Emergent version of Drinfeld's associator equations

久野 雄介　(津田塾大学)*

本報告の内容は, Dror Bar-Natan 氏 (Toronto 大学) との共同研究 [9] に基づく. 我々は, Drinfeld 結合子の定義方程式を, その値域を部分商に取り換えることで弱めたものを考える. なお, 同様の設定での別の考察が [8, 5, 14] でなされている.

以下, 簡単のため, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で考える. (基本的には, 標数 0 の体なら何でも良い.)

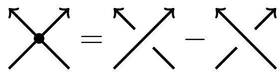
1　はじめに

Σ を有向曲面とする. シリンダー $\Sigma\times[0,1]$ 内の (有向) 結び目のアイソトピー類のなす集合を $\mathcal{K}_\Sigma$, 曲面 Σ 上の (自由) ループのホモトピー類のなす集合を $\hat{\pi}(\Sigma)$ とする. このとき, 射影をとることで自然な写像

$$\mathcal{K}_\Sigma \longrightarrow \hat{\pi}(\Sigma)$$

が定まる. 逆に, 曲面上のループに対し, その自己交差を解消することで $\Sigma\times[0,1]$ 内の結び目が得られる. 当然ながら, 各自己交差の解消のさせかたには正負の二通りがあるので, この「持ち上げ」は $\mathcal{K}_\Sigma$ の元としては well-defined ではない. しかし, 曲面上のループに対して定まる重要な構造として Goldman 括弧積や Turaev 余括弧積と呼ばれる演算があり, その背後にはこの「持ち上げ」が現れている [15, 13].

$\mathcal{K}_\Sigma$ と $\hat{\pi}(\Sigma)$ の間を自然に補間するのは Vassiliev フィルトレーションである. $\mathcal{K}_\Sigma$ の元の形式的な $\mathbb{Q}$-線型結合のなすベクトル空間を $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ とする. $i\geq 0$ に対して, $V_i\subset\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ を i 個の特異点を持つ $\Sigma\times[0,1]$ 内の特異結び目の張る部分空間とする. ここで,



の様に特異点を解消することで, 特異結び目を $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma$ の元とみなしている. 線型写像の列

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2 \longrightarrow \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_1$$

において, 最後の空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_1$ は $\mathbb{Q}(\mathcal{K}_\Sigma/\text{ホモトピー})=\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ と同一視される. 上に述べた持ち上げの観点からみたとき, 一つ前の空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2$ は, 曲面上のループがシリンダー内の結び目になりつつある段階の対象と見做せる. そうした気持ちを込めて, 我々は $\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma/V_2$ の元を「emergent な結び目」と呼ぶ.

2　Drinfeld 結合子と柏原-Vergne 問題

Alekseev と Torossian [2] は Drinfeld 結合子から柏原-Vergne 方程式の解が得られることを示した. 本研究の動機はこの構成のトポロジカルな側面の理解にある. そのために

* e-mail: `kunotti@tsuda.ac.jp`
本研究は科研費 (課題番号:23K03121, 24K00520) の助成を受けたものである.

我々は emergent な結び目の考え方を用いてアプローチする. 以下, 現れる数学的対象を簡単に説明する.

2.1 Drinfeld-河野 リー代数

整数 $n \geq 1$ に対して, dk_n を次の表示を持つリー代数とする:

生成元 $t_{ij} = t_{ji}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$

関係式 $\begin{cases} \text{可換関係式:}\, [t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad (\sharp\{i,j,k,l\} = 4\text{ のとき}) \\ \text{4 項関係式:}\, [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 \quad (\sharp\{i,j,k\} = 3\text{ のとき}) \end{cases}$

t_{ij} の次数を 1 として, dk_n は次数付きリー代数になる. dk_n の次数完備化を $\widehat{\mathsf{dk}}_n$ とかく.

2.2 Drinfeld 結合子

$\mathsf{lie}_2 = \mathsf{lie}(x, y)$ を変数 x, y に関する自由リー代数, $\widehat{\mathsf{lie}}_2$ をその次数完備化とする. (カップリング定数 1 の)Drinfeld 結合子とは, x, y に関する非可換べキ級数 $\Phi = \Phi(x, y)$ であって次の条件をみたすものである:

- Φ は group-like である, つまり $\Phi \in \exp(\widehat{\mathsf{lie}}_2)$ である.
- Φ は $\Phi = \exp(\frac{1}{24}[x, y] + \text{高次の項})$ という形をしている.
- Φ は五角方程式と (二種類の) 六角方程式をみたす.

ここで, 五角方程式とは $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_4)$ における次の等式である:

$$\Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{1(23)}, t_{(23)4})\Phi(t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{(12)3}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

ただし $t_{1(23)} = t_{12} + t_{13}$, etc., である. また, 六角方程式は $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_3)$ における等式である. 古庄 [11] により, 六角方程式は実は五角方程式の帰結であることが知られている.

Drinfeld 結合子は存在する. Drinfeld 結合子全体の集合を Assoc_1 とかくと, これは次の様な bi-torsor の構造を持っている:

$$\mathsf{GT}_1 \curvearrowright \mathsf{Assoc}_1 \curvearrowleft \mathsf{GRT}_1$$

ここで, GT_1 と GRT_1 は Grothendieck-Teichmüller 群と呼ばれる群である. bi-torsor というのは, 二つの群作用は可換であり, ともに自由かつ推移的であることを言っている.

Bar-Natan [6] は, Drinfeld 結合子は括弧付き組ひもの圏 **PaB** の "expansion" であることを示した. これは, いわば Drinfeld 結合子の 3 次元トポロジーにおける解釈といえる.

2.3 柏原-Vergne 予想/問題/定理

もともと, 柏原-Vergne 予想 [12] は任意の有限次元リー代数に対して定式化された, リー理論における予想であった. Alekseev と Torossian [2] によって, 自由リー代数における問題として普遍的な形に再定式化された. ここではこれについて述べる. 完備自由リー代数 $\widehat{\mathsf{lie}}_2$ の自己同型 F が tangential であるとは, $F(x) = \exp(\mathrm{ad}_u)(x)$, $F(y) = \exp(\mathrm{ad}_v)(y)$

(ただし $u, v \in \widehat{\mathsf{lie}_2}$) という形であることをいう．$\widehat{\mathsf{lie}_2}$ の tangential な自己同型の全体のなす群を tAut_2 とかく．$F \in \mathsf{tAut}_2$ に対する次の方程式を柏原-Vergne 方程式という:

(KV1) $F(x+y) = \log(e^x e^y)$.

(KV2) ある 1 変数ベキ級数 $f(s)$ が存在して $j(F) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ をみたす.

ここで, (KV2) において, j は群 tAut_2 上の x, y に関する巡回語の空間に値を持つある捩れ係数 1-コサイクルである.

柏原-Vergne 方程式の解は存在する．その全体を SolKV とかくと，これは次の様な bi-torsor の構造を持っている:

$$\mathsf{KV}_2 \curvearrowright \mathsf{SolKV} \curvearrowleft \mathsf{KRV}_2$$

驚くべきことに, Alekseev と Torossian [2] は, Drinfeld 結合子から柏原-Vergne 方程式の解が構成できることを示した．すなわち, 以下の単射が存在することを示した:

$$\mathsf{Assoc}_1 \hookrightarrow \mathsf{SolKV}.$$

Alekseev, Enriquez, Torossian [1] により, 明示的な公式も与えられている．bi-torsor 構造と適合する群の単射準同型 $\mathsf{GT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KV}_2$ および $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}_2$ も構成されている.

近年, 柏原-Vergne 方程式の解のトポロジカルな解釈が与えられている:

- 4 次元トポロジーにおいて: welded foam と呼ばれる $\mathbb{R}^4$ 内のある種の特異曲面のなすサーキット代数の “expansion” として (Bar-Natan-Dancso [7]).
- 2 次元トポロジーにおいて: 2 点穴あき円板 $D^2 \setminus \{2$ 点$\}$ の Goldman-Turaev リー双代数の “expansion” として (Alekseev-河澄-久野-Naef [3]).

問. 写像 $\mathsf{Assoc}_1 \hookrightarrow \mathsf{SolKV}$ をトポロジーの立場から理解せよ．また, Drinfeld 結合子の 3 次元的解釈, 柏原-Vergne 方程式の 4 次元的あるいは 2 次元的解釈たちの関係を理解せよ.

grt_1 と krv_2 をそれぞれ群 GRT_1 と KRV_2 のリー代数とする．どちらも無限次元の次数付きリー代数である．ものとしては, grt_1 は lie_2 の部分空間, krv_2 は $\mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ の部分空間になっている．Alekseev-Torossian [2] は $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}_2$ の微分にあたる埋め込み

$$\nu : \mathsf{grt}_1 \hookrightarrow \mathsf{krv}_2, \quad \psi(x,y) \mapsto (\psi(-x-y, x), \psi(-x-y, y)) \tag{1}$$

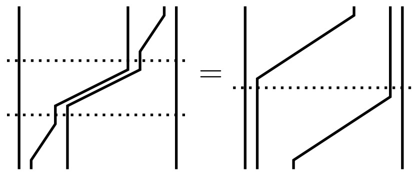
も与えている．これらのリー代数は次の様に構造が予想されている.

予想. (1) (Deligne-Drinfeld) $\mathsf{grt}_1 \cong \mathsf{lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \ldots)$.

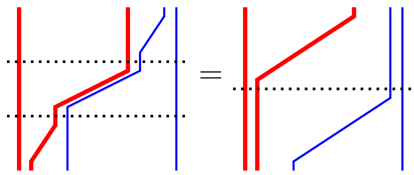
(2) (Alekseev-Torossian) $\mathsf{krv}_2 \cong \mathbb{Q}t \oplus \nu(\mathsf{grt}_1)$. ここで t は次数 1 のある元.

3 emergent 版の Drinfeld-河野 リー代数, 五角関係式

Φ を Drinfeld 結合子とする. 五角方程式は次の括弧付き組ひもの等式に対応している:



4 項関係式より, $\Phi(t_{12}, t_{23}) = \Phi(-t_{13} - t_{23}, t_{23})$ となる. そこで, 五角方程式の両辺は t_{12} を含まない形に書くことができる. すなわち, $\mathsf{dk}_{2,2}$ を $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$ の生成する dk_4 の部分 Lie 代数とするとき, 五角方程式は $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_{2,2})$ における等式とみなせる. (以下の図との対応が見やすいよう, あえて添字に色を付けた.) 次の様にひもに色を付けてみると,



これは $D^2 \setminus \{2 \text{ 点 }\}$ における 2 本の括弧付き組ひもの等式として解釈できる. さらに, emergent 条件を $\mathsf{dk}_{2,2}$ において考えると「t_{34} が二つ以上現れたら 0」ということになる.

定義. c を t_{34} の生成する $\mathsf{dk}_{2,2}$ のリーイデアルとし, 次の様におく:

$$\mathsf{edk}_{2,2} := \mathsf{dk}_{2,2}/[\mathsf{c}, \mathsf{c}].$$

同様に, $m, n \geq 0$ に対してリー代数 $\mathsf{edk}_{m,n}$ が定義される.

補題. 次数付き線形空間として, $\mathsf{edk}_{2,2} \cong \mathsf{lie}_2 \oplus \mathsf{lie}_2 \oplus \mathsf{ass}_2[-1]$.

ここで, $\mathsf{ass}_2 = \mathsf{ass}(x, y)$ は変数 x, y に関する自由結合代数である.

五角方程式を $\exp(\widehat{\mathsf{dk}}_{2,2})$ の商 $\exp(\widehat{\mathsf{edk}}_{2,2})$ において考えたものを, emergent 版の五角方程式と呼ぶ. その線形化は, $\varphi \in \mathsf{lie}_2$ に対する次の方程式になる:

$$\begin{cases} \varphi(y, 0) - \varphi(x + y, 0) = 0, \\ (\partial_y \varphi)(x, y) + (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0) - R(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

ここで, 記号の説明は以下の通り.

- "偏微分作用素" $\partial_x, \partial_y : \mathsf{lie}_2 \to \mathsf{ass}_2$ が次の等式で定まる: 任意の $a \in \mathsf{lie}_2$ に対して

  $$a = (\partial_x a)x + (\partial_y a)y.$$

  ここで, 自然に $\mathsf{lie}_2 \subset \mathsf{ass}_2$ とみなせることに注意.

- $R : \mathsf{lie}_2 \to \mathsf{ass}_2$ は次をみたす一意的な写像である: $R(x) = R(y) = 0$ かつ任意の $a, b \in \mathsf{lie}_2$ に対して

$$\begin{aligned} R([a,b]) =& [R(a), b] + [a, R(b)] \\ &+ (\partial_x b)x\,\iota(\partial_x a) - (\partial_x a)x\,\iota(\partial_x b) + (\partial_y b)y\,\iota(\partial_y a) - (\partial_y a)y\,\iota(\partial_y b). \end{aligned}$$

ここで, ι は $\iota(x) = -x$, $\iota(y) = -y$ によって定まる ass_2 の代数反準同型である.

構成から, $\psi = \psi(x,y) \in \mathsf{grt}_1$ のとき, $\varphi(x,y) = \psi(-x-y, y)$ は方程式 (2) をみたす. さらに, Drinfeld [10] により, $\psi \in \mathsf{grt}_1$ のとき, 次が成り立つことが示されている:

$$[x, \psi(-x-y, x)] + [y, \psi(-x-y, y)] = 0 \tag{3}$$

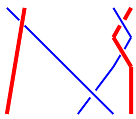
定義. 次数付き線形空間 $\mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ を, (2) および次の条件をみたす $\varphi \in \mathsf{lie}_2$ の全体とする:

$$[x, \varphi(y, x)] + [y, \varphi(x, y)] = 0. \tag{4}$$

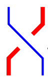
注. 次数 17 以下で, 方程式 (2) の解空間は grt_1 と一致し, 特に (2) の解は (4) をみたす.

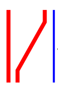
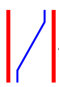
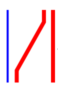
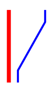
定義から, $\mathsf{grt}_1 \hookrightarrow \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}, \psi(x,y) \mapsto \psi(-x-y, y)$ となる.

以上の emergent 版の方程式のトポロジカルな意味づけは, 圏 **PaB** の二色版の商である括弧付き emergent 組ひもの圏 **PaEB** においてなされる. 非常に大雑把に述べると, **PaEB** の射は次の様な括弧付き組ひもたちのしかるべき線型結合である:



射の空間には, Vassiliev フィルトレーションの 2 番目 V_2 による関係式を入れる. ここで注意として, 赤いひもたちの入れ替えやそれらの括弧付けを変える射は考えない. 例えば,

$\sigma_{\mathrm{pp}} =$ , $\sigma_{\mathrm{ps}}^{+} =$ , $\sigma_{\mathrm{ps}}^{-} =$ ,

$\alpha_{\mathrm{ppp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{pps}} =$ , $\alpha_{\mathrm{psp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{spp}} =$ , $\alpha_{\mathrm{pss}} =$ , ...

のうち, 各行の先頭の組ひも σ_{pp} や α_{ppp} は **PaEB** の射ではない. (他のものはそう.)

4 主結果

柏原-Vergne リー代数の定義を述べる. 巡回語の空間を $\mathsf{tr}_2 = \mathsf{ass}_2/[\mathsf{ass}_2, \mathsf{ass}_2]$ とおく.

定義 (Alekseev-Torossian [2])**.** 次をみたす $(a, b) \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ の全体の集合を krv_2 とする.

(LKV1) $[x, a] + [y, b] = 0$.

(LKV2) ある 1 変数ベキ級数 f が存在して, tr_2 の元として次の等式が成り立つ:

$$(\partial_x a)x + (\partial_y b)y = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

krv_2 のリー代数の構造は次の様に与えられる. $\tilde{u} = (a, b) \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ に対して lie_2 の導分 $u = \rho(\tilde{u})$ を $x \mapsto [x, a]$, $y \mapsto [y, b]$ によって定める. このとき, krv_2 の二つの元 $\tilde{u}_1 = (a_1, b_1)$ と $\tilde{u}_2 = (a_2, b_2)$ の括弧積は次の式で与えられる:

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] = \big(u_1(a_2) - u_2(a_1) + [a_1, a_2], u_1(b_2) - u_2(b_1) + [b_1, b_2]\big).$$

次が主結果であり, Alekseev-Torossian の埋め込み (1) の分解を与える.

定理 ([9]). (i) $\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ に対し $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) := (\varphi(y, x), \varphi(x, y)) \in \mathsf{krv}_2$ となる.

(ii) 単射線形写像 $\nu^{\mathrm{em}} : \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \to \mathsf{krv}_2$ の像は krv_2 の対称部分 $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} = \{(a, b) \in \mathsf{krv}_2 \mid b(y, x) = a(x, y)\}$ の次数 2 以上の部分に一致する: $\mathrm{Im}(\nu^{\mathrm{em}}) = (\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}})_{\geq 2}$.

なお, $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}}$ と krv_2 が一致するかどうかは知られていない (次数 17 までは一致).

以下, 主張 (i) の証明の概略, 特に emergent 五角方程式 (2) の使用箇所を説明する.

$\Sigma = D^2 \setminus \{2 \text{ 点 }\}$ とおく. Σ 上のループの張る空間 $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ は, ループの交差や自己交差から定まる演算である Goldman 括弧積 $[\cdot, \cdot] : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ や (フレイミング版)Turaev 余括弧積 $\delta^f : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \to \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)^{\otimes 2}$ を備えている. 境界に基点をとり, $\pi = \pi_1(\Sigma)$ とおく. $[\cdot, \cdot]$ の基点付き版 $\eta : \mathbb{Q}\pi^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}\pi$ と δ^f の基点付き版 $\mu^f : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}\pi$ が定義される. これらのループ演算の随伴次数商として, 次の演算が定まる:

$$[\cdot, \cdot]_{\mathrm{gr}} : \mathsf{tr}_2^{\otimes 2} \to \mathsf{tr}_2, \quad \eta_{\mathrm{gr}} : \mathsf{ass}_2^{\otimes 2} \to \mathsf{ass}_2, \quad \delta^f_{\mathrm{gr}} : \mathsf{tr}_2 \to \mathsf{tr}_2^{\otimes 2}, \quad \mu^f_{\mathrm{gr}} : \mathsf{ass}_2 \to \mathsf{ass}_2.$$

(これらの演算には明示的な計算式がある. [4, §3] を参照.)

証明の鍵となるのは次の四つの事実である:

(あ) $\tilde{u} \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ は (LKV1) をみたす $\iff$ $u = \rho(\tilde{u})$ は η_{gr} と可換.

(い) $\tilde{u} \in \mathsf{krv}_2 \iff u$ は η_{gr}, δ^f_{gr} と可換 [4].

(う) $\mu^f_{\mathrm{gr}}|_{\mathsf{lie}_2} = R$. すなわち写像 R は曲面上の曲線の自己交差を測る演算と関係する.

(え) $\tilde{u}$ は (LKV1) をみたし, さらにある $c \in \mathsf{ass}_2$ が存在して次が成り立つと仮定する:

$$\mu^f_{\mathrm{gr}}(u(x)) = [x, c] \quad \text{かつ} \quad \mu^f_{\mathrm{gr}}(u(y)) = [y, c].$$

このとき, u は δ^f_{gr} と可換となる.

定理 (i) の証明 $\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ のとき, 条件 (4) から $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)$ は (LKV1) をみたす. $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) \in \mathsf{krv}_2$ を示すには, それが (え) の条件をみたすことを確認すれば良い. 次の様な計算をする:

$$\begin{aligned} &\mu^f_{\mathrm{gr}}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)y) = R([y, \varphi(x, y)]) = [y, R(\varphi)] + (\partial_y \varphi)y - y\,\iota(\partial_y \varphi) \\ &= [y, R(\varphi) - \partial_y \varphi] \underset{\pentagon}{=} [y, (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0)] = [y, -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)]. \end{aligned}$$

ここで, $\pentagon$ において emergent 五角方程式を用いた. 同様の計算で, $\mu^f_{\mathrm{gr}}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)(x)) = [x, -(\partial_y \varphi)(y + x, 0)]$ がわかる. $c := -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)$ とおけば良い. $\square$

もし, 2 節の終わりに紹介した予想が正しければ, $\mathsf{grt}_1 = \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ かつ $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} = \mathsf{krv}_2$ となる. 今後の課題として次が挙げられる.

問. (i) 現状の $\mathsf{grt}^{\mathrm{em}}$ の定義から (4) を省けるか? つまり, 条件 (2) は (4) を導くか?

(ii) $\nu^{\mathrm{em}} : \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \to \mathsf{krv}_2$ の "大域版" を与えよ. つまり, emergent 版 Drinfeld 結合子の定義を与え, その全体の集合 $\mathsf{Assoc}_1^{\mathrm{em}}$ から SolKV への写像を構成せよ. (そのためには, 圏 **PaEB** の "有限表示"(圏 **PaB** が持つ様な) の考察が必要になる.)

参考文献

[1] A. Alekseev, B. Enriquez, and C. Torossian, Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations, Publications Mathématiques de L'IHÉS, **112** (2010) 143–189.

[2] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, *Ann. of Math.* (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Adv. Math.* **326** (2018), 1–53.

[4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv:1804.09566v3 (2023)

[5] A. Alekseev, F. Naef and M. Ren, Poisson brackets and coaction maps of regularized holonomies of the KZ equation, preprint, arXiv:2409.08894

[6] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmuller group, I, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 2, 183–212.

[7] D. Bar-Natan and Z. Dancso, Finite type invariants of w-knotted objects II: tangles, foams and the Kashiwara-Vergne problem, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1517–1586.

[8] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, J. Liu, and N. Scherich, Goldman-Turaev formality from the Kontsevich integral, in preparation. See also talks `http://drorbn.net/ld22` and `http://drorbn.net/ge24`

[9] D. Bar-Natan and Y. Kuno, Emergent version of Drinfeld's associator equations, in preparation.

[10] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991) no. 4, 829–860.

[11] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations, *Ann. of Math.* (2) **171** (2010), no. 1, 545–556.

[12] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff Formula and Invariant Hyperfunctions, *Invent. Math.* **47** (1978), no. 3, 249–272.

[13] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev's loop operations, *Quantum Topol.* **9** (2018), no. 1, 39–117.

[14] R. Navarro Betancourt and F. Naef, A functorial approach to the Kashiwara-Vergne problem, in preparation.

[15] V. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **24** (1991), no. 6, 635–704.