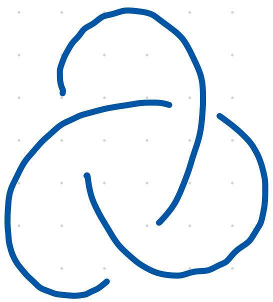
2プラット2次元結び目のアレキサンダー多項式

安田順平（阪大, DC1）

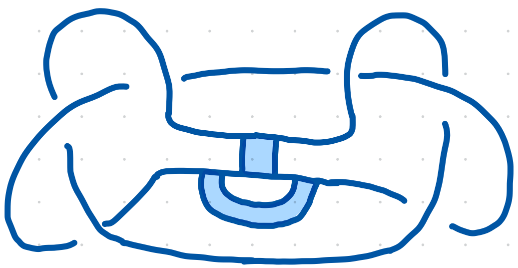
§ 2橋結び目

§ スパン 2次元結び目

§ 2プラット2次元結び目、主結果

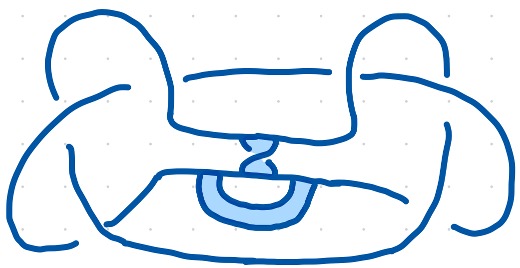


2-bridge knot



spun 2-knot of 2-bridge knot

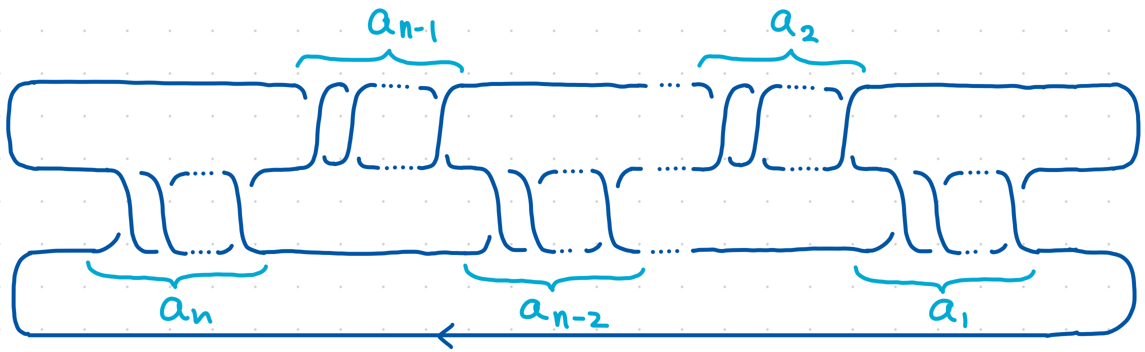
new!



2-plat 2-knot

§ 2橋結び目

$$a/p := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n}}} \quad (n: \text{奇数},\ a_i \in \mathbb{Z})$$

$K(a/p) :=$ 

2橋絡み目.

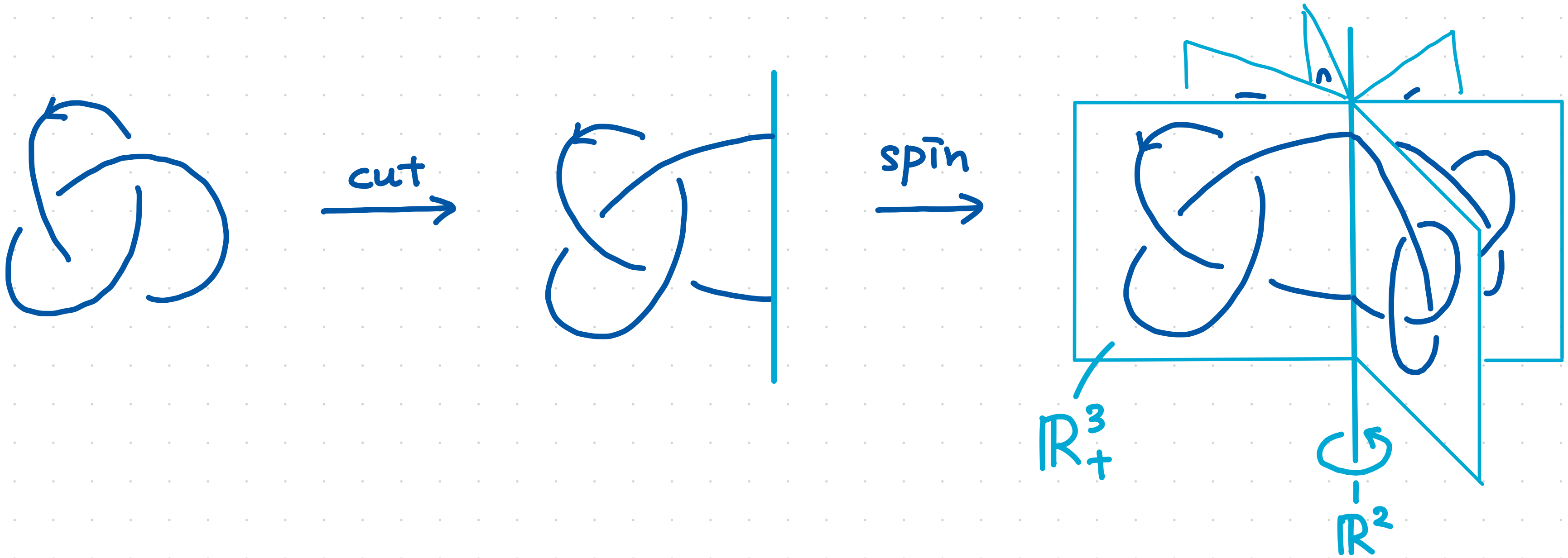
p:奇数 $\Leftrightarrow$ $K(a/p)$:結び目. (p:偶数 $\Leftrightarrow$ $K(a/p)$:絡み目)

事実 (Schubert, '56) $p, p' \geq 1$:奇数.

- $K(a/p) \cong -K(a/p)$: 可逆.
- $K(a/p) \cong K(a'/p') \Leftrightarrow p' = p$ & $a' \equiv a^{\pm 1} \pmod p$.

§ スパン2次元結び目 $S^2 \overset{\text{sm.}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^4$ (or S^4)

K：結び目　　$\mathring{K}$：タングル　　σK：スパン2次元結び目



事実

▷ $\sigma K! \cong -\sigma K$ ・負のもろて型．(Marumoto)

▷ $\sigma K(a/p) \cong \sigma K(a'/p') \iff K(a/p) \cong_w K(a'/p')$

$\iff p' = p$ & $a' \equiv \pm a^{\pm 1} \pmod p$.

事実 $\sigma K(a/p) \cong \sigma K(a'/p') \iff K(a/p) \cong_w K(a'/p')$.

Proof. $\sigma K(a/p) \cong \sigma K(a'/p') \Rightarrow G(\sigma K(a/p)) \cong G(\sigma K(a'/p'))$

$\Rightarrow G(K(a/p)) \cong G(K(a'/p'))$ (Artin)

$\Rightarrow K(a/p) \cong_w K(a'/p')$ (Gordon-Lucke)

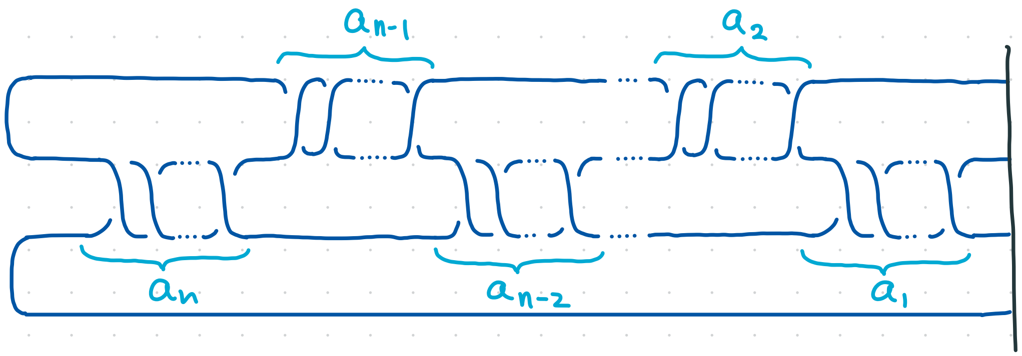
$\Rightarrow \sigma K(a/p) \cong_w \sigma K(a'/p')$

σK : 負のもろ型

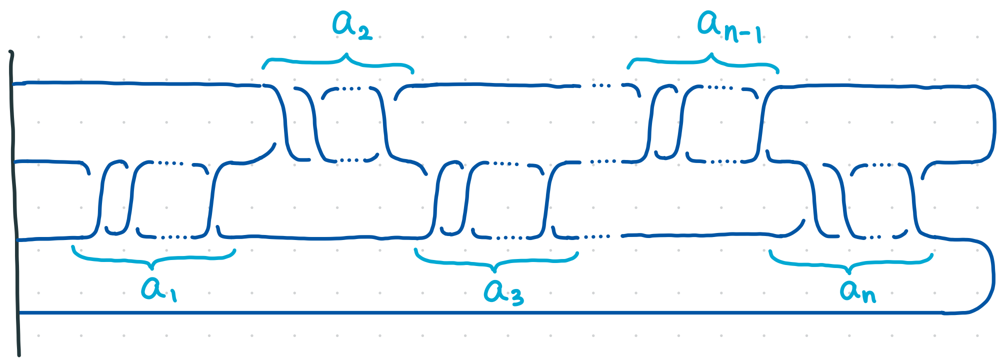
$\Rightarrow \sigma K(a/p) \cong \sigma K(a'/p')$. (Marumoto, Litherland) $\blacksquare$

(K : 可逆 $\Rightarrow$ σK : 正のもろ型)

◡̈ バンド付き絡み目による $\sigma K(a/p)$ の表示.



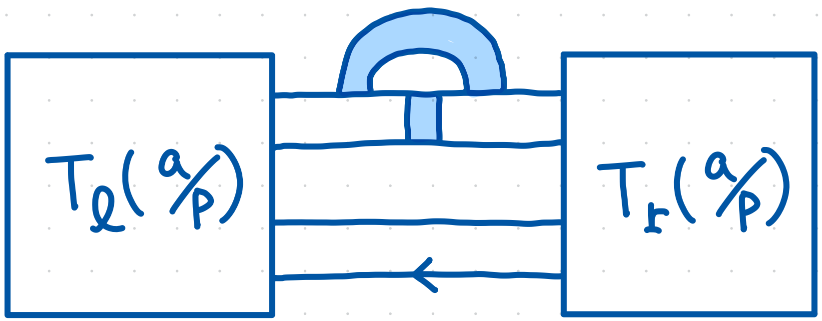
$T_l(a/p)$



$T_r(a/p)$

($T_l(a/p)$, $T_r(a/p)$ は有理タングルより well-defined.)

$\rightsquigarrow$ $\sigma K(a/p) =$

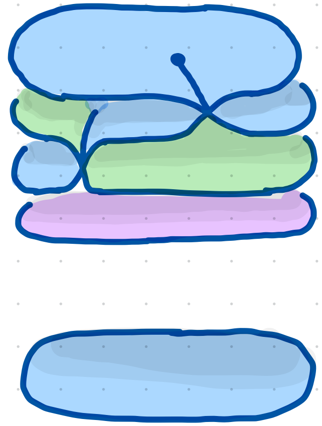


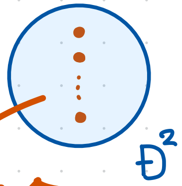
.

§2 プラット2次元結び目, 主結果

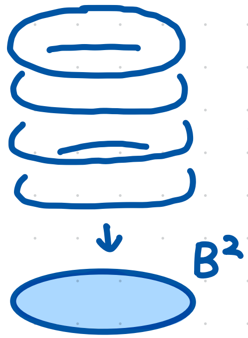
S : 2次元m-ブレイド $\overset{\text{def}}{\iff}$ Sは次をみたす $D^2 \times B^2$ $(\subset \mathbb{R}^4)$ 内の曲面:

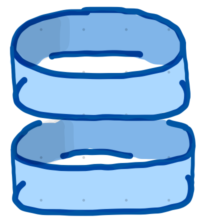
$$
(1)\quad
\begin{array}{ccc}
D^2 \times B^2 & \supset & S \\
\downarrow & \circlearrowright & \downarrow \\
B^2 & = & B^2
\end{array}
$$
: (単純)分岐被覆写像.



(2) $\partial S =$ 

$\times\, \partial B^2$: 自明な閉ブレイド.

S : 2次元 (2m)-ブレイド $\Rightarrow$ $\partial S =$ 

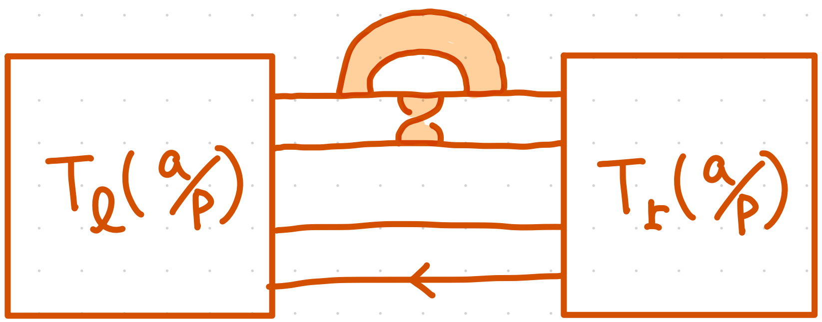
$\rightsquigarrow$ $A_S :=$ 

定義 $S \cup A_S$: mプラット曲面絡み目 (S の プラット閉包).

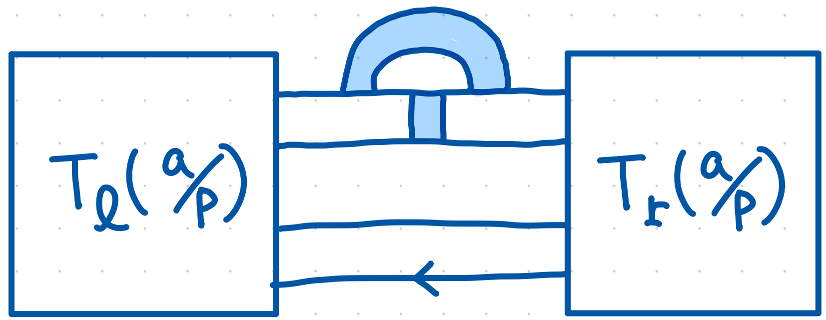
定理（2プラット2次元結び目の標準形）

- F：2プラット2次元結び目 $\Rightarrow$ ${}^{\exists}a/p$ s.t. $F \cong F(a/p)$.
- ${}^{\forall}a/p$, $F(a/p)$ は2プラット曲面絡み目である.

$F(a/p)$



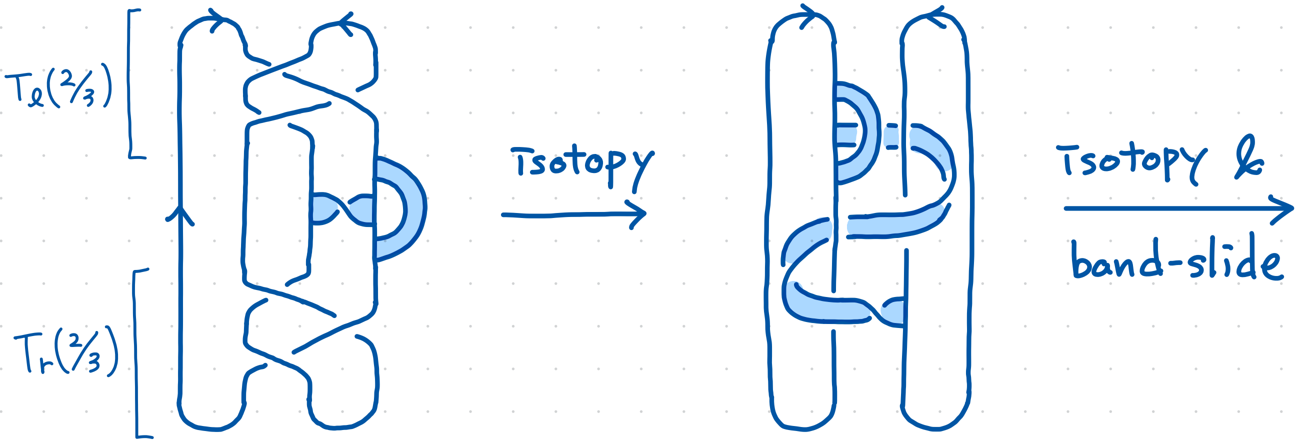
(cf. $\sigma K(a/p)$



)

例

$(a/p = 2/3)$



命題 ▷ $F(a/p)! \cong -F(a/p)$・負のもろて型. (Marumoto)
▷ p: 奇数 $\Rightarrow$ $F(a/p)$: 2次元結び目.
▷ p: 偶数 $\Rightarrow$ $F(a/p)$: $(S^2 \sqcup Kb)$-絡み目.

補題 $a' \equiv a \mod p \Rightarrow F(a'/p) \cong F(a/p)$.

(注意) $a' \equiv a^{-1} \mod p$ でも $F(a'/p) \cong F(a/p)$ とは限らない (後述).

定理 $p \geq 1$: 奇数, a: 偶数 s.t. $\mathrm{g.c.d}(a,p) = 1$.

$$G(F(a/p)) \cong \langle x, y \mid w^{-1} y w = x \rangle.$$

$$w := x^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} \cdots x^{\varepsilon_{p-2}} y^{\varepsilon_{p-1}}, \quad \varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor}.$$

$\lfloor x \rfloor := \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$

定理 $p \geq 1$：奇数，a：偶数 s.t. $\gcd(a,p)=1$.

$$G(F(a/p)) \cong \langle x, y \mid w^{-1} y w = x \rangle.$$

$$w := x^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} \cdots x^{\varepsilon_{p-2}} y^{\varepsilon_{p-1}}, \quad \varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor}.$$

$\lfloor x \rfloor := \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$

事実 $p \geq 1$：奇数，a：奇数 s.t. $\gcd(a,p)=1$.

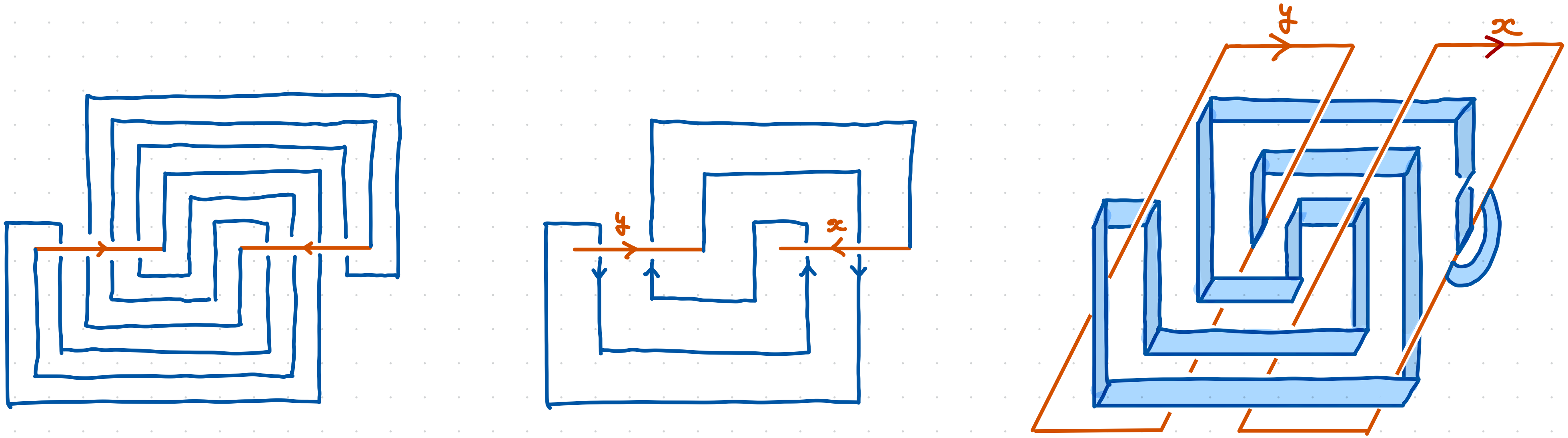
$$G(K(a/p)) \cong \langle x, y \mid w^{-1} y w = x \rangle.$$

$$w := x^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} \cdots x^{\varepsilon_{p-2}} y^{\varepsilon_{p-1}}, \quad \varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor}.$$

Proof $p \geq 1$: 奇数, a : 奇数 s.t. $\mathrm{g.c.d}(a,p) = 1$.

$\left(a/p = 3/5\right)$: $G(K(a/p)) = \langle x, y \mid w^{-1} y w = x \rangle$.

$K(3/5)$ $F(3/5)$



$w = x y^{-1} x^{-1} y$.

$$w = x^{-1} y^{-1} x^{+1} y = x^{e_1} y^{e_2} x^{e_3} y^{e_4}$$

$$\rightsquigarrow e_2 = (-1)^{\lfloor 2a/p \rfloor + 2} = (-1)^{\lfloor 2(a+p)/p \rfloor},$$ $a+p$: 偶数. ▨

定理 $p \geq 1$：奇数, a：偶数 s.t. $\gcd(a,p)=1$.

$$\Delta_{F(a/p)}(t) \underset{\text{up to } \pm t^k \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]}{\doteq} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k t^{\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i} \quad \left(\varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor} \right)$$

事実 (Hartley) $p \geq 1$：奇数, a：奇数 s.t. $\gcd(a,p)=1$.

$$\Delta_{K(a/p)}(t) \doteq \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k t^{\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i} \quad \left(\varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor} \right)$$

系 $F(a/p) \cong F(a'/p') \Rightarrow p = p'$.

$\left(\because \det F(a/p) = \Delta_{F(a/p)}(-1) = p. \right)$

例

$$\varepsilon_i := (-1)^{\lfloor ia/p \rfloor}, \quad \Delta_F(t) \doteq \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k t^{\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i}$$

▹ $a/p = 2/5$:

i, k	0	1	2	3	4
ε_i	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i$	1	2	3	2	1

$$\rightsquigarrow \Delta_{F(2/5)}(t) \doteq t^1 - t^2 + t^3 - t^2 + t^1 = t^3 - 2t^2 + 2t \doteq \underline{t^2 - 2t + 2}.$$

▹ $a/p = 2/5 \equiv \underline{-3/5}$:

i, k	0	1	2	3	4
ε_i	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i$	1	0	1	2	1

$$\rightsquigarrow \Delta_{\underline{K(2/5)}}(t) \doteq t^1 - t^0 + t^1 - t^2 + t^1 = -t^2 + 3t - 1 \doteq \underline{t^2 - 3t + 1}.$$

補題 $\Delta_{F(a/p)}(t^{-1}) \doteq \Delta_{F(-a/p)}(t)$.

例 $\Delta_{F(2/5)}(t) \doteq t^2 - 2t + 2$.

$$\Delta_{F(-2/5)}(t) \doteq t^{-2} - 2t^{-1} + 2$$

$$\doteq 2t^2 - 2t + 1. \quad \therefore F(2/5) \not\cong F(-2/5).$$

一方で… $K(2/5) \cong K(-2/5)$.

ギャップ有り!

予想（2ブラット2次元結び目の分類）

$$F(a/p) \cong F(a'/p') \overset{?}{\iff} p = p' \ \& \ a \equiv a' \bmod p.$$

$$\left(\iff a/p \equiv a'/p' \bmod \mathbb{Z}\right).$$

予想 $\Delta_{F(a/p)}(t)$ は reciprocal でない.

I.e. $\Delta_{F(a/p)}(t^{-1}) \not\doteq \Delta_{F(a/p)}(t)$.

もし true なら....

▷ $\forall a/p,\ a'/p'$ s.t. $\underset{\text{スパーン}}{\sigma K(a/p)} \not\cong \underset{\text{2プラット}}{F(a'/p')}$.

▷ $\begin{cases} F(a/p) \not\cong F(a/p)! : \text{正のもろて型でない.} \\ F(a/p) \not\cong -F(a/p) : \text{非可逆 (Terasaka)} \end{cases}$

a/p	$\Delta_F(t)$
2/3	$t-2$
2/5	t^2-2t+2
4/5	$2t-3$
2/7	t^3-2t^2+2t-2
4/7	$2t^2-4t+1$
6/7	$3t-4$
2/9	$t^4-2t^3+2t^2-2t+2$
4/9	$2t^2-4t+3$
8/9	$4t-5$
2/11	$t^5-2t^4+2t^3-2t^2+2t-2$
4/11	$2t^3-4t^2+4t-1$
6/11	$3t^2-6t+2$
8/11	$2t^2-5t+4$
10/11	$5t-6$
2/13	$t^6-2t^5+2t^4-2t^3+2t^2-2t+2$
4/13	$2t^3-4t^2+4t-3$
6/13	$3t^2-6t+4$
8/13	$2t^3-6t^2+4t-1$
10/13	$4t^2-7t+2$
12/13	$6t-7$
2/15	$t^7-2t^6+2t^5-2t^4+2t^3-2t^2+2t-2$
4/15	$2t^4-4t^3+4t^2-4t+1$
8/15	$4t^2-8t+3$
14/15	$7t-8$
2/17	$t^8-2t^7+2t^6-2t^5+2t^4-2t^3+2t^2-2t+2$
4/17	$2t^4-4t^3+4t^2-4t+3$
6/17	$3t^3-6t^2+6t-2$
8/17	$4t^2-8t+5$
10/17	t^3-6t^2+8t-2
12/17	$2t^3-5t^2+6t-4$
14/17	$3t^2-8t+6$
16/17	$8t-9$