_2$ 同変 Heegaard Floer 理論を二重分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ に適用したもの $H\hat{F}_{\mathbb{Z}_2}^*(\Sigma_2(K))$ を調べた.

後述する Baraglia–Hekmati, 筆者–谷口の研究はこれらの理論の SW 対応物と見ることができるとはなるが, 現時点で HF サイドよりも理論展開, 計算が進んでいる部分がある. また, 分岐被覆の involution を, SW configuration にひねった持ち上げ方でリフトした作用を用いる real SW 理論という理論から得られる結び目ホモロジー理論を展開したものとして, 今野–宮澤–谷口 [82][83] がある.

♠ 1.4.5 特異インスタント Floer ホモロジー

Donaldson 不変量の構造定理, インスタント版の adjunction 不等式, 特に, Kronheimer–Mrowka による Milnor 予想の最初の証明では, 閉 4 次元多様体とそれにうめ込まれた曲面のペア (X, Σ) に対するバージョンの Donaldson 不変量の考察が重要であった. これは, 曲面に沿って特異性を持つインスタントの数え上げにより定義された. この TQFT 化として, Kronheimer–Mrowka は, knot に沿って特異性を持つ接続を使い, 特異インスタント Floer ホモロジー $I^{\#}(Y, K)$, $I^{\natural}(Y, K)$ を導入した [91]. これは, 複素係数でインスタント knot Floer ホモロジーと同型となることが証明された [90]. また, S^1 同変版特異インスタント Floer ホモロジーが Daemi–Scaduto により導入された [30].

1.5 コンタクト元と transverse/Legendrian knot 元

いくつかの Floer ホモロジーに共通する性質として, 閉コンタクト 3 次元多様体 (Y, ξ) に対しては, $-Y$ の Floer ホモロジーに値を持つコンタクト元が定義される. 例えば, monopole Floer コンタクト元 $c_{HM}(\xi) \in H\tilde{M}_{[\xi]}(-Y, \mathfrak{s}_{\xi}) / \pm 1$, $H\tilde{M}_{[\xi]}(-Y, \mathfrak{s}_{\xi}) / \pm 1$ [84], Heegaard Floer コンタクト元, $c_{HF}(\xi) \in HF^+(-Y, \mathfrak{s}_{\xi}) / \pm 1$, $H\hat{F}(-Y, \mathfrak{s}_{\xi}) / \pm 1$ [128], ECH コンタクト元 $c_{ECH}(\xi) \in ECH(Y)$ はその例である. Honda–Kazez–Matić[63] は $c_{HF}(\xi)$ の別構成を与えた. これらは, Taubes の同型 $HM = ECH$ ([146] から始まる 5 編の論文), Colin–Ghiggini–Honda の同型 $ECH = HF$ ([23] から始まる一連の論文) の下で写り合うことも証明されている.

また, Honda–Kazez–Matić, [62], Baldwin–Sivek [4][5] は, convex な境界を持つ境界つきコンタクト 3 次元多様体 (sutured contact 3-manifold) (M, γ, ξ) (ここで suture γ は dividing set とする) に対して定まる sutured Heegaard/モノポール/インスタント Floer ホモロジーの元を与えた

$$EH(M, \gamma, \xi) \in SFH(-M, -\gamma), \quad \psi(M, \gamma, \xi) \in \underline{SHM}(-M, -\gamma), \quad \theta(M, \gamma, \xi) \in \underline{SHI}(-M, -\gamma)$$

また, コンタクト元の naturality とよばれる性質が知られている. これはしかるべきクラスのシンプレクティックコボルディズムに対して, そのコボルディズム写像は, 一方の境界のコンタクト元をもう一方の境界のコンタクト元に写すというものである. 例えば, モノポール Floer 理論では, strong symplectic cobordism $(W, \omega) : (Y_0, \xi_0) \rightarrow (Y_1, \xi_1)$ に対し, $W : -Y_1 \rightarrow -Y_0$ とみなした下で, $H\tilde{M}(W, \mathfrak{s}_{\omega})(c(\xi_1)) = c(\xi_0)$ が成り立つ. これは Mrowka–Rollin[118] が Kronheimer–Mrowka 不変量 (SW 不変量の, 境界にコンタクト構造を持つ 4 次元多様体に対する変種) に対する naturality を示す際に用いた「コーンの拡大」の手法を用いて, Echeverria[32] により示された. 他の理論のコンタクト元の naturality については Echeverria[32] に書かれている文献を参照.

いくつかの結び目ホモロジーにおいては, Legendrian, transverse knot に対し, その結び目ホモロジー群の元が定まるといふ共通の性質がある. これは上述したコンタクト元の結び目版と見なせる. transverse link の不変量であって transverse アイストピーの下で不変なものは Legendrian link の不変量であって negative stabilization と Legendrian アイストピーの下で不変なものと同値であったことを思い出そう. ここで紹介する不変量はいずれもそのようなものである. transverse link 不変量の場合のみを書くことにする.

^{*41} インスタント/モノポールではホモロジカル $\mathbb{Z}$ 次数を復元する方法は知られていないが, もちろんホモロジカル $\mathbb{Z}_2$ 次数だけで Euler 数は定義できる.

- Plamenevskaya が定式化した Khovanov ホモロジーの元としての transverse knot 不変量 [133] と Wu[155] によるその $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozansky への一般化 $\psi_n(\mathcal{T}) \in KhR_n(m(\mathcal{T}))$. Khovanov ホモトピー版などの変種と発展については Lipshitz–Ng–Sarkar [105], Collari [24] などを参照. Gabriel Montes de Oca [116] は Plamenevskaya 不変量の odd Khovanov ホモロジー版を構成した. Hayden–Sundberg [55] では, Plamenevskaya 不変量の, 正の ascending コボルディズムの元での naturality が証明され, また, 4-ball 内の exotic surface を検出した.
- Heegaard knot Floer ホモロジーの元として定まる Legendrian, transverse knot 不変量には, zsvath–Szabo–Thurston[131] による Grid 不変量 (ただし (S^3, ξ_{std}) のみ) とよばれる grid diagram を用いる定式化, Lisca–Ozsváth–Stipsicz–Szabó による, LOSS 不変量 [106] という二つの定式化があったが, Baldwin–Vela–Vick–Vértesi は Braid 不変量 [9] というまた一つの定式化を与え, さらにこれら 3 つの定式化の等価性を示した. 今のところ, LOSS 不変量, Braid 不変量には $HFK(-Y, L)$ に値を持つものと $HFK(-Y, -L)$ に値を持つものの 2 タイプがある (ただし $HFK(-Y, L)$ と $HFK(-Y, -L)$ は同型ではある).

$$\hat{\mathfrak{T}}^{Grid}(Y, \xi, K) = \hat{\mathfrak{T}}^{LOSS}(Y, \xi, K) = \hat{\mathfrak{T}}^{Braid}(Y, \xi, K) \in H\hat{F}K(-Y, L)$$

$$\mathfrak{T}^{Grid-}(Y, \xi, K) = \mathfrak{T}^{LOSS-}(Y, \xi, K) = \mathfrak{T}^{Braid-}(Y, \xi, K) \in HFK^{-}(-Y, L)$$

$$\hat{\mathfrak{T}}_-^{Grid}(Y, \xi, K) = \hat{\mathfrak{T}}_-^{Braid}(Y, \xi, K) \in H\hat{F}K(-Y, -L)$$

$$\mathfrak{T}_-^{Grid-}(Y, \xi, K) = \mathfrak{T}_-^{Braid-}(Y, \xi, K) \in HFK^{-}(-Y, -L)$$

以下, これらをまとめて, $\hat{\mathfrak{T}}, \mathfrak{T}, \hat{\mathfrak{T}}_-, \mathfrak{T}_-$ と書くことにする. また, Braid 不変量は, K がファイバー絡み目であり, B がそれについてブレイドであるとき, $\hat{\mathfrak{T}}(B \cup K) \neq 0$ という非消滅定理を持つ [147]. Juhász–Miller–Zemke [74] では Braid 不変量のあるクラスの ascending コボルディズムの元での naturality が証明され, それを用いて 4-ball 内の exotic surface を検出した (Khovanov よりこちらの方が先だったが, 例は異なる). 2022 年の Binns–Day[16] では Braid 不変量を一要素として用いて knot Floer ホモロジーのランクが 8 以下の絡み目の分類がなされた.

- モノポール knot Floer 理論にも Legendrian, transverse knot 不変量. $\mathfrak{T}_M(K) \in \underline{KHI}(-Y, K, p)$ がある. これは Baldwin–Sivek[6] により構成された.
- インスタント knot Floer 理論にも Legendrian, transverse knot 不変量 $\mathfrak{T}_I(K) \in KHI(-Y, K)$ がある. これも Baldwin–Sivek[8] により構成され, Khovanov ホモロジーが三葉結び目を detect することの証明に使われた.
- Kang[76] が定式化した, 分岐被覆の Hendrics–Lipshitz–Sarkar $\mathbb{Z}_2$ 同変 Heegaard Floer コホモロジーに値を持つ pointed transverse knot $p \in \mathcal{T} \subset (S^3, \xi_{std})$ の不変量.

$$c(\xi_{\mathcal{T}}) = c(\Sigma_2(\mathcal{T}), \tilde{\xi}) \in \hat{H}F_{\mathbb{Z}_p}^*(\Sigma_2(\mathcal{T}), p)$$

これは $\mathcal{T}$ の transverse based isotopy 類の不変量であることが示された.

1.6 結び目ホモロジーの間の種々のスペクトル系列

- reduced Khovanov ホモロジーから 2 重分岐被覆の $\hat{H}F$ へのスペクトル系列 ($\mathbb{F}_2$ 係数).

$$E_2 = \overline{Kh}(m(K)) \Rightarrow \hat{H}F(\Sigma_2(K))$$

これは, Ozsváth–Szabó[129] によるものである. スペクトル系列の構成は, 2 重分岐被覆の $\hat{H}F$ の skein exact triangle の技術の応用である. のちに, $\widehat{HM}(\Sigma_2(K))$ を用いたこのスペクトル系列の SW 対応物が Bloom[17] により定式化された. また, ある種の Bar–Natan ホモロジー $E_2 = \widehat{BN}_{**}^2(m(L))$ から 2 重分岐被覆の involutive monopole Floer ホモロジー $\widehat{HMI}(\Sigma(L))$ に収束するスペクトル系列が F.Lin により構成された [104].

- reduced Khovanov ホモロジーから reduced 特異インスタント Floer ホモロジー $I^{\natural}$ へのスペクトル系列 ($\mathbb{Z}$ 係数)

$$E_2 = \overline{Kh}(m(K)) \Rightarrow I^{\natural}(K).$$

これは, Kronheimer–Mrowka [90] によるもので, 上の Ozsváth–Szabó による 2 重分岐被覆の $\hat{H}F$ へのスペクトル系列のアイデアに触発されたものである. このスペクトル系列の帰結として, reduced Khovanov ホモロジーのランクは $I^{\natural}$ のランク以上であることがわかる. これを, $I^{\natural}(K)$ がインスタント knot Floer ホモロジー $SHI(K)$ と $\mathbb{Q}$ 上同型であること, knot Floer ホモロジー $SHI(K)$ が 1 次元であるのは unknot に限り, その他の knot では 2 次元以上であることと組み合わせて, Kronheimer–Mrowka は 「(reduced) Khovanov ホモロジーが unknot を detect する」という有名な結果を示した. ^{*42} このスペクトル系列 $(+\alpha)$ を用いて, Khovanov ホモロジーがその他のいくつかの結び目を detect することも示された. また, Kronheimer–Mrowka は Bar–Natan 理論版のスペクトル系列も構成した [92].

^{*42} なお, (reduced でない) Khovanov ホモロジーも unknot を detect することがこのことから従う. 実際, $\text{rank}Kh(U) = 2$ であり, $\text{rank}Kh(K) > 2$ であるとする, exact triangle

$$\rightarrow Kh(K) \rightarrow \overline{Kh}(K) \rightarrow \overline{Kh}(K) \rightarrow$$

より, $2\text{rank}\overline{Kh}(K) \geq \text{rank}Kh(K) > 2$ より $\text{rank}\overline{Kh}(K) > 1$ となるからである. 従って結び目 $K \subset S^3$ に対し $\text{rank}Kh(K) = 2$ と $K = U$ は同値である.

- Baston–Seed link splitting スペクトル系列 [13] というものもある。これは、絡み目の Khovanov ホモロジーから、その成分の disjoint union の Khovanov ホモロジーに収束するスペクトル系列で、これを、Khovanov ホモロジーが unknot を detect するという Kronheimer–Mrowka の結果と、絡み目の Khovanov homology は $A_l = \mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_l]/(X_1^2, \dots, X_l^2)$ 加群構造まで見る (l : 絡み目の成分数) と、 l 成分 unknot を detect するという Hedden–Ni の結果 [58] と組み合わせることで、Khovanov ホモロジーが unlink を detect することを検出した。Hedden–Ni の議論のポイントは Ozsváth–Szabó スペクトル系列 [129] 全体が A_l 加群構造を持つことである。
- Dowlin スペクトル系列 [31]。これは reduced Khovanov ホモロジーから δ 次数付き Heegaard knot Floer ホモロジーへの $\mathbb{Q}$ 係数上のスペクトル系列。

$$E_0 = \overline{Kh}(K) \Rightarrow H\hat{F}K(m(K))$$

これは特に $\text{rank } \overline{Kh}(K) \geq \text{rank } H\hat{F}K(K)$ であるという Rasmussen の予想 [135] を証明している。さらにこれを用いて Khovanov ホモロジーが unknot を含むいくつかの knot を detect するという結果の再証明が与えられた。

- Lee スペクトル系列

$$E_2 = Kh(K) \Rightarrow Kh_{Lee}(K)$$

は、Rasmussen 不変量の元々の定義に用いられた。絡み目 L の成分数が $|L|$ であるとき、Lee ホモロジーのランクは $2^{|L|}$ であり、結び目の場合 2 である。このスペクトル系列の E_∞ 項は例えば $\mathbb{Q}$ 係数では、ある $s(K) \in 2\mathbb{Z}$ に対し、 $E_\infty^{i,j} = \mathbb{Q}_{0,s(K)-1} \oplus \mathbb{Q}_{0,s(K)+1}$ という形となり、この $s(K)$ が Rasmussen 不変量である。

Gornik, Lewark, Lobb, Wu ([108][109][156][157] [100]) は、Lee スペクトル系列の $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozansky ホモロジーへの一般化を次のように定式化した: ポテンシャル $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ が n 次の monic 多項式のとき、 $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozansky ホモロジーの変種 $KhR_{\partial w}$ が定義されるのであった。さらに、ポテンシャル ∂w が分離的 (separable), すなわち、 n 個の相異なる根を持つとき、

$$E_1 = KhR_n(K) \Rightarrow gr^j KhR_{\partial}^i(K)$$

というスペクトル系列が存在し、かつ $gr^j KhR_{\partial w}^i(K)$ はランク n であり、その生成元の次数は $(i, j) = (0, j_1(K)), \dots, (0, j_n(K))$ という形であることを示した。 $n = 2$ の場合が Lee スペクトル系列である。また、Lewark–Lobb の [100] では、 ∂w の根 α を一つ選ぶごとに $\overline{KhR}_{\partial w, \alpha}$ というホモロジーが定義され、これは常に 1 次元で、

$$E_2 = \overline{KhR}_n^{i,j} \Rightarrow gr^j \overline{KhR}_{\partial w}^i$$

という reduced 版のスペクトル系列が定式化された。これを用いて Rasmussen 不変量の一般化であるスライス–トーラス不変量 $s_{\partial w, \alpha} : \mathcal{C} \rightarrow \frac{1}{2(n-1)}\mathbb{Z}$ が定義される。

- Rasmussen が構成した、reduced HOMFLY–PT ホモロジーから reduced $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozansky ホモロジーへのスペクトル系列 [136]

$$E_1 = \overline{KhR}_\infty(K) \Rightarrow \overline{KhR}_n(K).$$

(Chandler–Gorsky, [22] も参照。) Rasmussen いわく、このスペクトル系列は、ある意味 Lee のスペクトル系列の一般化である。また、このスペクトル系列の帰結として、各結び目 $K \subset S^3$ に対し、十分大きな全ての n に対し、

$$\overline{KhR}_n^{I,J}(K) \cong \bigoplus_{\substack{i+nj=I, \\ (k-j)/2=J}} \overline{KhR}_\infty^{i,j,k}(K)$$

が成り立つことを示した。

1.7 スライス–トーラス不変量

ここまでで多種多様な結び目ホモロジー理論があることを見たが、そこから、さまざまなコンコダンス不変量が得られている。その中でも 4-ball 種数の下界を与え、かつ Bennequin 型不等式、結び目の連結和についての加法的な性質を満たす、スライス–トーラス不変量とよばれるクラスのコンコダンス不変量は最もシンプルなクラスであると考えられる。スライス–トーラス不変量という概念は Livingstone [107] に従って Lewark [99] によって導入された。

定義 1.6. $\mathbb{R}$ 値コンコダンス不変量

$$y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

であって、次の条件を満たすものをスライス–トーラス不変量とよぶ。

1. (スライス条件)

$$y(K) \leq g_4(K)$$

2. (トーラス条件) $p, q > 0$ coprime に対するトーラス結び目に対して $y(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$
3. (加法的性)

$$y(K_0 \# K_1) = y(K_0) + y(K_1)$$

を満たすものである。

◇

トールス条件は, slice–Bennequin 不等式

$$sl(\mathcal{T}) \leq 2y(K) - 1$$

に置き換えても等価である. ここで, $\mathcal{T} \subset (S^3, \xi_{std})$ は knot type が K である任意の transverse knot である. このことの証明には transverse Markov 定理を用いる (たとえば Lewark の PhD thesis [98] をみよ.). また, knot type が K である任意の Legendrian knot $\mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std})$ に対し

$$tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| \leq 2y(K) - 1$$

が成り立つことは, 上述の transverse knot の slice–Bennequin 不等式と transverse push-off により直ちに従う. ここまで出てきたいくつかの不等式をまとめると

$$\frac{sl(\mathcal{T}) + 1}{2}, \frac{tb(\mathcal{L}) + |rot(\mathcal{L})| + 1}{2} \leq (\forall \text{ スライス-トールス不変量})(K) \leq g_4(K) \leq g_3(K), u(K)$$

となる. ここで, $\mathcal{T}, \mathcal{L} \subset (S^3, \xi_{std})$ はそれぞれ knot type が K である任意の transverse knot, Legendrian knot である. ^{*43} 現在知られているスライス-トールス不変量の例として,

- Heegaard knot Floer ホモロジーから構成される Ozsváth–Szabo の不変量 $\tau \in \mathbb{Z}$. これが最初に見つかったスライス-トールス不変量である. 元々は Heegaard knot Floer チェイン複体の Alexander フィルとトレーションの情報を用いて定義された. [131] の Appendix A によると

$$\tau(K) = -\max\{i \mid \exists x \in HFK^-(S^3, K, i) \text{ s.t. } U^j x \neq 0 \forall j \geq 0\}$$

という特徴づけがある.

- Rasmussen 不変量 (の半分) $s/2 \in \mathbb{Z}$. Rasmussen 不変量は Khovanov ホモロジーから Lee ホモロジーへのスペクトル系列を用いて構成されるのだった. Rasmussen がこの不変量を導入し, 解析的手法を用いない Moilnor 予想の証明を与えたことは, センセーショナルな出来事であった. なお, Rasmussen は $\tau = s/2$ を予想したが, 後に反例が与えられた. そのような最初のものとして, Hedden–Ording [59] により, いくつかの (n, t) に対し, トールス結び目 $T_{2,2n+1}$ の t -twisted positive Whitehead double $D_+(T_{2,2n+1}, t)$ は, $s/2 = 1 \neq 0 = \tau$ を満たすことが示された. $\tau = s/2$ が成り立つ結び目のクラスはいろいろあり, 例えば, 交点数 10 以下の全ての結び目や, quasipositive knot $\tau = s/2 = \frac{s+1}{2}$, alternating knot $\tau = s/2 = -\frac{\sigma(K)}{2}$ などとはそうである ([59] をみよ) より一般に, squeezed knot [38] というクラスの結び目に対しては, スライス-トールス不変量の値は全て一致することが示されている.
- Lewark–Lobb の [100] で一般化されて導入された, $sl(n)$ Khovanov–Rozansky ホモロジーと次数 n でモニックかつ分離的 (根が全て相違) なポテンシャル関数 $\partial w \in \mathbb{C}[x]$ とその一つの根 α から構成される Rasmussen 型不変量 $s_{n, \partial w} \in \frac{1}{n-1}\mathbb{Z}$.
- Z. Li [101] は, モノポール/インスタントン knot Floer ホモロジーのマイナスフレーバー $\underline{KHM}^-, \underline{KHI}^-$ を導入し, それを用いてスライス-トールス不変量 τ_M, τ_I を構成した. 一方, Baldwin–Sivek [7] は閉 3 次元多様体の Floer ホモロジー $I^\#, \bar{H}\bar{M}$ を Dehn 手術に適用したものを用いて, スライス-トールス不変量 $\tau_I^\#, \tau_M^\#$ を構成した (モノポール版の構成は書かれていないが Ghosh–Z.Li–Wong [47] のいうように同様である). これらについては, Ghosh–Z.Li–Wong [47] では $\tau_I = \tau_I^\#, \tau^{\mathbb{F}_2} = \tau_M = \tau_M^\#$ が示された.
- Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi [28] が同変特異インスタントンホモロジーから構成した不変量 $\tilde{s}$. 以前に Kronheimer–Mrowka が特異インスタントン Floer 理論 $I^\#$ (およびそれに接続のホロノミーの情報を持った局所係数の情報を付与したもの) を用いて, $s^\#$ というコンコダンス不変量を導入し, これが Rasmussen 不変量 s と一致すると主張したが, 議論に誤りが見つかり, Gong [50] は $s^\#$ は連結和に対する加法性が成り立たない例を見つけ (従って $s^\#$ はスライス-トールス不変量ではない), またトールス結び目に対する値も s とは異なることを示した. その後 Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi が導入した $\tilde{s}$ はスライス-トールス不変量であり, $s^\#$ との差について $2\tilde{s}(K) - s(K) \in \{-1, 0, 1\}$ を満たすことが示されている.
- 佐藤–佐野 [143] は, Rasmussen 不変量を, PID とその素元の組 (R, c) に一般化した不変量 $\tilde{s}_{s_c}$ を定式化した. 特に体 $\mathbb{K}$ 係数の Rasmussen 不変量を $(R, c) = (\mathbb{K}[h], h)$ の場合として含んでいる.
- そして, この予稿の主題である [IT2] で筆者–谷口が $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten Floer コホモロジーを用いて導入した不変量 $q_M \in \mathbb{Z}$,

が知られている. Baldwin–Sivek [7], Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi [28] によると $\tau_I^\# = \tau$ および $\tau = \tilde{s}$ が予想されているが, まだ証明されていない.

♠ 1.7.1 その他のトピック

結び目ホモロジーから構成される様々な非スライス-トールスなコンコダンス不変量 $\nu', \nu, \nu^+, \epsilon$ などや, そのコンコダンス群に関する応用などを紹介したかったが, 紙面の都合上省略する. また, D^4 とその境界としての S^3 をより一般の境界付き 4 次元多様体や 3 次元多様体にした場合の考察, 例えば, H-種数の評価なども最近盛んであるが今回はあまり取り上げなかった.

2 筆者–谷口 [67] の主結果: $\mathbb{Z}_2$ 同変 SWFloer 理論を用いた新しい結び目ホモロジー

[67] で筆者–谷口は $\mathbb{Z}_2$ 同変 Seiberg–Witten Floer 理論を用いて, 新しい結び目ホモロジー群, および, 新しいスライス-トールス不変量 q_M を導入した.

^{*43} その他の Bennequin 型不等式として HOMFLY–PT 多項式を使うもの, HOMFLY–PT ホモロジーを使うもの, Kauffman 多項式を使うもの, Khovanov ホモロジーを使うものなどがある. Ng の [120] にまとまっている.

2.1 SW Floer 安定ホモトピー型とその同変版

まず, Manolescu[110] が導入した, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の位置付けを説明したい. Seiberg–Witten 不変量は元々は閉 4 次元多様体の整数値不変量であった. Floer が導入した, 無限次元版 Morse ホモロジー, すなわち, Floer ホモロジーの枠組みにおいて, Seiberg–Witten 不変量の (3+1) TQFT 化として, Seiberg–Witten モノポール Floer ホモロジーが構成された.

一方, 別の方向性の展開として, 古田が 10/8 不等式の証明の際に導入した Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似の方法 [43] により, Seiberg–Witten 不変量のホモトピカルな精密化として, Bauer–Furuta 不変量 [14] が構成できる. これは, $b_1(X) = 0$ ^{*44}である $Spin^c$ 閉 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ に対し,

$$BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{M-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{N+\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X)-\sigma(X)}{8}})^+ \rightarrow (\mathbb{R}^M \oplus \mathbb{C}^N)^+, \quad M, N \gg 1$$

という, 基点付き S^1 同変安定ホモトピー写像である.

しばしば, 十分大きな整数 M, N を省略して $BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X)-\sigma(X)}{8}})^+ \rightarrow S^0$ のように書くことにする. S^1 作用は Seiberg–Witten 方程式の持つゲージ対称性のうちの, ちょうど S^1 分だけある定数ゲージ変換に由来する.

Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, この二方向の Seiberg–Witten 不変量の展開のかけ合わせに当たるものである. すなわち, Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, モノポール Floer ホモロジーのホモトピカルな精密化であり, 同時に, Bauer–Furuta 不変量の (3+1) TQFT 化である. フォーマルに述べると, Seiberg–Witten 安定ホモトピー型は, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面を object とし, その間の $Spin^c$ コボルディズムを射とする $3+1$ コボルディズム圏から, S^1 同変 Spanier–Whitehead 圏へのモノイダル関手を与える.^{*45} これは特に, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $(Y, \mathfrak{s})$ に対し, その Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型とよばれる「空間」(より正確には基点付き S^1 ホモトピー型の formal desuspension) $SWF(Y, \mathfrak{s})$ を与え, $Spin^c$ コボルディズム $(W, \mathfrak{s}_W) : (Y_0, \mathfrak{s}_0) \rightarrow (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ に対しては, 相対 Bauer–Furuta 不変量とよばれる基点付き S^1 同変安定ホモトピー写像

$$BF(W, \mathfrak{s}_W) : \Sigma^{\mathbb{R}^{-b^+(W)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W)-\sigma(W)}{8}}} SWF(Y_0, \mathfrak{s}_0) \rightarrow SWF(Y_1, \mathfrak{s}_1)$$

を与える. ここでもやはり両辺には十分大きな整数 M, N に対する $id_{\mathbb{R}^M} id_{\mathbb{C}^N}$ によるサスペンションが本当はあるが, 先ほどの Bauer–Furuta 不変量のようにこの書き方ではそれを省略している.^{*46}

後に, Lidman–Manolescu[103] により, しかるべき (S^1 同変) ホモロジーをとることでモノポール Floer ホモロジーを再現することが示された.^{*47}

$$\begin{aligned} \tilde{H}_*^{S^1}(SWF(Y, \mathfrak{s})) &\cong \tilde{H}_*(Y, \mathfrak{s}), \quad \tilde{H}_*^{S^1, coBorel}(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong \hat{H}_*(Y, \mathfrak{s}), \quad \tilde{H}_*^{S^1, tate}(SWF(Y, \mathfrak{s})) \cong \bar{H}_*(Y, \mathfrak{s}), \\ \tilde{H}_*(SWF(Y, \mathfrak{s})) &\cong \widetilde{HM}_*(Y, \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

Floer ホモトピー型 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ の構成は, 大きく分けて次の 4 ステップからなる.

1. Y 上に Riemann 計量と $Spin^c$ 構造を固定し, Chern–Simons–Dirac 汎関数の negative gradient flow 方程式 $= \mathbb{R} \times Y$ 上の Seiberg–Witten 方程式を有限次元近似することで, 有限次元多様体上の S^1 同変な力学系を得る.
2. S^1 同変 Conley 指数理論により, この力学系から, 基点付き S^1 ホモトピー型 $\mathcal{I}_{-\lambda}^{\lambda}(Y, \mathfrak{s}, g)$ を得る. これは, 一般には, 有限次元近似の精度を表す実数値パラメータ λ および Riemann 計量に依存する. しかし, これらのデータを動かすとき, $\mathcal{I}_{-\lambda}^{\lambda}(Y, \mathfrak{s}, g)$ のズレは S^1 作用込みで, $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の何回かのサスペンション分だけである.
3. 有限次元近似の精度を表す実数値パラメータ λ への依存性を相殺するように, formal desuspension を行うことで, 空間 $SWF(Y, \mathfrak{s}, g)$ を得る.
4. Riemann 計量への依存性を相殺するように, さらに formal desuspension を行うことで, 空間 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ を得る. ここでの formal desuspension $\Sigma^{\mathbb{C}^{-n}(Y, \mathfrak{s}, g)}$ は, $(Y, \mathfrak{s})$ を境界に持つ 4 次元コンパクト $Spin^c$ 多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ をひとつとり, その適切な位相不変量と Dirac 作用素の Atiyah–Patodi–Singer 指数の差により与えられる.

ここで, 空間 X の formal desuspension といったとき, 考えたいのは $\Sigma^{\mathbb{R}^{-m} \oplus \mathbb{C}^{-n}} X$ のような suspension の逆操作であるが, そのようなものを幾何学的に構成するわけではなく, (X, m, n) という空間と数の組のことである, と宣言するだけである. ここでの S^1 同変 Spanier–Whitehead 圏はそのような組を object とするものとして定義される. このような組のホモロジーを, $\tilde{H}_*(X, m, n) = \tilde{H}_{*+m+2n}(X)$ のように定義する. これは, サスペンション同型 $\tilde{H}_*(\Sigma^{\mathbb{R}} X) \cong \tilde{H}_{*-1}(X)$ から逆算して, (X, m, n) が X の $-m-2n$ 回のサスペンションであるかのように振る舞うよう定義しているのである.

2.2 結び目コホモロジー群

Manolescu による Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成は, 小さな修正を除き, $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $(Y, \mathfrak{s})$ にコンパクト群 Γ の作用がある場合に同変に行うことができる. これが可能であることはおそらく多くの専門家は認識していたであろうが, 実行されたのは比較的最近であり, Baraglia–Hekmati [12] による. 注意すべきこととして次の二点が挙げられる.

^{*44} $b_1(X) > 0$ の場合の Bauer–Furuta 不変量は, Picard トーラス $T^{b_1(X)}$ 上の族として定式化されるがここでは簡単のため $b_1(X) = 0$ とした.

^{*45} 直積コボルディズム $[0, 1] \times Y$ に $[0, 1]$ 方向に不変な $Spin^c$ 構造を与えたものに対する相対 Bauer–Furuta 不変量が恒等写像に S^1 同変安定ホモトピックであることは, 長らく未証明であったが, Sasahira–Stoffregen の未発表のドラフトにおいて証明されたことがアナウンスされ, 筆者-谷口はその原稿を送っていただいた.

^{*46} $b_1 > 0$ への拡張としては, Kronheimer–Manolescu[96], Khandhawit–J.Lin–Sasahira[77][?KLS18[†]], Sasahira–Stoffregen [144] などがある.

^{*47} コボルディズム写像の対応はまだ証明されていない.

1. 先ほど説明した Floer ホモトピー型 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ の構成の 4 つ目のステップにおいて, $(Y, \mathfrak{s})$ を境界を持つ 4 次元コンパクト $Spin^c$ 多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ をひとつとるということをしたが, これが Γ 作用込みで行えるかは非自明である. この問題を回避するため, 計量依存の Floer ホモトピー型 $SWF(Y, \mathfrak{s}, g)$ を構成するにとどめ, そのコホモロジーを定義するときに, 次数のシフトを同様に考え, 不変性はこのコホモロジーに対してだけ示す. 言い換えると, Spanier–Whitehead 圏の object として $(Y, \mathfrak{s})$ の計量に非依存な不変量を定式化することは諦める.
2. $(Y, \mathfrak{s})$ にコンパクト群 Γ の作用がある場合, SW 方程式に由来する S^1 作用と, 多様体への Γ 作用が, SW 方程式の configuration に持ち上げる際に「混ざって」, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は一般には

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{s}} \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$$

というある中心拡大 $\Gamma_{\mathfrak{s}}$ への作用が定まるということである.

基本的なのは $\Gamma = \mathbb{Z}_p$ の場合である. ここでは, p は素数である. 実はこの場合, 中心拡大は実は自明であることが示せる. すなわち, $\Gamma_{\mathfrak{s}} \cong S^1 \times \mathbb{Z}_p$ である.

Baraglia–Hekmati が主に考察したのは, $S^1 \times \mathbb{Z}_p$ 同変コホモロジー

$$\tilde{H}_{S^1 \times \mathbb{Z}_p}^{*+2n(Y, \mathfrak{s}, g)}(SWF(Y, \mathfrak{s}, g); \mathbb{F}_p)$$

である. 上で注意したように, 「計量に非依存な同変 Floer ホモトピー型」を定義することはなされていないのであるが, あたかもそのようなもの $S^1 \times \mathbb{Z}_p \curvearrowright SWF(Y, \mathfrak{s})$ があるかのような表記を用いても混同のおそれはないのでそうすることにする. このことを踏まえた上で, $(Y, \mathfrak{s}) = (\Sigma_p(K), \mathfrak{s}_0)$ のとき, このコホモロジー群を

$$\tilde{H}_{S^1 \times \mathbb{Z}_p}^*(SWF(Y, \mathfrak{s}))$$

と書くことにする.

これは,

$$H^*(B(S^1 \times \mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p) = \begin{cases} \mathbb{F}_2[U, Q] \\ \mathbb{F}_p[U, S, R]/R^2 \end{cases}$$

上の加群である. $\mathbb{Z}_p$ 作用付きの 3 次元多様体として基本的なのは, 結び目 $K \subset S^3$ に沿った $\mathbb{Z}_p$ 分岐被覆 $\Sigma_p(K)$ である.

この場合を考察することにより, $\theta^{(p)}(K)$ というコンコードランス不変量の構成 [10] およびそれを用いた Milnor 予想の再証明 [11] がなされた. ただし, Baraglia–Hekmati による計算は, 主にスペクトル系列と $\text{HF}=\text{HM}$ (Heegaard Floer ホモロジーという, モノポールホモロジーとの同型が知られている別の Floer ホモロジー) を経由するもので, 多変数多項式環上の加群を扱っていることも相まって, やや煩雑である.

一方, [67] で筆者らにより見出されたことは, S^1 作用を忘れて $\mathbb{Z}_2$ 同変コホモロジーを考えるだけでも面白いということである特に, 新しいスライストラス不変量が定義でき, Milnor 予想を再証明することができる. 特筆すべきこととして, スペクトル系列や $\text{HF}=\text{HM}$ を使う代わりに, 次のトリックを用いる.

1. Freedman–Quinn による 4 次元多様体にはめ込まれた曲面のホモトピー分類の結果を用いるこれは, Kronheimer や Daemi–Scaduto により, 特異インスタントン理論の文脈で用いられていた.
2. コンタクト構造, シンプレクティック構造を用いる. より具体的には, [66] で筆者–谷口が構成したホモトピカルなコンタクト不変量の同変版として, transverse knot 不変量を導入し, それを用いる.

それでは, 新しい結び目コホモロジー群を導入しよう. $K \subset S^3$ を結び目とする.

$$\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) := \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^{*+2n(\Sigma_2(K), \mathfrak{s}_0, g)}(SWF(\Sigma_2(K), \mathfrak{s}_0, g); \mathbb{F}_2)$$

と定義する. ここで, $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(\Sigma)$ 上の $\mathbb{Z}_2$ 不変な $Spin^c$ 構造の同型類の集合 $Spin^c(\Sigma_2(K))^{\mathbb{Z}_2}$ は 1 元集合であり, その元を $\mathfrak{s}_0$ と書いた. このコホモロジー群は, 環

$$H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[Q]$$

上の加群である. なお, この理論は Heegaard Floer 理論における Hendricks–Lipshitz–Sarker の理論 [60][61] の SW 理論的対応物と見ることができる.

♠ 2.2.1 ランク 1 定理とその証明

まずは, 新しい結び目コホモロジー群 $\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K))$ の基本的な性質として, 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対して, このコホモロジー群は $\mathbb{F}_2[Q]$ 加群としてランク 1 であることを証明する. この結果をランク 1 定理とよぶことにしよう.

定理 2.1. 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対して

$$\text{rank}_{\mathbb{F}_2[Q]} \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) = 1$$

が成り立つ.

この定理の証明は, 新しく導入する不変量 $q_M(K)$ のコボルディズム不等式の証明と同時に行う.

2.3 スライス-トーラス不変量 q_M

不変量 $q_M(K)$ の定義は次である. スライス-トーラス性の証明は後述する.

定義 2.2. 結び目 $K \subset S^3$ に対し,

$$q_M(K) := \min\{i | x \in \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(-K)), Q^n x \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\} - \frac{3}{4}\sigma(K)$$

と定義する.

すなわち, $\mathbb{Z}_2$ 同変 Floer コホモロジー群 $\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(-K))$ の「 Q タワーの一番下」のコホモロジー次数を, 結び目符号数により補正したものが q_M である. この定義では, K ではなくそのコンコダンス逆 $-K$ (あるいはこのコホモロジー群は向きによらないので K のミラーにしても同じである) の Floer コホモロジー群を使っていることに注意する. コンタクト, シンプレクティック構造はこの定義の時点ではまだ用いていない. コンタクト, シンプレクティック構造を用いるのはトーラス結び目 (より広く, シンプレクティック曲面の境界になっている transverse knot) に対してこの不変量の値を決定するところである.

♠ 2.3.1 例: quasi-alternating knot

計算例を挙げる. $\Sigma_2(K)$ が $\mathbb{F}_2$ 係数で L-space であるような結び目, 特に, quasi-alternating knot に対しては, Floer コホモロジーを $\sigma(K)$ だけで完全に決定することができる. quasi-alternating knot に対しては, $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ が L-space であるという結果は [129] による. [129] quasi-alternating knot の定義を復習しておく.

定義 2.3. quasi-alternating 絡み目の集合 Q は, 次を満たす最小の絡み目の集合である.

- 自明結び目は Q に属する.
- 絡み目 L が射影図 D であって次を満たす交点 c を持つならば, L は Q に属する.
 1. c の両方の smoothing L_0 および L_∞ は Q に属する.
 - 2.

$$\det(L) = \det(L_0) + \det(L_\infty)$$

◇

正スカラー曲率計量を持つ有理ホモロジー 3 球面は L-space であることが知られているので, 以下の定理は, 分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ が正スカラー曲率計量を持つ obstruction を与えていると見ることができる. Rolfsen table の交点数 9 以下の結び目 85 個のうち, 3 個を除いて全てが quasi-alternating であるので, 例は豊富であるといえよう.

定理 2.4. $K \subset S^3$ を $\Sigma_2(K)$ が L-space であるような結び目とする (quasi-alternating knot はこれを満たす). このとき,

$$\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) = \mathbb{F}_2[Q]_{-\frac{\sigma(K)}{4}}$$

であり (ここで右下の数は $1 \in \mathbb{F}_2[Q]$ の Q 次数を表す), 特に,

$$q_M(K) = -\frac{\sigma(K)}{2}$$

である.

証明.

$\Sigma_2(K)$ が L-space であることは, 非同変な reduced コホモロジーが 1 次元, すなわち, $\tilde{H}^*(SWF(K)) \cong \mathbb{F}_2$ であるということと同値であることが知られている. 証明のポイントは $\mathbb{Z}_2$ ファイブレーション

$$\mathbb{Z}_2 \rightarrow SWF(K) \wedge (E\mathbb{Z}_2)_+ \rightarrow SWF(K) \wedge_{\mathbb{Z}_2} (E\mathbb{Z}_2)_+$$

に対する Thom–Gysin 完全列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^{*-1}(SWF(K)) \xrightarrow{Q} \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) \rightarrow \tilde{H}^*(SWF(K)) \rightarrow \cdots$$

と Baraglia–Hekmati の結果 [12] 系 6.3 より $\tilde{H}^*(SWF(K)) \cong \mathbb{F}_2$ の gr^Q が $\sigma(K)$ を使って書けることである. □

定理 2.5. q_M は整数値スライス-トーラス不変量である. すなわち次が成り立つ.

1. 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $q_M(K)$ は整数である.
2. (コンコダンス不変性) 二つの結び目 $K, K' \subset S^3$ がコンコダントならば, $q_M(K) = q_M(K')$ が成り立つ.
3. (スライス条件) 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $q_M(K) \leq g_4(K)$ が成り立つ.
4. (トーラス条件) p, q を互いに素な正の整数とすると, トーラス結び目 $T_{p,q}$ に対し $q_M(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ が成り立つ.
5. (加法性) 任意の二つの結び目 $K, K' \subset S^3$ に対し $q_M(K \# K') = q_M(K) + q_M(K')$ が成り立つ.

証明. 整数値であることは定義から容易に確かめられる. 加法性の証明は省略する (Sasahira–Stoffregen により最近証明された SW Floer ホモトピー型の連結和公式 $SWF(Y \# Y', \mathfrak{s} \# \mathfrak{s}') = SWF(Y, \mathfrak{s}) \wedge SWF(Y', \mathfrak{s}')$ の $\mathbb{Z}_2$ 同変版を考えることがポイントの一つである). 残りの結果は次節で示す. コンコダンス不変性とスライス条件は, 次節のコボルディズム不等式の特別な場合である. トーラス条件は次節の adjunction 等式の特別な場合であり, この証明でコンタクト, シンプレクティック構造を用いる. □

注.

2.4 コボルディズム不等式, 特にコンコードانس不変性と g_4 の下からの評価

定理 2.6. $K_0, K_1 \subset S^3$ を結び目とし, $S \looparrowright [0, 1] \times S^3$ を normally immersed surface コボルディズム $K_0 \rightarrow K_1$ であって, 種数 g , s_+ 個の正の immersed points, s_- 個の負の immersed points を持つものとする. このとき,

$$q_M(K_1) \leq q_M(K_0) + g + s_+$$

が成り立つ.

証明. 証明は 4 つのステップからなり, その途中でランク 1 定理を証明する. この議論は, Daemi–Scaduto [29] が Kronheimer[85], Freedman–Quinn[40] の結果に基づき特異インスタントン理論で行ったものの類似である.

1. normally immersed surface cobordism $S \looparrowright [0, 1] \times S^3$ に対し, Bauer–Furuta 不変量 BF_S を定義する. これは, $\overline{CP}^2$ を連結和して特異点を解消することによりなされる.
2. Q で局所化された Floer コホモロジー上に Bauer–Furuta 不変量から誘導されるコボルディズム写像 $BF_S^{*,loc}$ が, $Q^\pm$ の掛け算を除いて, S をホモトピーで取り替えても不変であることを示す. ここでは, Freedmann–Quinn の次の結果を用いる:
定理 2.7. (Freedmann–Quinn [40]). 二つの normally immersed コボルディズム $S_0, S_1 \looparrowright [0, 1] \times S^3$ が, 境界を固定してホモトピックであると仮定する. このとき S_0 と S_1 は, $[0, 1] \times S^3$ の ambient アイストピー, positive ツイストムーブ, negative ツイストムーブ, finger ムーブの 4 つのムーブでうつり合う.

よって, S_0 と S_1 がこれら 4 つのムーブで関係している場合に $BF_{S_0}^{*,loc} \stackrel{\text{up to } Q^\pm}{=} BF_{S_1}^{*,loc}$ であることをチェックすれば十分であり, これは SW 方程式の解析とホモトピー論で確かめられる.

3. ランク 1 定理, すなわち, 任意の knot $K \subset S^3$ に対し $\text{rank}_{\mathbb{F}_2[Q]} \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) = 1$ を示す. crossing change により, unknot への種数 0 の normally immersed コボルディズム $S : K \rightarrow U$ が構成できる.

$$Q^{-1} \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K)) \stackrel{BF_S^{*,loc}}{\rightleftharpoons} Q^{-1} \tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(U))$$

というコボルディズム写像が誘導される. 合成コボルディズム $S \cup (-S) : U \rightarrow U$, $(-S) \cup S : K \rightarrow K$ は種数が 0 であるから product コボルディズム $[0, 1] \times U$, $[0, 1] \times K$ にホトピックであるから, 前のステップより合成 $BF_{-S \cup S}^{*,loc} = BF_S^{*,loc} \circ BF_{-S}^{*,loc}$, $BF_{S \cup -S}^{*,loc} = BF_{-S}^{*,loc} \circ BF_S^{*,loc}$ は up to $Q^\pm$ の掛け算で恒等写像に一致する (ここで, product コボルディズムに対する Bauer–Furuta 不変量が恒等写像であるという Sasahira–Stoffregen の結果の同変版を用いた). よって, $\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(U))$ と $\tilde{H}_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K))$ の $\mathbb{F}_2[Q]$ 上のランクは等しくなければならず, 前者が $\mathbb{F}_2[Q]$ に同型であることは直接確かめられるので, ランク 1 定理が従う.

4. コボルディズム不等式と同じ設定の下で, $BF_S^{*,loc} \neq 0$ かつ, Floer コホモロジーの free part $H_{\mathbb{Z}_2}^*(SWF(K))/(Q - \text{torsion}) \cong \mathbb{F}_2[Q]$ 上に Bauer–Furuta 不変量から誘導されるコボルディズム写像 $BF_S^{*,free}$ は

$$BF_S^{*,free} = Q^{q_M(K_1) - q_M(K_0) + g + s_+}$$

で与えられる. よって, 右辺の Q のべきはゼロ以上でなくてはならず, コボルディズム不等式が従う.

$BF_S^{*,loc} \neq 0$ の証明は, 前のステップの種数があるバージョンとすることができる. $S \cup (-S) : U \rightarrow U$ は $[0, 1] \times U \#_{2g} T^2$ とホモトピックであり, 逆の合成 $-S \cup S : K \rightarrow K$ は $[0, 1] \times K \#_{2g} T^2$ とホモトピックであることと連結和公式, BF_{T^2} の計算を使うと, 前のステップと同様にして証明できる. $BF_S^{*,free} = Q^{q_M(K_1) - q_M(K_0) + g + s_+}$ の計算は, コホモロジーの次数を見ればわかる. $\square$

2.5 adjunction 等式, 特にトラス結び目に対する計算

定理 2.8. $S \subset (D^4, \omega_{std})$ をシンプレクティック曲面であって, $\mathcal{T} := \partial S \subset (S^3, \xi_{std})$ が transverse knot であるものとする. このとき,

$$q_M(\mathcal{T}) = g(S)$$

が成り立つ.

証明には, 筆者–谷口 [67] の二つの新しい結果を用いる. 一つ目は, 弱シンプレクティック充填のその中のシンプレクティック曲面に沿った分岐被覆が $\mathbb{Z}_2$ 不変な弱シンプレクティック充填の構造を持つという結果で, これは微分幾何的な議論である. 二つ目は, $\mathbb{Z}_2$ 同変コンタクト不変量 (=安定ホモトピー論的 transverse knot 不変量) を導入し, その基本的な性質, 合成則と非消滅定理を証明することである.

♠ 2.5.1 分岐被覆上の $\mathbb{Z}_2$ 不変な弱シンプレクティック充填構造

(Y, ξ) をコンタクト $\mathbb{Z}HS^3$, $\mathcal{T} \subset (Y, \xi = \text{Ker } \lambda)$ を transverse 絡み目とする. このとき, $\mathbb{Z}_n$ 分岐被覆 $\Sigma_n(\mathcal{T})$ 上の $\mathbb{Z}_n$ 不変コンタクト構造 $\tilde{\xi} = \text{Ker } \tilde{\lambda}$ であって, 射影 $\pi : \Sigma_n(\mathcal{T}) \rightarrow Y$ による $\mathcal{T}$ の逆像 $\tilde{\mathcal{T}}$ のある近傍の外で $\tilde{\lambda}$ が引き戻し $\pi^* \lambda$ に一致するものが Gonzalo[51], Plamenevskaya[134] により構成されていた. [67] では筆者–谷口はさらに次の結果を示した.

定理 2.9. $S \subset (D_4, \omega_{std})$ をシンプレクティック曲面であって, 境界 $\mathcal{T} = \partial S \subset (Y, \xi)$ が transverse knot であるものとする. このとき, 分岐被覆 $\Sigma_2(S)$ は $(\Sigma_2(\mathcal{T}), \tilde{\xi}_{std})$ の弱シンプレクティック充填の構造 $\tilde{\omega}_{std}$ を持つ. $\square$

[67] ではより一般に、 D^4 よりも広いクラスの弱シンプレクティック充填に対して、 $\mathbb{Z}_n$ 分岐被覆が定まるようなしかるべき設定の下で、同様の結果を示したがそれはここでは述べない。証明のポイントは、シンプレクティック形式 ω を射影 π で引き戻すだけでは、 $\pi^{-1}(S)$ の近傍でシンプレクティック構造にならない (非退化性が成り立たなくなる) ので、しかるべくそれを改変することである。

♠ 2.5.2 $\mathcal{C}$ =transverse knot 不変量= $\mathbb{Z}_2$ 同変コンタクト不変量と貼り合わせ公式、非消滅定理

[66] で導入された安定ホモトピー版コンタクト不変量は、与えられたコンタクト有理ホモロジー球面 (Y, ξ) に対し、

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(Y, \xi) : S^0 \rightarrow \Sigma^{d_3(Y, \xi) + \frac{1}{2}} SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

という基点付き (非同変) 安定ホモトピー類が定まる、というものであった。その構成は、多様体 $[0, \infty) \times Y$ に、 $[1, \infty) \times Y$ 上ではコーン状に広がっていく概 Kähler 構造を与え、 $\{0\} \times Y$ の近くでは直積状になるように計量を拡張し、その上で Atiyah–Patodi–Singer 境界条件つきで、Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似を行うというものであった。また、境界にコンタクト構造が与えられた $b_3 = 0$ のコンパクト 4 次元多様体 (X, ξ) であって、その上の $Spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ と同型 $\mathfrak{s}|_{\partial X} \rightarrow \mathfrak{s}_\xi$ が与えられたものに対して [64] で筆者がそれ以前に構成していた、球面の安定ホモトピー群に値を持つ不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s}) \in \pi_{d(X, \xi, \mathfrak{s})}^{st}(S^0)/\pm 1$ を、 $(X, \mathfrak{s})$ の Bauer–Furuta 不変量とのペアリングにより復元する。すなわち、 $Y = \partial X$ とすると、次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \Sigma^{d_3(\xi) + \frac{1}{2}} SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi) \\ & \searrow \Psi_{X, \xi, \mathfrak{s}} & \downarrow BF_{X, \mathfrak{s}} \\ & & S^{-d(X, \xi, \mathfrak{s})} \end{array}$$

ここで、 $d(X, \xi, \mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}$ はこの設定での SW モジュライ空間の virtual dimension とよばれる整数である。この可換図式は、 $X \cup ([1, \infty) \times \partial X)$ を X と $[1, \infty) \times \partial X$ という二つの部分に切り分けるときの貼り合わせ公式である。また、 X が ξ の弱シンプレクティック充填の構造を持つ場合には、 $d(X, \xi, \mathfrak{s}) = 0$ かつ $\Psi(X, \mathfrak{s}, \xi) = \pm id$ であることが筆者により示されていた。

今、 Y 上の $\mathbb{Z}_2$ 作用がコンタクト構造 ξ を保つとする。このとき、 $\mathcal{C}$ の構成、議論を $\mathbb{Z}_2$ 同変に行うことができ、 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピー類を与える。transverse knot $K \subset (Y, \xi)$ に対しては、Gonzalo[51], Plamenevskaya[134] の構成により、分岐被覆 $\Sigma_2(K)$ は $\mathbb{Z}_2$ 不変なコンタクト構造 $\tilde{\xi}$ を持つ。これを考えることで、 $\mathcal{C}$ は transverse knot 不変量とみなすことができる。さらに、 $\Psi(\Sigma_2(S), \mathfrak{s}_{\tilde{\omega}})$ は $\pm id$ に $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピックであることが示せる。よって $\mathbb{Z}_2$ 同変安定ホモトピー可換図式

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \Sigma^{d_3(\tilde{\xi}) + \frac{1}{2}} SWF(-K) \\ & \searrow \pm id & \downarrow BF_S \\ & & SWF(-U) = S^0 \end{array}$$

を得る。(曲面 S を自明結び目からの surface コボルディズム $S : U \rightarrow K$ および、 $S : -K \rightarrow -U$ と同一視している。 $SWF(-U) = S^0$ は直接確かめられる。) よって、

$$\mathcal{C}^* BF_S^*(1) = 1 \in \mathbb{F}_2[Q]$$

が成り立つ*48。ここで、 $\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}_2$ 同編であることより $\mathcal{C}^*$ は $\mathbb{F}_2[Q]$ 線形であるから、この等式は、 $BF_S^*(1)$ が、 Q -torsion でなく、かつ、 Q で割れないことを意味する。すなわち、 $BF_S^*(1)$ は「 Q タワーの一番下」を実現している。これのコホモロジー次数を求めれば、 q_M が決定されるというのは、 q_M は「 Q タワーの一番下」の次数を補正したものであるという定義式から明らかである。結果的には求めたかった等式 $q_M(K) = g(S)$ が得られる。□

3 筆者–佐野–佐藤–谷口 [65] の主結果: q_M と既存のスライス-トーラス不変量の比較

不変量 q_M は既存のスライス-トーラス不変量と一致するだろうか? 筆者–佐野–佐藤–谷口 [65] の次の結果はこの疑問に否定的に答えた。

定理 3.1. (筆者–佐野–佐藤–谷口 [65]). s を Rasmussen 不変量、 τ を Ozsváth–Szabó 不変量、 $s_{\partial\omega}$ を、任意の分離的ポテンシャル $\partial\omega$ 、根 α に対する $_N$ Rasmussen 不変量、 $\tau^\#$ を Baldwin–Sevek のインスタント τ 不変量 $\tilde{s}$ を Daemi–Imori–Sato–Scaduto–Taniguchi 不変量、 $\tilde{s}_c$ を任意の PID R および素元 c に対する佐野–佐藤の Rasmussen 型不変量とする。このとき、結び目 9_{42} に対して次が成り立つ。

$$q_M(9_{42}) = -1, \quad \tau(9_{42}) = \tau^\#(9_{42}) = \tilde{s}(9_{42}) = s(9_{42}) = \tilde{s}_c = s_{\partial\omega, \alpha}(9_{42})$$

証明. $q_M(9_{42}) = -1$ は、Greene[52] の結果より、 $\Sigma_2(9_{42})$ は $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space である (ただし、 9_{42} は quasi-alternating でないことに注意) から、 $q_M = -\frac{\sigma}{2}$ で与えられる。*49

$\tau = \tau^\# = \tilde{s} = 0$ に対する議論は並行しているので、 τ の場合を説明する。使うのは次の事実である。

*48 「計量非依存な SW Floer 安定ホモトピー型」は本当は定式化していなかったのであるが、目的のためにはこの Floer コホモロジー上の等式だけあれば十分であるのでそのことは問題にならない。

*49 Greene の論文では $\Sigma_2(9_{42})$ は $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space であることの証明が省略されていたので、[65] では、Ozsváth–Szabó の $\widehat{HF}(\sigma_2(K))$ に対する skein exact triangle [129] を用いた別証明を与えた。

1. Ozsváth–Szabó correction term とよばれる $\mathbb{Z}HS^3$ に対する不変量 $d(Y)$ であって連結和に対する加法性 $d(Y \# Y') = d(Y) + d(Y')$, 特に $d(-Y) = d(Y)$ を満たすものが存在する. (ここでは $d(\Sigma(2, 3, 5)) = 1$ という規格化を採用する)
2. Y を $\mathbb{Z}HS^3$ とする. ある滑らかなコンパクト有向 4 次元多様体 X であって $b^+(X) = 0$ かつ $\partial X = Y$ であるものが存在するとする. このとき, Ozsváth–Szabó correction term $d(Y)$ は $d(Y) \geq 0$ を満たす. ([124] 系 9.8) *50 特に $(d(-Y) = -d(Y))$ よりあるコンパクト有向 4 次元多様体 X_+, X_- であって, $b^+(X_-) = 0$ かつ $b^-(X_+) = 0$ かつ $\partial X_+ = \partial X_- = Y$ ものが存在するならば, $d(Y) = 0$ である. (後者の主張は $d(-Y) = d(Y)$ であるという事実を用いると前者の主張から従う.)
3. 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, $\tau(K) > 0$ ならば $d(S_1^3(K)) < 0$ が成り立つ. 特に, $d(S_1^3(K)) = 0$ ならば $\tau(K) = 0$ である.

$K = 9_{42}$ に対しては, $Y = S_1^3(K)$ に対し, Kirby 計算により具体的に X_+, X_- を構成することができ, $d(S_1^3(K)) = 0$, 従って, $\tau(K) = 0$ が従う. $\tau^\#, \tilde{s}$ に対してはインスタントン Froyshov 不変量を Ozsváth–Szabó correction term d の代わりに用いると対応する性質が知られており, 議論は同様である.

次に, $\tilde{s}s_c(9_{42}) = s(9_{42}) = 0$ を示す. $(R, c) = (\mathbb{Z}[H], H)$ の場合に $\tilde{s}s_c = 0$ を直接計算で示すことができ, 佐藤–佐野 [143] の理論により, このことから全ての PID とその素元の組 (R, c) に対して $\tilde{s}s_c = 0$ であることが従い, 特に, 全ての体係数で Rasmussen 不変量がゼロであることがわかる.

次に, 任意の分離的ポテンシャル ∂w , 根 α に対する n 版 Rasmussen 不変量 $s_{\partial w, \alpha}(9_{42}) = 0$ を示す. $\mathfrak{sl}_2$ の場合は全て Rasmussen 不変量に一致することが知られており, この場合は先ほど示したので $n \geq 3$ を考えればよい. $n \geq 3$ を一斉に扱うポイントは, (reduced)HOMFLY-PT ホモロジーを考察することである. 9_{42} の reduced HOMFLY-PT ホモロジー $\overline{KhR}_\infty(9_{42})$ を計算すると, $n \geq 3$ 以上だと reduced HOMFLY-PT ホモロジー $\overline{KhR}_\infty(9_{42})$ から reduced $\mathfrak{sl}_n$ Khovanov–Rozanski ホモロジー $\overline{KhR}_n(9_{42})$ へのスペクトル系列では次数の条件より微分は発生せず, $\overline{KhR}_\infty(9_{42}) \cong \overline{KhR}_n(9_{42})$ であることがわかる. ($\mathfrak{sl}_n, \partial w, \alpha$) 版 Lee スペクトル系列

$$\overline{KhR}_n(9_{42}) \Rightarrow \overline{KhR}_{\partial w, \alpha}(9_{42})$$

は最初の微分で Δ 次数がゼロである一つの生成元以外が全て消える (高次の微分は次数の理由ですべてゼロなので, さもなくば reduced ∂w Lee 理論 $\overline{KhR}_{\partial w}(9_{42})$ が 1 次元にならずおかしい). その残った一つの生成元は q 次数が 0 なので定義から $s_{\partial w, \alpha}(9_{42}) = 0$ となる.

注. 交点数 9 以下の prime knot*51は全部で 85 個あり, [65] ではその全てに対して q_M を計算した. 実際, $8_{19}, 9_{42}, 9_{46}$ 以外は quasi-alternating であるから, $q_M = -\frac{\sigma}{2}$ で与えられる. $8_{19} = T_{3,4}$ であり, $\Sigma(8_{19}) = \Sigma(2, 3, 4)$ は Milnor の結果によると正スカラー曲率計量を持つので, これは L-space である. 9_{42} が $\mathbb{F}_2$ 係数上 L-space であることは上で見た通りである. よって, これらに対しても $q_M = -\frac{\sigma}{2}$ で与えられる. 9_{46} はスライス結び目であるから, $q_M(9_{46}) = 0$ である. なお, 交点数 10 以下の prime knot は全部で 250 個あり, そのうち現在まだ決定できていないのは $q_M(10_{132})$ と $q_M(10_{136})$ のみである.

3.1 終わりに

捉え難い非線形な対象, 例えば多様体をはじめとする非線形な空間, 非線形な写像の一部の情報を, デジタルな情報, 数や線形代数, 加群の理論に落とし込んで解析するというのは, 微分積分学, 表現論, 代数的トポロジーをはじめ, さまざまな数学の根底にある考え方である. コボルディズム圏から加群の圏への関手である TQFT も, そのような枠組みの一つである. $(3+1, 1+1)$ TQFT とでもよぶべき結び目ホモロジー理論は, 3, 4 次元の多様体やその上の幾何構造, 結び目といった非線形な対象を, それが持つ豊かな情報を反映した, 計算可能な代数的データ, コンピュータで扱えるような組み合わせ的信息に落とし込むことを可能にする枠組みであり, 現段階で最も具体的に調べることができる TQFT の例を供給している. さまざまな結び目ホモロジーは, 付随するコンコダンス不変量や transverse/Legendre 元を持つなどの共通する性質もあれば, 相違点もある. 筆者らの研究成果の紹介の他に本稿が目指したことは, 結び目に対する古典的なアプローチから現代的なアプローチへの変遷と, さまざまな TQFT 型不変量が互いに刺激し合いながら発展している様という二つの軸で結び目理論の展開を, 4 次元の視点およびシンプレクティック・コンタクト構造の視点から描き出すことであった. 今後も結び目ホモロジーの研究を通して, 3, 4 次元の多様体やその上の幾何構造, 結び目といった対象の理解, 分類が進んでいくことは間違いないであろう. 今後はひょっとすると, さまざまな結び目ホモロジーや TQFT を見渡すような大局的視点で, 分類理論や統一理論が発展していくのかもしれないし, あるいは QFT の故郷である物理学にも何かフィードバックをもたらすということもあるかもしれない. 期待は尽きないが, ここで筆を置くことにする.

*50 Heegaard Floer 理論では, d は $Spin^c$ 有理ホモロジー球面 $d(Y, \mathfrak{s})$ に一般化されている. さらに次の結果が成り立つ, $(Y_0, \mathfrak{s}_0), (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $Spin^c \mathbb{Q}HS^3$, $(W, \mathfrak{s}_W) : (Y_0, \mathfrak{s}_0) \rightarrow (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $Spin^c$ コボルディズムであって, $b^+(W) = 0$ であるものとする. このとき,

$$d(Y_1, \mathfrak{s}_1) - d(Y_0, \mathfrak{s}_0) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4}$$

が成り立つ. 今, $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$ を S^3 とし, $(Y_1, \mathfrak{s}_1)$ を $\mathbb{Z}HS^3$ (このとき $Spin^c$ 構造は一意) Y とすると,

$$d(Y) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4}$$

となり, W の交差形式は負定値ユニモジュラーかつ, $\{c_1(\mathfrak{s}_W)\}_{\mathfrak{s}_W \in Spin^c(W)}$ は特性ベクトル全体に一致する. よって, Elkies の定理 (負定値ユニモジュラー形式 Q に対し $\max_{\xi \in char} Q(\xi) + \text{rank}(Q) \geq 0$ が成り立つ) よりある $\mathfrak{s}_W \in Spin^c(W)$ に対し

$$d(Y) \geq \frac{c_1^2(\mathfrak{s}_W) + b_2(W)}{4} \geq 0$$

が成り立つ. このことから上で述べた性質が従う.

*51 非自明な連結和分解を持たない結び目のこと

参考文献

- [1] Mohammed Abouzaid and Ivan Smith, *Khovanov homology from Floer cohomology*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 1, 1–79. MR3867999
- [2] Mina Aganagic, *Knot categorification from mirror symmetry part I: Coherent sheaves*, Adv. Theor. Math. Phys. **28** (2024), no. 4, 1151–1239. MR4819555
- [3] Selman Akbulut and Rostislav Matveyev, *Exotic structures and adjunction inequality*, Turkish J. Math. **21** (1997), no. 1, 47–53. MR1456158
- [4] John A. Baldwin and Steven Sivek, *A contact invariant in sutured monopole homology*, Forum Math. Sigma **4** (2016), Paper No. e12, 82. MR3510331
- [5] ———, *Instanton Floer homology and contact structures*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 939–978. MR3477339
- [6] ———, *Invariants of Legendrian and transverse knots in monopole knot homology*, J. Symplectic Geom. **16** (2018), no. 4, 959–1000. MR3917725
- [7] ———, *Framed instanton homology and concordance*, J. Topol. **14** (2021), no. 4, 1113–1175. MR4332488
- [8] ———, *Khovanov homology detects the trefoils*, Duke Math. J. **171** (2022), no. 4, 885–956. MR4393789
- [9] John A. Baldwin, David Shea Vela-Vick, and Vera Vértesi, *On the equivalence of Legendrian and transverse invariants in knot Floer homology*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 2, 925–974. MR3070518
- [10] David Baraglia, *Knot concordance invariants from Seiberg-Witten theory and slice genus bounds in 4-manifolds*, 2022.
- [11] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Brieskorn spheres, cyclic group actions and the Milnor conjecture*, 2022.
- [12] ———, *Equivariant Seiberg-Witten-Floer cohomology*, Algebr. Geom. Topol. **24** (2024), no. 1, 493–554.
- [13] Joshua Batson and Cotton Seed, *A link-splitting spectral sequence in Khovanov homology*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 5, 801–841. MR3332892
- [14] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298
- [15] Stefan Behrens, Boldizsár Kalmár, Min Hoon Kim, Mark Powell, and Arunima Ray (eds.), *The disc embedding theorem*, Oxford University Press, Oxford, 2021. MR4519498
- [16] Fraser Binns and Subhankar Dey, *Rank bounds in link floer homology and detection results* (2022), available at [arXiv:2201.03048](https://arxiv.org/abs/2201.03048).
- [17] Jonathan M. Bloom, *A link surgery spectral sequence in monopole Floer homology*, Adv. Math. **226** (2011), no. 4, 3216–3281. MR2764887
- [18] Michel Boileau and Stepan Orevkov, *Quasi-positivité d’une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 9, 825–830. MR1836094
- [19] Michel Boileau and Claude Weber, *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Enseign. Math. (2) **30** (1984), no. 3–4, ??–??.
- [20] Sabin Cautis and Joel Kamnitzer, *Knot homology via derived categories of coherent sheaves. I. The $\mathfrak{sl}(2)$ -case*, Duke Math. J. **142** (2008), no. 3, 511–588. MR2411561
- [21] ———, *Knot homology via derived categories of coherent sheaves. II. $\mathfrak{sl}_m$ case*, Invent. Math. **174** (2008), no. 1, 165–232. MR2430980
- [22] Alex Chandler and Eugene Gorsky, *Structures in homfly-pt homology* (2022), available at [arXiv:2209.13058](https://arxiv.org/abs/2209.13058).
- [23] Vincent Colin, Paolo Ghiggini, and Ko Honda, *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions I*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **139** (2024), 13–187. MR4750569
- [24] Carlo Collari, *Transverse invariants from Khovanov-type homologies*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 1, 1950012, 37. MR3910954
- [25] Louis Crane and Igor B. Frenkel, *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, 1994, pp. 5136–5154. Topology and physics. MR1295461
- [26] Aliakbar Daemi and Mike Miller Eismeier, *Instantons and rational homology spheres*, 2022.
- [27] Aliakbar Daemi, Nobuo Iida, and Christopher Scaduto, *Rank three instantons, representations and sutures*, 2024.
- [28] Aliakbar Daemi, Hayato Imori, Kouki Sato, Christopher Scaduto, and Masaki Taniguchi, *Instantons, special cycles, and knot concordance*, 2022.
- [29] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto, *Chern-Simons functional, singular instantons, and the four-dimensional clasp number*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **26** (2024), no. 6, 2127–2190. MR4742808
- [30] ———, *Equivariant aspects of singular instanton Floer homology*, Geom. Topol. **28** (2024), no. 9, 4057–4190. MR4845451
- [31] Nathan Dowlin, *A spectral sequence from Khovanov homology to knot Floer homology*, J. Amer. Math. Soc. **37** (2024), no. 4, 951–1010. MR4777638
- [32] Mariano Echeverría, *Naturality of the contact invariant in monopole Floer homology under strong symplectic cobordisms*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 4, 1795–1875. MR4127085
- [33] Michael Ehrig, Daniel Tubbenhauer, and Paul Wedrich, *Functoriality of colored link homologies*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **117** (2018), no. 5, 996–1040. MR3877770
- [34] David Eisenbud and Walter Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 110, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985. MR817982
- [35] John B. Etnyre, *Legendrian and transversal knots*, Handbook of knot theory, 2005, pp. 105–185. MR2179261
- [36] John B. Etnyre and Marco Golla, *Symplectic hats*, J. Topol. **15** (2022), no. 4, 2216–2269. MR4584589
- [37] Peter Feller, *The degree of the Alexander polynomial is an upper bound for the topological slice genus*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 3, 1763–1771. MR3523068
- [38] Peter Feller, Lukas Lewark, and Andrew Lobb, *Squeezed knots*, 2022.
- [39] Ralph H. Fox and John W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka Math. J. **3** (1966), 257–267. MR211392
- [40] Michael H Freedman and Frank Quinn, *Topology of 4-manifolds (pms-39)*, Princeton University Press, 1990.
- [41] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246. MR776477

- [42] Stefan Friedl and Peter Teichner, *New topologically slice knots*, Geom. Topol. **9** (2005), 2129–2158. MR2209368
- [43] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478
- [44] Siddhartha Gadgil and Dheeraj Kulkarni, *Relative symplectic caps, 4-genus and fibered knots*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **126** (2016), no. 2, 261–275. MR3489165
- [45] Stavros Garoufalidis and Peter Teichner, *On knots with trivial Alexander polynomial*, J. Differential Geom. **67** (2004), no. 1, 167–193. MR2153483
- [46] Hansjörg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2397738
- [47] Sudipta Ghosh, Zhenkun Li, and C.-M. Michael Wong, *On the tau invariants in instanton and monopole Floer theories*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12346, 53. MR4821358
- [48] Robert E. Gompf, *Smooth concordance of topologically slice knots*, Topology **25** (1986), no. 3, 353–373. MR842430
- [49] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR1707327
- [50] Sherry Gong, *On the Kronheimer-Mrowka concordance invariant*, J. Topol. **14** (2021), no. 1, 1–28. MR4186131
- [51] Jesús Gonzalo, *Branched covers and contact structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), no. 2, 347–352. MR902554
- [52] Joshua Evan Greene, *A spanning tree model for the heegaard floer homology of a branched double-cover*, Journal of Topology **6** (2013), no. 2, 525–567.
- [53] Sergei Gukov, Albert Schwarz, and Cumrun Vafa, *Khovanov-Rozansky homology and topological strings*, Lett. Math. Phys. **74** (2005), no. 1, 53–74.
- [54] Kyle Hayden, *Quasipositive links and Stein surfaces*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 3, 1441–1477. MR4268165
- [55] Kyle Hayden and Isaac Sundberg, *Khovanov homology and exotic surfaces in the 4-ball*, J. Reine Angew. Math. **809** (2024), 217–246. MR4726569
- [56] Matthew Hedden, *Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 5, 617–629. MR2646650
- [57] Matthew Hedden, Charles Livingston, and Daniel Ruberman, *Topologically slice knots with nontrivial Alexander polynomial*, Adv. Math. **231** (2012), no. 2, 913–939. MR2955197
- [58] Matthew Hedden and Yi Ni, *Khovanov module and the detection of unlinks*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 5, 3027–3076. MR3190305
- [59] Matthew Hedden and Philip Ording, *The Ozsváth-Szabó and Rasmussen concordance invariants are not equal*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 2, 441–453. MR2405163
- [60] Kristen Hendricks, Robert Lipshitz, and Sucharit Sarkar, *A flexible construction of equivariant Floer homology and applications*, J. Topol. **9** (2016), no. 4, 1153–1236. MR3620455
- [61] ———, *A simplicial construction of G -equivariant Floer homology*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **121** (2020), no. 6, 1798–1866. MR4201124
- [62] Ko Honda, William H. Kazez, and Gordana Matić, *The contact invariant in sutured Floer homology*, Invent. Math. **176** (2009), no. 3, 637–676. MR2501299
- [63] ———, *On the contact class in Heegaard Floer homology*, J. Differential Geom. **83** (2009), no. 2, 289–311. MR2577470
- [64] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta type refinement of Kronheimer-Mrowka’s invariant for 4-manifolds with contact boundary* (2019), available at [arXiv:1906.07938](https://arxiv.org/abs/1906.07938).
- [65] Nobuo Iida, Taketo Sano, Kouki Sato, and Masaki Taniguchi, *On the slice-torus invariant q_m from $\mathbb{Z}_2$ -equivariant seiberg-witten floer cohomology*, 2025.
- [66] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant* (2020), available at [arXiv:2010.02132](https://arxiv.org/abs/2010.02132).
- [67] ———, *Monopoles and transverse knots*, 2024.
- [68] Stanislav Jabuka, *Concordance invariants from higher order covers*, Topology Appl. **159** (2012), no. 10–11, 2694–2710. MR2923439
- [69] Vaughan F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111. MR766964
- [70] András Juhász, *Holomorphic discs and sutured manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1429–1457. MR2253454
- [71] ———, *Floer homology and surface decompositions*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 1, 299–350. MR2390347
- [72] ———, *Cobordisms of sutured manifolds and the functoriality of link Floer homology*, Adv. Math. **299** (2016), 940–1038. MR3519484
- [73] András Juhász, Maggie Miller, and Ian Zemke, *Transverse invariants and exotic surfaces in the 4-ball*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 6, 2963–3012. MR4347309
- [74] ———, *Transverse invariants and exotic surfaces in the 4-ball*, Geom. Topol. **25** (2021), no. 6, 2963–3012. MR4347309
- [75] András Juhász, Dylan Thurston, and Ian Zemke, *Naturality and mapping class groups in Heegaard Floer homology*, Mem. Amer. Math. Soc. **273** (2021), no. 1338, v+174. MR4337438
- [76] Sungkyung Kang, *A transverse knot invariant from $\mathbb{Z}_2$ -equivariant heegaard floer cohomology*, 2018.
- [77] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516
- [78] Mikhail Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426. MR1740682
- [79] Mikhail Khovanov and Robert Lipshitz, *Categorical lifting of the Jones polynomial: a survey*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **60** (2023), no. 4, 483–506. MR4642116
- [80] Mikhail Khovanov and Lev Rozansky, *Matrix factorizations and link homology*, Fund. Math. **199** (2008), no. 1, 1–91. MR2391017
- [81] ———, *Matrix factorizations and link homology. II*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 3, 1387–1425. MR2421131
- [82] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi, *Involutions, knots, and floer k -theory*, 2021.
- [83] ———, *Involutions, links, and Floer cohomologies*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12340, 47. MR4821360
- [84] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 457–546. MR2299739
- [85] P. B. Kronheimer, *An obstruction to removing intersection points in immersed surfaces*, Topology **36** (1997), no. 4, 931–962. MR1432428
- [86] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces. I*, Topology **32** (1993), no. 4, 773–826. MR1241873

- [87] ———, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808. MR1306022
- [88] ———, *Embedded surfaces and the structure of Donaldson’s polynomial invariants*, J. Differential Geom. **41** (1995), no. 3, 573–734. MR1338483
- [89] ———, *Gauge theory for embedded surfaces. II*, Topology **34** (1995), no. 1, 37–97. MR1308489
- [90] ———, *Khovanov homology is an unknot-detector*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **113** (2011), 97–208. MR2805599
- [91] ———, *Knot homology groups from instantons*, J. Topol. **4** (2011), no. 4, 835–918. MR2860345
- [92] ———, *Instantons and Bar-Natan homology*, Compos. Math. **157** (2021), no. 3, 484–528. MR4236193
- [93] Peter Kronheimer and Tom Mrowka, *Instanton Floer homology and the Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), no. 3, 1715–1738. MR2683750
- [94] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043
- [95] ———, *Knots, sutures, and excision*, J. Differential Geom. **84** (2010), no. 2, 301–364. MR2652464
- [96] Peter B. Kronheimer and Ciprian, *Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations*, 2002.
- [97] Aaron D. Lauda and Joshua Sussan, *An invitation to categorification*, Notices Amer. Math. Soc. **69** (2022), no. 1, 11–21. MR4353348
- [98] Lukas Lewark, *Khovanov-Rozansky homologies, knotted weighted webs and the slice genus*, Ph.D. Thesis, 2013.
- [99] ———, *Rasmussen’s spectral sequences and the $\mathfrak{sl}_N$ -concordance invariants*, Adv. Math. **260** (2014), 59–83. MR3209349
- [100] Lukas Lewark and Andrew Lobb, *New quantum obstructions to sliceness*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **112** (2016), no. 1, 81–114. MR3458146
- [101] Zhenkun Li, *Knot homologies in monopole and instanton theories via sutures*, J. Symplectic Geom. **19** (2021), no. 6, 1339–1420. MR4450625
- [102] W. B. Raymond Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1472978
- [103] Tye Lidman and Ciprian Manolescu, *The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies*, Astérisque **399** (2018), vii+220. MR3818611
- [104] Francesco Lin, *Bar-Natan’s deformation of Khovanov homology and involutive monopole Floer homology*, Math. Ann. **373** (2019), no. 1-2, 489–516. MR3968878
- [105] Robert Lipshitz, Lenhard Ng, and Sucharit Sarkar, *On transverse invariants from Khovanov homology*, Quantum Topol. **6** (2015), no. 3, 475–513. MR3392962
- [106] Paolo Lisca, Peter Ozsváth, András I. Stipsicz, and Zoltán Szabó, *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **11** (2009), no. 6, 1307–1363. MR2557137
- [107] Charles Livingston, *Computations of the Ozsváth-Szabó knot concordance invariant*, Geom. Topol. **8** (2004), 735–742. MR2057779
- [108] Andrew Lobb, *A slice genus lower bound from $\mathfrak{sl}(n)$ Khovanov-Rozansky homology*, Adv. Math. **222** (2009), no. 4, 1220–1276. MR2554935
- [109] ———, *A note on Gornik’s perturbation of Khovanov-Rozansky homology*, Algebr. Geom. Topol. **12** (2012), no. 1, 293–305. MR2916277
- [110] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$* , Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550
- [111] ———, *Link homology theories from symplectic geometry*, Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 363–416. MR2313538
- [112] Ciprian Manolescu and Brendan Owens, *A concordance invariant from the Floer homology of double branched covers*, Int. Math. Res. Not. IMRN **20** (2007), Art. ID rnm077, 21. MR2363303
- [113] Ciprian Manolescu, Peter Ozsváth, and Sucharit Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 633–660. MR2480614
- [114] Duncan McCoy, *Alternating knots with unknotting number one*, Adv. Math. **305** (2017), 757–802. MR3570147
- [115] John Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. No. 61, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. MR239612
- [116] Gabriel Montes de Oca, *An Odd Analog of Plamenevskaya’s Invariant of Transverse Knots*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)—University of Oregon. MR4187426
- [117] Scott Morrison, Kevin Walker, and Paul Wedrich, *Invariants of 4-manifolds from Khovanov-Rozansky link homology*, Geom. Topol. **26** (2022), no. 8, 3367–3420. MR4562565
- [118] Tomasz Mrowka and Yann Rollin, *Legendrian knots and monopoles*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1–69. MR2199446
- [119] Hitoshi Murakami, Tomotada Ohtsuki, and Shuji Yamada, *Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs*, Enseign. Math. (2) **44** (1998), no. 3-4, 325–360. MR1659228
- [120] Lenhard Ng, *A skein approach to Bennequin-type inequalities*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), Art. ID rnn116, 18. MR2448088
- [121] Yi Ni, *Knot Floer homology detects fibred knots*, Invent. Math. **170** (2007), no. 3, 577–608. MR2357503
- [122] S. Yu. Orevkov and V. V. Shevchishin, *Markov theorem for transversal links*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no. 7, 905–913. MR2017961
- [123] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *The symplectic Thom conjecture*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 93–124. MR1745017
- [124] ———, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261. MR1957829
- [125] ———, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004), no. 1, 58–116. MR2065507
- [126] ———, *Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1159–1245. MR2113020
- [127] ———, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1027–1158. MR2113019
- [128] ———, *Heegaard Floer homology and contact structures*, Duke Math. J. **129** (2005), no. 1, 39–61. MR2153455
- [129] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *On the Heegaard Floer homology of branched double-covers*, Advances in Mathematics **194** (2005), no. 1, 1–33.

- [130] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks, link invariants and the multi-variable Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 2, 615–692. MR2443092
- [131] Peter Ozsváth, Zoltán Szabó, and Dylan Thurston, *Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology*, Geom. Topol. **12** (2008), no. 2, 941–980. MR2403802
- [132] Elena Pavelescu, *Braiding knots in contact 3-manifolds*, Pacific J. Math. **253** (2011), no. 2, 475–487. MR2878820
- [133] Olga Plamenevskaya, *Transverse knots and Khovanov homology*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 4, 571–586. MR2250492
- [134] ———, *Transverse knots, branched double covers and Heegaard Floer contact invariants*, J. Symplectic Geom. **4** (2006), no. 2, 149–170. MR2275002
- [135] Jacob Rasmussen, *Knot polynomials and knot homologies*, Geometry and topology of manifolds, 2005, pp. 261–280. MR2189938
- [136] ———, *Some differentials on Khovanov-Rozansky homology*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 6, 3031–3104. MR3447099
- [137] Jacob Andrew Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003. Thesis (Ph.D.)–Harvard University. MR2704683
- [138] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597. MR1091619
- [139] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26. MR1036112
- [140] Lee Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), no. 2, 191–202. MR683760
- [141] ———, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 1, 51–59. MR1193540
- [142] ———, *Positive links are strongly quasipositive*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), 1999, pp. 555–562. MR1734423
- [143] Taketo Sano and Kouki Sato, *A family of slice-torus invariants from the divisibility of reduced Lee classes*, arXiv preprint arXiv:2211.02494 (2022).
- [144] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-Witten Floer spectra for $b_1 > 0$* , 2021.
- [145] Paul Seidel and Ivan Smith, *A link invariant from the symplectic geometry of nilpotent slices*, Duke Math. J. **134** (2006), no. 3, 453–514. MR2254624
- [146] Clifford Henry Taubes, *Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology I*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 5, 2497–2581. MR2746723
- [147] Lev Tovstopyat-Nelip, *On the transverse invariant and braid dynamics*, J. Symplectic Geom. **22** (2024), no. 4, 817–846. MR4819512
- [148] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), no. 3, 527–553. MR939474
- [149] Ben Webster, *Knot invariants and higher representation theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **250** (2017), no. 1191, v+141. MR3709726
- [150] Edward Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 4, 661–692. MR683171
- [151] ———, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR990772
- [152] ———, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796. MR1306021
- [153] ———, *Fivebranes and knots*, Quantum Topol. **3** (2012), no. 1, 1–137. MR2852941
- [154] Nancy Court Wrinkle, *The Markov theorem for transverse knots*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002. Thesis (Ph.D.)–Columbia University. MR2703285
- [155] Hao Wu, *Braids, transversal links and the Khovanov-Rozansky theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 7, 3365–3389. MR2386230
- [156] ———, *On the quantum filtration of the Khovanov-Rozansky cohomology*, Adv. Math. **221** (2009), no. 1, 54–139. MR2509322
- [157] ———, *Generic deformations of the colored $\mathfrak{sl}(N)$ -homology for links*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), no. 4, 2037–2106. MR2826932