Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$-representations and odd-th cyclic covers of double twist knots

坂本穂波

お茶の水女子大学理学部数学科 4 年

December 27, 2024

共同研究者: 植木潤（お茶の水女子大学基幹研究院）
丹下稜斗（早稲田大学教育学部）

目次

目次

示したいこと

定義

素数 p に対し, $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ で p 進整数環を表す.

π を群とする.

関数 $\chi\colon \pi \to \mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標である
$\Leftrightarrow$ $\chi = \mathrm{tr}\,\rho$ をみたす $\mathbb{Z}_p$ の拡大上の SL_2 表現が存在する.

$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が liminal である
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が絶対可約であり, その任意の開近傍には絶対可約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が含まれる.

Thereom 1.1.

$k, l \in \mathbb{Z}$ とおく.
素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切るとき, $J(2k, 2l)$ の結び目群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標を持つ.

Thereom 1.1.

$k, l \in \mathbb{Z}$ とおく.
素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切るとき, $J(2k, 2l)$ の結び目群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標を持つ.

Theorem1.1 は, 結び目と素数の類似性に基づいて, 早稲田大学の丹下さんが見つけた現象の一般化である

数論側は cf.[Mazurde2011 Bill.AMS]

Brude & de Rham の理論が背景にあると考えられる

詳しくは勉強中 $+$ 情報収集中です

Thereom1.1 を示すために..

Section 2

Double twist knot の性質の確認し, 既約な可約 $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 指標多様体の交点を計算する

Section 3

セクション 2 を用いて, $J(2k, 2l)$ が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 指標をもつことを示す

Thereom1.1 を示すために..

Section 4

$m \in \mathbb{Z}$, $t^2 - t + m = (t-a)(t-b)$ とし, $L_n = a^n + b^n$ とすると,

$$p \mid L_{2n+1}, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Longrightarrow \left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$$

ここで, ルジャンドル記号 $\left(\frac{a}{p}\right) \in \{0, \pm 1\}$ を次のように定義する.

- $p \mid a$ のとき $\quad \left(\frac{a}{p}\right) = 0$
- $p \nmid a$ のとき
  - $\exists x \in \mathbb{Z}$, $a \equiv x^2 \mod p$ のとき $\quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1$
  - $\forall x \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv x^2 \mod p$ のとき $\quad \left(\frac{a}{p}\right) = -1$

Thereom1.1 を示すために..

Section 5
結び目 K の巡回被覆 $M_n \to S^3$ の性質の確認し,
その Alexander **多項式 $\Delta_K(t) = mt^2 - (2m-2)t + m$ について**
$\#H_1(M_{2n+1}) = L_{2n+1}^2$ **が成り立つことの証明する.**

これとセクション 3,4 **から** $p \mid \#H_1(M_{2n+1}) \Rightarrow \left(\frac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ **を示し,**
Theorem1.1 **を示す.**

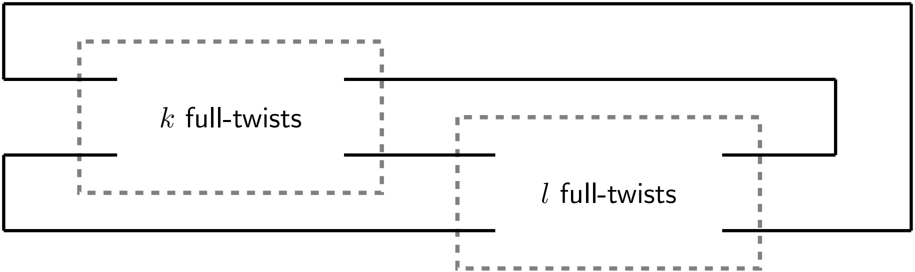
Thereom 1.1.

$k, l \in \mathbb{Z}$ **とおく.**
素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ **のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切るとき, その群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は** liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ **指標を持つ.**

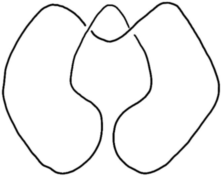
目次

Double twist knot

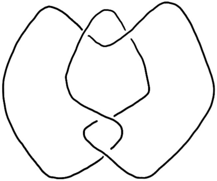
すべての種数 1 の 2 橋結び目は, double twist knot $J(2k, 2l)$, $(k, l) \neq (0, 0)$ であることが知られている.



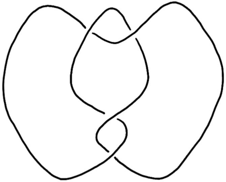
$J(2k, 2l)$



$J(2,0)$

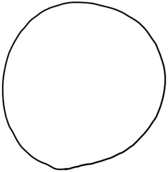


$J(2,2)$

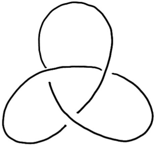


$J(2,-2)$

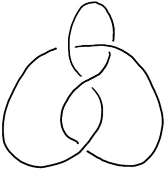
$\cong$ $\cong$ $\cong$



0_1



3_1



4_1

a, b: meridians
$w := (ba^{-1})^k (b^{-1}a)^k$

$J(2k, 2l)$ の結び目群は次のような表示をもつ.

$$\pi \colon = \pi_1(S^3 - J(2k, 2l)) = \langle a, b \mid w^l a = bw^l \rangle$$

$J(2k, 2l)$ の Seifert 行列は $V = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ で与えられ,

Alexander 多項式は

$$\Delta_{J(2k,2l)}(t) = \det(tV - V^{\perp}) = klt^2 + (1 - 2kl)t + kl$$

となる.

各 $g \in \pi$ に対して,

写像 $\mathrm{tr}g \colon \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}) \to \mathbb{C}; \rho \mapsto \mathrm{tr}\rho(g)$ とする.

$\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の共役類は

$$x := \mathrm{tr}\ a,\ y := \mathrm{tr}\ ab^{-1}$$

で表せる.

非可換な SL_2-representation は次のように定義される Riley の普遍表現 $\rho^R\colon \pi \to \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ によって示せる.

$$\rho^R(a) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \rho^R(b) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ y-2 & s^{-1} \end{pmatrix}$$

$x = s + s^{-1}$ であり

x, y は Riley 多項式

$$f_{k,l}(x, y) = \Phi_{k,l}(x, y-2) = 0$$

をみたす.

既約表現の共役類と $y - 2 \neq 0$ をみたす $f_{k,l}(x, y) = 0$ 上の点の間には 1 対 1 対応が存在する.

$y - 2 = 0$ の各点は, 可逆表現の共役類とアーベル表現の共役類のペアに対応する.

Proposition 2.1.

$f_{k,l}(x,y)=0$ と $y-2=0$ の交点は $(x,y)=\left(\pm\sqrt{4-\frac{1}{kl}},2\right)$ である.

Proof

各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $S_n(z)\in\mathbb{Z}[z]$ は

$$S_{n-1}(2\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},\ \ (\theta\in\mathbb{R},\sin\theta\neq 0)$$

によって定義される第 2 種 Chebyshev 多項式の n 項と定める.

すると,

$$S_{-1}(z)=0, S_{\pm 1-1}(z)=\pm 1$$

$$S_{n+1}(z)-zS_n(z)+S_{n-1}(z)=0\ \ (n\in\mathbb{Z})$$

よって, $S_{-1-n}(z)=-S_{-1+n}(z)$, $S_{n-1}(\pm 2)=(\pm 1)^{n-1}n$ である.

そして,

$$z := \mathrm{tr}\ w = 2 + (y-2)(-x^2+y+2)S_{k-1}^2(y)$$

とおくと,

[Tra18, Subsection 2.2] より, 既約指標の多様体は

$$f_{k,l}(x,y) = S_l(z) - (1+(-x^2+y+2)S_{k-1}(y)(S_k(y)-S_{k-1})(y))S_{l-1}(z)$$

である.

$y-2=0$ のとき $z=2$ であり, $S_{n-1}(2)=n$ なので,

$$0 = f_{k,l}(x,2) = (l+1)-(1+(-x^2+2+2)k((k+1)-k))l = 1-(4-x^2)kl$$

なので, $x = \pm\sqrt{4+\frac{1}{kl}}$ である.

$\square$

目次

Theorem 3.1.

$kl \neq 0$

r: $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分

$J(2k, 2l)$ の群が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は,

i) $p = 2$, $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \mod 8$

ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$

$0 \neq a \in \mathbb{Z}$ の非平方部分を a/b^2 で定義する.

(b は $b^2 \mid a$ をみたす最大の整数)

Theorem 3.1.

$kl \neq 0$

r: $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分

$J(2k, 2l)$ の群が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は,

i) $p = 2$, $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \mod 8$

ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$

$\left(\dfrac{a}{p}\right) \in \{0, \pm 1\}$ を次のように定義する.

- $p \mid a$ のとき $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 0$
- $p \nmid a$ のとき
  - $\exists x \in \mathbb{Z}$, $a \equiv x^2 \mod p$ のとき $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$
  - $\forall x \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv x^2 \mod p$ のとき $\left(\dfrac{a}{p}\right) = -1$

次の補題はヘンゼルの補題の初等的な結果である.

Lemma 3.2.

$0 \neq a \in \mathbb{Z}$, $p^2 \nmid a$ のとき,

$\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow$

i) $p = 2$, $a \equiv 1 \mod 8$

ii) $p \neq 2$, $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$

Proof

i) $p=2$ とする.
$\sqrt{a}\in\mathbb{Z}_2$ のとき,

$$\sqrt{a}=\Sigma_i b_i 2^i = b_0+b_1 2+b_2 2^2+b_3 2^3+\cdots, b_i\in\{0,1\}$$

と表せ,

$$a\equiv(b_0+2b_1+4b_2)^2\equiv b_0^2+4b_1(b_0+b_1) \mod 8$$

したがって, $f^2\nmid a$ という仮定から, $b_0=1$ である.

$b_1=0,1$ でも, $a\equiv 1 \mod 8$ である.

逆に, $a=8b+1$, $b\in\mathbb{Z}$ であると仮定すると, $X^2-a=0$ が解
$X=\alpha\in\mathbb{Z}_2$ のとき, $\exists\beta\in\mathbb{Z}_2$, $\alpha=2\beta+1$ であり,

$$\alpha^2-a=(2\beta+1)^2-(8b+1)=4(\beta^2+\beta-2b)$$

多項式 $Y^2+Y-2b \mod 2$ は $\mathbb{F}_2$ 上で単根をもつので, ヘンゼルの補題により, Y^2+Y-2b は $\mathbb{Z}_2$ 上で根をもつ.
したがって, X^2-a は $\mathbb{Z}_2$ の根をもつ.

ii) $p \neq 2$ であるとする.
$p \mid a$ のとき, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}_p$ である.
$p \nmid a$ のとき, $X^2 - a \mod p$ は $\mathbb{F}_{p^2}$ 上で単根をもち, ヘンゼルの補題によって $\mathbb{Z}_p$ の 2 次拡大に持ち上がられる.
加えて,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1,\ X^2 - a \mod p \text{ の根は } \mathbb{F}_p \text{ に属する}$$

$$\Leftrightarrow X^2 - a \mod p \text{ の根は } \mathbb{Z}_p \text{ に属する}$$

□

Lemma 3.3.

$\pi_1(S^3 - J(2k,2l))$ の liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標の共役類と $f_{k,l}(x,y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の $\mathbb{Z}_p^2$ 上の交点の間に 1 対 1 対応が存在する.

Proof

ρ が $\mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\ \rho \subset \mathbb{Z}_p$ による liminal-representation であるとき, $\mathrm{tr}\rho$ は $\mathbb{Z}_p^2$ の $y - 2 = 0$ 上にある.
加えて, すべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\rho \equiv \rho' \mod p^n$ となるような既約表現 ρ' が存在する.
よって, $\mathrm{tr}\ \rho$ は $f_{k,l}(x,y) \equiv 0 \mod p^n$ 上にある.
したがって, $\mathrm{tr}\ \rho$ は $f_{k,l}(x,y) = 0 \in \mathbb{Z}_p$ 上にある.

逆を示す.
Section2 の Riley 表現 ρ^R は $\mathbb{Z}_p[x,y]$ の 2 次拡大における表現であることに注意する.

Prop 2.1 より, $f_{k,l}(x,y)=0$ と $y-2=0$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 上の交点をもつ.
そのとき, $f_{k,l}(x,2)=(f_{k,l}(x,y) \mod (y-2))$ は $\mathbb{Z}_p$ 上で単根をもつ.
そして, ヘンゼルの補題により, $(x,y)=(\alpha,2)$ 周りで陰関数
$x=x_f(y)\in\mathbb{Z}_p[[y-2]]$ が得られる.
$x=x_f(y)$ を Riley の表現に代入することで, $\mathbb{Z}_p[[y-2]]$ の 2 次拡大上の既約表現 ρ^R が得られる.
このとき, $\mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\rho^R\subset\mathbb{Z}_p[[y-2]]$ である.

各要素 $\mathbb{Z}_p[[y-2]]$ は, 任意の $y \in \mathbb{Z}_p$ について, p-進単位円板 $|y-2|_p < 1$ において $\mathbb{Z}_p$ に収束することに注意する.

$y = 2$ を代入すると, この ρ^R は $(\alpha, 2)$ において $\mathrm{tr}\ \rho \subset \mathbb{Z}_p$ をもつ可約表現 ρ をもたらす.

代わりに, $y = \eta \in \mathbb{Z}_p$ で $0 \neq |2-\eta|_p < 1$,
すなわち, ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $2 \equiv \eta \mod p^n$ が成り立つとき,
ρ^R は $\mathrm{tr}\ \rho_\eta \subset \mathbb{Z}_p$ をもつ絶対既約表現 ρ_η をもたらす.

したがって, $\mathrm{tr}\ \rho$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.

$\square$

Theorem 3.1.

$kl \neq 0$

r:$4k^2l^2 - kl$ の square-free part

$J(2k, 2l)$ の群が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は,

i)$p = 2$, $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \mod 8$

ii)$p \neq 2$, $p \nmid kl$, $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$

Proof

$f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ が $\mathbb{Z}_p^2$ 上で交点をもつ
$\Leftrightarrow p \nmid kl$, $\sqrt{4k^2l^2 - kl} \in \mathbb{Z}_p$
Lemma 3.2 と Lemma 3.3 により, 示される.

□

Example

$\pi_1(S^3 - J(2,2l))$ が liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ条件は $\left(\frac{4l^2-l}{p}\right) = 1$ である.

初等的な計算により, 次を得る.

(i) $J(2,2) = 3_1$: $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$, i.e.,$p \equiv \pm 1 \mod 12$

(ii) $J(2,-2) = 4_1$: $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, i.e.,$p \equiv \pm 1 \mod 5$

(iii) $J(2,4)$: $\left(\frac{14}{p}\right) = 1$, i.e.,$p \equiv \pm 1, \pm 9, \pm 25, \pm 5, \pm 11, \pm 13 \mod 56$

(iv) $J(2,-4)$: $\left(\frac{18}{p}\right) = 1$, i.e.,$p \equiv \pm 1 \mod 8$

(v) $J(2,6)$: $p = 2$, $\left(\frac{33}{p}\right) = 1$, i.e.,$p \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16 \mod 56$

(vi) $J(2,-6)$: $\left(\frac{39}{p}\right) = 1$,

i.e.,$\pm p \equiv 1, 5, 7, 19, 23, 25, 26, 35, 41, 49, 61, 67 \mod 156$

目次

ルカス数列とフィボナッチ数列

$m \in \mathbb{Z}$, $t^2 - t + m = (t-a)(t-b)$

このとき, $a + b = 1$, $ab = m$

$L_n = a^n + b^n$: ルカス数列

$F_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$: フィボナッチ数列

すると,

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_2 = 1 - 2m,\ L_{n+2} = L_{n+1} - mL_n$$

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} - mF_n$$

したがって, $L_n, F_n \in \mathbb{Z}$

ルカス数列とフィボナッチ数列の関係式

$$L_n^2 + (4m-1)F_n^2 = 4m^n \qquad \cdots(\star)$$

$a+b=1$, $ab=m$ より, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 1-4m$ から,

$F_n^2 = \left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right)^2 = \frac{(a^n-b^n)^2}{1-4m}$ となるので,

$$\begin{aligned} L_n^2 + (4m-1)F_n^2 &= (a^n+b^n)^2 + (4m-1)\frac{(a^n-b^n)^2}{1-4m} \\ &= (a^n+b^n)^2 - (a^n-b^n)^2 \\ &= 4a^nb^n \\ &= 4m^n \end{aligned}$$

$\square$

Theorem4.1.

素数 p に対して，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $p|L_{2n+1}$ であるとき，

$\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right)=1$ である．

Proof

$p|L_{2n+1}$，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると，

$L_{2n+1}^2+(4m-1)F_{2n+1}^2=4m^{2n+1}$，$p \nmid m(4m-1)$ より，

$$(4m-1)F_{2n+1}^2 \equiv (2m^n)^2 m \mod p$$

$$\therefore m(4m-1)F_{2n+1}^2 \equiv \left(2m^{n+1}\right)^2 \mod p$$

よって，$m(4m-1)=4m^2-m$ は $\bmod p$ で平方である．

$\square$

なぜ, $p \nmid m(4m-1)$ なのか

- $p \mid m$ のとき

  $L_1 = 1,\ L_{n+1} = L_n - mL_{n-1} \equiv L_n \mod m$ なので,
  $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $L_n \equiv 1 \mod m$
  よって, $p \nmid L_n$ である.

- $p \mid 4m-1$ のとき
  $L_n^2 + (4m-1)F_n^2 = 4m^n$ なので,

$$0 + 0 \equiv 4m^n \mod 4m-1$$

となってしまい, 矛盾する.

目次

$\Delta_K(t)$: 結び目 $K \in S^3$ の Alexander 多項式

Fox–Weber's formula によると, K 上に分岐した $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $M_n \to S^3$ は, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$r_n := |H_1(M_n;\mathbb{Z})| = \mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t))|$$

ここで, G が有限群であるとき, $|G|$ は G の位数 $\#G$ と定義され, G が無限群であるとき, $|G| = 0$ とする.

多項式 $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ に対して, $\mathrm{Res}(f(t), g(t)) \in \mathbb{Z}$ を終結式とする.

Fox などによって, $H_1(M_n)$ の正確な群構造が知られている.

Theorem 5.1.

$\Delta_K(y) = mt^2 + (1-2m)t + m$, $m \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$\text{ある奇数が存在して}, \ p \mid r_n \Rightarrow \left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$$

Proof

Eulertotient 関数は $m \geq 6$ のみから $\varphi(m)$ をみたす r_n となるのは $m = 1$ で $6|n$ であり, 任意の奇数 n に対して $0 \neq r_n = \# H_1(M_n)$ である.

$m = 0$ のとき, $r_n = 1$, $p \nmid r_n$ である.

$m \neq 0$ と仮定する.

$$\Delta_K(t) = mt^2 + (1-2m)t + m = m(t-\alpha)(t-\beta), m \in \mathbb{Z}$$

と書ける.
そのとき,

$$\alpha\beta = 1, \alpha + \beta = \frac{2m-1}{m}$$

$$r_n = m^n(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) = m^n(2 - \alpha^n - \beta^n)$$

加えて, $t^2 - t + m = (t-a)(t-b)$ と書くと, $a + b = 1$, $ab = m$ であり,

$$a^2 + b^2 = 1 - 2m = -m(\alpha + \beta)$$

$$a^2b^2 = m^2 = (-m\alpha)(-m\beta)$$

となる. したがって, $\{a^2, b^2\} = \{-m\alpha, -m\beta\}$ である.
$a^2 = -m\alpha$, $b^2 = -m\beta$ とする.

n が奇数であるとき,

$$
\begin{aligned}
L_n^2 &= (a^n + b^n)^2 \\
&= ((-m\alpha)^n + (-m\beta)^n + 2m^n) = m^n(2 - \alpha^n - \beta^n) \\
&= m^n(2 - \alpha^n - \beta^n) \\
&= -\mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t)) \\
&= r_n
\end{aligned}
$$

Theorem4.1 から, n が奇数のとき, $p \mid L_n \Rightarrow \left(\dfrac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$ である.

よって, n が奇数のとき,

$$
p \mid r_n \Rightarrow \left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1
$$

Thereom 1.1.

$k, l \in \mathbb{Z}$ とおく.
素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切るとき, $J(2k, 2l)$ の結び目群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標を持つ.

Proof

素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切る

$$\xrightarrow{Theorem 4.1} \left(\frac{4m^2 - m}{p}\right) = 1$$

$\xrightarrow{Theorem 3.1}$ $J(2k, 2l)$ の結び目群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標を持つ

Remark

Thereom 1.1'

$k, l \in \mathbb{Z}$ とおく.
素数 p が double twist knot $J(2k, 2l)$ のある奇数巡回被覆の H_1 のトーションサイズを割り切るとき，その群 $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$-表現を持つ.

参考文献①

[BTTU23] Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic* SL_2*-representations and L-functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.

[Bur67] Gerhard Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33. MR 212787

[dR67] Georges de Rham, *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. (2) **13** (1967), 187–194. MR 240804

[Fox60] Ralph H. Fox, *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 187–196. MR 119210

[HMP16] Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti, *The* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$*-character variety of the figure eight knot*, Illinois J. Math. **60** (2016), no. 1, 55–98. MR 3665172

[HP15] Michael Heusener and Joan Porti, *Representations of knot groups into* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *and twisted Alexander polynomials*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 313–354. MR 3402353

[Ily21] Mednykh Ilya, *Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two*, preprint. arXiv:2111.04292, November 2021.

[KMTT18] Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L-functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3171–3195. MR 3766846

[Lag85] J. C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density* 2/3, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 449–461. MR 789184

参考文献②

[Mar16] Julien Marché, *Character varieties in SL_2 and Kauffman Skein algebras*, Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, RIMS Kôkyûroku, no. 1991, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 4 2916, pp. 27–42.

[Maz11] Barry Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089

[MTT24] Yasushi Mizusawa, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On the Burde–de Rham theorem for finitely presented pro-p groups*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), arXiv:2408.01270.

[MTTU17] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for* SL_2*-representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015

[Neu99] Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)

[Nys96] Louise Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 257–283. MR 1411348 (98a:20013)

[Tra18] Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388

[TTU22] Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots, −3-Dehn surgeries, and L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

[TU24] Ryoto Tange and Jun Ueki, *Twisted Iwasawa invariants of knots*, Math. Nachr. **297** (2024), no. 4, 1519–1534. MR 4734983

[Web79] Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)