

概単純線形グラフを持つ Brieskorn 球面に対する Ozsváth-Szabó の d 不変量

鈴木 龍正 (明治大学 研究・知財戦略機構) *

概要

Karakurt 氏とŞavk 氏は、3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の中で、3 次元閉多様体を枠付き絡み目図式で表現する手術図式が概単純線形グラフで表現できる場合に焦点を当てた。そして、これらのホモロジー球面が既知の例とは独立に 3 次元ホモロジー同境界群の $\mathbb{Z}$ 直和因子を生成することを、Ozsváth 氏と Szabó 氏の d 不変量の計算公式を考案することで明らかにした。本稿では、この公式を精密化することで新たに判明した、ホモロジー同境界にならない 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の対を紹介する。特に、この精密化で現れる不等式において等号が成立するためのいくつかの十分条件と、この等号が成立しない無限個の例について紹介する。

1 導入

n 次元ホモロジー同境界群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^n$ は、Kervaire 氏と Milnor 氏 [KM63] の n 次元ホモトピー同境界群 Θ^n に対する研究を基に、González-Acuña 氏 [GAn70] により導入された。松本 堯生氏 [Mat78] と Galewski 氏と Stern 氏 [GS80] により、三角形分割予想と Rokhlin 不変量、ホモロジー同境界群とを関連付けることで、三角形分割予想はホモロジー同境界の差を除いた 3 次元多様体と 4 次元多様体との相互作用に関する問題に帰着された。その後、Manolescu 氏 [Man16] は [Mat78], [GS80] を基に三角分割予想を否定的に解決することで、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は低次元位相幾何学の研究において、より一層興味深い対象となった。

Rokhlin 氏 [Rok52] は $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ が非自明群であることを示した。その後、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は Fintushel 氏と Stern 氏 [FS85] により $\mathbb{Z}$ 部分群、古田 幹雄氏 [Fur90] により $\mathbb{Z}^{\infty}$ 部分群を持つことが判明した。一方、Frøyskov 氏 [Frø02] により $\mathbb{Z}$ 直和因子を持つことが判明した。そして、Dai 氏, Hom 氏, Stoffregen 氏, Truong 氏 [DHST23] は Ozsváth 氏と Szabó 氏 [OS03] により構成された d 不変量と呼ばれる 3 次元ホモロジー球面に対する 3 次元ホモロジー同境界の一種を用いて $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ が $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を含むことを示した。その後、Karakurt 氏と Şavk 氏 [KS22] により $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に複数の $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子が存在することを、[KS20] の d 不変量の計算結果を用いて示された。また、 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は結び目コンコダンス群 $\mathcal{C}$ との相互作用により低次元位相幾何学と結び目理論双方の観点から進展している。例えば [Fur90] のゲージ理論を用いた手法で、遠藤 久顕氏 [End95] は $\mathcal{C}$ の位相的にスライスな結び目で生成されるコンコダンス部分群 $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ が $\mathbb{Z}^{\infty}$ 部分群を持つことを示し、Hom 氏 [Hom15] による $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ が $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子の存在を示すことに繋がった概念の類似で、[DHST23] で $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を含むことを示している。一方、[DHST23], [KS22] で提示された $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ が $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を持つ無限系列は全て概単純線形グラフを持つ p が奇数かつ $\Sigma(p, q, r)$ で構成されているが、そのクラスの d 不変量の計算結果は [KS22] にある 6 種類のみである。

本研究では、[KS20] で得られた公式の精密化 (定理 3.1) から、いくつかの p が奇数で概単純線形グラフを持つ $\Sigma(p, q, r)$ の無限系列に対して d 不変量の計算を行った (命題 3.2, 3.3)。そして、定理 3.1 の下から評価する値に対する不等式関係を紹介する (定理 3.4)。また、定理 3.1 の不等式において等号が不成立になるための十分

* e-mail: suzuki519@meiji.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106 の支援を部分的に受けたものです。

条件を構成 (定理 3.6) することで, 3 次元ホモロジー同境界群の構造に新たな情報を提示し得る具体的な無限種類の無限系列を発見した (例 3.8, 3.9). 更に, 結び目コンコダンス群への応用についても紹介する (定理 4.8).

また, Levine 氏と Lidman 氏 [LL19] により, 単連結な 4 次元スパインレス多様体 X (つまり, 全ての piecewise linear に X 内に埋め込まれた S^2 は X とホモトピー同値にならない) を検出する際に, d 不変量 $d(\Sigma(2, q, r))$ の計算が用いられている. $\Sigma(p, q, r)$ が任意の結び目 K の Dehn 手術 $S_r^3(K)$ ($r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$) に微分同相になるかが不明で $p > 5$ を満たす $d(\Sigma(p, q, r))$ の計算結果は [KS20] を除いてほとんど存在しない. 概単純線形グラフを持つ $d(\Sigma(p, q, r))$ の計算を推進することは, 4 次元多様体の研究に対する貢献も期待できる.

本稿では特に断りがない場合は多様体は全て滑らか, 連結かつ向き付けられているとし, 写像は全て滑らかであるとする. また, 2 つの群 G, H が同型であることを $G \cong H$, 2 つの多様体 X, Y がホモトピー同値であることを $X \simeq Y$, 2 つの多様体 X, Y が微分同相であることを $X \approx Y$ と表記する. 2 つの多様体 X と Y との連結和を $X \# Y$, 向きづけられた多様体 Z に対し, その逆の向きが与えられた多様体を $-Z$ で表す.

1.1 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面

(p, q, r) を $1 \leq p < q < r$, $\gcd(p, q) = \gcd(q, r) = \gcd(r, p) = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とし, S_ε^5 を中心が原点で半径が ε の 5 次元球面とする ($0 < \varepsilon \ll 1$).

定義 1.1 (3 次元 Brieskorn ホモロジー球面) 3 次元位相多様体

$$\Sigma(p, q, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = 0\} \cap S_\varepsilon^5$$

を **3 次元 Brieskorn ホモロジー球面** と呼ぶ.

注意 1.2 $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ とし, D_ε^6 を中心が原点で半径が ε の 6 次元球体であるとする. $\Sigma(p, q, r)$ を平滑化 (smoothing) すると, Milnor ファイバー $M(p, q, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = \delta\} \cap D_\varepsilon^6$ の境界になる. このことから, 以降では 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面を滑らかな多様体と見做すことにする.

注意 1.3 多様体 $\Sigma(p, q, r)$ は 3 次元ホモロジー球面であることから, Diophantine 方程式

$$e_0 p q r + p' q' r + p q' r' + p q r' = -1, \quad 0 < p' < p, \quad 0 < q' < q, \quad 0 < r' < r$$

を満たす唯一の整数の組 (e_0, p', q', r') が存在する.

p, q, r, p', q', r' をそれぞれ $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$ と表記すると,

$$-\frac{p_i}{p'_i} = t_{i1} - \frac{1}{t_{i2} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{t_{im_i}}}}, \quad t_{im_i} \neq -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

のように一意的に連分数展開される.

$t \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Q}$ とする. 3 次元閉多様体の微分同相類を変えない手術図式上の操作として, slam-dunk と呼ばれる操作がある (図 1). $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式は図 2 に示される頂点に数字が付いたグラフで表現される. 特に $\Sigma(1, q, r) = S^3$ である. また, $\Sigma(2, 3, 5)$ は Poincaré ホモロジー球面に微分同相である. Poincaré ホモロジー球面は 3 次元球面 S^3 に同相ではない 3 次元ホモロジー球面の最初の例として, よく知られている.

1.2 Ozsváth–Szabó の d 不変量とその性質

定義 1.4 (Ozsváth–Szabó の d 不変量 [OS03]) Y を 3 次元有理ホモロジー球面, $\mathfrak{s}(Y)$ を Y 上の spin^c 構造とする. Ozsváth–Szabó の d 不変量 (または Ozsváth–Szabó の correction term) $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ とは, +

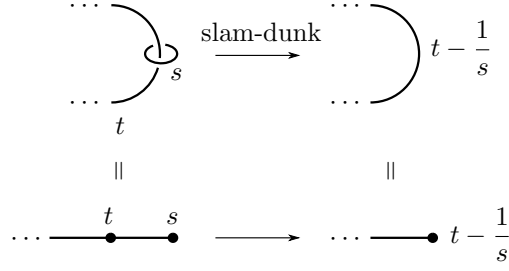


図1 Slam-dunk.

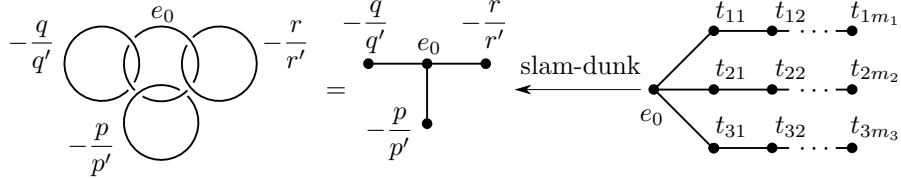


図2 $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式. 右は $\Sigma(p, q, r)$ に特異点解消 (resolution) を行うことで得られる 3 次元多様体の手術図式に相当し, Milnor ファイバーを用いた手法とは別に $\Sigma(p, q, r)$ の特異点を解消している.

版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^+(Y, \mathfrak{s}(Y))$ 内の ∞ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^\infty(Y, \mathfrak{s}(Y))$ の像内の捩れの無い元全体の中での最小の absolute grading のことである.

注意 1.5 [OS03] の Proposition 4.2 により, 一般に $d(-Y, \mathfrak{s}(Y)) = -d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ が成り立つ. Y が 3 次元ホモロジー球面であるとき, spin^c 構造はただ一つであることから, この場合 $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ を $d(Y)$ と略記する. 更に $d(Y)$ は偶数である. また, $d(Y)$ はホモロジー同境不変量である. つまり, 任意の 3 次元ホモロジー球面に対して, $d(Y_1) \neq d(Y_2)$ であるならば, Y_1 と Y_2 はホモロジー同境ではないことが言える. ここでは, $d(Y) \geq 0$ を満たすように 3 次元ホモロジー球面 Y に向きを入れることにする.

例 1.6 S^3 に対する d 不変量は自明である: $d(S^3) = 0$. $L(p, q)$ を (p, q) 型レンズ空間とする. ここでは, $L(p, q)$ の向きを $d(L(p, q), 0) \geq 0$ を満たすように入れる. $\mathfrak{s}(L(p, q))$ は $\mathbb{Z}_p$ の元と見做せる. $L(1, q) = L(1, 0) = S^3$ より $d(L(1, q)) = 0$, $L(2, 2m+1) = L(2, 1)$ と [OS03] の Proposition 4.2, Proposition 4.8 により,

$$d(L(2, 2m+1), n) = d(L(2, 1), n) = \begin{cases} -(2 - (-2)^2)/8 - d(L(1, 2)) = 1/4 & (n = 0), \\ -(2 - 0^2)/8 - d(L(1, 2)) = -1/4 & (n = 1). \end{cases}$$

$g(p, q) := (p-1)(q-1)/2$, $S(p, q) := \{ap + bq \mid (a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2\}$, $T(p, q)$ を (p, q) 型トーラス結び目とする. $S_r^3(K)$ を結び目 K に沿う S^3 上の係数 r の Dehn 手術とする ($r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$).

$$S_{-1/n}^3(T(p, q)) = \Sigma(p, q, pqn-1), \quad S_{-1/n}^3(-T(p, q)) = \Sigma(p, q, pqn+1)$$

であることを利用することで, 次が示されている.

定理 1.7 (Tweedy [Twe13]) $d(\Sigma(p, q, pqn-1)) = 2|\{s \notin S(p, q) \mid s \geq g(p, q)\}|$, $d(\Sigma(p, q, pqn+1)) = 0$.

2 背景

2.1 Kirby 氏の低次元トポロジーの問題集の Problem 4.2

Kirby 氏の問題集の更新版 [Kir78] の Problem 4.2 に以下の未解決問題がある:

問題 2.1 どのような 3 次元ホモロジー球面が, ある可縮な 4 次元多様体の境界になるか.

注意 2.2 可縮な 4 次元多様体は 4 次元ホモトピー球体である. このことから d 不変量は, この未解決の分類問題の否定的解決を推進する手段になる: 3 次元ホモロジー球面 Y に対して $d(Y) \neq 0$ であるとき, Y は任意の 4 次元ホモトピー球体の境界にならない. つまり, Y は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならない.

注意 2.3 この未解決の分類問題を肯定的に解決する際には, Kirby 計算が有効である: Y がある可縮な 4 次元多様体の境界になることは, Y の手術図式が, ある 3, 4 ハンドルを持たない可縮な 4 次元多様体のハンドル図式 (の点付き円周を 0-framed knot に変更した図式) と同一であることを, Kirby 計算で証明できる.

2.2 3 次元ホモロジー同境界群

Šavk 氏の survey [Šav24] を基に 3 次元ホモロジー同境界群についての定義と背景について紹介する.

定義 2.4 (h 同境) M_0, M_1 を n 次元ホモトピー球面とする.

ある $n+1$ 次元多様体 W が存在して,

- $\partial W = -M_0 \cup M_1$,
- 包含写像 $M_0 \hookrightarrow W \hookleftarrow M_1$ が $M_0 \simeq W \simeq M_1$ を誘導する

が成り立つときに, M_0 と M_1 が h 同境であるといい, $M_0 \sim M_1$ と表す.

$\sim$ は n 次元ホモトピー球面全体上の同値関係である. n 次元ホモトピー球面 M の $\sim$ による同値類を $[M]_\sim$ と表す.

定義 2.5 (n 次元ホモトピー同境界群) M_0, M_1 を n 次元ホモトピー球面とする.

$\Theta^n := \{n \text{ 次元ホモトピー球面} \} / \sim$ は加法の演算 $[M_0]_\sim + [M_1]_\sim := [M_0 \# M_1]_\sim$ により可換群になる

(Θ^n の単位元は $[S^3]_\sim$, Θ^n の $[M]_\sim$ に対する逆元は $[-M]_\sim$ である).

Θ^n を n 次元ホモトピー同境界群という.

定義 2.6 (ホモロジー同境) M_0, M_1 を n 次元ホモロジー球面とする.

ある $n+1$ 次元多様体 W が存在して,

- $\partial W = -M_0 \cup M_1$,
- 包含写像 $M_0 \hookrightarrow W \hookleftarrow M_1$ が $H_k(M_0; \mathbb{Z}) \cong H_k(W; \mathbb{Z}) \cong H_k(M_1; \mathbb{Z})$ for any $k \in \mathbb{Z}$ を誘導する

が成り立つときに, M_0 と M_1 がホモロジー同境であるといい, $M_0 \sim_{\mathbb{Z}} M_1$ と表す.

$\sim_{\mathbb{Z}}$ は n 次元ホモトピー球面全体上の同値関係である. n 次元ホモロジー球面 M の $\sim_{\mathbb{Z}}$ による同値類を $[M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ と表す.

定義 2.7 (n 次元ホモロジー同境界群) M_0, M_1 を n 次元ホモロジー球面とする.

$\Theta_{\mathbb{Z}}^n := \{n \text{ 次元ホモロジー球面} \} / \sim$ は加法の演算 $[M_0]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}} := [M_0 \# M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ により可換群になる

($\Theta_{\mathbb{Z}}^n$ の単位元は $[S^3]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$, $\Theta_{\mathbb{Z}}^n$ の $[M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ に対する逆元は $[-M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ である).

$\Theta_{\mathbb{Z}}^n$ を n 次元ホモロジー同境界群という.

$n \neq 3$ の場合は, [KM63] の Theorem 1.2 より Θ^n は有限群であり, [GAn70] の Theorem I.2 より $\Theta^n \cong \Theta_{\mathbb{Z}}^n$ であることが知られている. Poincaré 予想を解決した Perelman 氏による 3 本の論文により, 3 次元ホモロジー同境界群 Θ^3 は自明である. 一方, 3 次元ホモロジー同境界群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は非自明な群であることが判明していた:

定理 2.8 (Rokhlin [Rok52]) 全射準同型 $\mu: \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ が存在する.

その後, 3 次元ホモロジー同境界群は無限群であることが判明した:

定理 2.9 (Fintushel–Stern [FS85]) $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は $\mathbb{Z}$ 部分群を持つ: $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 > \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}[S_{-1}^3(T(2, 3))]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

更に, 3 次元ホモロジー同境界群は $\mathbb{Z}^{\infty}$ 部分群を持つことが判明した:

定理 2.10 (Furuta [Fur90]) $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 6n-1)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[S_{-1/n}^3(T(2, 3))]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

一方, 3 次元ホモロジー同境界群は $\mathbb{Z}$ 直和因子をもつことも判明した:

定理 2.11 (Frøyshov [Frø02]) ある非自明な $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

更に, 3 次元ホモロジー同境界群は $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子をもつことが判明した:

定理 2.12 (Dai–Hom–Stoffregen–Truong [DHST23]) ある非自明な $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 4n+1, 4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

その後, [DHST23] より簡便な手法が考案され, 3 次元ホモロジー同境界群は複数種類の $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を持つことが示された:

定理 2.13 (Karakurt–Şavk [KŞ22]) ある非自明な $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A が存在して,

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus & \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 4n+1, 4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\ & \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 3n+2, 6n+1)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 3n+1, 6n+5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}. \end{aligned}$$

3 次元ホモロジー同境界群 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に対して以下の未解決問題がある:

問題 2.14 $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ は $\mathbb{Z}^{\infty}$ と同型であるか?

もし問題 2.14 が否定的に解決される, つまり $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に捩じれ元が存在することが判明した場合は, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ はより興味深い対象になると言える. 現時点では $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の捩じれ元の候補は $\mathbb{Z}_2$ 型のみが [BC23] で構成されている.

2.3 概単純線形グラフを持つ ($pq + pr - qr = 1$ を満たす) $\Sigma(p, q, r)$

$pq + pr - qr = 1$ を満たす場合は, $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式は図 3 のようになる:

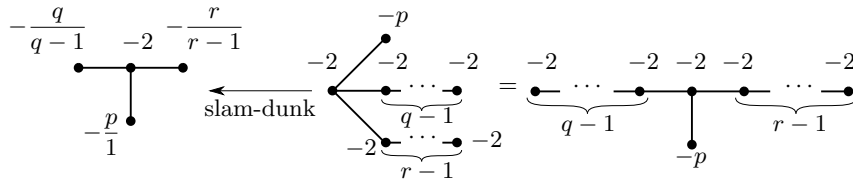


図 3 $pq + pr - qr = 1$ を満たす $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式.

図 3 の右のグラフは, 単純線形グラフに 1 個の頂点と 1 個の辺を枝分かれになるように繋ぐことで構成されることから, **概単純線形グラフ (almost simple linear graph)** と呼ばれる. $pq + pr - qr = 1$ を満たす最も代表的な 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面は $\Sigma(2, 3, 5)$ であり, その概単純線形グラフは E_8 グラフである.

命題 2.15 (Karakurt–Şavk [KŞ20]) p が偶数かつ $pq + pr - qr = 1$ であるとき, $d(\Sigma(p, q, r)) = (q + r)/4$.

注意 2.16 p が偶数かつ $pq + pr - qr = 1$ であるとき, 命題 2.15 により $d(\Sigma(p, q, r)) = -2\bar{\mu}(\Sigma(p, q, r))$ が分

かる. ここで, $\bar{\mu}(Y)$ は 3 次元ホモロジー球面 Y に対する Neumann–Siebenmann の $\bar{\mu}$ 不変量である. これにより, $\Sigma(p, q, r)$ の connected Heegaard Floer ホモロジーは自明になるから, $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に新たな情報を提示できない. よって, $pq + pr - qr = 1$ であるときは p が奇数の場合のみが $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ に対する重要な対象である.

$pq + pr - qr = 1$ とする. このとき, r は p, q のみからただ一つに決まる.

p が奇数である場合に, $n_p := (p-1)/2$, $F_{p,q}(x, y) := -(q+r)x^2 + 4qxy - 4(q-p)y^2 - 4y + q + r)/4$, $\mathfrak{L}_p := \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm p\} \times \{0, 1, \dots, n\}$, $R_{p,q} := \{(a, m) \in \mathfrak{L}_p \mid F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, 1)\}$ とする.

定理 2.17 (Karakurt–Şavk [KS20]) p が奇数かつ $pq + pr - qr = 1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = \max_{(a, m) \in R_{p,q}} F_{p,q}(a, m).$$

注意 2.18 $pq + pr - qr = 1$ であるとき, 命題 2.15 と定理 2.17 により $d(\Sigma(p, q, r)) \neq 0$ である. よって, 概単純線形グラフを持つ 3 次元ホモロジー球面の範囲では, 分類問題 2.1 は解決している.

3 主結果

3.1 p が奇数の場合の精密化

$t_{p,q}, \alpha_{p,q}$ をそれぞれ $n_p = (p-1)/2$ を $q-p$ で割ったときの商, 剰余とする.

$\mathfrak{M}'_p := \{(a, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \in 2\mathbb{N} + 1, a < m \leq n_p\}$ ($\mathbb{N}$ は正の整数全体), $\mathfrak{M}_{p,q} := \{(1, t_{p,q} + 1)\} \sqcup \mathfrak{M}'_p$, $S_{p,q} := \{(a, m) \in \mathfrak{M}_{p,q} \mid F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, 1)\}$ とする.

定理 3.1 (S. [Suz23]) p が奇数かつ $pq + pr - qr = 1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = \max_{(a, m) \in S_{p,q}} F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q}).$$

定理 2.17 で用いられた $\mathfrak{L}_p$ の点全体と定理 3.1 で用いられた $\mathfrak{M}_{p,q}$ の点の候補全体の様子は図 4 で表される.

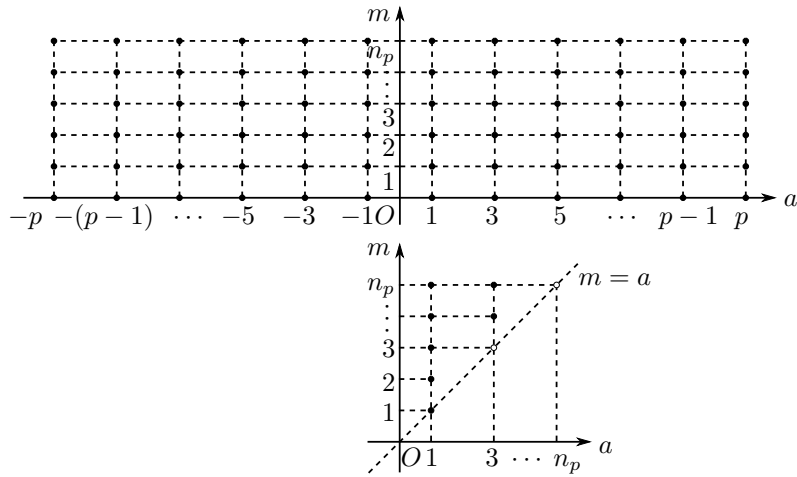


図 4 $\mathfrak{L}_p$ の点全体 (上) と $\mathfrak{M}_{p,q}$ の点の候補全体 (下).

定理 3.1 より, 以下の命題が成り立つ:

命題 3.2 (S.) $\alpha_{p,q} = 0$ の場合, $d(\Sigma(p, q, r)) = (t_{p,q} + 1)n_p$.

命題 3.3 (S.) $1 \leq \alpha_{p,q} \leq 19$ の場合, $d(\Sigma(p, q, r)) = (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q})$.

3.2 $pq + pr - qr = 1$ の場合の不等式関係

$$D(p, q, r) := \begin{cases} (t+1)(n+\alpha) & (p \in 2\mathbb{N}+1), \\ d(\Sigma(p, q, r)) & (p \in 2\mathbb{N}). \end{cases}$$

とし, (p_i, q_i, r_i) を $1 < p_i < q_i < r_i$, $\gcd(p_i, q_i) = \gcd(q_i, r_i) = \gcd(r_i, p_i) = 1$, $p_i q_i + p_i r_i - q_i r_i = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とする ($i = 1, 2$). [KS20] にある $\Sigma(p, q, r)$ の具体的な計算結果は全て $D(p, q, r) = d(\Sigma(p, q, r))$ になる. $D(p, q, r)$ は以下の不等式関係を満たす:

定理 3.4 (S. [Suz23]) $p_1 = p_2 = p$ かつ $q_1 \geq q_2$ であるとき

$$2 \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq D(p_1, q_1, r_1) \leq D(p_2, q_2, r_2) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

定理 3.1 と定理 3.4 の証明は [Suz23] に記載されている.

注意 3.5 p が奇数かつ $l_{p,q} \geq n_p$ である場合は, $D(p, q, r) = p - 1$ である.

$s_{p,q} := l_{p,q}/n_p$ とする.

定理 3.6 (S. [Suz23]) 十分大きい p に対して,

$s_{p,q} \in (1, 2)$ かつ $s_{p,q} \neq 2u/(u+1)$ for any $u \in \mathbb{Z}_{>1}$ になる場合は, $d(\Sigma(p, q, r)) > F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = p - 1$.

[証明] $F_{p,q}(a, m) = \frac{(2(a+1) - (2m - a - 1)s_{p,q})((2m - a + 1)s_{p,q} - 2(a-1))n_p - 2(a-1))}{4s_{p,q}}$

が成立する. 十分大きな p に対しては, $2s_{p,q}m \geq (s_{p,q} + 2)(a+1)$ を満たす (a, m) が存在する. 更に, $s_{p,q} \neq 2u/(u+1)$ for any $u \in \mathbb{N}$ を満たす場合は, $b := m - a$ とすると

$$\frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a - 1}{2} < b < \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a + 1}{2}$$

を満たす整数 b が存在する.

$$\frac{(2(a+1) - (2m - a - 1)s_{p,q})((2m - a + 1)s_{p,q} - 2(a-1))}{4s_{p,q}} > 2 \iff \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a - 1}{2} < b < \frac{2 - s_{p,q}}{s_{p,q}} \frac{a + 1}{2}$$

に注意すると, $s_{p,q} \in (1, 2)$ であるならば $F_{p,q}(a, m) > F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = p - 1$ が成立する. $\square$

注意 3.7 $s_{p,q} = 2u/(u+1)$ ($u \in \mathbb{N}$) であるならば, $(2 - s_{p,q})/s_{p,q} = 1/u$. このとき, $(a-1)/2 \in \mathbb{N}$ であることに注意すると, $(a-1)/(2u) < b < (a+1)/(2u)$ を満たす整数 b は存在しない.

定理 3.6 により, 定理 3.4 の不等式関係を満たさない無限種類のクラスの例を構成できる:

例 3.8 (S.) $(p, q, r) = (4t(2t+1)k + 4t + 1, (2t+1)(6t+1)k + 6t + 2, 4t(6t+1)k + 12t + 1)$
 $((t, k) \neq (2, 1))$ のとき, $d(\Sigma(p, q, r)) > p - 1$.

例 3.9 (S.) $(p, q, r) = (t(2t-1)k + 4t - 1, t(3t-1)k + 6t - 1, (2t-1)(3t-1)k + 12t - 5)$
 $(tk \in 2\mathbb{Z}, (t, k) \neq (3, 2), (4, 1))$ のとき, $d(\Sigma(p, q, r)) > p - 1$.

3.3 $d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3}))$ の評価

Karakurt 氏とŞavk 氏により構成された $\Sigma(p, q, r)$ の具体例の中で, 現状唯一 d 不変量の値が完全には明らかではないクラスに $\{\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})\}_{k=1}^{\infty}$ がある (F_j は j 番目の Fibonacci 数). これらの一部に対

し、非自明な不等式評価を可能にした:

命題 3.10 (S.) $k \geq 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合に対して,

$$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) \geq F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(3, 4) > F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(1, t_{F_{2k+1}, F_{2k+2}} + 1) = F_{2k+1} - 1.$$

[証明] $F_{2k+1} \in 2\mathbb{Z} + 1 \iff 2k + 1 = 6j - 1$ または $6j + 1$ ($j \in \mathbb{Z}$) が成立することに注意する.

$l_{p,q} = F_{2k}$, $s_{F_{2k+1}, F_{2k+2}} = 2F_{2k}/(F_{2k+1} - 1)$ であるから,

$$F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(3, 4) = \frac{(2 - s_{F_{2k+1}, F_{2k+2}})((3s_{F_{2k+1}, F_{2k+2}} - 2)n_{F_{2k+1}} - 2)}{s_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}} = \frac{2(F_{2k-1} - 1)(F_{2k} + F_{2k-2} - 1)}{F_{2k}}.$$

よって, $F_{2k}(F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(3, 4) - F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(1, 1)) = F_{2k-3}F_{2k-2} - 3F_{2k} + 2$ である. $k \geq 5$ より $2k + 1 \geq 11$ である. $2k + 1 = 11$ のときは, $F_{10}(F_{F_{11}, F_{12}}(3, 4) - F_{F_{11}, F_{12}}(1, 1)) = 110 > 0$ より主張が成立する. $2k + 1 \geq 13$ のとき, $F_{2k-2} - 24 \geq F_{10} - 24 = 31 > 0$. $F_j = F_{j-1} + F_{j-2} < 2F_{j-1}$ ($j > 3$) を用いると $F_{2k}(F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(3, 4) - F_{F_{2k+1}, F_{2k+2}}(1, 1)) = F_{2k-3}F_{2k-2} - 3F_{2k} + 2 > F_{2k-3}F_{2k-2} - 24F_{2k-3} + 2 > 0$. $\square$

注意 3.11 $k < 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合は, $l_{F_{2k+1}, F_{2k+2}} \leq F_6 = 8$ より命題 3.3 から

$$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) = F_{2k+1} - 1.$$

系 3.12 (S.) $k \geq 5$ かつ F_{2k+1} が奇数の場合に対して, $\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})$ は

$\Sigma(F_{2k+1}, (3F_{2k+1} - 1)/2, 3F_{2k+1} + 2)$ や $\Sigma(F_{2k+1}, 2F_{2k+1} - 1, 2F_{2k+1} + 1)$ とホモロジー同境ではない.

3.4 先行研究と本研究で得られた $d(\Sigma(p, q, r))$ に対する結果

ここでは, p が奇数かつ概単純線形グラフを持つ $d(\Sigma(p, q, r))$ に対する先行研究 [KS20] と本研究の結果を図 5 にまとめる: $l_{p,q} = q - p \in [1, p - 1] \cap \mathbb{Z}$ であることに注意する.

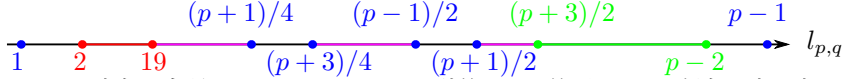


図 5 青色が [KS20], 赤色が命題 3.3 で $d(\Sigma(p, q, r))$ が計算できた範囲である. 緑色は本研究で不等式関係を満たさない例が得られた範囲である. 緑色と桃色の範囲は $\alpha_{p,q} = 0$ である場合 (命題 3.2) を除いて, 現時点で未解明の範囲である. 系 3.12 以外にもホモロジー同境にならない 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の対が本研究で新たに得られていることが, この図から分かる.

4 結び目コンコーダンス群への応用

4.1 結び目コンコーダンス群の定義と背景

K_0, K_1 を有向結び目 (S^1 から S^3 への滑らかな埋め込みの像), $K_0 \# K_1$ を K_0 と K_1 との連結和とする.

定義 4.1 (結び目のコンコーダンス性) あるシリンダー $C (\simeq S^1 \times [0, 1])$ が存在して,

$\bullet C \subset S^3 \times [0, 1]$,

$\bullet \partial C = -(K_0) \cup K_1$ が成り立つときに, K_0 と K_1 がコンコーダンスの関係にあるといい, $K_0 \sim_c K_1$ と表す.

$\sim_c$ は有向結び目全体上の同値関係である. 有向結び目 K の $\sim_c$ による同値類を $[K]_{\sim_c}$ と表す.

定義 4.2 (結び目コンコーダンス群) $\mathcal{C} := \{ \text{有向結び目} \} / (\text{isotopy}, \sim_c)$ は加法の演算

$[K_0]_{\sim_c} + [K_1]_{\sim_c} := [K_0 \# K_1]_{\sim_c}$ により可換群になる ($[O]_{\sim_c}$: $\mathcal{C}$ の単位元 (O : 自明な結び目), $[-K]_{\sim_c}$: $\mathcal{C}$ の $[K]_{\sim_c}$ に対する逆元). $\mathcal{C}$ を結び目コンコーダンス群という.

$\mathcal{C}_{\text{TS}}$ を位相的にスライスな結び目で生成される $\mathcal{C}$ のコンコダンス部分群とする.

p, q, r が全て奇数であるとき, プレッツェル結び目 $K(-p, q, r)$ 上で分岐される S^3 の 2 重分岐被覆が $\Sigma(p, q, r)$ である. 定理 2.10 の証明で使われたゲージ理論の手法により以下が示された:

定理 4.3 (Endo [End95]) K_n がプレッツェル結び目 $K(-2n-1, 4n+1, 4n+3)$,
 $K(-2n-1, 2n+3, 2n^2+4n+1)$, $K(-2n-1, 2n+5, n^2+3n+1)$,
 $K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)$, $K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)$ のいずれかなら,

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K_n].$$

注意 4.4 [Hom15] での研究が基になって, $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ が $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を持つことが示されている. また, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Z}_2^{\infty}$ 直和因子を持つことが保証されている. 問題 2.14 と同様に「 $\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}^{\infty} \oplus \mathbb{Z}_2^{\infty}$ と同型になるか」も未解決である.

注意 4.5 定理 4.3 にある $K(-p, q, r)$ に対応する $\Sigma(p, q, r)$ の d 不変量は [KS20] の Theorem 1.3 または命題 3.3 により $d(\Sigma(p, q, r)) = (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q})$ である.

定理 2.13 で $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を構成することにより, 定理 4.3 で構成された $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ で $\mathbb{Z}^{\infty}$ 部分群を生成するプレッツェル結び目の無限系列の一部が, $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ で $\mathbb{Z}^{\infty}$ 直和因子を生成することが判明した:

系 4.6 (Karakurt-Şavk [KS22]) ある非自明な $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群 A_1, A_2 が存在して,

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} = A_1 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)] = A_2 \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)].$$

4.2 結び目コンコダンス群 $\mathcal{C}$ に対する結果

n を正の整数とし, (p_n, q_n, r_n) を $1 < p_n < q_n < r_n$, $\gcd(p_n, q_n) = \gcd(q_n, r_n) = \gcd(r_n, p_n) = 1$, $p_n q_n + p_n r_n - q_n r_n = 1$ を満たす $\mathbb{Z}^3$ の元とする ($n \in \mathbb{N}$). p_n, q_n, r_n が全て奇数であるとき, $K(-p_n, q_n, r_n)$ は Alexander 多項式が $\Delta_{K(-p_n, q_n, r_n)}(t) = ((-p_n q_n + q_n r_n - r_n p_n)(t-1)^2 + (t+1)^2)/(4t) = 1$ になるプレッツェル結び目である. また, この場合は常に Fintushel-Stern 不変量 $R(p_n, q_n, r_n)$ は 1 になり, 特に 0 より大きいことから, 定理 4.3 の証明を紐解くと実際には次が成立する:

定理 4.7 (Endo [End95]) p_n, q_n, r_n を奇数とする. 全ての正の整数 n に対して,

$p_n q_n + p_n r_n - q_n r_n = 1$ かつ $p_n q_n r_n < p_{n+1} q_{n+1} r_{n+1}$ を満たすとき

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_n, q_n, r_n)].$$

例 3.8 と例 3.9 を参考にすると, 定理 4.7 から次が成り立つ:

定理 4.8 (S.) $(p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1}) = (4t(2t+1)(2k+1) + 4t+1, (2t+1)(6t+1)(2k+1) + 6t+2, 4t(6t+1)(2k+1) + 12t+1),$

$(p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2}) = (2t(2t-1)k + 4t-1, 2t(3t-1)k + 6t-1, 2(2t-1)(3t-1)k + 12t-5)$ のとき,

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} > \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1})], \quad \mathcal{C}_{\text{TS}} > \bigoplus_{t=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2})].$$

注意 4.9 $(t_1, k_1, i_1) \neq (t_2, k_2, i_2) \implies (p_{t_1, k_1, i_1}, q_{t_1, k_1, i_1}) \neq (p_{t_2, k_2, i_2}, q_{t_2, k_2, i_2})$ が成り立つことは,

$(t_1, i_1) \neq (t_2, i_2) \implies s_{p_{t_1, k_1, i_1}, q_{t_1, k_1, i_1}} \neq s_{p_{t_2, k_2, i_2}, q_{t_2, k_2, i_2}}$ と $(t_1, i_1) = (t_2, i_2)$ かつ $k_1 \neq k_2$

$\implies p_{t_1, k_1, i_1} \neq p_{t_2, k_2, i_2}$ であることから従う. t, k の固定の仕方は無限通りあるので, 定理 4.8 は $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ の具体的な $\mathbb{Z}^{\infty}$ 部分群を可算無限通り検出している.

謝辞

本講演と本稿の作成の機会を与えてくださった本研究集会の運営に携わった皆様に感謝致します。本稿の内容を書く際に参考になった貴重な意見や助言をしてくださった黒田 直樹氏, 高野 暁弘氏, 市原 一裕氏, 佐野 岳人氏, 今野 北斗氏, 飯田 暢生氏に感謝致します。改めて, 今回の研究内容についての背景や方向性について多大な助言をしてくださった Oğuz Şavk 氏, 本研究について定期的に助言をしてくださった丹下 基生氏と遠藤 久顕氏に, この場を借りて感謝申し上げます。最後に, 講演を聞いていただいた全ての方に感謝を申し上げます。

参考文献

- [BC23] Keegan Boyle and Wenzhao Chen, *Negative amphichiral knots and the half-Conway polynomial*, Rev. Mat. Iberoam. **40** (2024), no. 2, 581–622.
- [DHST23] Irving Dai, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen, and Linh Truong, *An infinite-rank summand of the homology cobordism group*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 12, 2365–2432.
- [End95] Hisaaki Endo, *Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group*, Topology Appl. **63** (1995), no. 3, 257–262.
- [Frø02] Kim A. Frøyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552.
- [FS85] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 2, 335–364.
- [Fur90] Mikio Furuta, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355.
- [GAn70] Francisco J. González-Acuña, *On homology spheres*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1970, Thesis (Ph.D.)–Princeton University.
- [GS80] David E. Galewski and Ronald J. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 1, 1–34.
- [Hom15] Jennifer Hom, *An infinite-rank summand of topologically slice knots*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 2, 1063–1110.
- [Kir78] Rob Kirby, *Problems in low dimensional manifold theory*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 273–312, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978. ISBN:0-8218-1433-8
- [KM63] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.
- [KŞ20] Çağrı Karakurt and Oğuz Şavk, *Ozsváth-Szabó d-invariants of almost simple linear graphs*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 5, 2050029, 17 pp.
- [KŞ22] Çağrı Karakurt and Oğuz Şavk, *Almost simple linear graphs, homology cobordism and connected Heegaard Floer homology*, Acta Math. Hungar. **168** (2022), no. 2, 454–489.
- [LL19] Adam S. Levine and Tye Lidman, *Simply connected, spineless 4-manifolds*, Forum Math. Sigma **7** (2019), Paper No. e14, 11 pp.
- [Man16] Ciprian Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 1, 147–176.
- [Mat78] Takao Matumoto, *Triangulation of manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 3–6, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978. ISBN:0-8218-1433-8
- [OS03] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261.
- [Rok52] Vladimir A. Rohlin, *New results in the theory of four-dimensional manifolds*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **84** (1952), 221–224.
- [Twe13] Eamonn Tweedy, *Heegaard Floer homology and several families of Brieskorn spheres*, Topology Appl. **160** (2013), no. 4, 620–632.
- [Şav24] Oğuz Şavk, *A survey of the homology cobordism group*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **61** (2024), no. 1, 119–157.
- [Suz23] Tatsumasa Suzuki, *The d-invariant of any Brieskorn homology sphere with an equation*, arXiv:2310.14279.