

Cosmetic crossing conjecture を満たす結び目に対する generalized cosmetic crossing conjecture への拡張について

中島 拓巳（京都大学大学院理学研究科）

概要

結び目理論の古典的な予想である cosmetic crossing conjecture, および generalized cosmetic crossing conjecture は, 結び目のある交差における交差交換およびそれを一般化した操作 generalized crossing change により結び目が不変ならば, その交差が自明である事を主張している. 先行研究により, 様々な結び目が cosmetic crossing conjecture を満たす事が示されているが, これらの結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかについて, 一般には直ちには不明であり, 2つの予想の間には興味深いギャップがある. 本稿では, [LM17] および [Ito22] において cosmetic crossing conjecture の成立が示されている結び目について, generalized バージョンに拡張しても議論が成立するかを検討し, いくつかの具体的な結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たす事を示す.

1 準備

1.1 Cosmetic crossing conjecture

はじめに, 本稿の主題である cosmetic crossing conjecture を正確に述べるために, [LM17] を参考に次の定義 1, 定義 2, 定義 3 を記述する.

定義 1 (crossing disk, crossing arc). S^3 内の (向きづけられた) 絡み目 K の交点 (crossing) c に付随する **crossing disk** D とは, S^3 内のディスクであって, $\text{int}(D)$ と K が横断的に 2 回, 代数的交点数が 0 になるように交わり, さらに K の図式において c を含むようなもののことである. 図 1 を参照. ∂D の事を **crossing circle** という.

また, K の交点 c における **crossing arc** γ とは, c に付随する crossing disk D 内の自明な arc であって, 2つの端点 $\partial\gamma$ が K 上に存在するようなもののことである. 単に K の crossing arc という時は, K の図式内のいずれかの交点における crossing arc の事を指す.

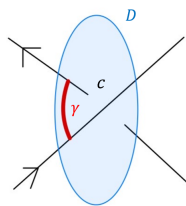


図 1 K の図式内で, 交点 c の近傍だけを取り出した図

定義 2 ((generalized) crossing change). S^3 内の絡み目 K の交点 c における **crossing change** とは, 図 2 のように, 図式において c の交差の上下を入れ替えるような操作のことである. この操作は, D で K を切り, 1 回ねじった後にもう 1 度貼り合わせるような操作である. また, **N -generalized crossing change** とは, 図 3 のように, c に $2N$ 個の交差を挿入するような操作のことである. この操作は, D で K を切り, N 回ねじった後にもう 1 度貼り合わせるような操作である. $N = 1$ のとき, この操作は通常の crossing change に一致する.

定義 3 (cosmetic, nugatory). S^3 内の絡み目 K の交点 c が **cosmetic** な交点であるとは, 交点 c において crossing change をして得られる絡み目 K' が K と同値であるようなものである事をいう. また, K の交点 c が **N -cosmetic** な交点であるとは, 交点 c において N -generalized crossing change をして得られる絡み目 K_N が K と同値であるようなものである事をいう.

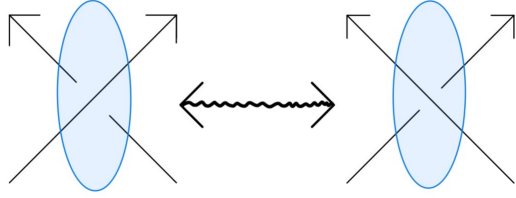


図2 crossing change

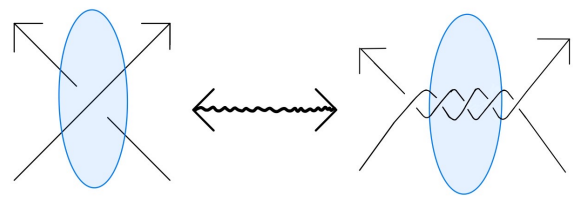


図3 N -generalized crossing change($N = 2$ の例)

S^3 内の絡み目 K の交点 c , または c に付随する crossing disk D が **nugatory** であるとは, ∂D が K の外部空間 $E(K)$ に含まれるディスクの境界となる事である. 図4のように, nugatory な交点は cosmetic, または N -cosmetic になる.

Remark 4. N -generalized crossing change, N -cosmetic という表記は一般的ではなく, 本稿において便宜上用いる.

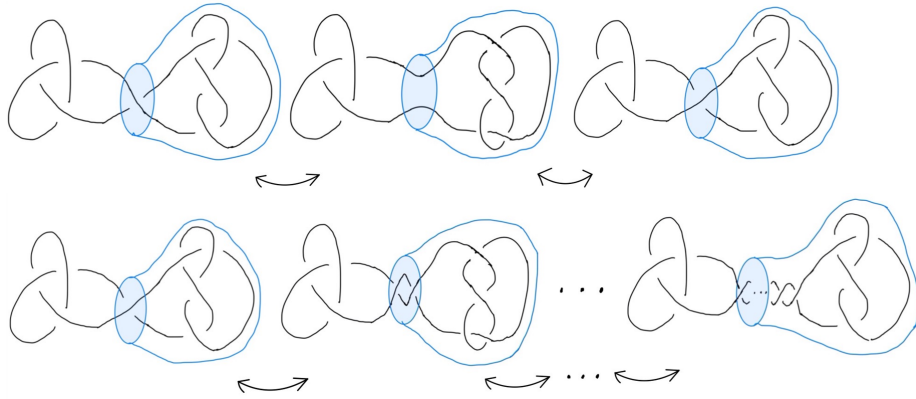


図4 nugatory な交点は常に cosmetic, または N -cosmetic.

必要な概念が定義されたので, ここで, 本稿の主題である cosmetic crossing conjecture について述べる.

予想 5 (Cosmetic crossing conjecture, [Kir78, Problem 1.58]). S^3 内の結び目 K の交点 c が cosmetic であるとする. このとき, c は nugatory であるか.

上の予想は crossing change に対するものであるが, 次のより強い, generalized crossing change に対する予想の事を「cosmetic crossing conjecture」と称する事もある. なお, 本稿では引き続き, 以下の予想の事は「generalized cosmetic crossing conjecture」と表記する.

予想 6 (Generalized cosmetic crossing conjecture). $N \neq 0$ を任意に定める. S^3 内の結び目 K の交点 c が N -cosmetic であるとする. このとき, c は nugatory であるか.

1.2 スロープとデー手術

結び目理論の基本事項については [Lic97] 等を参照し, [Mot22] を元にデー手術に関する基本事項の定義を確認する.

定義 7 (結び目のスロープ, スロープの距離). S^3 または一般の 3 次元多様体 M 内の結び目 K に対し, $\partial N(K)$ 上の, 向きをもたない本質的な単純閉曲線のアイソトピー類の事を, K の **スロープ** という. $\partial E(K)$ 上の, $\partial N(K)$ のスロープに対応する単純閉曲線のアイソトピー類も **スロープ** と呼ぶ.

特に S^3 内の結び目 K については, スロープに向きを与えた単純閉曲線のアイソトピー類は, K のメリディアン μ_K , ロンジチュード λ_K のホモロジー類 $[\mu_K], [\lambda_K] \in H_1(\partial N(K))$ と, 互いに素な整数 p, q を用いて $p[\mu_K] + q[\lambda_K] \in H_1(\partial N(K))$ と書ける. $r = p/q$ は向きの取り方によらずスロープを一意的に定めるので, しばしばこの同一視により, スロープを $r = p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty = 1/0\}$ と表示する.

K のスロープ η_1, η_2 の **距離** $\Delta(\eta_1, \eta_2)$ を, η_1, η_2 により代表される単純閉曲線の交点数の最小値として定める. $H_1(\partial N(K))$ の基底 (m, ℓ) について $\eta_1 = p_1 m + q_1 \ell, \eta_2 = p_2 m + q_2 \ell$ のとき, $\Delta(\eta_1, \eta_2) = |p_1 q_2 - p_2 q_1|$ である.

定義 8 (デーン手術, デーンフィリング). 3次元多様体 M 内の n 成分絡み目, $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ について, $N(L) = \bigcup_{i=1}^n N(L_i)$ と $E(L) = M - \text{int}(N(L))$ を同相写像により貼り合わせる事を考える. M から $N(L)$ を取り除き, L_i のメリディアン $\mu_i \in H_1(\partial N(L_i))$ がスロープ $r_i \in H_1(\partial E(L_i))$ と貼り合うような同相写像により $E(L)$ に埋め戻す操作を, L に沿った $(r_1, \dots, r_n)$ -デーン手術といい, この操作で得られる 3次元多様体を $M_{L_1 \cup \dots \cup L_n}(r_1, \dots, r_n)$ で表す. 本稿において, $M = S^3$ のとき, L に沿った $(r_1, \dots, r_n)$ -デーン手術をして得られる多様体を $L(r_1, \dots, r_n)$ とも書く.

また, デーン手術において n 個のソリッドトーラス $N(L)$ を埋め戻す操作を**デーンフィリング**という. 特に, 境界がトーラスである 3次元多様体 M に, ∂M のスロープ η に沿ってソリッドトーラスをデーンフィリングして得られる多様体の事を, $M(\eta)$ と書く.

上記の定義より, ある絡み目の交点に付随する crossing disk を D としたとき, この交点での N -generalized crossing change は, S^3 に crossing circle ∂D に沿った $\pm 1/N$ -デーン手術をする事によっても達成できる.

定義 9 (rational longitude). M を, トーラスを境界にもち, $H_1(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ をみたす 3次元多様体とする.

∂M のスロープであって, 包含写像 $i: \partial M \hookrightarrow M$ から誘導される準同型 $i_*: H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)$ による像が $H_1(M)$ 内で有限のオーダーをもつようなものの事を, M の **rational longitude** という. rational longitude は一意的に存在する. 証明は [Wat12, Section 3.1] を参照.

1.3 2重分岐被覆と Montesinos trick, L 空間

絡み目の一部を取り出し, 有理タングルを別の有理タングルに置き換えて別の絡み目を得る操作は, 2重分岐被覆においてはある結び目に沿ったデーン手術に対応する. 特に, (generalized) crossing change は有理タングルの置き換えで実現できるため, 以下に述べる Montesinos trick は (generalized) cosmetic crossing conjecture に対するアプローチとして重要である.

定義 10 (2重分岐被覆). S^3 内の絡み目 K に対し, 3次元多様体 $\Sigma(K)$ が K に沿った S^3 の 2重分岐被覆 (double branched cover) である, とは, $\Sigma(K)$ 上の対合 $\iota: \Sigma(K) \rightarrow \Sigma(K)$ が存在して, ι による $\Sigma(K)$ の固定点集合を $\text{Fix}(\iota) \subset \Sigma(K)$ とするとき, ι による $(\Sigma(K), \text{Fix}(\iota))$ の商空間が (S^3, K) となる事をいう.

$p: (\Sigma(K), \text{Fix}(\iota)) \rightarrow (S^3, K)$ を 2重分岐被覆写像とすると, S^3 の部分集合 F の p による逆像 $p^{-1}(F)$ を F の **lift** とよび, $\tilde{F}$ で表す.

定義 11 (有理タングル). 3次元球体 B とその中の 2本の自明な arc τ の組 (B, τ) であって, $\partial\tau$ は B 上に固定した 4点であり, B の同相写像によって, 図 5 で示した球体と arc の組 $R(1/0)$ にうつす事ができるようなものを, **有理タングル** という.

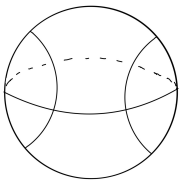


図 5 $R(1/0)$

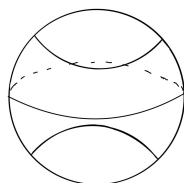


図 6 $R(0/1)$

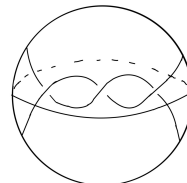


図 7 $R(3)$

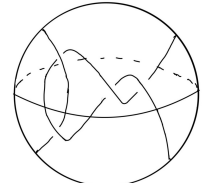


図 8 $R(-2, -2) = R(-\frac{5}{2})$

有理タングルは全て $R(a_1, \dots, a_n) = R(q/p)$ の形で表す事ができる. ここで,

$$\frac{q}{p} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}}}$$

であり, 有理タングル $R(a_1, \dots, a_n)$ は,

・ n が奇数のとき, $R(0/1)$ を水平方向に a_1 回半ねじり, 垂直方向に a_2 回半ねじり, $\dots$, 水平方向に a_n 回半ねじりして得

られる.

・ n が偶数のとき, $R(1/0)$ を垂直方向に a_1 回半ねじり, 水平方向に a_2 回半ねじり, $\dots$, 水平方向に a_n 回半ねじりして得られる.

(但し, ねじる方向はいずれも右回りを正とする. 図 7, 図 8 を参照)

有理タングル (B, τ) の τ に沿った 2 重分岐被覆写像 $p: (\tilde{B}, \tilde{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ について, $\tilde{B}$ は, 2 つの $\text{arc } \tau$ をつなぐ自明な $\text{arc } \gamma$ の lift $\tilde{\gamma}$ を中心線とするソリッドトーラスになっている. さらに, ねじり操作と 2 重分岐被覆の対応を考える事で, 次を得る. 詳細は [Mot22, Section 6.4], [Mon75] を参照.

命題 12 (Montesinos trick). $p: \Sigma(L) \rightarrow S^3$ を, $L \subset S^3$ に沿った 2 重分岐被覆写像とする. S^3 内の 3 次元球体 B を, L との交わり $B \cap L$ が有理タングルとなるようにとる. この有理タングルを $R(p_1/q_1)$ とし, タングル内の 2 つの arc をつなぐ自明な arc を γ とする.

このとき, $R(p_1/q_1)$ を $R(p_2/q_2)$ に入れ替える事によって L から得られる絡み目 L' に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 $\Sigma(L')$ について, $\Sigma(L')$ は $\Sigma(L)$ 内の結び目 $\tilde{\gamma}$ に沿ったデーン手術で得られ, さらに,

$$\Sigma(L)_{\tilde{\gamma}}(\alpha) \cong \Sigma(L), \Sigma(L)_{\tilde{\gamma}}(\beta) \cong \Sigma(L')$$

となる $\tilde{\gamma}$ のスロープ α, β について, $\Delta(\alpha, \beta) = |p_1 q_2 - p_2 q_1|$ が成り立つ.

[OS05] を参考に, 3 次元有理ホモロジー球面のクラスとして L 空間を定義する. L 空間はそれ自体深遠な研究対象である (例えば, [Mot22, 14 章]) が, 本稿では, L 空間におけるデーン手術の性質として定理 14 が重要である.

定義 13 (L 空間). 3 次元有理ホモロジー球面 M が L 空間であるとは, ハットバージョンの Heegaard Floer Homology $\widehat{HF}(M)$ が, $\dim \widehat{HF}(M) = |H_1(M; \mathbb{Z})|$ を満たす事である.

次の [Gai18] 内で示された定理は, L 空間内の unknot をある種特徴付けるようなものである.

Y を L 空間, $K \subset Y$ を Y 内の null-homologous な結び目, $U \subset Y$ を Y 内の unknot とする.

K は Y 内で null-homologous であるから, ロンジチュード λ_K が S^3 内の結び目と同様に一意的にとれる. $H_1(\partial N(K))$ の基底として $([\mu_K], [\lambda_K])$ をとり, S^3 内の結び目と同様にスロープと $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を同一視するものとする. U についても同様にスロープと $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を同一視する.

定理 14 ([Gai18, Theorem 8.2]). $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ に対し, $Y_K(\frac{p}{q})$ と $Y_U(\frac{p}{q})$ が向きを保って同相であるとき, $K = U$, 即ち K は unknot である.

また, 2 重分岐被覆が L 空間になるような S^3 内の絡み目のクラスとして, quasi-alternating や $\overline{Kh}$ homologically σ -thin といったクラスが挙げられる. quasi-alternating の正確な定義については [OS05, Definition 3.1] を, $\overline{Kh}$ homologically σ -thin については [MO08], [Wat12, Definition 2.3] 等を参照.

quasi-alternating は交代性という性質の拡張であり, 全ての非分離な交代絡み目を含む. さらに, 絡み目が quasi-alternating ならば, その 2 重分岐被覆は L 空間になる. ([OS05, Lemma 3.2, Proposition 3.3] を参照.) また, 絡み目が $\overline{Kh}$ homologically σ -thin であってもその 2 重分岐被覆は L 空間になる. ([OS05, Theorem 1.2], [Wat12, Proposition 4.2] を参照.) 実は, [MO08, Theorem 1] で quasi-alternating ならば $\overline{Kh}$ homologically σ -thin という事も示されている.

具体的な結び目が 2 重分岐被覆が L 空間になるという性質をもつかは, しばしば quasi-alternating や $\overline{Kh}$ homologically σ -thin といった十分条件をもとに考えられる.

1.4 Casson-Walker 不変量とその明示的な公式

2 つ目の主結果の議論を述べるために必要な, 有理ホモロジー球面に対して定義される Casson-Walker 不変量について, 定義のみ確認する. $S\left(\frac{p}{q}\right)$ は Dedekind symbol であり, Dedekind 和 $s(p, q)$ と q の符号 $\text{sign}(q)$ を用いて,

$$S\left(\frac{p}{q}\right) = 12(\text{sign}(q))s(p, q), \quad s(p, q) = \sum_{k=1}^{|q|-1} \left(\left(\frac{k}{q}\right)\right) \left(\left(\frac{kp}{q}\right)\right), \quad ((x)) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Z}) \\ x - [x] - \frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

と定義されるものとする.

有理ホモロジー球面 M 内の結び目 K に対し、 K のアレキサンダー多項式 $\Delta_{K;M}(t)$ の 2 階微分を $\Delta''_{K;M}(t)$ と書く。 $H_1(\partial E(K); \mathbb{Z})$ の交叉形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とし、 $E(K)$ の (rational でない) ロンジチュード ℓ を、 $i_* : H_1(\partial E(K); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z})$ の $\ker$ を生成する $H_1(\partial E(K); \mathbb{Z})$ のホモロジー類とする。また $E(K)$ の rational longitude $\lambda_{E(K)}$ を含む $H_1(\partial E(K); \mathbb{Z})$ の基底 $(x, y) = (x, \lambda_{E(K)})$ を $\langle x, y \rangle = 1$ となるようとり、 $d \in \mathbb{Z}$ は $\ell = dy$ を満たすものとする。

$a, b \in H_1(\partial E(K); \mathbb{Z})$ を、 $\langle y, a \rangle \neq 0, \langle y, b \rangle \neq 0$ を満たすスロープとする。さらに、 a, b, ℓ に対して $\tau(a, b; \ell)$ を

$$\tau(a, b; \ell) = \frac{1}{12} \left\{ -S \left(\frac{\langle x, a \rangle}{\langle y, a \rangle} \right) + S \left(\frac{\langle x, b \rangle}{\langle y, b \rangle} \right) + \left(1 - \frac{1}{d^2} \right) \left(\frac{\langle x, a \rangle}{\langle y, a \rangle} - \frac{\langle x, b \rangle}{\langle y, b \rangle} \right) \right\}$$

で定める。

定義 15 (Casson-Walker 不変量, [Wal90]). 有理ホモロジー球面 M の **Casson-Walker 不変量** $\lambda_{CW}(M)$ とは、次によって一意的に定義される ($\mathbb{Q}$ に値をもつ) 不変量である。

$$\cdot \lambda_{CW}(S^3) = 0$$

$$\cdot M \text{ 内の結び目 } K \text{ と上記の } a, b, \ell \text{ に対し,}$$

$$\lambda_{CW}(M_K(b)) = \lambda_{CW}(M_K(a)) + \tau(a, b; \ell) + \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, \ell \rangle \langle b, \ell \rangle} \Delta''_{K;M}(1)$$

S^3 内の 2 成分絡み目に沿ったデー手術で得られる有理ホモロジー球面の Casson-Walker 不変量については、[Ito22, Proposition 1.5] においてその明示的な公式が示されている。

2 2つの主結果に共通して用いる命題 (N -cosmetic な交点の crossing arc の lift が L 空間内で null-homologous ならば、交点は nugatory である)

$\det L \neq 0$ の絡み目について、次が成立する。特にこの補題 16 より、crossing arc の lift が unknot になる場合については cosmetic crossing conjecture が正しい事が分かる。

補題 16 ([Bon23, Proposition A.1]). L を S^3 内の $\det L \neq 0$ を満たす絡み目とする。 γ を L 内のある交点の crossing arc, D を crossing disk とし、 $\tilde{\gamma} \subset \Sigma(L)$ は unknot であるとする。この交点が cosmetic ならば、 D は nugatory。

補題 16 は、[Bon23] と同様の議論により、次の generalized crossing change に対する補題に拡張できる事を確認した。

補題 17. L を S^3 内の $\det L \neq 0$ を満たす絡み目とする。 γ を L 内のある交点の crossing arc, D を crossing disk とし、 $\tilde{\gamma} \subset \Sigma(L)$ は unknot であるとする。ある $N \neq 0$ について、この交点が N -cosmetic ならば、 D は nugatory。

以下、証明の概略のみを述べる。

γ の近傍となる 3 次元球体 B を、 $B \cap D$ が $\text{int}(D)$ 内のディスクになり、 $(B, B \cap L)$ が有理タングルとなるようにとる。このとき B の $\Sigma(L)$ への lift $\tilde{B}$ は、 $\tilde{\gamma}$ を中心線とするソリッドトーラスである。

$\det L \neq 0$ という仮定から、 $\Sigma(L)$ は有理ホモロジー球面である。従って、 $M = \Sigma(L) - \text{int}(\tilde{B})$ とおくと、 $H_2(M; \mathbb{Q}) \cong 0, H_1(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ が従う。 ∂M の rational longitude を λ_M とする。

さらに、 $\tilde{\gamma}$ は $\Sigma(L)$ 内の unknot であるので、 $\Sigma(L)$ 内で $\tilde{\gamma}$ が境界となるディスクをとれる。それを $\tilde{\Gamma} \subset \Sigma(L)$ とすると、 $\tilde{\Gamma} \cap \partial M$ は rational longitude の定義より λ_M に一致する。

$\Sigma(L)$ 上の対合 $\iota : \Sigma(L) \rightarrow \Sigma(L)$ に対し、 $\iota(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ である。よって $\tilde{\gamma}$ を境界とする $\tilde{\Gamma}$ について、equivariant Dehn's Lemma[MY81] より、被覆変換群 $\{\text{id}_{\Sigma(L)}, \iota\}$ が $\tilde{\Gamma}$ に自由に作用するとき $\iota(\text{int}(\tilde{\Gamma})) \cap \text{int}(\tilde{\Gamma}) = \emptyset$ であるから、

$$\iota(\text{int}(\tilde{\Gamma})) \cap \text{int}(\tilde{\Gamma}) = \emptyset \text{ または, } \iota(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}$$

のいずれかが成立するが、 $\iota(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}$ のときは起こりえないか、 $\iota(\text{int}(\tilde{\Gamma})) \cap \text{int}(\tilde{\Gamma}) = \emptyset$ のときに帰着される。よって、 $\iota(\text{int}(\tilde{\Gamma})) \cap \text{int}(\tilde{\Gamma}) = \emptyset$ のときのみ考えればよい。

$p : (\Sigma(L), \text{Fix}(\iota)) \rightarrow (S^3, L)$ を 2 重分岐被覆写像とする。 $p(\tilde{\Gamma} \cap M) = \Gamma$ は $S^3 - \text{int}(B)$ 内のディスクであり、 $\Gamma \cap L = \emptyset$ 。

図で示したタングルの組を入れ替える事により L から得られる絡み目について考える。 L_N を、 γ を crossing arc とする L の交点での N -generalized crossing change により L から得られる絡み目とする。一般性を失わず、 $L_N = L_{N,+}$ は、タングル $B = B_{0,+}$ を $B_{N,+}$ に入れ替える事により得られるとしてよい。同様に、 B を $B_{k,\pm}$ に入れ替える事で L から得られる絡み目を $L_{k,\pm}$ とする。

図より明らかに $B_{k,-}$ と $B_{k-1,+}$ は同値な有理タングルであるから, $L_{k,-} = L_{k-1,+}$ である. さらに, B を $B_{N,0}, B_{N-1,0}, \dots, B_{1,0}$ (これらは全て同値であり, B_0 と記述する) に入れ替える事で得られる絡み目を L_0 と書く.

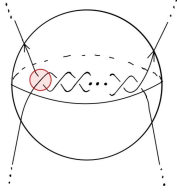


図9 $B_{k,+}$

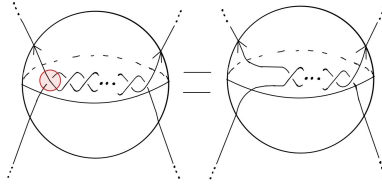


図10 $B_{k,-} = B_{k-1,+}$

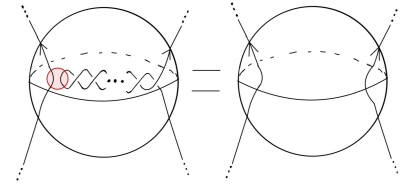


図11 $B_{k,0} = B_0$

アレキサンダー多項式 Δ について, スケイン関係式, および $\Delta_{L_{k,-}}(x) = \Delta_{L_{k-1,+}}(x)$ により,

$$\Delta_{L_{N,+}}(x) - \Delta_{L_{0,+}}(x) = N(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0}(x)$$

が従うが, L が N -cosmetic である事から, $L_N = L$ より $\Delta_{L_0}(x) = 0$, 特に, $\det L_0 = \Delta_{L_0}(-1) = 0$ より, $|H_1(\Sigma(L_0); \mathbb{Z})| = \infty$ であり, 計算により $|H_2(\Sigma(L_0); \mathbb{Z})| = \infty$ も従う. 特に, $H_2(\Sigma(L_0); \mathbb{Z})$ は自明でない.

B_0 の $\Sigma(L_0)$ への lift を $\widetilde{B}_0$ とし, M に $\widetilde{B}_0$ の中心線に沿って, $\partial \widetilde{B}_0$ 上のスロープ γ_0 によってデーンフィリングする事で $\Sigma(L_0)$ が得られる, 即ち $M(\gamma_0) \cong \Sigma(L_0)$ であるとする. $H_2(\Sigma(L_0); \mathbb{Z})$ の自明でない元を用いて, $\gamma_0 = \lambda_M$ であり, $D \cap \partial B$ が λ_M に lift する事を示せる. これより, ∂D が境界となる $S^3 - L$ 内のディスクが得られる. 以上より, D は nugatory.

特に, 2つの主結果の証明に共通して用いる命題として, 次が従う.

命題 18. S^3 内の結び目 K について, $\Sigma(K)$ は L 空間であるとする.

$N \neq 0$ を任意に 1 つ固定する. K の交点 c は N -cosmetic であるとする. このとき, c に付随する crossing arc γ について, $\tilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ で null-homologous であるとき, この c は nugatory である.

命題 18 の証明. 定理 14 と同様の記法を用いる. c での N -generalized crossing change により K から得られる結び目を K_N とすると, Montesinos trick より $\Sigma(K_N) = \Sigma(K)_{\tilde{\gamma}} \left(\frac{p}{q} \right)$ となるスロープ $\frac{p}{q}$ が存在し, $K_N = K$ より $|H_1(\Sigma(K_N))| \cong |H_1(\Sigma(K))| \oplus \mathbb{Z}/|p|\mathbb{Z} \cong |H_1(\Sigma(K))|$, よって $\Sigma(K_N)$ は, $\Sigma(K)$ 内の $\tilde{\gamma}$ に沿った $\pm \frac{1}{q}$ -デーン手術により得られる.

一方, $\Sigma(K_N) = \Sigma(K)$ は $\Sigma(K)$ 内の unknot に沿った $\pm \frac{1}{q}$ -デーン手術によっても得られる. 従って, 定理 14 により, $\tilde{\gamma}$ は $\Sigma(K)$ 内の unknot である.

よって, 補題 17 により, $\tilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ で null-homologous であるとき, c は nugatory である. □

3 主結果

3.1 1つ目の主結果; [LM17] の拡張

次は, [LM17] の主定理である.

定理 19 ([LM17, Theorem 1.2]). S^3 内の結び目 K について, $\Sigma(K)$ は L 空間であり, $H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ が square-free な, 平方因子をもたない成分の直和で表されるとする. 即ち,

$$H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

と直和分解したとき, 各 d_i は square-free であるとする. このとき, K は cosmetic crossing conjecture を満たす.

本稿の 1 つ目の主題として, 定理 19 の主張を generalized crossing change に拡張する事を考える.

S^3 内の結び目 K の交点 c が N -cosmetic であると仮定する. 即ち, c で N -generalized crossing change をして得られる結び目 K_N が K と同値であるとする. c に付随する crossing arc γ について, K に沿った S^3 の 2 重分岐被覆 $\Sigma(K)$ への γ の lift $\tilde{\gamma}$ は, $\Sigma(K)$ 内の結び目である. $M = \Sigma(K) - \text{int}(N(\tilde{\gamma}))$ とおく. $\Sigma(K)$ が L 空間ならば有理ホモロジー球面であるから, $H_1(\partial M)$ には rational longitude λ_M が一意にとれる. Montesinos trick より, スロープ $\alpha, \beta \in H_1(\partial M)$ を, $M(\alpha) \cong \Sigma(K)$, $M(\beta) \cong \Sigma(K_N)$ となるようにとる事ができ, さらに $\Delta(\alpha, \beta) = 2N$ が従う.

以下は、本稿の1つ目の主結果である。

定理 20. S^3 内の結び目 K について、 $\Sigma(K)$ は L 空間であり、 $H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ が square-free な、平方因子をもたない成分の直和で表されるとする。即ち、

$$H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$

と直和分解したとき、各 d_i は square-free であるとする。

$N \neq 0$ を任意に1つ固定する。 K の交点 c は N -cosmetic であるとする。このとき、次の (1), (2) がともに成立する事は、命題 18 の十分条件である。

(1) 包含写像 $i: \partial M \hookrightarrow M$ から誘導される準同型 $i_*: H_1(\partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z})$ について、

$$i_*(\lambda_M) = 0 \text{ in } H_1(M; \mathbb{Z})$$

(2) $M(\alpha) \cong \Sigma(K)$ なる ∂M 上のスロープ α を、 $\Delta(\alpha, \lambda_M) = 1$ を満たすようにとれる。

さらに、(1) に対する十分条件として、次の (3) が与えられる。

(3) $\det K$ が square-free、または、 $\det K$ の square 成分 ($\ell'^2 \mid \det K$ なる ℓ') と N は互いに素である

さらに、(2) に対する十分条件として、次の (4) が与えられる。

(4) $\det K$ と N は互いに素である

特に、 $\Sigma(K)$ が L 空間であり、 $H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ が square-free な成分の直和で表される S^3 内の結び目 K 、および、 $\det K$ と互いに素である N に対し、 K が N -cosmetic な交点をもつならば、その交点は nugatory である。

Remark 21. 一般の rational longitude が定義できる多様体 M に対し、(2) は自明な条件ではない。特に、有理ホモロジー球面内の結び目 K の外部空間 M に対し、 $\Delta(\mu_K, \lambda_M) = 1$ であるとは限らない。

定理 20 の証明の概略。(1),(2) がともに成立する事が命題 18 の十分条件である事は、(1),(2) をともに仮定したとき、 λ_M が境界となるような M 内の曲面と、 $N(\tilde{\gamma}) \subset M(\alpha)$ 内で、 $N(\tilde{\gamma})$ の中心線 $\tilde{\gamma}$ と λ_M を境界とするアニュラスの和をとる事で、 $\tilde{\gamma}$ を境界とする $\Sigma(K) = M(\alpha)$ 内の曲面が得られる事より従う。

(3) が (1) の十分条件である事、(4) が (2) の十分条件である事は、[LM17] と同様の技術的な計算から従う。なお、(3) が (1) の十分条件である事を示す議論において、 $H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ の各直和成分が square-free である事は本質的な仮定である。[LM17, Theorem 2.4] を参照せよ。

(4) は (3) の十分条件でもある事から特に、 $\det K$ と互いに素である N に対し、 K の N -cosmetic な交点は nugatory。□

3.2 2つ目の主結果；[Ito22] の拡張（Casson-Walker 不変量を用いたアプローチ）

[Ito22] においては、Casson-Walker 不変量を cosmetic crossing conjecture に応用する事で、次が示されている。

定理 22 ([Ito22, Theorem 1.9]). K を S^3 内の結び目とし、 $\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーモン手術で得られる L 空間であるとする。即ち、 $\Sigma(K)$ は L 空間であって、 $\Sigma(K) \cong K_y(\frac{p}{q})$ なる結び目 K_y 、スロープ $\frac{p}{q}$ が存在するとする。さらに、 $\det K = 9p'$ ($3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であるとする。このとき、 K は cosmetic crossing conjecture を満たす。

以下、上の結果の拡張として得られる2つ目の主結果、定理 23 について述べる。

定理 23. K を S^3 内の結び目とし、 $\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーモン手術で得られる L 空間であるとする。即ち、 $\Sigma(K)$ は L 空間であって、 $\Sigma(K) \cong K_y(\frac{p}{q})$ なる結び目 K_y 、スロープ $\frac{p}{q}$ が存在するとする。さらに、 $\det K = p$ と N について、次のいずれかが成り立つとする。

- ・ $p = 3p'$ ($3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であり、 p と N は互いに素、または $\gcd(p, N) = 3$, $9 \nmid N$
- ・ $p = 9p'$ ($3 \nmid p'$ かつ p' は square-free) であり、 p と N は互いに素、または $\gcd(p, N) = 3$

このとき、 K が N -cosmetic な交点をもつならば、その交点は nugatory である。

定理 23 は、次の定理 24 および命題 17 の直接の帰結であり、定理 24 は、[Ito22, Proposition 1.7] の議論と同様の計算により示されるが、証明は本稿では割愛する。

定理 24. S^3 内の結び目 K_y について、 $M = K_y(\frac{p}{q})$ が L 空間であり、 M 内の結び目 K は null-homologous でないとする。 K のスロープ s に対し、 $n = \Delta(s, \mu_K)$ とする。次のいずれかが成り立つとする。

- ・ $p = 3p'(3 \nmid p' \text{ かつ } p' \text{ は square-free})$ であり、 p と n は互いに素、または $\gcd(p, n) = 3$, $9 \nmid n$
- ・ $p = 9p'(3 \nmid p' \text{ かつ } p' \text{ は square-free})$ であり、 p と n は互いに素、または $\gcd(p, n) = 3$

このとき、 $M_K(s) \cong M$ とはならない。

定義 25. S^3 内の結び目 K_y に沿った $\frac{p}{q}$ -デーン手術をして得られる 3 次元多様体 $M = K_y(\frac{p}{q})$ と、 M 内の結び目 K に対し、 K を $E(K_y) \subset M$ 内に動かして、 $i: E(K_y) \hookrightarrow S^3 = K_y(\infty)$ による K の像となる、 S^3 内の結び目 K_x を、 K に対応する結び目と記述する。

$M = K_y(\frac{p}{q})$ 内の結び目 K に対し、 S^3 内の K に対応する結び目を K_x とする。 M から K に沿ったデーン手術で得られる多様体は、 S^3 内の絡み目 $K_x \cup K_y$ に沿ったデーン手術でも記述する事ができる。実際、 K のスロープ s によるデーン手術で得られる多様体 $M_K(s)$ について、 $M_K(s)$ は K_x のあるスロープ $\frac{m}{n}$ を用いて $M_K(s) = K_x \cup K_y(\frac{m}{n}, \frac{p}{q})$ と記述できる。(但し、 K のメリディアン μ_K に対し $n = \Delta(s, \mu_K)$ であり、 $m \in \mathbb{Z}$ は n と互いに素) よって特に $M_K(s)$ が有理ホモロジー球面であるとき、その Casson-Walker 不変量について、[Ito22, Proposition 1.5] を適用できる。 $M_K(s)$ と M の Casson-Walker 不変量を比較し、定理 24 を得る。

定理 23 の証明. K の N -cosmetic な交点に付随する crossing arc を γ , $\Sigma(K)$ への γ の lift を $\tilde{\gamma}$ とし、 $\Sigma(K)$ 内の結び目 $\tilde{\gamma}$ に対応する S^3 内の結び目を K_x とする。また、 $M = \Sigma(K) - \text{int}(N(\tilde{\gamma}))$ とする。

Montesinos trick より、 $\Delta(s, \mu_{\tilde{\gamma}}) = 2N$ となる $\tilde{\gamma}$ のスロープ s が存在し、 $\Sigma(K) \cong M(\mu_{\tilde{\gamma}}) \cong M(s)$ が成立する。また、 $M(s) \cong K_x \cup K_y(\frac{m}{2N}, \frac{p}{q})$ なる K_x のスロープ $\frac{m}{2N}$ が存在する。

このとき、 $\tilde{\gamma}$ が $\Sigma(K)$ において null-homologous ならば、 $\Sigma(K)$ が L 空間である事から、命題 18 より crossing は nugatory.

$\tilde{\gamma}$ が null-homologous でないならば、定理 24 より $M(s) \cong \Sigma(K)$ とはなりえない。以上により示された。□

4 Generalized cosmetic crossing conjecture を満たす具体的な結び目の例

上記の主結果はいずれも、特定のタイプの結び目が generalized cosmetic crossing conjecture を満たす、といった事を主張できている訳ではない。(N に、 $\det K$ と互いに素、または最大公約数が 3、などの制約がついており、一般の N について N -cosmetic なら nugatory が示している訳ではないため。) 特に 1 つ目の主結果に関連して、次は重要な検討課題である。

検討課題 26. K は $\Sigma(K)$ が L 空間であり、 $H_1(\Sigma(K); \mathbb{Z})$ が square-free な成分の直和で表される S^3 内の結び目とする。 N が必ずしも $\det K$ と互いに素でないとき、 K の N -cosmetic な交点は自明であるか。即ち、定理 19 は何の制約もなく、generalized cosmetic crossing conjecture に拡張できるか。

この検討課題に関連して、[Bon24] においては K に [LM17] より少し強い制約をつけた状態での generalized cosmetic crossing conjecture の成立が示されている。

定理 27 ([Bon24, Theorem 1.2]). S^3 内の結び目 K について、 $\Sigma(K)$ は L 空間であり、 K が nugatory でない N -cosmetic な交点をもつとき、 K のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は

$$f(t)f(t^{-1})$$

(f は $f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, $f(-1) \neq \pm 1$ を満たす) という形の因子をもつ。

特に、 $\Sigma(K)$ が L 空間であり $\det K$ が square-free であるとき、 K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

上述の検討課題は、この定理 27 が、必ずしも $\det K$ が square-free とは限らないが、 $H_1(\Sigma(K))$ の直和成分は square-free になるような場合にも成り立つか、と言い換える事もできる。

最後に、2つの主結果の系として、特に2重分岐被覆がスモールザイフェルト多様体というある種の多様体になるようないくつかの具体的な結び目が、generalized cosmetic crossing conjecture を満たす事を紹介する。定理 28, 定理 29 で言及している具体的な結び目について、いずれも $\det$ が square-free でない事は、特に [Bon24] の結果との比較という観点においては注目すべき事項であると考える。

3次元多様体内の結び目が双曲である、とは、外部空間の内部に有限体積の完備双曲構造が入る事をいう。2重分岐被覆がスモールザイフェルト多様体になる結び目 K について、Montesinos trick と [Mat10, Theorem 1.3] および例外手術（双曲結び目に沿った、完備双曲でない多様体を得る手術）に関する定理 ([LM13, Theorem 1.2]) より、 K が N -cosmetic な、crossing arc の lift が unknot でないような交点を持つならば、 $2N \leq 8$ である事が N の制約として得られる。

Montesinos 絡み目 $M(\frac{q_1}{p_1}, \dots, \frac{q_n}{p_n})$ は、図 12 で示したように有理タングル $R(\frac{q_1}{p_1}), \dots, R(\frac{q_n}{p_n})$ を並べ、繋げる事により得られる絡み目であるとする。Montesinos 結び目 $K = M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})$ に沿った S^3 の2重分岐被覆 $\Sigma(K)$ は、 $|H_1(\Sigma(K))| = \det K < \infty$ よりスモールザイフェルト多様体になる。

以上の事実と、本稿の主結果である定理 20, 定理 23 を組み合わせる事で、それぞれ次の定理 28, 定理 29 を得る。

定理 28. $K = M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3}) (|p_1|, |p_2|, |p_3| \geq 2)$ を S^3 内の Montesinos 結び目とし、 $\Sigma(K)$ は L 空間であるとする。さらに、 $\det K = |p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3|$ は3と互いに素であり、 $\gcd(p_1, p_2, p_3), \frac{\det K}{\gcd(p_1, p_2, p_3)}$ はともに square-free であるとする。このとき、 K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

特に、 p を5以上の3と互いに素、かつ square-free な奇数とし、正の偶数 a , 正の奇数 b, c は、

$$\begin{aligned} & \cdot a > \min(b, c) \\ & \cdot ab + ac - bc \text{ は } 3 \text{ および } p \text{ と互いに素、かつ square-free} \end{aligned}$$

を満たすとする。このとき、プレッツェル結び目 $P(-ap, bp, cp) = M(\frac{-1}{ap}, \frac{1}{bp}, \frac{1}{cp})$ は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

また、 K_n を次の図 13 で示される、2つの結び目 5_2 の symmetric union であるとする。 $14 \mid n, n \neq 0$ のとき、 K_n は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

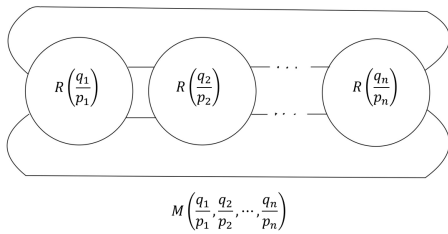


図 12 Montesinos 絡み目 $M(\frac{q_1}{p_1}, \dots, \frac{q_n}{p_n})$

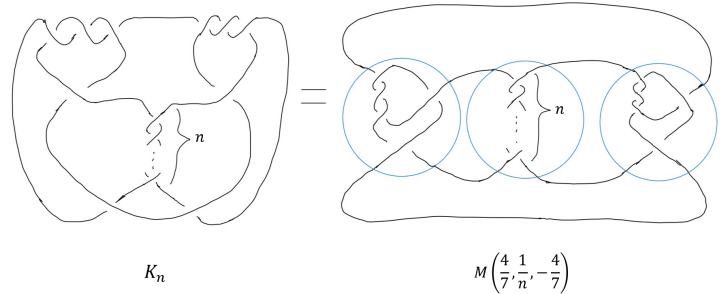


図 13 図に示した K_n は、 $14 \mid n, n \neq 0$ のとき generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

定理 29. K を S^3 内の結び目とし、 $\Sigma(K)$ は S^3 内のある結び目 K_y に沿ったデーネ手術で得られる L 空間であるとする。さらに、 $\det K = 9p'(3 \nmid p' \text{ かつ } p' \text{ は square-free})$ であり、 K は Montesinos 結び目であり $M(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3}) (|p_1|, |p_2|, |p_3| \geq 2)$ という表示をもつとする。このとき、 K は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

特に、結び目 $10_{65}, 10_{67}, 10_{77}$ は generalized cosmetic crossing conjecture を満たす。

なお、[LM17, Example 4.3] では、定理 28 とは異なる形で記述される、($\det$ 自体が square-free になる) ある種のプレッツェル結び目が cosmetic crossing conjecture を満たす事が紹介されている。また、 $14 \mid n, n \neq 0$ のとき K_n は cosmetic crossing conjecture を満たす事が [Moo16] にて示され、[LM17, Example 4.5] でも紹介されている。

さらに、[Ito22, Corollary 1.11] では、定理 22 を用いて $10_{65}, 10_{67}, 10_{77}, 10_{108}, 10_{164}$ が cosmetic crossing conjecture を満たす事が示されているが、 $10_{108}, 10_{164}$ は Montesinos 結び目としての表示をもたないため、定理 29 から直ちに generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかは不明である。

[LM17] においては交点数が少ない結び目に対し、cosmetic crossing conjecture を満たすかについてのテーブルが作られている。本稿においては generalized cosmetic crossing conjecture を満たすかについて、交点数が少ない結び目に対し網羅

的に調べ、同様のテーブルを作る事はかなわなかった。こちらについても今後の検討課題といえる。

5 謝辞

本研究集会「結び目の数理 VII」において発表の機会を与えてくださった、世話人である早稲田大学の谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司先生、丹下稜斗先生に心より感謝申し上げます。また、私の修士課程の研究における軸であるデー手術に関するテキスト [Mot22] の著者であり、本研究集会でお会いした際にも温かいコメントをいただいた日本大学の茂手木公彦先生、および、私の拙い発表に対し、セッションの座長を務められており、示唆に富むご質問をいただいた日本大学の市原一裕先生をはじめ、発表を聞いていただいた皆様に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [Bon23] J. Boninger, On the cosmetic crossing conjecture for special alternating links, *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B* **10** (2023), 288–295; MR4631993
- [Bon24] J. Boninger, (2024). An Alexander Polynomial Obstruction to Cosmetic Crossing Changes. arXiv preprint arXiv:2407.12763.
- [Gai18] F. Gainullin, Heegaard Floer homology and knots determined by their complements, *Algebr. Geom. Topol.* **18** (2018), no. 1, 69–109; MR3748239
- [Ito22] T. Ito, Applications of the Casson-Walker invariant to the knot complement and the cosmetic crossing conjectures, *Geom. Dedicata* **216** (2022), no. 6, Paper No. 63, 15 pp.; MR4475472
- [Kir78] R. C. Kirby, Problems in low dimensional manifold theory, in *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2*, pp. 273–312, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978; MR0520548
- [Lic97] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, 175, Springer, New York, 1997; MR1472978
- [LM13] M. Lackenby and G. R. Meyerhoff, The maximal number of exceptional Dehn surgeries, *Invent. Math.* **191** (2013), no. 2, 341–382; MR3010379
- [LM17] T. Lidman and A. H. Moore, Cosmetic surgery in L-spaces and nugatory crossings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), no. 5, 3639–3654; MR3605982
- [Mat10] D. Matignon, On the knot complement problem for non-hyperbolic knots, *Topology Appl.* **157** (2010), no. 12, 1900–1925; MR2646423
- [MO08] C. Manolescu and P. Ozsváth, On the Khovanov and knot Floer homologies of quasi-alternating links, in *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2007*, 60–81, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2008; MR2509750
- [Mon75] J. M. Montesinos-Amilibia, Surgery on links and double branched covers of S^3 , in *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, pp. 227–259, Ann. of Math. Stud., No. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, ; MR0380802
- [Moo16] A. H. Moore, Symmetric unions without cosmetic crossing changes, in *Advances in the mathematical sciences*, 103–116, Assoc. Women Math. Ser., 6, Springer, ; MR3654492
- [Mot22] 茂手木公彦『デー手術』, 共立出版 (2022)
- [MY81] W. H. Meeks III and S.-T. Yau, The equivariant Dehn’s lemma and loop theorem, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), no. 2, 225–239; MR0630952
- [OS05] P. Ozsváth and Z. Szabó, On the Heegaard Floer homology of branched double-covers, *Adv. Math.* **194** (2005), no. 1, 1–33; MR2141852
- [Wal90] K. Walker, An extension of Casson’s invariant to rational homology spheres, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **22** (1990), no. 2, 261–267; MR1016040
- [Wat12] L. Watson, Surgery obstructions from Khovanov homology, *Selecta Math. (N.S.)* **18** (2012), no. 2, 417–472; MR2927239