絡み目の p 進トーションについて

結び目の数理VII

2024/12/27 吉崎彪雅(東京理科大学)

主結果

M: 閉整ホモロジー3球面

$L \subset M$: d 成分絡み目

$(M_n \to M)_n$: 有理ホモロジー3球面からなる、L で分岐する“整合的”な

$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆系列

$$\lim_{n\to\infty} |H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| \in \mathbb{Z}_p$$

L で分岐する“整合的”な $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆系列

$$\mathrm{Deck}(M_n/M) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$$

$n \geq m$ に対して、$\ker \pi_{(n)} \subset \ker \pi_{(m)}$

$E(L)$: M の L に対する補空間

$\pi_1(E(L))$: 基本群

$\pi_{(n)} : \pi_1(E(L)) \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$;

M_n に対応する全射準同型

本日の流れ

- 多変数多項式の巡回終結式
- 応用(主結果)
- 具体例(twisted Whitehead link)
- p 進トーション(主結果との関係)

多変数多項式の巡回終結式

R を整域とする。$f = \sum_{0 \le i \le m} a_i t^i, g = \sum_{0 \le i \le n} b_i t^i \in R[t]$ に対する**終結式**を

$$\mathrm{Res}(f, g) = \det\left(\begin{array}{l} \left.\begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}\right. \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ 行} \end{array}$$

によって定義する。

実は、$\mathrm{Rem}(f, g) = a_m^n \prod_{f(\alpha)=0} g(\alpha)$ が成立。

素数 p と多変数多項式 $f(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_d]$、

正の整数の組み $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対して、

$$r_{n_1,\ldots,n_d}(f) = \mathrm{Res}(t_1^{p^{n_1}} - 1, \mathrm{Res}(t_2^{p^{n_2}} - 1, \ldots, \mathrm{Res}(t_d^{p^{n_d}} - 1, f)))$$

とする。

<u>定理</u> $\lim_{n_1,\ldots,n_d \to \infty} r_{n_1,\ldots,n_d}(f) \in \mathbb{Z}_p$

<u>系</u> 各 $1 \leq i \leq d$ に対して、$g_i(t_i) \mid t_i^{p^{n_i}} - 1$ とする。このとき、

$$\lim_{n_1,\ldots,n_d \to \infty} \mathrm{Res}(\frac{t_1^{p^{n_1}} - 1}{g_1(t_1)}, \mathrm{Res}(\frac{t_2^{p^{n_2}} - 1}{g_2(t_2)}, \ldots, \mathrm{Res}(\frac{t_d^{p^{n_d}} - 1}{g_d(t_d)}, f))) \in \mathbb{Z}_p .$$

応用

$\mathbb{Z}_p^d$ 被覆のホモロジー群の収束性

主結果(再掲)

M: 閉整ホモロジー3球面

$L \subset M$: d 成分絡み目

$(M_n \to M)_n$: 有理ホモロジー3球面からなる、L で分岐する“整合的”な

$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆系列

$$\lim_{n\to\infty} |H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| \in \mathbb{Z}_p$$

Maberry-Murasugi, Portiの公式

$L = l_1 \cup \ldots \cup l_d$ とする。

$G_n = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ とおく。

$\hat{G}_n : G_n \to \mathbb{C}^\times$ の準同型写像全体。

$m_1, \ldots, m_d \in H_1(E(L);\mathbb{Z})$: メリディアンを選ぶ。

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(E(L)) \arrow[r, "\mathrm{ab}"] \arrow[dr, "\pi_{(n)}"'] & H_1(E(L);\mathbb{Z}) \ni m_i \arrow[d] \\
& G_n \ni \pi_{(n)}(m_i) \arrow[d, "\xi"] \\
& \mathbb{C}^\times \ni \xi(m_i)
\end{tikzcd}$$

$\xi \in \hat{G}_n$ に対して、

$$L_\xi = \bigcup_{\xi(\pi_{(n)}(m_i)) \neq 1} l_i$$

$$\hat{G}_n^{(1)} = \{\xi \in \hat{G}_n \mid L_\xi : \text{one component}\}$$

とおく。

$\xi \in \hat{G}_n^{(1)}$ に対して、$m_\xi := \xi(m) \neq 1$ となる m

$\xi \in \hat{G}_n$ に対して、$d(\xi) := L_\xi$ の成分数

定理(Mayberry-Murasugi, Porti を今回のケースに適用したもの)

$$|H_1(M_n;\mathbb{Z})| = \frac{p^{nd}}{\prod_{\xi \in \hat{G}_n^{(1)}} |1 - \xi(\pi_{(n)}(m_\xi))|} \prod_{\xi \in \hat{G}_n} |\Delta_{L_\xi}(\xi(\pi_{(n)}(m_{i_1})), \ldots, \xi(\pi_{(n)}(m_{i_{d(\xi)}})))|.$$

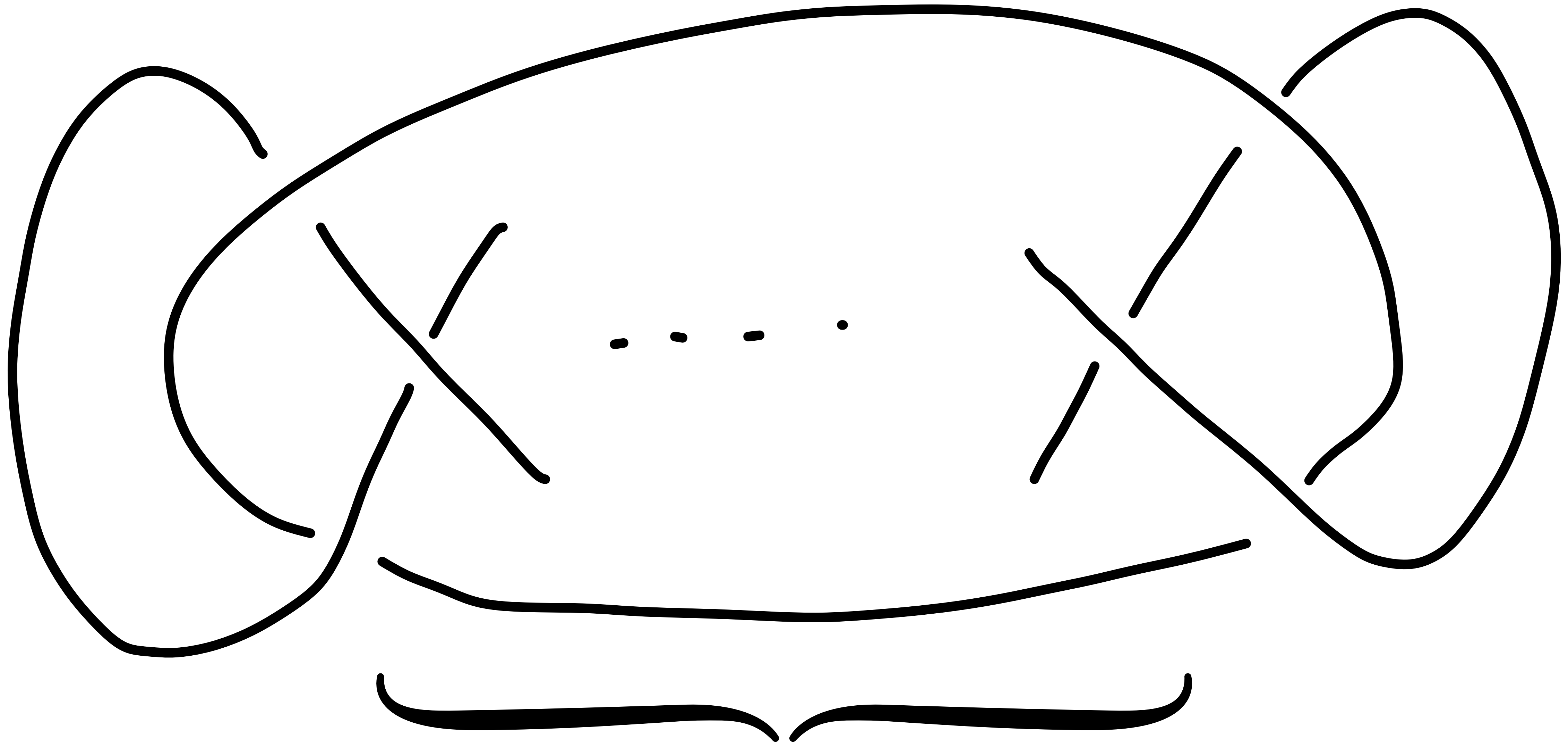
$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ 被覆の場合は、$(\prod_{\xi \in \hat{G}_n^{(1)}} |1 - \xi(\pi_{(n)}(m_\xi))|) = p^{nd}$ となる。

また、

$$\prod_{\xi \in \hat{G}_n} |\Delta_{L_\xi}(\xi(\pi_{(n)}(m_{i_1})), \ldots, \xi(\pi_{(n)}(m_{i_{d(\xi)}})))| = \prod_{L' \subset L} |\mathrm{Res}(\frac{t_1^{p^n} - 1}{t_1 - 1}, \ldots, \mathrm{Res}(\frac{t_{d(L')}^{p^n} - 1}{t_{d(L')} - 1}, \Delta_{L'})|.$$

Twisted Whitehead link

$W_k :=$



k crossings

$$\Delta_{W_k}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 + m - mt_1 - mt_2 + (1+m)t_1t_2 & k = 2m+1 \\ m(1 + t_1t_2 - t_1 - t_2) & k = 2m \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} |H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\text{non-}p}| =$$

$$\begin{cases} \dfrac{m|m|_p}{\omega_p(m|m|_p)} & k = 2m \\ \dfrac{\omega_p(2)}{2} & k = 2m+1,\ p \neq 2 \\ (-1)^m \dfrac{\omega_2(m+1)-\omega_2(m)}{k} \prod_{\zeta\in\mu_2\setminus\{\pm 1\}} 2^{-\nu_\zeta} \log_2 \dfrac{m\zeta+m+1}{m\zeta+m+\zeta} & k = 2m+1,\ p = 2 \end{cases}$$

ω_p: タイヒミュラー指標(ただし、偶数 m に対しては $\omega_2(m) = 0$ と定義)

$\mu_2 := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \exists N \text{ such that } \zeta^{2^N} = 1\}$

$$\nu_\zeta := v_2(\log_2 \frac{m\zeta+m+1}{m\zeta+m+\zeta})$$

p 進トーション

2020年にS. Kionkeが定義した位相不変量。

X: 有限CW-複体

Γ_X: X の基本群

$\tilde{X}$: X の普遍被覆

$A \subset X$: 部分集合

G: 副有限群(開副 p-群を部分群に持つ)

$\varphi : \Gamma_X \to G$: 群準同型写像

R: 可換環($1/p$ を含む)

開部分群 $\Gamma \subset \Gamma_X$ に対して、Γ に対応する X の被覆を $\tilde{X}/\Gamma$ とする。

$$t_j^{[p]}(X, A; \varphi, R) := \#_p^G(\mathrm{tors} \varinjlim_{N<G} H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N), A_N; R))$$

M: 閉整ホモロジー3球面

$\Delta_L(t_1, \ldots, t_d)$ が (1,...,1) 以外の 1 の素べき根で 0 にならないとする。

$\varphi : \Gamma_{E(L)} \to \mathbb{Z}_p^d \qquad \Gamma_{E(L)} \twoheadrightarrow H_1(E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Z}_p^d$

$M_n := \widetilde{E(L)}/\varphi^{-1}((p^n\mathbb{Z}_p)^d)$ のFox完備化

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}| = t_2^{[p]}(E(L), \partial E(L); \varphi, \mathbb{Z}[1/p])}$$

X: 有限CW-複体

Γ_X: X の基本群

$\tilde{X}$: X の普遍被覆

$A \subset X$: 部分集合

G: 副有限群(開副 p-群を部分群に持つ)

$\varphi : \Gamma_X \to G$: 群準同型写像

R: 可換環($1/p$ を含む)

定理(Kionke 2020)

$\cap_i N_i = \{1\}$ をみたす G の正規閉部分群の列 $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty} |\mathrm{tors}H^j(\tilde{X}/\varphi^{-1}(N_n), A_{N_n}; R)| = t_j^{[p]}(X, A; \varphi, R).$$

$E(L)_n = \widetilde{E(L)}/\varphi^{-1}((p^n\mathbb{Z}_p)^d)$ とする。

$|\mathrm{tors}H^2(E(L)_n, \partial E(L)_n; \mathbb{Z}[1/p])| = |H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}|$

が言えれば良い。

$H^2(E(L)_n, \partial E(L)_n; \mathbb{Z}) \cong H_1(E(L)_n; \mathbb{Z})$ Lefschetz dual

$\mathrm{tors} H_1(E(L)_n; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{tors}(H_1(M_n; \mathbb{Z})/\langle h_n^{-1}(L)\rangle)$ [Hartley-Murasugi 1978]

$h_n : M_n \to M$; 被覆写像

$\langle h_n^{-1}(L)\rangle$: $h_n^{-1}(L)$ の各成分で生成される $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ の部分加群

$H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ (M は $\mathbb{Z}$HS^3) より、L の各成分 K にはSeifert曲面 Σ_K が存在。

Δ_L に対する仮定から、L は h_n で分解しない ($\#h_n^{-1}(L) = d$). [Tateno-Ueki]

$\partial h_n^{-1}(\Sigma_K) = e h_n^{-1}(K)$ (e: 分岐指数) となり、$e[h_n^{-1}(K)] = 0 \in H_1(M_n; \mathbb{Z})$.

一方で $e \mid p^{nd}$ より、$\mathrm{tors} H_1(E(L)_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p} \cong \mathrm{tors} H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{non-}p}$.

$\square$

課題

- 各レイヤーが有理ホモロジー3球面ではない場合の、トーションン部分に対する収束性及び極限値計算

- 絡み目が分解する場合の p-進トーションとの関係

ご清聴ありがとうございました。