

向き付け不可能曲面の fine curve graph の Gromov 双曲性

久野 恵理香 (大阪大学)*

1. 導入と主結果

本稿では、 $N = N_{g,p}$ と $S = S_{g,p}$ で、種数 g , パンクチャー $p \geq 0$ 個付きの向き付け不可能曲面と向き付け可能曲面をそれぞれ表すとする。また、 F を N または S とする。Bowden–Hensel–Webb [1] が、以下で説明するファイン曲線グラフを導入した。

定義 1.1. 曲面 F の **ファイン曲線グラフ** $\mathcal{C}^\dagger(F)$ とは、 F 上の本質的な単純閉曲線を頂点とし、2つの頂点はそれらに対応する2つの単純閉曲線が F 上で交わらないときに辺で結ばれる、と定めることによってできるグラフのことである (図 1)。ここで、曲面 F 上の単純閉曲線 c が **本質的** であるとは、 c は非分離的であるか、もしくは c は分離的であり F 上の円板もメビウスの帯も囲まないことである。

定義 1.2. (X, d) を距離空間とする。 X の3点 x, y, w に対して、**グロモフ積** を

$$\langle x, y \rangle_w := \frac{1}{2}(d(w, x) + d(w, y) - d(x, y)).$$

で定める。 X が δ -**双曲的** である ($\delta \geq 0$) とは、すべての $w, x, y, z \in X$ に対して、次の式が満たされることである:

$$\langle x, z \rangle_w \geq \min\{\langle x, y \rangle_w, \langle y, z \rangle_w\} - \delta.$$

さらに、 X が **Gromov 双曲的** であるとは、ある $\delta \geq 0$ が存在して、 X が δ -双曲的であることである。

本稿において、グラフの各辺に長さ 1 を与えることによって、グラフを距離空間と見なす。Bowden–Hensel–Webb [1] は、Rasmussen [3] の結果「ある $\delta \geq 0$ が存在して、任意の有限型向き付け可能曲面 S の非分離曲線グラフ $\mathcal{NC}(S)$ (曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ のフル部分グラフであって、 S 上の非分離曲線で代表される頂点のみからなるもの) は δ -双曲的である (これを一様双曲的であると呼ぶ)」を応用して、向き付け可能閉曲面 $S = S_g$ ($g \geq 1$) に対して、そのファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(S)$ が一様双曲的であることを証明した。講演者たちは、Bowden–Hensel–Webb の議論をもとに以下を証明した。

定理 1.3. ある $\delta \geq 0$ が存在して、種数 $g \geq 2$ の任意の向き付け不可能閉曲面 $N = N_g$ に対して、そのファイン曲線グラフ $\mathcal{C}^\dagger(N)$ は δ -双曲的である。但し、 $g = 2$ の場合に、 $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の辺の定義は次のように改変している: $\mathcal{C}^\dagger(N)$ の2つの頂点に対応する単純閉曲線が N 上で高々1回交わるとき、それら2頂点を辺で結ぶ。

本研究は、木村満晃氏 (大阪歯科大学) との共同研究である。

* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: e-kuno@math.sci.osaka-u.ac.jp

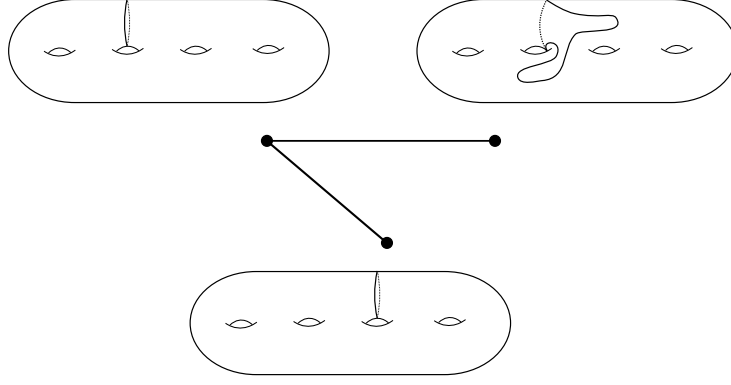


図 1: ファイン曲線グラフの例.

2. 証明の準備

本稿では、種数 $g \geq 3$ の向き付け不可能曲面 $N = N_{g,p}$ について議論する.

定義 2.1. (cf. [1]) 曲面 F の生存曲線グラフ $\mathcal{C}^s(F)$ とは、通常曲線グラフ $\mathcal{C}(F)$ のフル部分グラフであって、 F 上のパンクチャーをすべて埋めてもなお本質的なままである曲線のアイソトピー類全体からなるものである.

さらに、向き付け不可能曲面 N に対して以下のような曲線グラフを定める. **双側曲線グラフ** $\mathcal{C}_{\text{two}}(N)$ とは、通常曲線グラフ (各頂点が本質的単純閉曲線のアイソトピー類であるもの) のフル部分グラフで双側曲線のアイソトピー類全体から構成されるものである. **拡大曲線グラフ** $\mathcal{C}^\pm(N)$ とは、本質的な単純閉曲線とメビウスの帯を囲む単純閉曲線のアイソトピー類全体を頂点集合に対応させた曲線グラフである. 同一の記法を、 $\mathcal{C}^s(N)$ と $\mathcal{C}^\dagger(N)$ に対しても使う. 更に、これら2つの記法を同時に使用することもある.

定義 2.2. (X, d) と (X', d') を2つの距離空間とする. φ を X から X' への写像とする. 写像 φ が**擬等長埋め込み**であるとは、定数 $\lambda \geq 1$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して以下の不等式が成り立つことである:

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - \lambda \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d(x, y) + \lambda.$$

写像 φ が **quasi-dense** であるとは、定数 $\lambda' \geq 0$ が存在して任意の点 $y \in X'$ に対して $x \in X$ で $d(\varphi(x), y) \leq \lambda'$ を満たすものが存在する. 本稿では、上記定数 λ, λ' を**擬等長定数**と呼ぶ. さらに、写像 φ が**擬等長写像**であるとは、 φ が擬等長埋め込みかつ quasi-dense であることである. このとき X と X' は**擬等長的である**という.

本稿では、2つの距離空間 X と Y が擬等長的であることを、 $X \sim_{\text{q.i.}} Y$ で表すこととする. 以下の2つの補題が成り立つ.

補題 2.3. $N = N_{g,p}$ を種数 $g \geq 3$ で $p \geq 0$ 個のパンクチャーの付いた向き付け不可能曲面とする. このとき、 $\mathcal{C}^s(N)$, $\mathcal{C}^{\pm s}(N)$, と $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm s}(N)$ らは各々弧状連結で、さらに互いに擬等長的である:

$$\mathcal{NC}(N) \underset{\text{q.i.}}{\sim} \mathcal{C}^s(N) \underset{\text{q.i.}}{\sim} \mathcal{C}^{\pm s}(N) \underset{\text{q.i.}}{\sim} \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm s}(N).$$

さらに、各擬等長写像の擬等長定数は曲面の位相型に依存しないものを選ぶ.

補題 2.4. $N = N_{g,p}$ を種数 $g \geq 3$ で $p \geq 0$ 個のパンクチャーの付いた向き付け不可能曲面とする. このとき, $\mathcal{C}^\dagger(N)$, $\mathcal{C}^{\pm\dagger}(N)$, と $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ らは各々弧状連結で, さらに互いに擬等長的である:

$$\mathcal{C}^\dagger(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}^{\pm\dagger}(N) \underset{q.i.}{\sim} \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N).$$

さらに, 各擬等長写像の擬等長定数は曲面の位相型に依存しないものを選ぶ.

講演者 [2] により, ある $\delta \geq 0$ が存在して, 種数 $g \geq 1$ 以上の任意の有限型向き付け不可能曲面の非分離曲線グラフ $\mathcal{NC}(N)$ は δ -双曲的であることがわかっている. 補題 2.3 と合わせて以下の系を得る:

系 2.5. ある $\delta' \geq 0$ が存在して, 任意の有限型向き付け不可能曲面 $N = N_{g,p}$ に対して, $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm s}(N)$ は δ' -双曲的である.

3. 主結果の証明のアイディア

この節では定理 1.3 の証明方法について解説する. 補題 2.4 より $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ の一様双曲性を証明すれば十分である.

補題 3.1. (cf. [1, Lemma 3.4]) $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ の頂点 a と b が横断的に交わり, かつ $N - P$ において最小の位置にあるとする, ただし, $P \subset N$ は有限集合で a と b と交わらないとする. このとき以下が成り立つ. ここで, 2つの曲線 a'' と b が最小の位置にあるとは, a' と b' の幾何学的交点数が, a' と b' のアイソトピー類の中で最小であることである.

$$d_{\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm s}(N-P)}([a]_{N-P}, [b]_{N-P}) = d_{\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)}(a, b).$$

ただし, $[a]_{N-P}$ で曲線 a の $N - P$ におけるアイソトピー類を表すとする.

ここから, 定理 1.3 の証明のアイディアを説明する. ただし, 向き付け不可能閉曲面 $N = N_g$ の種数 g は $g \geq 3$ とする.

定理 1.3 の証明のアイディア (ただし, 種数 g は $g \geq 3$ とする.). $N = N_g$ ($g \geq 3$) とする. すべての $u, a, b, c \in \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ に対して,

$$\langle a, c \rangle_u \geq \min\{\langle a, b \rangle_u, \langle b, c \rangle_u\} - \delta' - 4, \quad (3.1)$$

を示していく. ただし δ' は系 2.5 における双曲性定数 (曲面の位相型に依らない定数であることに注意する) である.

頂点 $u, a, b, c \in \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ を,

(i) $d_{\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)}(a, a') \leq 1$, $d_{\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)}(b, b') \leq 1$, かつ $d_{\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)}(c, c') \leq 1$ を満たし,

(ii) 頂点 u', a', b', c' は各々横断的に交わる.

を満たす頂点 $u', a', b', c' \in \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm s}(N - P)$ に以下のように対応させる. ただし, u' に関しては $u' = u$ としている.

任意の頂点の組 $d, e \in \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ ($d, e \in \{a, b, c\}$) に対して, 以下のようにして d, e とそれぞれアイソトピックな 2 頂点 d', e' を構成することを考える. 任意の 2 頂点 $d, e \in \mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ に対して, d', e' をそれぞれ, d, e と交わらない $\mathcal{C}_{\text{two}}^{\pm\dagger}(N)$ の頂点であって, 交わりがすべて横断的になるように d と e をそれぞれアイソトピーで変形したものとす

る (d', e' がそれぞれ d, e と交わらないようにアイソトピーで変形する際に d, e の双側性が必要となる)。

さらに, 有限集合 $P \subset N$ で, 曲線 u', a', b', c' が形成する任意のバイゴンが P の点を含むようなものを選ぶ. すると bigon criterion により, u', a', b', c' は互いに $N - P$ において最小の位置にあることがわかる. すると, u', a', b', c' は補題 3.1 の仮定をみたす.

補題 3.1 により, 任意の組 $d, e \in \{a, b, c\}$ に対して

$$d_{C_{\text{two}}^{\pm\pm}(N)}(d', e') = d_{C_{\text{two}}^{\pm\pm}(N-P)}([d']_{N-P}, [e']_{N-P}) \quad (3.2)$$

が成り立つ. また

$$|\langle d', e' \rangle_{u'} - \langle d, e \rangle_u| \leq 2 \quad (3.3)$$

がわかる.

そして, 式 (3.2) と式 (3.3) と系 2.5 から目標の式 (3.1) を得ることができる. $\square$

謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」における講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心から感謝申し上げます. 著者は木下記念事業団自然科学系基礎的分野研究助成, 科研費 (課題番号: 21K13791), JST, ACT-X 研究費 (課題番号: JPMJAX200D) の助成を受けました. 共同研究者の木村満晃氏は科研費 (課題番号: JP20H00114, JP24K16921), JST 未来 (課題番号: JPMJMI22G1) の助成を受けました.

参考文献

- [1] J. Bowden, S. Hensel, and R. Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, J. Amer. Math. Soc. **35** (2022), 211–231.
- [2] E. Kuno, Uniform hyperbolicity of nonseparating curve graphs of nonorientable surfaces, arXiv:2108.08452 [math.GT].
- [3] A. Rasmussen, *Uniform hyperbolicity of the graphs of nonseparating curves via bicorn curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 6, 2345–2357.