Hasse norm principle and genus theory in 3-dimensional topology

田代　大尭
（九州大学大学院数理学府博士１年）

結び目の数理 VII（於早稲田大学）
２０２４年１２月２７日

0. イントロ

$$
\begin{array}{ccc}
\text{平方剰余記号} & \longleftrightarrow & \text{絡み数} \\
\left(\frac{p}{q}\right) & \longleftrightarrow & \mathrm{lk}(K_1, K_2)
\end{array}
$$

A.M.Legendre

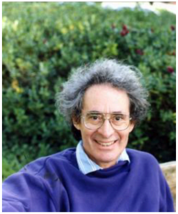
C.F.Gauss

1. 数論的位相幾何学とは

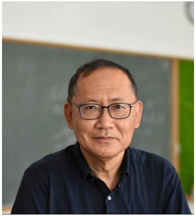
数論的位相幾何学

整数論 $\xleftrightarrow{\text{相互発展}}$ 3 次元位相幾何学

$\mathrm{M}^2\mathrm{KR}$ dictionary

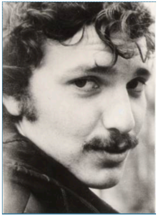


B.Mazur



M.Morishita

M.Kapranov



A.Reznikov

2.M^{2}KR dictionary

数体 F の整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$	3次元多様体 M
素イデアル $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$	結び目 $K : S^1 \hookrightarrow M$
素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$	絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$

$\mathfrak{p}$ 進整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$	K のソリッドトーラス $V_K = S^1 \times D^2$
$\mathfrak{p}$ 進体 $\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$	V_K の境界トーラス $\partial V_K = S^1 \times \partial D^2$

2.M^{2}KR dictionary

非零代数的数 $F^\times$	2 次元鎖群 $C_2(M)$
境界準同型 $\partial_F : F^\times \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}$	境界準同型 $\partial_M : C_2(M) \to Z_1(M)$
（狭義）イデアル類群 $H(F) = \mathrm{Coker}(\partial_F)\ (H^+(F))$	1 次元ホモロジー群 $H_1(M) = \mathrm{Coker}(\partial_M)$
$\mathcal{O}_F$ の単数群 $\mathcal{O}_F^\times$	2 次元ホモロジー群 $H_2(M)$

Q. 整数環の素イデアル全体の集合の
3 次元多様体における幾何学的類似物は何か?

3. 数論的位相幾何学の基本問題

Q. 整数環の素イデアル全体の集合の
3次元多様体における幾何学的類似物は何か?

A. 非常に許容的な絡み目

H.Niibo

J.Ueki

4. 非常に許容的な絡み目

定義（新甫-植木）

M を有向連結閉３次元多様体とし、$\mathcal{L} \subset M$ とする。
$\mathcal{L} = K_1 \cup \cdots \cup K_i \cup \cdots$ が非常に許容的な絡み目とは、次の条件を満たすもののことである。
1)$\mathcal{L}$ は可算個の tame な結び目 $K_1, \cdots, K_i, \cdots$ からなる絡み目
2) 任意の 有限絡み目 $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次分岐被覆 $f : N \to M$ に対して、$H_1(N)$ が $f^{-1}(\mathcal{L})$ により生成される

定理（新甫-植木）

M の非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ は存在する。

5. 幾何学的イデール群

定義（幾何学的イデール群）

M を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える有向連結閉 3 次元多様体とする。∂V_K を K の管状近傍の境界トーラスとし、$H_1(\partial V_K) = \mathbb{Z}[\mu_K] \oplus \mathbb{Z}[\lambda_K]$ とする（μ_K はメリディアン、λ_K はロンジチュード）。この時、

$$I_M := \{\boldsymbol{a} = (a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{L}} H_1(\partial V_K) | a_K \in \mathbb{Z}[\mu_K] \text{ for almost all } K\}$$

を M のイデール群と言う。

5. 幾何学的イデール群

定義（幾何学的イデール群）

M を非常に許容的な絡み目 $\mathcal{L}$ を備える有向連結閉 3 次元多様体とする。∂V_K を K の管状近傍の境界トーラスとし、$H_1(\partial V_K) = \mathbb{Z}[\mu_K] \oplus \mathbb{Z}[\lambda_K]$ とする（μ_K はメリディアン、λ_K はロンジチュード）。この時、

$$I_M := \{\boldsymbol{a} = (a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{L}} H_1(\partial V_K) | a_K \in \mathbb{Z}[\mu_K] \text{ for almost all } K\}$$

を M のイデール群と言う。

対角写像を次で定める。

$$\Delta_M : H_2(M, \mathcal{L}) := \varinjlim_{L \subset \mathcal{L}} H_2(M, L) \to I_M.$$

$P_M := \mathrm{Im}(\Delta_M) \subset I_M$ を M の主イデール群と呼ぶ。

6. ハッセのノルム原理

E/F を代数体の有限次巡回拡大とする。
このとき、E, F のイデール群 I_E, I_F、主イデール群 P_E, P_F、
$N_{E/F} : I_E \to I_F, N_{E/F} : P_E \to P_F$ が定まる。

定理（数体に対するハッセのノルム原理）

$$N_{E/F}(I_E) \cap P_F = N_{E/F}(P_E)$$

6. ハッセのノルム原理

E/F を代数体の有限次巡回拡大とする。
このとき、E, F のイデール群 I_E, I_F、主イデール群 P_E, P_F、
$N_{E/F} : I_E \to I_F, N_{E/F} : P_E \to P_F$ が定まる。

定理（数体に対するハッセのノルム原理）

$$N_{E/F}(I_E) \cap P_F = N_{E/F}(P_E)$$

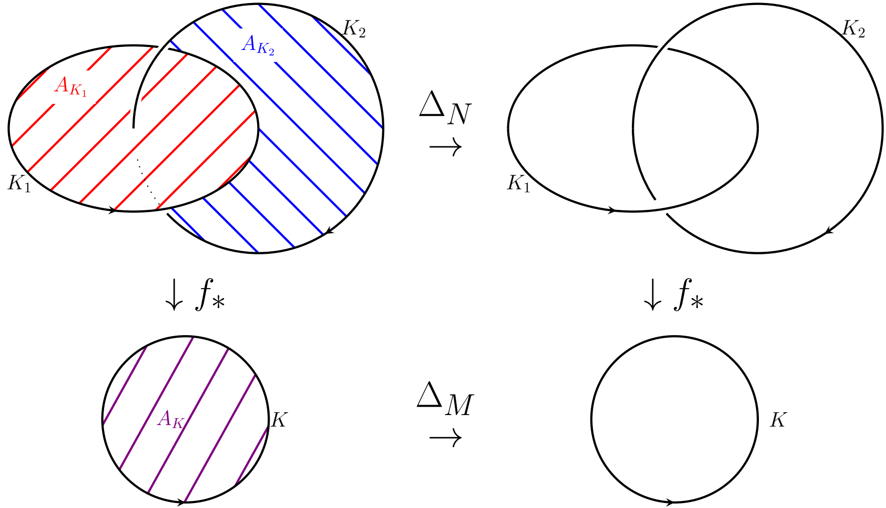
M を整ホモロジー 3 球面とし、$f : N \to M$ をある有限絡み目 $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する有限次巡回分岐被覆とする。
このとき、準同型写像 $f_* : I_N \to I_M, f_* : P_N \to P_M$ が導かれる。

主定理（田代；3 次元多様体に対するハッセのノルム原理）

$$f_*(I_N) \cap P_M = f_*(P_N)$$

6. ハッセのノルム原理

$f_*(I_N) \cap P_M = f_*(P_N)$ の解釈



6. ハッセのノルム原理

証明のポイント:

6. ハッセのノルム原理

証明のポイント: Δ_M の明示化

証明のポイント: Δ_M の明示化

M を $\mathbb{Z}\mathrm{HS}^3$、有限絡み目 $L \subset \mathcal{L}$ とすると、次の完全列を得る。

$$0 = H_2(M) \to H_2(M, L) \to H_1(L) \to H_1(M) = 0$$

$\therefore H_1(L) \cong H_2(M, L) := \langle S_K : K \subset L \text{ のザイフェルト曲面} \rangle$

6. ハッセのノルム原理

証明のポイント: Δ_M の明示化

M を $\mathbb{Z}\mathrm{HS}^3$、有限絡み目 $L \subset \mathcal{L}$ とすると、次の完全列を得る。

$$0 = H_2(M) \to H_2(M, L) \to H_1(L) \to H_1(M) = 0$$

$\therefore H_1(L) \cong H_2(M, L) := \langle S_K : K \subset L$ のザイフェルト曲面 $\rangle$

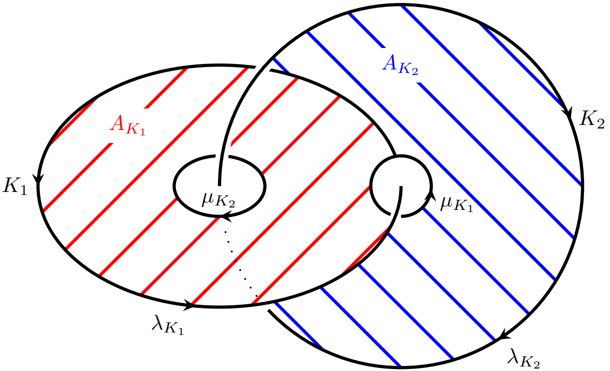
$X_L := M \setminus L,\ \partial V_L := \bigsqcup_{K \subset L} \partial V_K$ とし、

切除同型と相対ホモロジー完全列の境界準同型により、次の列を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc} \partial_L : & H_2(M, L) & \cong & H_2(M, V_L) & \overset{\text{ex.}}{\to} & H_2(X_L, \partial V_L) & \overset{\partial}{\to} & H_1(\partial V_L) \\ & S_K & \mapsto & S_K & \mapsto & A_K & \mapsto & \partial(A_K) \end{array}$$

6. ハッセのノルム原理

イメージ）$H_2(X_L, \partial V_L)$ の生成元 A_{K_1}, A_{K_2}



従って、$\partial_L : H_2(M, L) \to H_1(\partial V_L)$ は次の通り。

$$\partial_L(S_K) = [\lambda_K] - \sum_{K' \subset L \setminus K} \mathrm{lk}(K, K')[\mu_{K'}]$$

7. ヒルベルトの定理 90

k を $\mathbb{Q}$ の有限次巡回拡大体とし、$\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$ とする。

定理（数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90）

$N_{k/\mathbb{Q}}(\boldsymbol{a}) = 1$ となる任意の $\boldsymbol{a} \in I_k$ に対して、$\boldsymbol{b} \in I_k$ が存在して
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^{\sigma-1}$ を満たす。

7. ヒルベルトの定理 90

k を $\mathbb{Q}$ の有限次巡回拡大体とし、$\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$ とする。

定理（数体のイデール群に対するヒルベルトの定理 90）

$N_{k/\mathbb{Q}}(\boldsymbol{a}) = 1$ となる任意の $\boldsymbol{a} \in I_k$ に対して、$\boldsymbol{b} \in I_k$ が存在して $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^{\sigma - 1}$ を満たす。

$f : M \to S^3$ を有限絡み目 $L_0 \subset \mathcal{L}$ で分岐する素数次巡回分岐被覆で $\mathrm{Gal}(M/S^3) = \langle \tau \rangle$ とする。

定理（田代；3 次元多様体に対するヒルベルトの定理 90）

$f_*(\boldsymbol{a}) = 0$ となる任意の $\boldsymbol{a} \in I_M$ に対して、$\boldsymbol{b} \in I_M$ が存在して $\boldsymbol{a} = (\tau - 1)\boldsymbol{b}$ を満たす。

8. 種の理論

p を素数、$L_0 = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_r \subset S^3$ を絡み目、$L_0 \subset \mathcal{L}$ を S^3 の非常に許容的な絡み目、$f : M \to S^3$ を L_0 で分岐する p 次巡回分岐被覆とする。$H_1(M)$ のホモロジー類を代表する 1 次元輪体は $f^{-1}(L_0)$ と交わらないとし、このとき $[a], [b] \in H_1(M)$ に対して次のような同値関係を定める。

$[a] \approx [b]$:同じ種に属する $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{lk}(f_*(a), K_i) \equiv \mathrm{lk}(f_*(b), K_i) \bmod p$.

主定理（田代；種の理論）

$$H_1(M)/\approx\ \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$$

cf.）$n \geq 2$ を自然数、$\{p_1, \cdots, p_r : 素数 \mid p_i \equiv 1 \bmod n\}$、
$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ を $p_1, \cdots, p_r$ 上分岐する n 次巡回被覆とする。
$H^+(k)$ のイデアル類を代表するイデアルは各 p_i と互いに素な $\mathcal{O}_k$ のイデアルをとり、$[a], [b] \in H^+(k)$ に対して次のような同値関係を定める。
$[a] \approx [b]$:同じ種に属する$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(a)}{p_i}\right)_n = \left(\frac{N_{k/\mathbb{Q}}(b)}{p_i}\right)_n$.

定理（数体における種の理論）

$$H^+(k)/\approx\, \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1}$$

8. 種の理論

幾何学的種の理論の解釈

$$H_1(M)/\approx\ \xrightarrow{\sim}\ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$$

$g_f := |H_1(M)/\approx|$ を S^3 上の M の種数とする。

幾何学的種の理論の解釈

$$H_1(M)/\approx \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$$

$g_f := |H_1(M)/\approx|$ を S^3 上の M の種数とする。
この時、g_f は次の式で与えられる。

$$g_f = \frac{\prod_{i=1}^{r} e_i}{\deg(f)} = p^{r-1}.$$

ただし、$f : M \to S^3$ は次数 $\deg(f) = p$, 分岐指数 $e_i = p(\forall i)$ であった。

$H_1(M)/\approx\,\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ の証明の概要

$$\begin{array}{cccc} \chi: & H_1(M) & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r \\ & [a] & \mapsto & (\mathrm{lk}(f_*(a), K_i) \bmod p) \end{array}$$ を構成する。

$H_1(M)/\approx\,\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$ の証明の概要

$$\begin{array}{cccc} \chi: & H_1(M) & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r \\ & [a] & \mapsto & (\mathrm{lk}(f_*(a),K_i)\ \mathrm{mod} p) \end{array}$$

を構成する。

$$\begin{array}{c} H_1(M)/\mathrm{Ker}\chi \\ \downarrow\wr \\ f_*(I_M)+P_{S^3}/f_*(U_M)+P_{S^3} \\ \downarrow\wr \\ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1} \end{array}$$

← HNP,Hil90

← 幾何学的類体論の同型射

数論的位相幾何学における新しい辞書

有限次巡回拡大 E/F with $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$	有限次巡回被覆 $f : N \to M$ with $\mathrm{Gal}(N/M) = \langle\tau\rangle$
ハッセのノルム原理 $N_{E/F}(I_E) \cap P_F = N_{E/F}(P_E)$	ハッセのノルム原理 $f_*(I_N) \cap P_M = f_*(P_N)$
ヒルベルトの定理 90 $H^1(\mathrm{Gal}(E/F), I_E) = 1$	ヒルベルトの定理 90 $\{\mathbf{a} \in I_N \mid f_*(\mathbf{a}) = 0\}/(\tau - 1)I_N = 0$
種の理論 $H^+(E)/\approx\, \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1}$	種の理論 $H_1(N)/\approx\, \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r-1}$

10. 今後の展望

ハッセのノルム原理

1. 底空間を一般の 3 次元多様体とした時に成り立つのか?
2. ハッセのノルム原理が成り立たない例

10. 今後の展望

ハッセのノルム原理

1. 底空間を一般の 3 次元多様体とした時に成り立つのか?
2. ハッセのノルム原理が成り立たない例

ヒルベルトの定理 90

任意の分岐被覆に対して成り立つか?

10. 今後の展望

ハッセのノルム原理

1. 底空間を一般の 3 次元多様体とした時に成り立つのか?
2. ハッセのノルム原理が成り立たない例

ヒルベルトの定理 90

任意の分岐被覆に対して成り立つか?

種の理論

一般の被覆次数に対して、数論とパラレルな証明ができるか?

11. 論文紹介

arxiv 論文

1.Hirotaka Tashiro. On the Hasse norm principle for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint. arXiv:2404.06464, 2024.

2.Hirotaka Tashiro. On genus theory for 3-manifolds in arithmetic topology. preprint, 2024.（近日 arxiv に投稿予定）