# バンド手術による絡み目解消経路の特徴付け

清水日菜乃

2024年12月27日

お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科

### 目次

- 1. 研究の背景
  - 1.1 DNA 組換え酵素による絡み目解消
  - 1.2 繋ぎかえによる渦結び目・絡み目解消
- 2. 主定理 (T(2,6) のバンド手術による絡み目解消の特徴付け)
- 3. 定理の証明



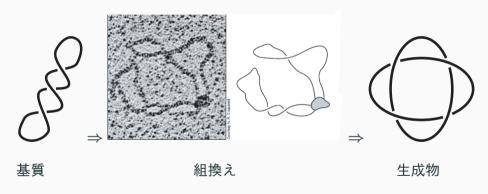
RH 6-cat = 
$$T(2,6) = 6^2_1$$

DNA 組換えによる絡み目解消

#### 組み換えのタングルモデル

Ernst-Sumners, 1990

DNA の部位特異的組換えは、バンド手術でモデル化される。



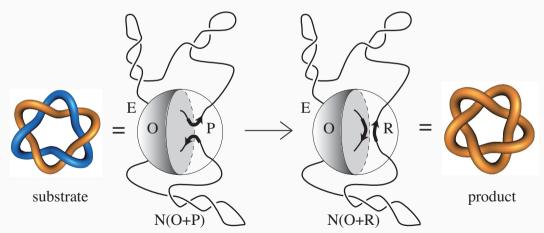
D.W.Sumners, Notices of AMS, 42 (1995)

部位特異的組換えは、特定の部位(塩基配列)の箇所のみ起こる組換え

## 組み換えのタングルモデル

#### Ernst-Sumners, 1990

DNA の部位特異的組換えは、バンド手術でモデル化される。



#### XerCD-dif-Ftsk システムによる絡み目解消

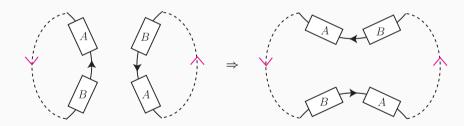
Grainge et~al. (EMBO J. 2007) は XerCD-dif-FtsK は細胞内で得られた DNA 絡み目 (RH 2m-cat (torus link T(2,2m))) で平行な部位を持つものを、何回かの組換えで解くことを示した。



部位の塩基配列を用いて、DNA 絡み目には自然に向きを入れることが出来る。 この実験では組換えが起こる部位 (dif) が 2 つしかないため、絡み目が解かれる過程で現れる成分数は 1 か 2 である。

#### 向きを保つバンド手術となること

Xer-dif-FtsK では、部位 dif(A と B 合わせて dif)を持つ DNA 絡み目の組換えであり、下図のようにモデル化されるので、対応するバンド手術は向きを保つものとなる。



# バンド手術

#### バンド手術

#### 定義

L: 絡み目  $\subset \mathbb{R}^3$ 

$$I=[0,1]$$

 $b:I imes I o \mathbb{R}^3$  埋め込み s.t.  $b(I imes I)\cap L=b(I imes\partial I)$ 

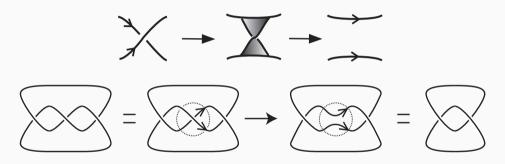
 $L_b = (L - b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$  : L における b でのバンド手術

 $b(I \times I)$  を b と表記する.



#### 向きを保つバンド手術

#### 定義



 $\mathbf{3}_1$  から向きを保つバンド手術で  $\mathbf{2}_1^2$  が得られる。

向きを保つバンド手術で 部位特異的組換えがモデル化される。

向きを保つバンド手術は smoothing と見做せる。

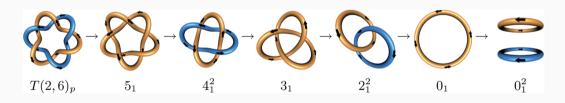
#### 唯一の経路

#### 定理 1 (PNAS 2013)

平行な部位を持つ 2n-cat(平行な向きをもつ T(2,2n) 絡み目)から、組換えの 最後を除く各ステップで交点数を下げて自明な絡み目が得られるならば、

$$T(2,2n) o T(2,2n$$
-1)  $o \cdots o$  trivial knot  $o$  trivial link

が唯一の経路となる。



これは最短経路である。部位(dif)は二つしかないので、途中に現れるのは結び

目か2成分絡み目となる。

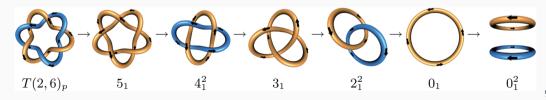
# 仮定の緩和 (Sci. Rep. 2017)

#### 仮定の緩和 (Sci. Rep. 2017)

- 1. 生成物は結び目か2成分絡み目である。
- 2. 経路は最短である。6-cat (T(2,6)) から6 回で解ける
- 3. 各ステップで交点数は増加しない。

#### 注意

これらの仮定がなければ、T(2,6)が解かれる経路は無限に存在する。

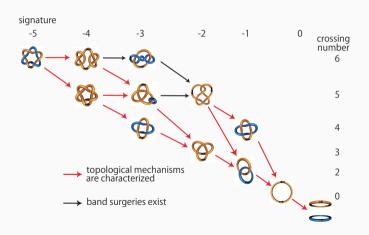


9/39

# 最短経路の特徴付け (Sci. Rep. 2017)

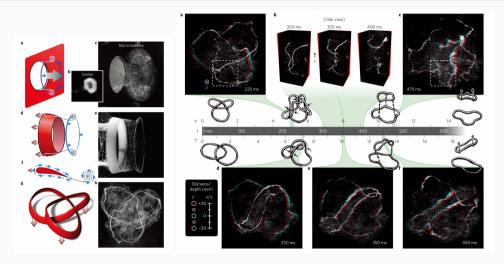
定理 2 (Sci. Rep. 2017)

T(2,6) からの仮定を満たす最短経路は9つである。



渦結び目・絡み目

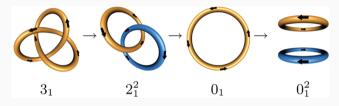
# 渦結び目・絡み目



"Creation and dynamics of knotted vortices",

#### 渦結び目・絡み目

渦結び目は繋ぎ換えによって自明な絡み目に解かれる。



"Creation and dynamics of knotted vortices",

D. Kleckner and W.T.M. Irvine, Nature Physics 9, 253-258 (2013)

渦にも自然に向きが入り、渦の繋ぎ換えも<mark>向きを保つバンド手術</mark>によってモデル 化される。

渦絡み目についても、平行な向きを持つ T(2,6) から繋ぎ換えにより自明な結び目が得られる様子のシミュレーション等を用いた研究が行われている。

渦の絡み目の場合には、成分数に関する制限が無くなる。

# 主定理

# 仮定の緩和

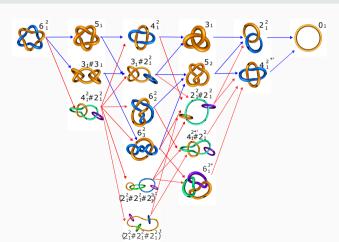
#### 新しい仮定

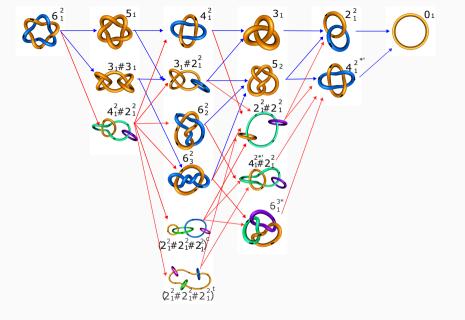
- 1. 現れる絡み目の成分数に制限はない
- 2. 経路は最短である。平行な向きを持つ T(2,6) から自明な結び目まで 5 回で解ける
- 3. 各ステップで交点数は増加しない
- 4. 経路に現れる絡み目は非分離的

#### 主定理

#### 定理

向きを保つバンド手術により平行な向きを持つ T(2,6) が自明な結び目に解かれる仮定を満たす最短経路は 41 通りである。





#### 定理(村杉)

L から向きを保つバンド手術 b により  $L_b$  が得られるとき、

$$\Rightarrow |\sigma(L) - \sigma(L_b)| \leq 1.$$

#### 命題

 $6_1^2$  が  $0_1$  に解かれる最短経路において、現れる絡み目の符号数は-5,-4,-3,-2,-1,0 である。

#### 補題

向きを保つバンド手術は絡み目の成分数を1変化させる。

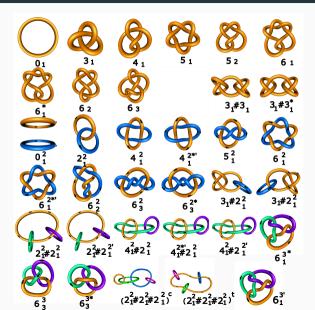
#### 補題

経路に現れる絡み目の成分数は4以下である。

#### 命題

L: 成分数が 4 以下で、交点数が 6 以下の非分離絡み目

- 1.  $\sigma(L) = -4$  かつ成分数が奇数  $\iff L = 5_1, 3_1 \# 3_1, 2_1^2 \# 4_1^2, 6_3^3.$
- 2.  $\sigma(L) = -3$  かつ成分数が偶数  $\iff L = 4_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 3_1 \# 2_1^2, (2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^c, (2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^t.$
- 3.  $\sigma(L) = -2$  かつ成分数が奇数  $\iff L = 3_1, 5_2, 6_2, 6_1^3, 6_1^{3*}, 4_1^2 \# 2_1^{2'}, 4_1^{2*'} \# 2_1^2, 2_1^2 \# 2_1^2.$
- 4.  $\sigma(L) = -1$  かつ成分数が偶数  $\iff L = 6_1^{2*'}, 6_3^{2*'}, 5_1^2, 4_1^{2*'}, 2_1^2, 3_1 \# 2_1^{2'}.$
- 5.  $\sigma(L) = 0$  かつ成分数が奇数  $\iff L = 0_1, 4_1, 6_1, 6_1^*, 6_3, 6_3^*, 2_1^2 \# 2_1^{2'}, 3_1 \# 3_1^*.$



#### 命題 (Kanenobu-Moriuchi 2014)

L:(c+1) 成分の絡み目

 $L_b:L$  から向きを保つバンド手術で得られる c 成分の絡み目

V(L;t): Lの Jones 多項式

$$\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

このとき、以下が成り立つ:

$$V(L;\omega) = \eta i V(L_b;\omega) = \pm i^c (i\sqrt{3})^{\delta}, \quad \eta = \pm 1$$

$$\Rightarrow$$

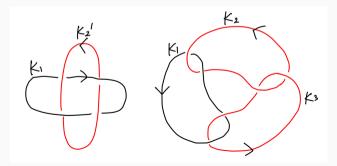
$$i^cV(L;-1) \equiv \eta i^{c-1}V(L_b;-1) \pmod{3^{\delta+1}}$$

特に, 
$$\frac{V(L;\omega)}{V(L_b;\omega)} \in \{\pm 1, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}.$$

#### 補題 (Ishihara)

$$L=K_1\cup K_2\cup K_3, L'=K_1\cup K'_2$$
  $(K_i$ : 結び目) $K_2$  と  $K_3$  に向きを保つバンド手術を行って  $K'_2$  ができる

$$\Rightarrow lk(K_1, K'_2) = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

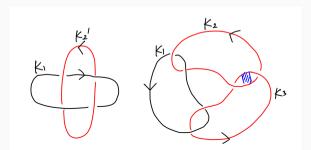


証明:

 $K_2, K_3$  の間に向きを保つバンド手術が存在し、 $K_2'$  を得るとき、ライデマイスター変形によってバンドを L の正則図形の領域の内側に取ることができる。このとき L の他の絡み数は変わらないから、

$$lk(K_1, K'_2) = lk(K_1, K_2) + lk(K_1, K_3)$$

が成り立つ。



#### 補題 (Kanenobu, 2010)

Q(L;x) を L の Q 多項式とする。また、 $\rho(L)=Q(L;(\sqrt{5}-1)/2)$  とする。  $L_b$  が L から向きを保つバンド手術で得られるとき、次が成り立つ:

$$rac{
ho(L)}{
ho(L_b)} \in \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}.$$

#### |証明の準備|

#### 補題

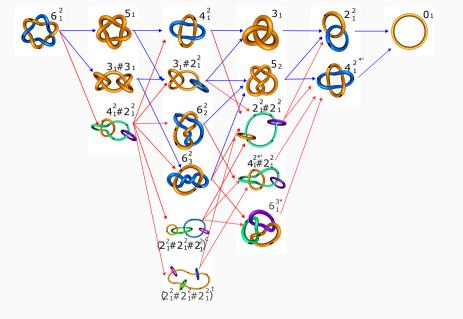
 $L = K_1 \cup K_2$  とする。

 $L_b:L$  から向きを保つバンド手術で得られる絡み目  $lk(K_1,K_2)$  が偶数のとき、

$$Arf(L) = Arf(L_b)$$

が成り立つ。

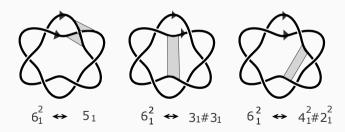
# 主定理の証明



#### 補題

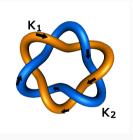
 $6_1^2$  から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -4 の絡み目は、 $5_1,3_1\#3_1,4_1^2\#2_1^2$  である。

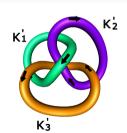
証明:図のように向きを保つバンド手術が存在する。



#### 補題

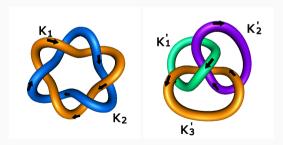
 $6_1^2$  と  $6_3^3$  の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

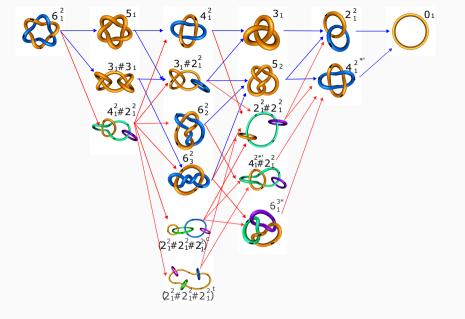




証明:それぞれの各成分を以下のようにおく。 このとき

 $lk(K_1,K_2)=-3, lk(K_1^{'},K_2^{'})=-1, lk(K_2^{'},K_3^{'})=1, lk(K_3^{'},K_1^{'})=-1$  である。補題より、どの 2 成分の間にも向きを保つバンド手術は存在しない。よって、 $6_1^2$  と  $6_3^3$  の間に向きを保つバンド手術は存在しない。





#### 補題

 $4^2_7\#2^2_7$  から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -3 の 絡み目は、 $4_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 3_1 \# 2_1^2, (2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^c, (2_1^2 \# 2_1^2 \# 2_1^2)^t$ である。

証明:図のようにバンド手術が存在する。補題から従う。







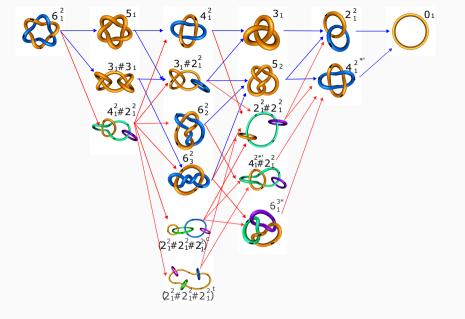






 $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow 4_1^2$ 

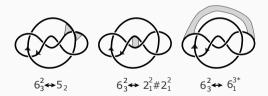
 $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow 6_2^2$   $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow 6_3^2$   $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow 3_1 \# 2_1^2$   $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow (2_1^2 \# 2_1^2 + 2_1^2)^2$   $4_1^2 \# 2_1^2 \leftrightarrow (2_1^2 \# 2_1^2 + 2_1^2)^2$ 

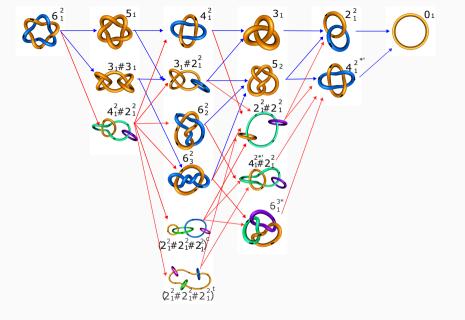


#### 補題

 $6_3^2$  から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -2 の絡み目は、 $5_2, 2_1^2 \# 2_1^2, 6_1^{3*}$  である。

証明:図のように向きを保つバンド手術が存在する。





補題

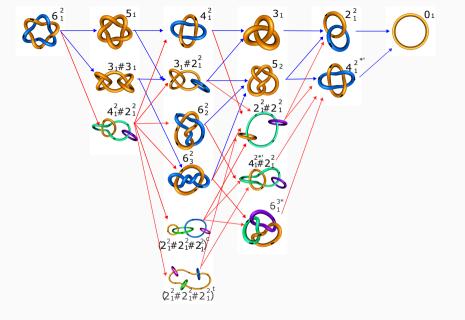
$$6_3^2$$
と $3_1,6_2,4_1^2\#2_1^{2'},4_1^{2*'}\#2_1^2$ の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明: $6_2, 4_1^2 \# 2_1^{2'}, 4_1^{2*'} \# 2_1^2$  について、

$$\begin{split} \frac{V(6_3^2;\omega)}{V(4_1^2\#2_1^{2'};\omega)} &= \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}, \\ \frac{V(6_3^2;\omega)}{V(4_1^{2^{*'}}\#2_1^2;\omega)} &= \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}, \\ \frac{\rho(6_3^2)}{\rho(6_2)} &= -\sqrt{5} \notin \{\pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1}\}. \end{split}$$

補題よりこれらの間に向きを保つバンド手術は存在しない。

 $3_1$  について、 $lk(6_3^2) = -2$  だが、 $Arf(6_3^2) = 0$ ,  $Arf(3_1) = 1$  だから、補題より  $6_3^2$  から  $3_1$  への向きを保つバンド手術は存在しない。



#### 補題

 $6^{3*}_1$  から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 6 以下で符号数が -1 の絡み目は  $4^{2*'}_1$  である。

証明:図のように向きを保つバンド手術が存在する。



#### 補題

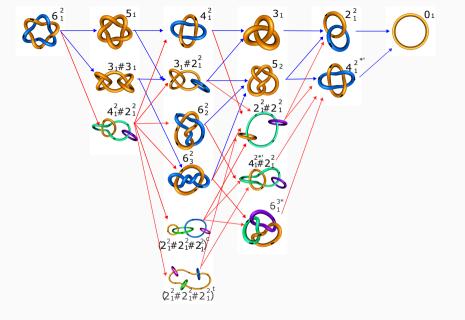
 $6_1^{3*}$  と  $6_1^{2*}, 2_1^2$  の間に向きを保つバンド手術は存在しない。

証明: $6^{2*}_{1}$ , $2^{2}_{1}$  について、

$$rac{V(6_1^{2*};\omega)}{V(6_1^{3*};\omega)}=i\sqrt{3}
otin\{\pm i,-\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

$$rac{V(2_1^2;\omega)}{V(6_1^{3*};\omega)} = \sqrt{3} \notin \{\pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1}\}$$

となる。よって、補題より  $6_1^{3*}$  と  $6_1^{2*}, 2_1^2$  の間に向きを保つバンド手術は存在しない。



#### 補題

 $4_1^{2*'}$  から向きを保つバンド手術で得られる交点数が 4 以下で符号数が 0 の絡み目は、 $0_1$  である。

証明:図のように向きを保つバンド手術が存在する。



#### 参考文献

- 1. Kanenobu, T., Moriuchi, H., Links which are related by a band surgery or crossing change. Bol. Soc. Mat. Mex. 20, 467-483 (2014)
- 2. Murasugi, K., On a Certain Numerical Invariant of Link Types. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 117, (1965), pp. 387-422.
- 3. Shimokawa,K., Ishihara, K., Grainge, I., Sherratt, DJ., Vazquez, M., FtsK-dependent XerCD-dif recombination unlinks replication catenanes in a stepwise manner. Proc Natl Acad Sci U S A. (2013) Dec 24;110(52):20906-11.
- 4. Stolz, R., Yoshida, M., Brasher, R. et al. Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification. Sci Rep 7, 12420 (2017)
- 5. Kanenobu,T.,Band surgery on knots and links,S , Journal of Knot Theory and Its Ramifications (2010) 19:12, 1535-1547
- 6. Kanenobu,T., Band surgery on knots and links,, II, Journal of Knot Theory and Its Ramifications (2012) 21:09
- 7. Kanenobu,T.,Band surgery on knots and links, III, Journal of Knot Theory and Its Ramifications (2016) 25:10