A presentation of the pure cactus group of degree four

浜　天星（日本大学大学院 総合基礎科学研究科）

1　Introduction

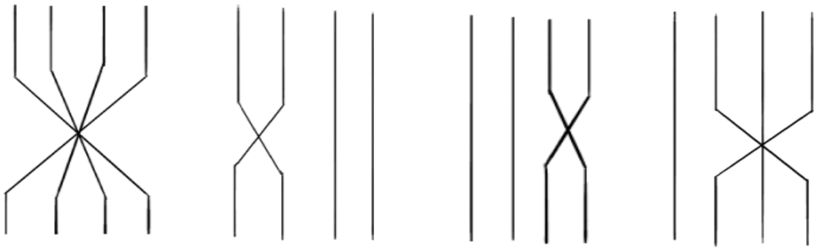
ブレイド群がブレイド圏の多重テンソル積に自然に作用する事が知られている。ブレイド圏に対応するコバウンダリー圏にブレイド群のアナロジーとして作用する群として、カクタス群と呼ばれる群が Henriques と Kamnitzer により [4] で導入された。

まず、n 次カクタス群を定義する。n を 2 以上の整数とする。また、$p < q$ を 2 以上 n 以下の整数とする。このとき、n **次カクタス群** J_n は生成元 s_{pq} と以下の関係式で定義される。

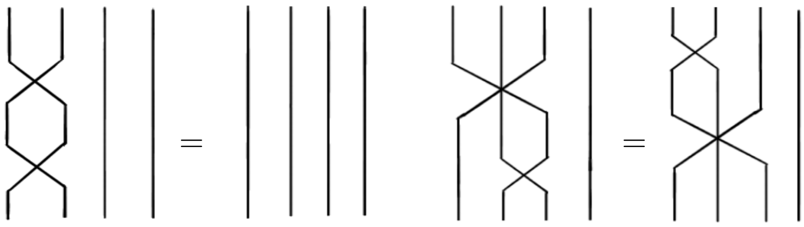
- $s_{p,q}^2 = 1$ $(1 \leq p < q \leq n)$
- $s_{p,q}s_{m,r} = s_{m,r}s_{p,q}$ ($1 \leq p < q \leq n$、$1 \leq m < r \leq n$ として $[p,q] \cap [m,r] = \varnothing$)
- $s_{p,q}s_{m,r} = s_{p+q-r,p+q-m}s_{p,q}$ ($1 \leq p < q \leq n$、$1 \leq m < r \leq n$ として $[m,r] \subset [p,q]$)

ここで、$[p,q]$ は離散的な閉区間を表す。

また、ブレイド群と同様に、カクタス群のジェネレーターは以下のように図式に表せる。図は 4 次のカクタス群の場合である。積は、右から掛けた場合は掛けた元に対応する図式を元の図式の下に繋げる事で表される。



s_{14} s_{12} s_{34} s_{24}



s_{12}^2 e $s_{13}s_{23}$ $s_{12}s_{13}$

ブレイド群と同様にカクタス群 J_n から n 次対称群 S_n に対して自然な全射が定義できる。自然な全射のカーネルとして n 次純カクタス群 PJ_n を定義する。

注意 1.1. ブレイド群と異なる点は、例えば s_{14} は $(14)(23)$ に対応する事である。すなわち、インターバル内のストランド全てを入れ替える元に対応させるような全射が与えられる。

PJ_n は実数上の種数 0 の $n+1$ 点付き代数曲線のモジュライ空間の Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$ の基本群と同型である事が知られている ([4, Theorem 7])。

特に PJ_4 と $\pi_1\left(\overline{M_{0,5}}(\mathbb{R})\right)$ が同型であり、さらに、$\overline{M_{0,5}}(\mathbb{R})$ と実射影平面 5 つの連結和が同相である（[2] を参照）事から、PJ_4 は以下の表示を持つことが分かる。尚、以下の表示と PJ_4 の間に具体的な同型対応は、筆者の知る限り与えられていなかった。

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2 \rangle$$

ただし、[1] で、Reidemeister-Schreier method を用いることにより、PJ_4 が以下の表示を持つことは示されていた。

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon | \alpha\gamma\epsilon\beta\epsilon\alpha^{-1}\delta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} \rangle$$

本研究は日本大学文理学部の市原一裕氏との共同研究である。

2 Main Results

本稿の主結果は以下である。

定理 2.1. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 g_{10}^{-1} g_2^{-1}, g_9 g_5^{-1} g_4, g_5 g_1 g_6^{-1}, \\ g_8 g_{10} g_7^{-1}, g_8 g_3^{-1} g_4, \\ g_2 g_9 g_7^{-1} g_6 g_3^{-1} \end{array} \right\rangle$$

さらに、この表示は次の表示に変換できる。

$$\langle g_2, g_4, g_8, g_9, g_{10} \mid g_2 g_9 g_{10}^{-1} g_8^{-1} g_4 g_9 g_2 g_{10} g_8^{-1} g_4^{-1} \rangle$$

上の表示から具体的な同型対応を与えることで、次の系を得た。

系 2.2. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \alpha_5^2 \rangle$$

また、PJ_4 が [1] で得られていた次の表示を持つことも再確認した。

系 2.3. PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon | \alpha\gamma\epsilon\beta\epsilon\alpha^{-1}\delta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} \rangle$$

本稿では、定理 2.1 と、系 2.2 の証明の概要を紹介する。

3 Sketch of proof

証明の概要に先立ち、主だって使用する定理と、証明に使う J_4 のある部分群を紹介する。

定理 3.1 (Poincaré の多角形定理 [7] (c.f. [6]))**.** D を双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上の、角度に関するある条件を満たす辺の張り合わせ付きの多角形とする。また、G を辺の張り合わせが生成する群とする。このとき、以下が成り立つ。

- G は不連続群である。
- D の内部は G が引き起こす $\mathbb{H}^2$ 上の作用の基本領域である。また、サイクルリレーションと呼ばれる G の生成元の列たちは G の全ての関係式を与える。

次に、J_4 の部分群 $J_4^{\{2,3\}}$ を以下で定義する。

$$J_4^{\{2,3\}} = \left\langle s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{13}, s_{24} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_{ij}^2 = e, s_{13}s_{12} = s_{23}s_{13}, \\ s_{24}s_{23} = s_{34}s_{24}, \\ s_{12}s_{34} = s_{34}s_{12} \end{array} \right\rangle$$

さらに、$J_4^{\{2,3\}}$ の Cayley 複体を $C_4^{\{2,3\}}$ と表記する。(Cayley 複体については [5] を参照。) $C_4^{\{2,3\}}$ は図 1 のような空間である。

注意 3.2. $C_4^{2,3}$ は $\mathbb{H}^2$ と定数倍を許して等長である。この事実から、*Poincaré* の多角形定理を $C_4^{\{2,3\}}$ 上で適用する事ができる。

また、次の定理は、明示的ではないが [3] で示されている。

命題 3.3 ([3, Proof of Corollary 7.3])**.** 下記の写像 Γ_0 から誘導される写像 Γ は PJ_4 の ${C_4}^{\{2,3\}}$ 上への作用を引き起こす。

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : PJ_4 \times \left({C_4}^{\{2,3\}}\right)^{(0)} &\longrightarrow \left({C_4}^{\{2,3\}}\right)^{(0)} \\ (g,h) &\longmapsto \begin{cases} gh & gh \in J_4^{\{2,3\}} \\ ghs_{14} & gh \notin J_4^{\{2,3\}}, \end{cases} \end{aligned}$$

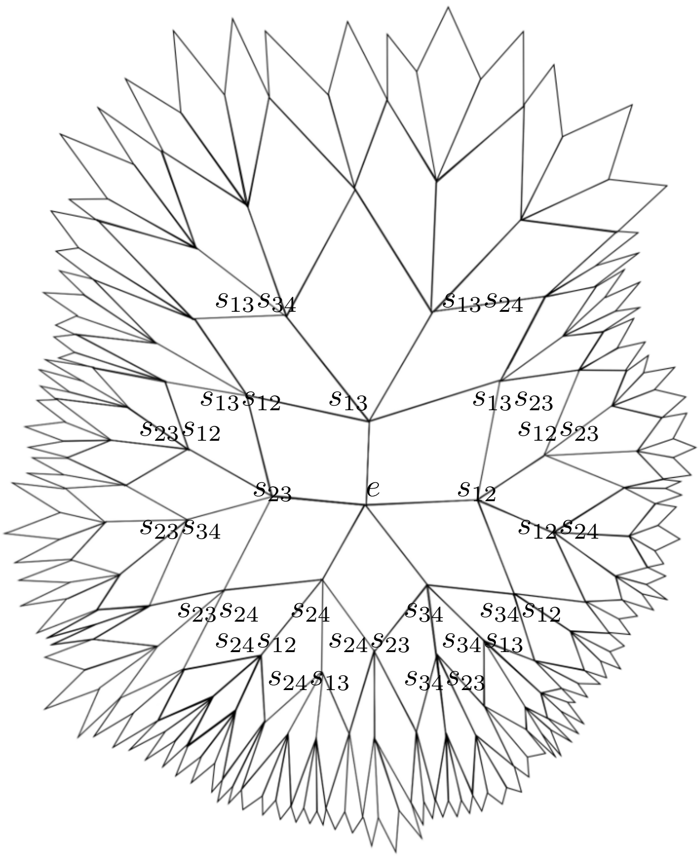
また、この作用は自由かつココンパクトである。

以上の準備のもと、定理 2.1 の証明の概略を与える。

Sketch of proof 定理 *2.1.* まず、Poincaré の多角形定理を適用するための多角形 D を取り出す。命題 3.3 で与えた作用に対して、$J_4^{\{2,3\}}$ の単位元 e の軌道のうち、e からの距離が最短である頂点をすべて書き出す。書き出した頂点と原点の等距離線を引く。その等距離線によって定まる、 e を含む半空間の共通部分が D となる。図 2 を参照。

またこの時、図 3 のように、辺の張り合わせを引き起こす PJ_4 の生成元も与えられる。図 3 は e を $s_{13}s_{24}s_{13}s_{24}$ へ移す生成元 g_2 の引き起こす辺の張り合わせである。同様に他の生成元と辺の張り合わせも与えられる。合計 20 本の辺に対し、10 個の生成元 g_1, $\ldots$, g_{10} を得る。

サイクルリレーションは、頂点を一つ選び、その頂点を含む辺の張り合わせを追っていくことで得られる。図 4 では $s_{13}s_{34}$ の場合を考えている。これにより、6 個のサイクル



$$
\begin{aligned}
&s_{ij}^2 = e\\
&s_{13}s_{12} = s_{23}s_{13}\\
&s_{24}s_{23} = s_{34}s_{24}\\
&s_{12}s_{34} = s_{34}s_{12}
\end{aligned}
$$

図 1　$C_4^{\{2,3\}}$

リレーション $g_3g_8^{-1}g_4^{-1}$、$g_5g_9^{-1}g_4^{-1}$、$g_5g_1g_6^{-1}$、$g_8g_{10}g_7^{-1}$、$g_{10}g_1^{-1}g_2$、$g_3g_6^{-1}g_7g_9^{-1}g_2^{-1}$ を得る。

よって、PJ_4 は以下の表示を持つ。

$$
\left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1g_{10}^{-1}g_2^{-1}, g_9g_5^{-1}g_4, g_5g_1g_6^{-1}, \\ g_8g_{10}g_7^{-1}, g_8g_3^{-1}g_4, \\ g_2g_9g_7^{-1}g_6g_3^{-1} \end{array} \right\rangle
$$

□

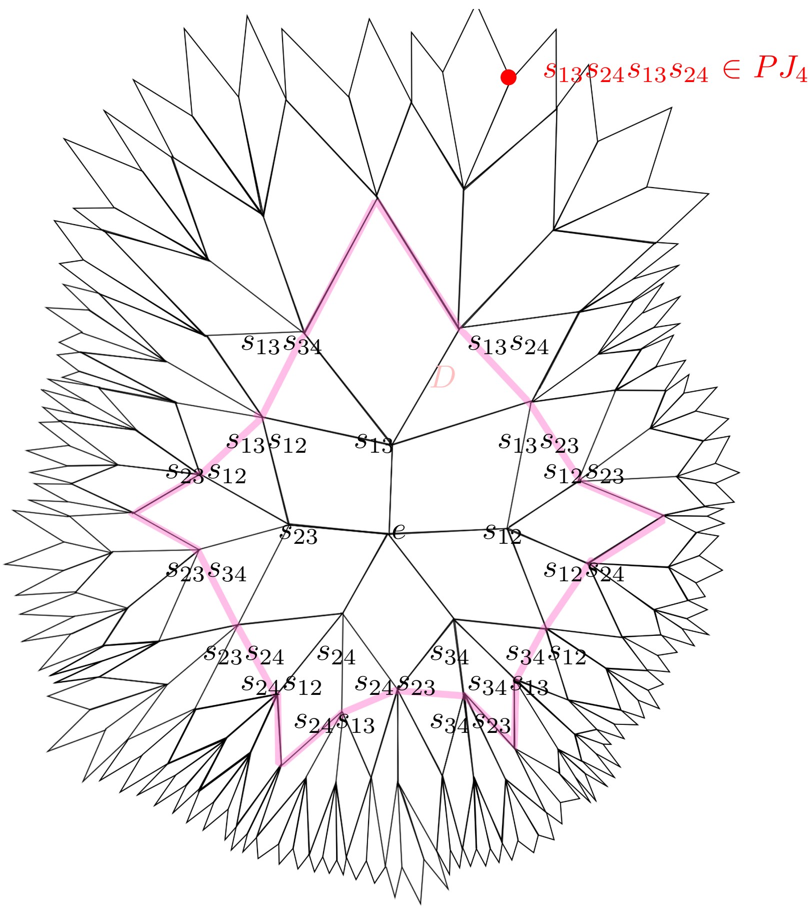


図 2　D

次に、系 2.2 の証明の概要を記す。系 2.2 は以下の同型対応を与える事で証明した。

$$f : \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 | \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2 \rangle$$

$$\longrightarrow \left\langle g_1, \cdots, g_{10} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 g_{10}^{-1} g_2^{-1}, g_9 g_5^{-1} g_4, g_5 g_1 g_6^{-1}, \\ g_8 g_{10} g_7^{-1}, g_8 g_3^{-1} g_4, \\ g_2 g_9 g_7^{-1} g_6 g_3^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$$\alpha_1 \longmapsto g_1^{-1} = g_{10}^{-1} g_2^{-1}$$

$$\alpha_2 \longmapsto g_2 g_{10} g_5^{-1} g_8 g_3^{-1} = g_2 g_{10} g_9^{-1} g_4^{-2}$$

$$\alpha_3 \longmapsto g_4$$

$$\alpha_4 \longmapsto g_9 g_{10}^{-1}$$

$$\alpha_5 \longmapsto g_8^{-1} g_6 = g_8^{-1} g_4 g_9 g_2 g_{10}$$

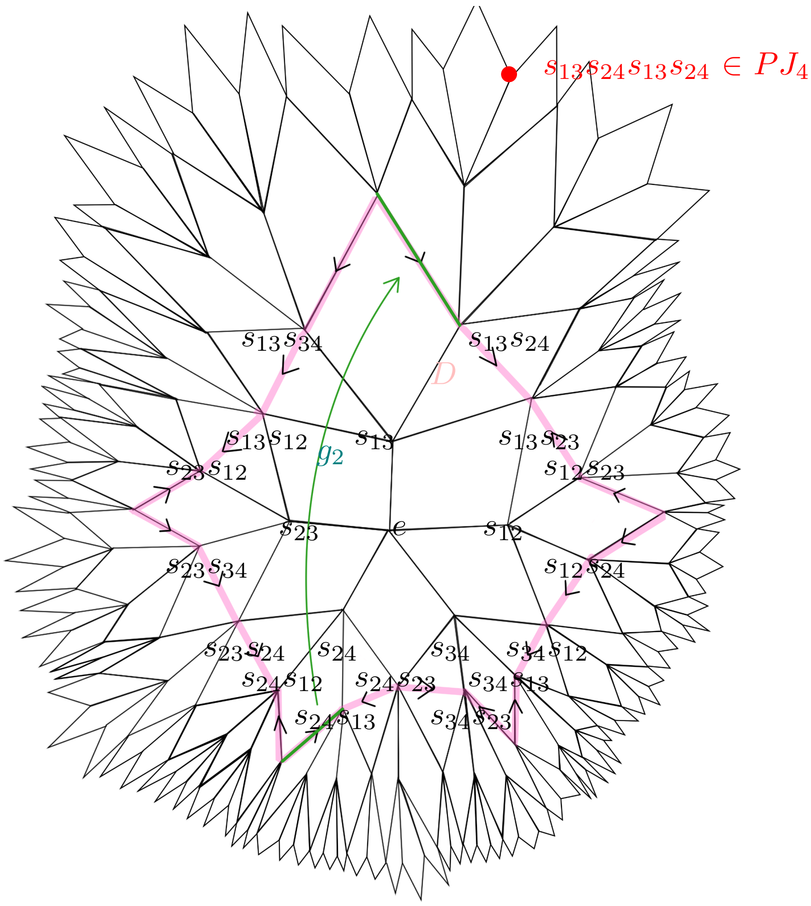


図 3

この同型対応は、PJ_4 による作用に従って張り合わせを調べる事で得られた。具体的には、図 5 のように、D から 5 つのメビウスの帯を切り取り、余った部分を張り合わせる。図 6 の左はメビウスの帯 5 つに囲まれていた中心部分の領域であり、右が残りの部分を張り合わせたものである。これらを張り合わせる様子が図 7 である。各点線部分にメビウスの帯を接着すれば $\mathbb{RP}^2$ 5 つの連結和と同相な $C_4^{\{2,3\}}/PJ_4$ となる。そこで、基本群の生成元として、$C_4^{\{2,3\}}/PJ_4$ 上の閉曲線を取る。これに対し閉曲線が通る辺の張り合わせを追っていく事で同型対応を与えた。図 7 は α_2 の場合である。

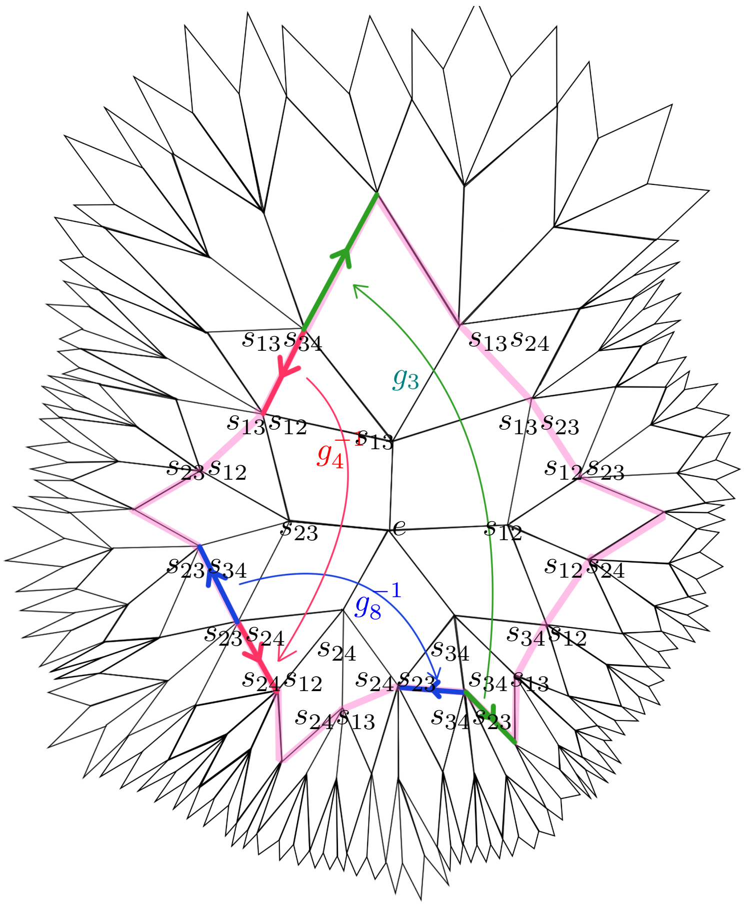


図 4　サイクルリレーション

4　謝辞

研究集会「結び目の数理 VII」での講演の機会をくださった谷山公規先生、安原晃先生、山口祥司、丹下稜斗先生に心より感謝いたします。また、本研究を進めるにあたり、先行研究などを紹介して下さいました逆井卓也先生に深く感謝申し上げます。

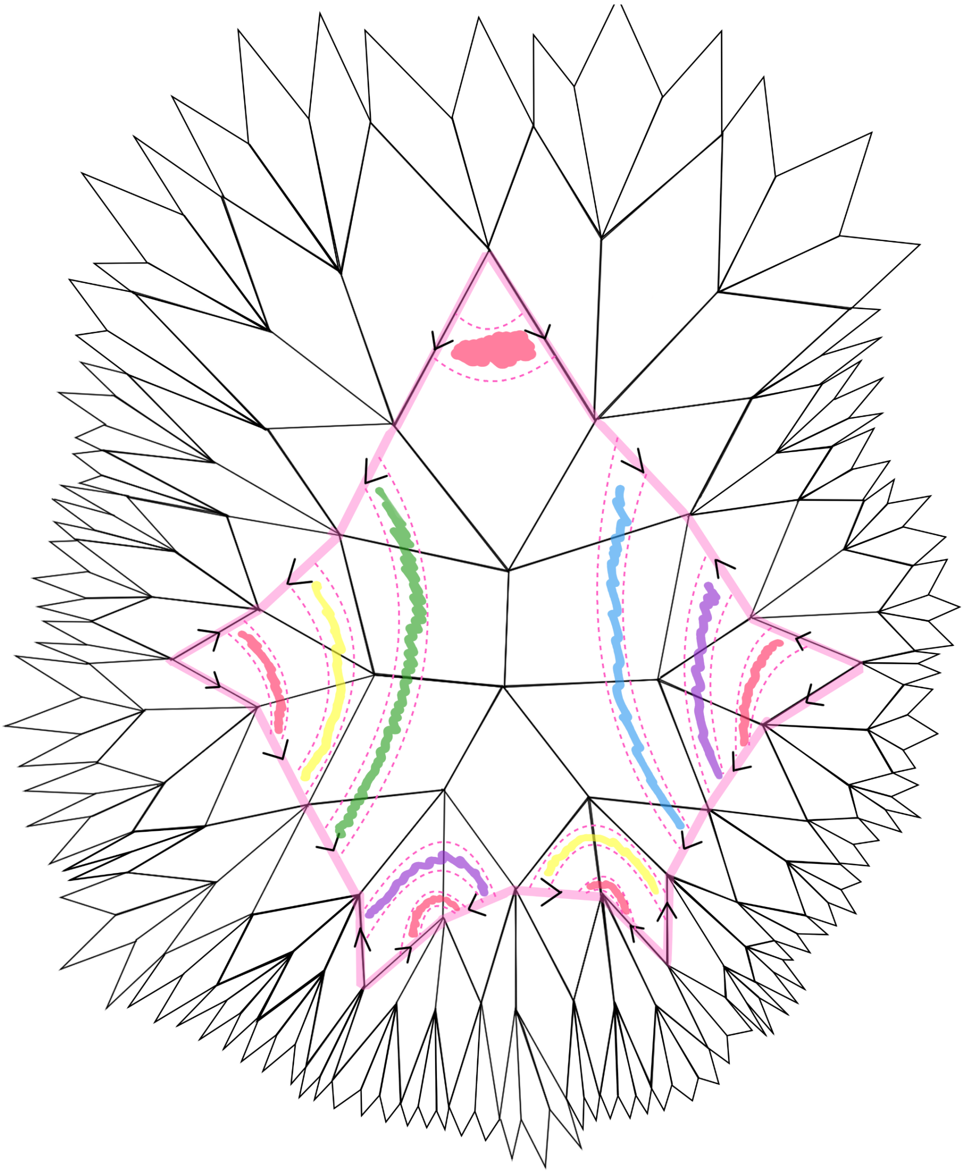


図 5

参考文献

[1] Paolo Bellingeri, Hugo Chemin, and Victoria Lebed, *Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups*, J. Algebraic Combin. **59** (2024), no. 1, 153–178. MR 4701892

[2] Satyan L. Devadoss, *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad*, 2000.

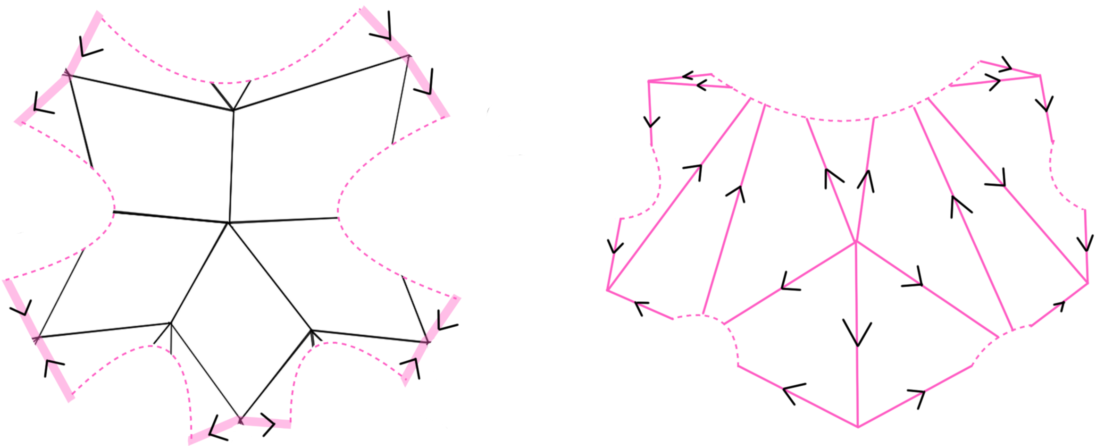


図 6

[3] Anthony Genevois, *Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory*, 2022.

[4] André Henriques and Joel Kamnitzer, *Crystals and coboundary categories*, Duke Math. J. **132** (2006), no. 2, 191–216. MR 2219257

[5] Clara Löh, *Geometric group theory*, Universitext, Springer, Cham, 2017, An introduction. MR 3729310

[6] Bernard Maskit, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Advances in

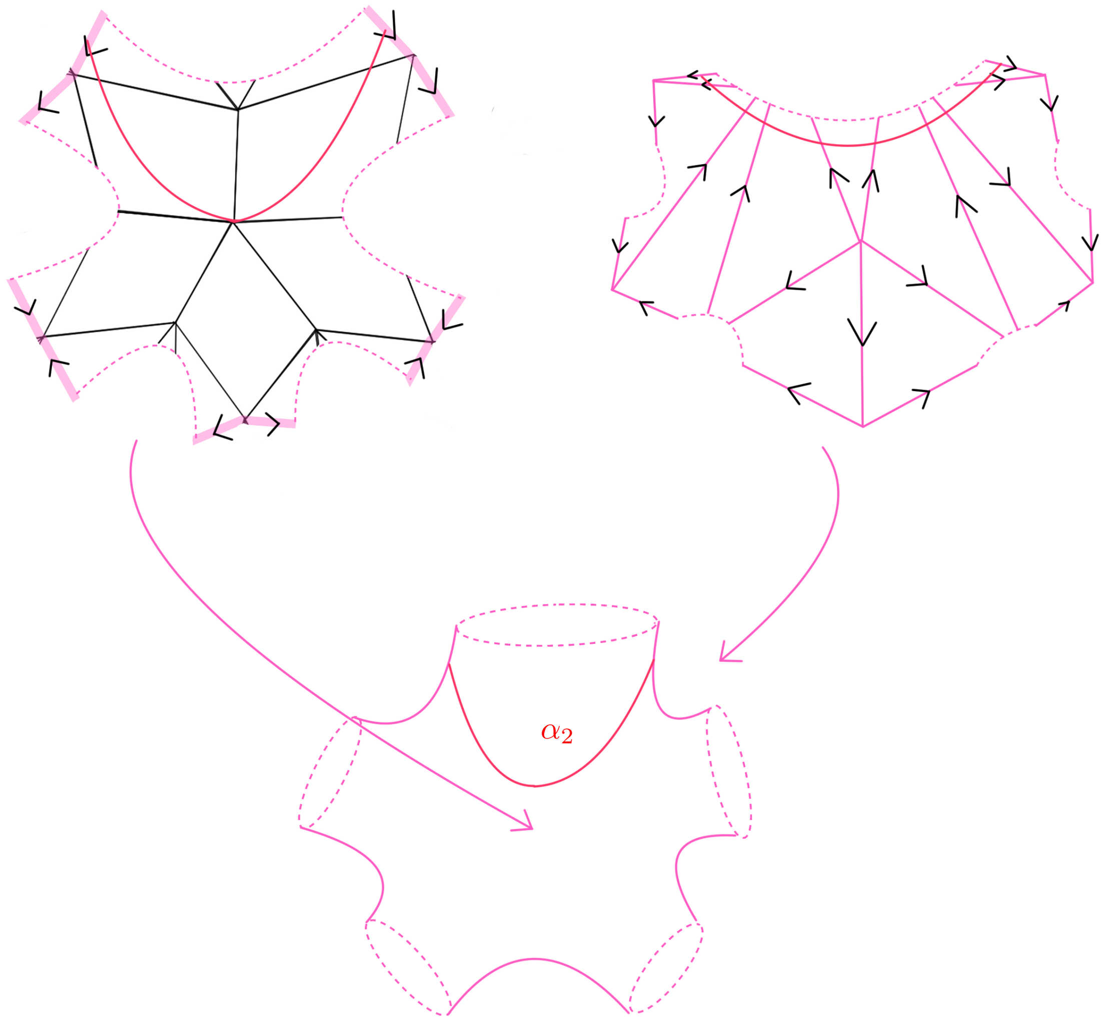


図 7

Math. **7** (1971), 219–230. MR 297997

[7] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta Math. **1** (1882), no. 1, 1–76. MR 1554574