

レンズ空間内の双曲結び目でレンズ空間の連結和を得るデーン手術

祝井 堅太朗（京都大学大学院理学研究科）

1 イントロダクション

デーン手術においてよく知られている問題のケーブリング予想 [9] では、 S^3 内の双曲結び目でのデーン手術で可約な多様体は得られないと予想されている。ケーブリング予想は未解決だが、レンズ空間ふたつの連結和は S^3 内の双曲結び目でのデーン手術で得られないことが示されている [10]。一方でレンズ空間内の双曲結び目でのデーン手術でレンズ空間の連結和を得るものは存在し、Baker によるレンズ空間のケーブリング予想で、そのようなデーン手術で得られる多様体は $L(r, 1) \# L(s, 1)$ の形だと予想されていた [1]。しかし、Gainullin によりレンズ空間のケーブリング予想の反例にあたる、 $L(15, 4)$ 内の双曲結び目でのデーン手術で $L(3, 2) \# L(5, 3)$ を得るものが構成された [8]。Gainullin の構成では、ザイフェルト手術についての研究で Deruelle, Miyazaki, Motegi により導入されたザイフェルター [3] のアイデアが使われている。今回はザイフェルターをより詳しく扱うことで Gainullin の構成を一般化し、レンズ空間のケーブリング予想の反例を無限個構成する。

2 準備

2.1 ザイフェルター

この章では [3] で導入されたザイフェルターについて [3], [11] を参考に確認する。デーン手術やザイフェルト多様体の基本的な内容も [11] を参照する。

2.1.1 退化したザイフェルトファイブレーション

M をザイフェルト多様体とし、 $t_1, \dots, t_k$ をファイバーとする。 M' を、各ファイバーについてメリディアンが正則ファイバーとなるようにデーン手術した多様体とする。このとき、 $M - \bigcup_{i=1}^k \text{int} N(t_i)$ に制限された M のファイブレーションは M' に拡張できないが、各 $N(t_i)$ の中心線を指数 0 の特異ファイバーとみなし、退化したザイフェルトファイブレーションを持つと考える。退化したザイフェルトファイブレーションを持つ多様体として以下がある。

補題 1. 底曲面が S^2 であって、退化したファイバーが 1 本、ザイフェルト不変量 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ を持つ特異ファイバーが 2 本の退化したザイフェルトファイバー構造を持つ多様体は $L(a_1, -b_1) \# L(a_2, -b_2)$ である。

2.1.2 ザイフェルト手術のザイフェルター

S^3 内の結び目 K の m デーン手術を組 (K, m) で表す. (K, m) と (K', m') は, K と K' がアイソトピックかつ $m=m'$ のとき同じデーン手術であるといい, $(K, m) = (K', m')$ と書く.

定義 2. $K(m)$ がザイフェルトファイブレーション, または退化したザイフェルトファイブレーションを持つとき, (K, m) をザイフェルト手術とよぶ.

定義 3. (K, m) をザイフェルト手術とし, c を K と交わらない結び目とする. 以下の条件を満たすとき, c をザイフェルト手術 (K, m) のザイフェルターとよぶ.

- (i) c は S^3 で自明な結び目である.
- (ii) c は $K(m)$ の, ある (退化した) ザイフェルトファイブレーションにおいて正則ファイバー, 例外ファイバーあるいは退化したファイバーになる.

ザイフェルターの重要な性質として, 遺伝性がある.

補題 4 ([3, Proposition 2.6]). (K, m) をザイフェルター c を持つザイフェルト手術とする. (K, m) を c で n 回ツイストして得られる (K_n, m_n) はザイフェルト手術であり, c は (K_n, m_n) のザイフェルターになっている.

c の像も c と書いていることに注意する. ザイフェルターの定義より c は自明な結び目なので c での $-1/n$ 手術が c に沿った n ツイストに対応する. 一方で c は $K(m)$ のあるファイブレーションにおいてファイバーになっている. よって c のファイバー近傍を取り除き, 埋め戻して得られる $K_n(m_n)$ はザイフェルトファイブレーションまたは退化したザイフェルトファイブレーションを持つので (K_n, m_n) もザイフェルター c を持つザイフェルト手術である. このことは図式を用いると以下のように表される.

$$\begin{array}{ccc} K \subset S^3 & \xrightarrow{n\text{-twist along } c} & K_n \subset S^3 \\ m\text{-surgery on } K \downarrow & & \downarrow m_n\text{-surgery on } K_n \\ K(m) & \xrightarrow{\text{surgery on } c} & K_n(m_n) \end{array}$$

ザイフェルト手術の遺伝性は, 今紹介したザイフェルターに沿ったツイストだけではなく, ふたつのザイフェルターが張るアニュラスに沿ったツイストでも考えられる.

定義 5. (K, m) をザイフェルト手術とし, c_1 と c_2 を (K, m) のザイフェルターとする. c_1 と c_2 が $K(m)$ の 1 つの (退化した) ザイフェルトファイブレーションで同時にファイバーになるとき, 組 $\{c_1, c_2\}$ を (K, m) のザイフェルター対とよぶ. 特に c_1 と c_2 が S^3 内のアニュラスの境界になっているとき, 順序対 (c_1, c_2) をザイフェルターのアニュラス対とよぶ.

補題 6 ([3, Proposition 2.33]). (K, m) をザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) を持つザイフェルト手術とする. (K, m) を c_1, c_2 が張るアニュラスで n 回ツイストして得られる (K_n, m_n) はザイフェルト手術であり, (c_1, c_2) は (K_n, m_n) のザイフェルターのアニュラス対になっている.

c_1, c_2 の像も c_1, c_2 と書いていることに注意する. ザイフェルターのアニュラス対の定義より, $c_1 \cup c_2$ が $(2l, 2)$ トーラス絡み目とすると手術 $c_1 \cup c_2(l - 1/n, l + 1/n)$ が c_1, c_2 が張るアニュラスに沿った n ツイス

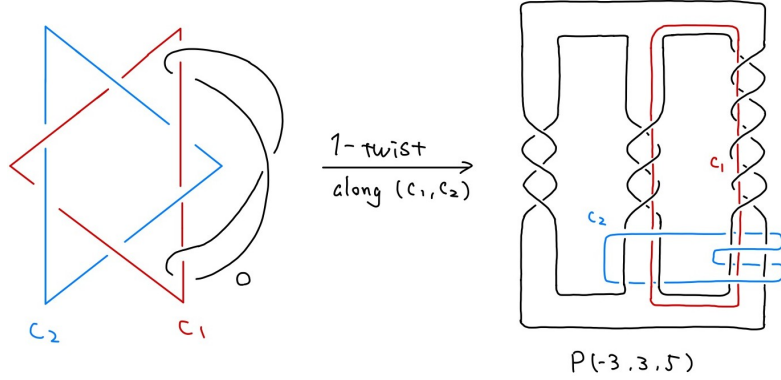


図 1

トに対応する．一方で c_1, c_2 は $K(m)$ のあるファイブレーションにおいて同時にファイバーになっている．よって c_1, c_2 のファイバー近傍を取り除き，埋め戻して得られる $K_n(m_n)$ はザイフェルトファイブレーションまたは退化したザイフェルトファイブレーションを持つので (K_n, m_n) もザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) を持つザイフェルト手術である．このことは図式を用いると以下のように表される．

$$\begin{array}{ccc}
 K \subset S^3 & \xrightarrow{n\text{-twist along } (c_1, c_2)} & K_n \subset S^3 \\
 \downarrow m\text{-surgery on } K & & \downarrow m_n\text{-surgery on } K_n \\
 K(m) & \xrightarrow{\text{surgery on } (c_1, c_2)} & K_n(m_n)
 \end{array}$$

以上の遺伝性により，ザイフェルト手術がザイフェルターを持つとき，ザイフェルターを介して別のザイフェルト手術が得られる．これまで知られているほとんどのザイフェルト手術がザイフェルターを介して自明な結び目でのザイフェルト手術につながっていることがわかっている [3, 4, 5, 6, 7]．

2.2 主結果に用いるザイフェルト手術とそのザイフェルター

図 1 左にあるのはザイフェルト手術 $(O, 1)$ とそのザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) である ([11] 図 12.13)． c_1, c_2 でバウンドされるアニュラスで O を 1-twist すると，右のプレッツェル結び目 $P(-3, 3, 5)$ となりザイフェルト手術 $(P(-3, 3, 5), 1)$ を得る．Gainullin の構成では右のザイフェルト手術 $(P(-3, 3, 5), 1)$ とそのザイフェルター c_1 が使われている．今回の構成では左のザイフェルト手術 $(O, 1)$ とそのザイフェルターのアニュラス対 (c_1, c_2) を使う $((O, 1)$ と $(P(-3, 3, 5), 1)$ のどちらを使っても構成できるデーモン手術は変わらないが，計算の都合で $(O, 1)$ を選ぶ．

ザイフェルト手術 (K, m) のザイフェルター c に対して $H_1(\partial N(c))$ の生成系をふたつ考える．ひとつ目は K での手術前の S^3 において一意に定まるメリディアン μ とロンジチュード λ による $\{\mu, \lambda\}$ ．ふたつ目は K での手術後のザイフェルト多様体 $K(m)$ において断面 S を選ぶごとに定まる $s = S \cap \partial N(c)$ と正則ファイバー h による $\{s, h\}$ (向きの選び方は [11] に従う)．図 1 左の c_1, c_2 についてそれぞれ $\mu_i, \lambda_i, s_i, h_i \in H_1(\partial N(c_i))$ には，断面の選び方や途中の計算を省略するが以下の関係が成り立つ．

$$c_1 : \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

そして、 $O(1) = S^3$ のもう一本の特異ファイバー c について $\mu, s, h \in H_1(\partial N(c))$ には以下の関係が成り立つ.

$$\mu = 3s + h$$

以上の情報をもとに次の章ではデーン手術の構成をする.

3 デーン手術の構成

定理 7. 整数 n に対して、 $L(9n+6, 3n+1)$ 内の結び目 K_n でのデーン手術で $L(3, 2) \# L(3n+2, 2n+1)$ を得るものが存在する.

(証明の概略)

デーン手術の構成は次の図式で表される.

$$\begin{array}{ccc} O \subset S^3 & \xrightarrow[3 + \frac{1}{n} \text{ surgery on } c_2]{6 \text{ surgery on } c_1} & K_n \subset L(9n+6, 3n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(1) & & \\ = S^2((1, 0), (2, -1), (3, 1)) & \xrightarrow[\text{surgery on } c_2]{\text{degenerated surgery on } c_1} & L(3, 2) \# L(3n+2, 2n+1) \end{array}$$

- 左上から右上について

O でデーン手術する前の S^3 において $c_1 \cup c_2$ はトーラス絡み目 $T_{2,6}$ であるので、 c_1 で 6 手術をし c_2 で $3 + 1/n$ 手術をすると $L(9n+6, 3n+1)$ を得る.

- 左下から右下について

$O(1) = S^3$ において前の章にあるとおり

$$c_1 : \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad c : \mu = 3s + h$$

である. よって c_1 での 6 手術はファイブレーションを退化させ、 c_2 での $3 + 1/n$ 手術により新たなメリディアン μ_2' は

$$\mu_2' = (3n+2)s - (2n+1)h$$

をみtas. 補題 1 より得られる多様体は $L(3n+2, 2n+1)$ である.

今構成したデーン手術のうち $n \neq -1$ のものは双曲結び目での可約手術である (証明略). $n \neq -2, -1, 0$ のものはレンズ空間のケーブリング予想の反例になっていて、 $n = 1$ のものは Gainullin により構成された最初の反例に相当する.

このほかにも図 2 にあるザイフェルト手術とそのザイフェルターのアニュラス対を用いて同様の構成をすることで、レンズ空間のケーブリング予想の反例が無数個得られることを確認している.

定理 8. 整数 n に対して以下のデーン手術が存在する.

- (i) $L(9n+6, 3n+1) \longrightarrow L(3, 2) \# L(3n+2, -3)$
- (ii) $L(8n+6, 4n+1) \longrightarrow L(2, 1) \# L(4n+3, -4)$

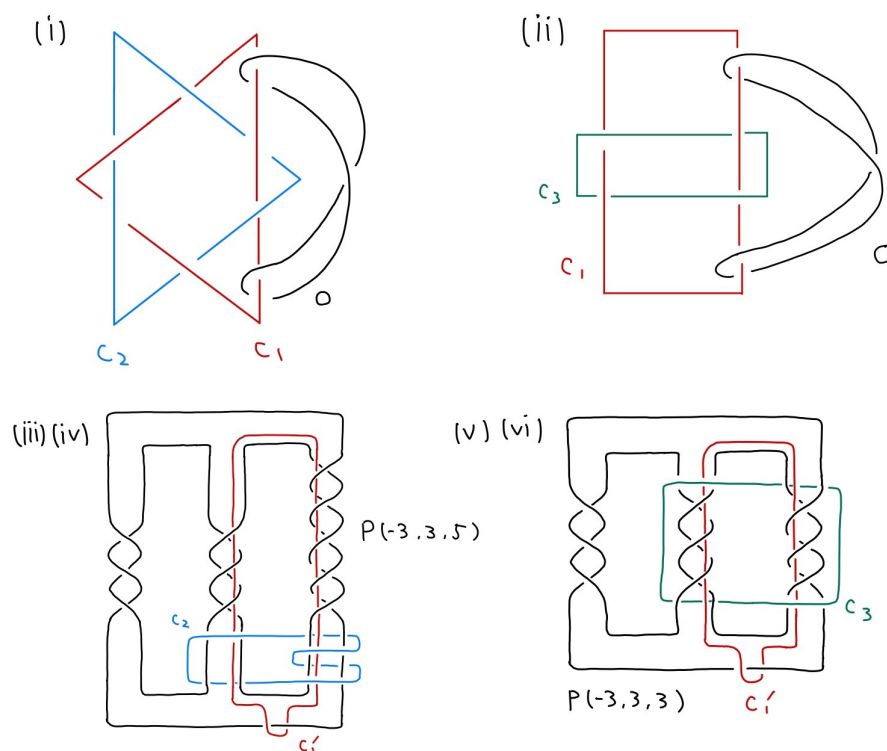


図 2

$$(iii) \ L(21n - 2, 7n - 3) \longrightarrow L(3, 2) \# L(3n + 2, -3)$$

$$(iv) \ L(9n + 3, 3n + 2) \longrightarrow L(3, 2) \# L(7n - 3, -7)$$

$$(v) \ L(18n + 1, 9n - 4) \longrightarrow L(2, 1) \# L(4n + 3, -4)$$

$$(vi) \ L(8n + 2, 4n + 3) \longrightarrow L(2, 1) \# L(9n - 4, -9)$$

そして,

(i) $n \neq -1$, (ii) $n \neq -1$ は双曲結び目での手術.

(iv), (vi) は有限個の整数 n を除いて双曲結び目での手術.

(iii), (v) は SnapPy[2] による計算を認めると, 有限個の整数 n を除いて双曲結び目での手術.

参考文献

- [1] K. L. Baker, A cabling conjecture for knots in lens spaces, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **20** (2014).
- [2] M. Culler, N. M. Dunfield, and J. R. Weeks. SnapPy, a computer program for studying the topology of 3-manifolds. Available at <http://snappy.computop.org> (01/09/2013).
- [3] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots, Mem. Amer. Math. Soc. **217** (2012)
- [4] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots. II. The Berge's lens surgeries, Topology Appl. **156** (2009)

- [5] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Networking Seifert surgeries on knots, III, *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014)
- [6] A. Deruelle et al., Networking Seifert surgeries on knots IV: Seiferters and branched coverings, in *Geometry and topology down under*
- [7] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, Neighbors of Seifert surgeries on a trefoil knot in the Seifert surgery network, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3) **20** (2014)
- [8] F. Gainullin, Reducible surgery in lens spaces and seiferters, *J. Knot Theory Ramifications* **31** (2022).
- [9] F. J. González-Acuña and H. Short, Knot surgery and primeness, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **99** (1986)
- [10] J. E. Greene, L-space surgeries, genus bounds, and the cabling conjecture, *J. Differential Geom.* **100** (2015)
- [11] 茂手木 公彦, デーン手術, 共立出版 (2022).