Iwakiri-Satoh 2-knot に対するカンドルコサイクル不変量

京大 数理研 M2
植田雄大

導入

$$\#\{\pi_1(S^3-K)\to G\}$$

精密化 $\rightsquigarrow$ $\#\{Q(K)\to X\}$: 彩色数

精密化 $\rightsquigarrow$ $\Phi_\phi(K)$: カンドルコサイクル不変量

(Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito 1999)

$K, K' \rightsquigarrow F(K,K')$: Iwakiri-Satoh 2-knot (2011)

$\rightsquigarrow$

$\Phi_\phi(F(K,K'))$ ← Kの不変量 ← K'の不変量

(四面体カンドルのとき. $\Phi_\phi(F) \in \mathbb{Z}[t]/(t^4-1)$ or $\mathbb{Z}[t]/(t^2-1)$)

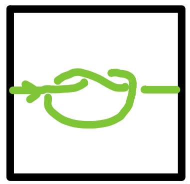
Prob. $\Phi_\phi(F(K,K'))=$ "Kの不変量" と "K'の不変量" でかきたい.

目次

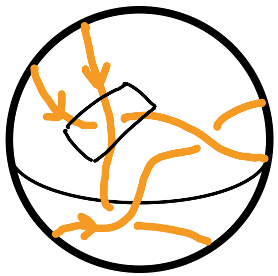
§1. 準備

K, K': 枠つき有向結び目

D: K のタングル図式 ⊂ I^2

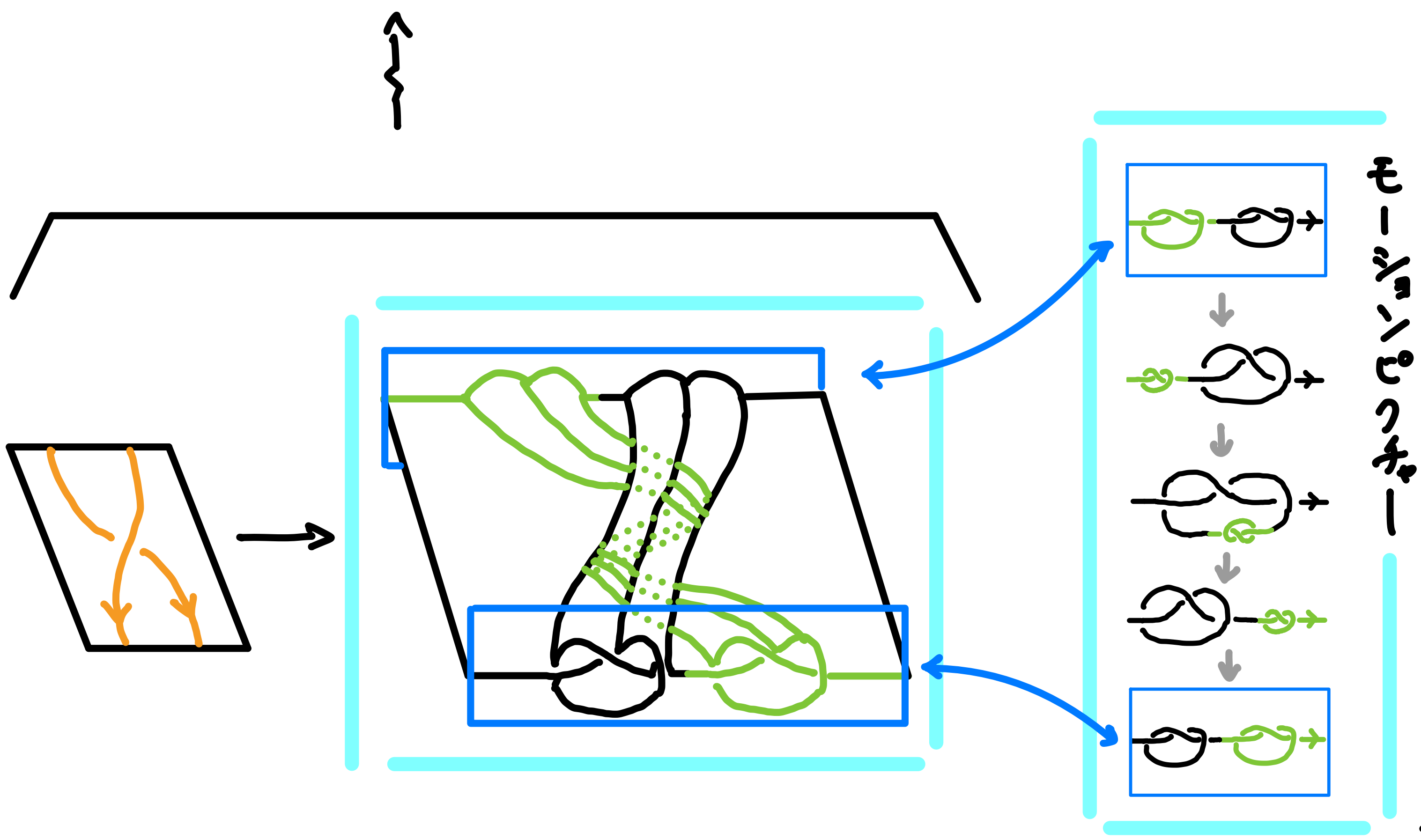


D': K' の図式 ⊂ S^2



F(K, K')

: Iwakiri-Satoh 2-knot



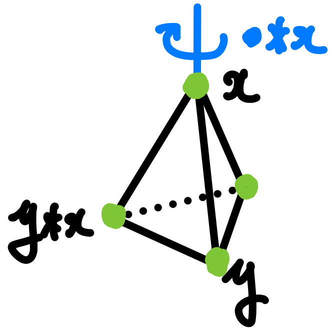
X: 集合

$* : X \times X \to X$

$(X, *)$: カンドル $\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$
$$\begin{cases} x * x = x & \text{for } {}^{\forall} x \in X \\ \bullet * y : X \to X \text{ は全単射} & \text{for } {}^{\forall} y \in X \\ (x*y)*z = (x*z)*(y*z) & \text{for } {}^{\forall} x, y, z \in X \end{cases}$$

Ex. 四面体カンドル $Q_4 = \{$正四面体の頂点$\}$

$\bullet * x$:

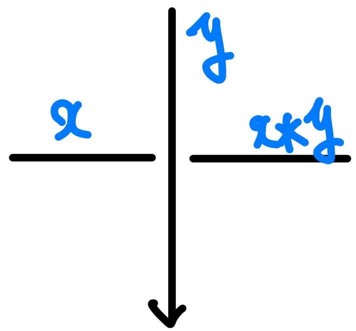


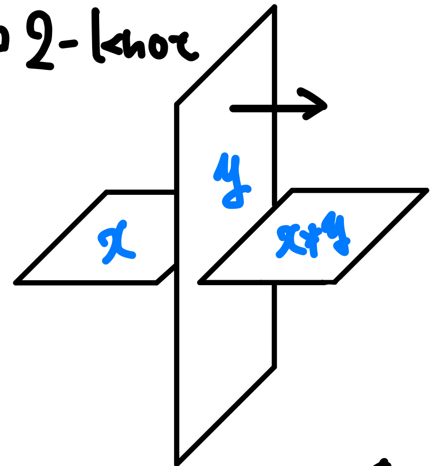
X彩色 $C : \{\text{arcs of } D_K\}$ (or $\{\text{sheets of } D_F\}$) $\longrightarrow X$

$(C : Q(K) \to X)$

$Col_X(K)$ (or $Col_X(F)$) $\overset{\text{def}}{=} \{ C \mid C : X$彩色$\}$

• 1-knot • 2-knot





X：カンドル，A：アーベル群

$\psi : X^2 \to A$ ：2-コサイクル $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \psi(x,x) = 0 & \text{for } {}^\forall x \in X \\ \psi(x,y) + \psi(x*y, z) = \psi(x,z) + \psi(x*z, y*z) & \text{for } {}^\forall x,y,z \in X \end{cases}$

$\phi : X^3 \to A$ ：3-コサイクル $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \phi(x,x,y) = \phi(x,y,y) = 0 & \text{for } {}^\forall x,y \in X \\ \phi(x,y,w) + \phi(x*y,z,w) + \phi(x*w,y*w,z*w) \\ \quad = \phi(x,z,w) + \phi(x*z,y*z,w) + \phi(x,y,z) & \text{for } {}^\forall x,y,z,w \in X \end{cases}$

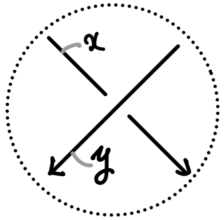
Ex.

ψ_1 ：Q_4の2-コサイクル　　$H^2(Q_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \underset{[\psi_1]}{\underset{\Psi}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ：Q_4の3-コサイクル　　$H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong (\underset{[\phi_1]}{\underset{\Psi}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}} \oplus \underset{[\phi_2]}{\underset{\Psi}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}) \oplus \underset{[\phi_3]}{\underset{\Psi}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}$

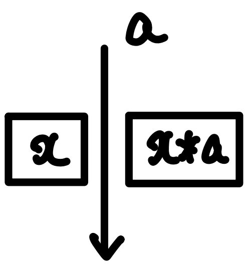
◦ 1-knot

$$\Phi_\psi(K,C) \overset{\text{def}}{=} \prod_{x} w(x,c) \in A$$

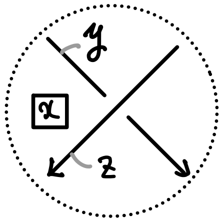
($w\Big($  $\Big) = \psi(x,y)$)

：カンドルコサイクル不変量

◦ 1-knot (シャドー)

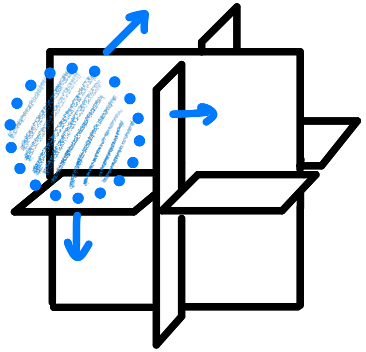


$$\Phi^*_\phi(K,C) \overset{\text{def}}{=} \prod_{x^*} w(x^*,c) \in A$$

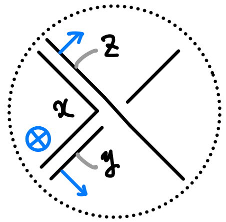
($w\Big($  $\Big) = \phi(x,y,z)$)

：シャドーコサイクル不変量

◦ 2-knot



$$\Phi_\phi(F,C) \overset{\text{def}}{=} \prod_{T} w(T,c) \in A$$

($w\Big($  $\Big) = \phi(x,y,z)$)

$$\Phi_\phi(F) \overset{\text{def}}{=} \sum_{C} \Phi_\phi(F,C) \in \mathbb{Z}[A]$$

：カンドルコサイクル不変量

§2. 主結果

$F(K,K')$: Iwa.-Sat. 2-knot, Q_4 : 四面体カンドル

f_K $(f_{K'})$: K (K') の枠, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : Q_4 の 3-コサイクル, ψ_1 : Q_4 の 2-コサイクル

$\psi^{\phi}_{c_0}(x,y) := \phi(x,y,c_0) + \phi(x*c_0, y*c_0, c_0) + \phi(x*c_0*c_0, y*c_0*c_0, c_0)$

定理

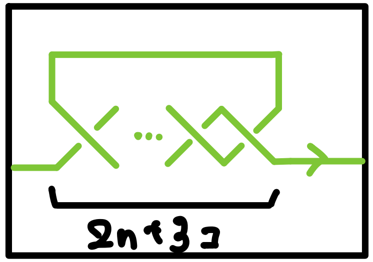
- $3 \mid f_K$ or $3 \mid f_{K'}$ のとき.

$$\Phi_\phi(F(K,K')) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} \left\{ f_K \left(\Phi^*_{\phi_1}(K,C) + \Phi_{\psi^{\phi_1}_{c_0}}(K,C) \right) + \iota_2 \left(\Phi_{\psi_1}(K,C) \right) \right\} & (\phi = \phi_1) \\ \displaystyle\sum_{C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K)} f_{K'} f_K \left\{ \Phi^*_{\phi_2}(K,C) + \Phi_{\psi_1}(K,C) \right\} & (\phi = \phi_2) \\ \# \mathrm{Col}_{Q_4}(K) & (\phi = \phi_3) \end{cases}$$

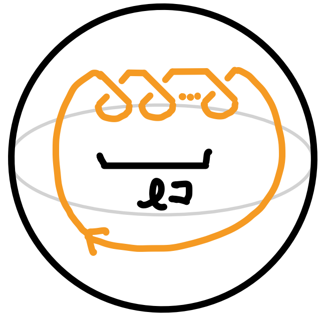
- $3 \nmid f_K$ and $3 \nmid f_{K'}$ のとき. $\Phi_\phi(F(K,K')) = 4$

例 $K = T(2,2n+3)$: トーラス結び目 $(f_K = m)$

$K' = O_\ell$: $f_{K'} = \ell$ の自明な結び目



T(2.2n+3)



O_ℓ

$\rightsquigarrow F := F(T(2,2n+3), O_\ell)$

このとき、$\phi_1 : Q_4^3 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を用いて
Fのカンドルコサイクル不変量 $\Phi_{\phi_1}(F) \in \mathbb{Z}[t]/(t^4=1)$ を計算する。

$$\Phi_{\phi_1}(F) = \begin{cases} 4+12t^{(-1)^n \cdot \ell \cdot (m+2)} & (n \in 3\mathbb{Z} \text{ and } m \cdot \ell \in 3\mathbb{Z}) \\ 4 & (n \notin 3\mathbb{Z} \text{ or } m \cdot \ell \notin 3\mathbb{Z}) \end{cases}$$

注. 包含関係 $\{\text{roll-spun}\} \subset \{F(K,K')\} \subset \{\text{deform-spun}\}$ が成り立つ。

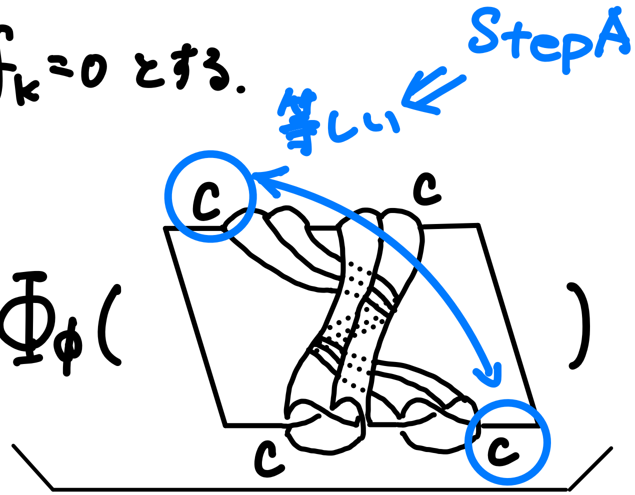
(Iwakiri–Satoh 2011)

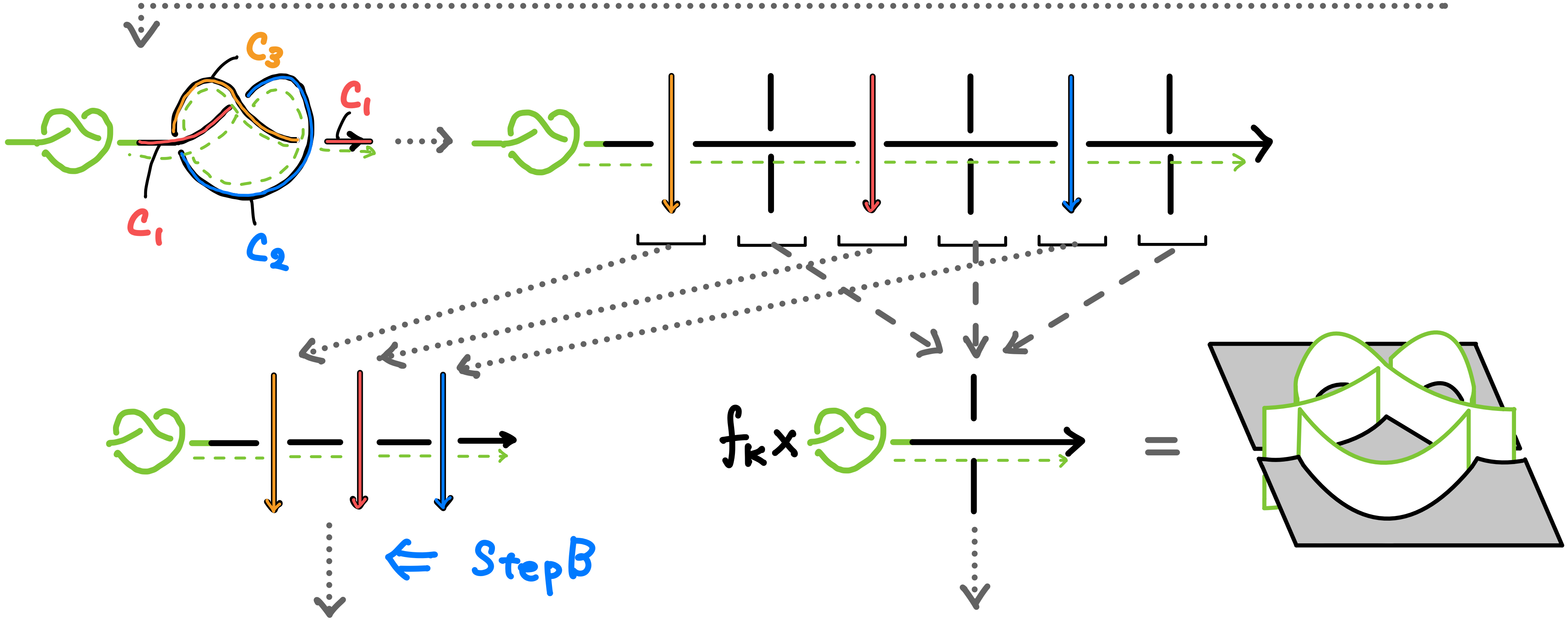
§3. 定理の証明：方針

簡単のため以後 $f_K=0$ とする.

定理の左辺

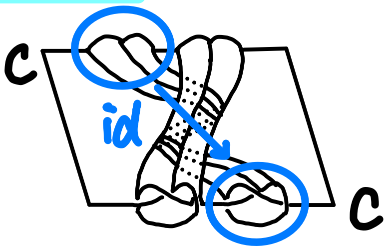
$$\Phi_\phi(F(K,K'),\tilde{C}) = \underbrace{(D'の正の交点数 - D'の負の交点数)}_{=f_{K'}}\cdot\Phi_\phi(\quad)$$

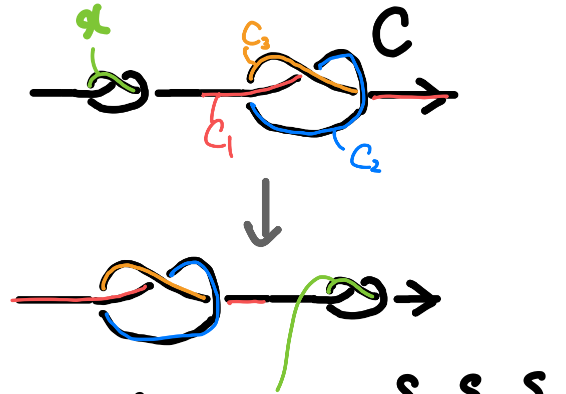




$\Phi_\psi(D,C) + f_K\times\Phi^*_\phi(D,C)$ ⋯> 定理の右辺

定理の証明: Step A

<u>目的</u>. Dの各交点で  となることを示す.



$$C(\ell)(x) = x^{S_{c_3} S_{c_1} S_{c_2}}$$

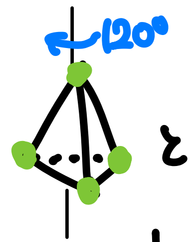
$$\begin{array}{ccc}
Q_4 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(Q_4) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
w_\ell = c_3 c_1 c_2 & \longmapsto & C(\ell) = S_{c_3} S_{c_1} S_{c_2} \quad (S_c := \bullet * c \in \mathrm{Aut}(Q_4))
\end{array}$$

Prop 1. $C(\ell) = \mathrm{id}_{Q_4}$ for $^\forall c$

pf.)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$=$}"] \\
Q(K) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \pi_1(S^3 - K) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_1(S^3 - K) \arrow[d] \\
Q_4 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(Q_4) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \mathfrak{A}_4^{ab} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$=$}"] \\
 & \mathfrak{A}_4 & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\ell & m & \\
\downarrow & \downarrow & \\
 & 120°\text{回転} & \longmapsto 1 \\
C(\ell) & & \longmapsto 0
\end{array}$$

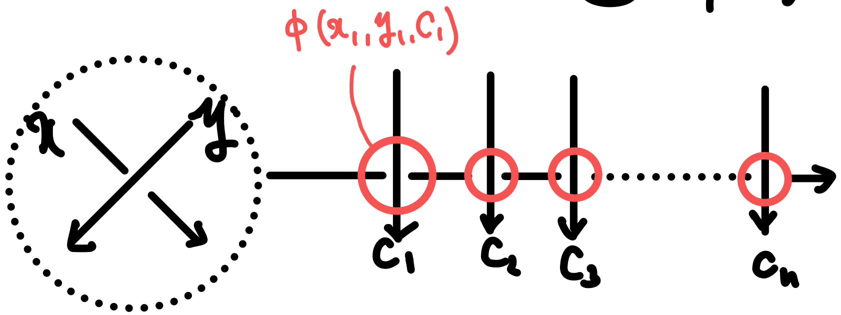
- $C(\ell)$は $C(m) =$  と可換
- $C(\ell) \longmapsto 0 \in \mathfrak{A}_4^{ab}$

$\longrightarrow C(\ell) = \mathrm{id}$ ☑

定理の証明: Step B

C: Kの彩色

$$\psi_c^{\phi} : Q_4^2 \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longmapsto \sum_i \phi(x_i, y_i, c_i)$$



Claim ψ_c^{ϕ} は 2-cocycle.

$$\left(\begin{aligned} &\psi(x,y) + \psi(x*y, z) - \psi(x,z) - \psi(x*z, y*z) \\ &= \sum_i \{\phi(x_i, y_i, c_i) - \phi(x_{i+1}, y_{i+1}, c_{i+1})\} = 0 \end{aligned} \right)$$

$\phi = \phi_1$ のとき

$\psi_c^{\phi_1}$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} H^3(Q_4) & & H^2(Q_4) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \phi_1 & \rightsquigarrow & \psi_1 / 0 \end{array}}$$

Q_4のケーリーグラフの閉路$(C(l))$によって決定

⇕ 同値?

$\Phi_{\psi_1}(K, C)$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \psi_1 & \rightsquigarrow & 1/0 \\ \cap & & \cap \\ H^2(Q_4) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}}$$

各三角形,四角形を回る閉路に分割して$\Phi_{\psi_1}(K,C)$とψ_c^{ϕ}を計算する.

Prop 2. $f_K=0$のとき $\psi_C^{\phi} = \begin{cases} \iota_2\circ\psi_1 & (\phi=\phi_1 \text{ and } \Psi_{\psi_1}(K,C)=1) \\ 0 & (\phi=\phi_2 \text{ or } \phi_3 \text{ or } \Psi_{\psi_1}(K,C)=0) \end{cases}$

pf.)

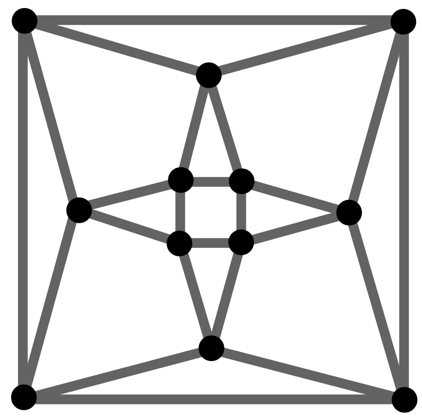
・$\phi=\phi_1$のとき.

$\Psi_{\psi_1}(K,C)=\underline{1}/\underline{0} \Leftrightarrow$ $C(\ell)$が囲む四角形が(<u>奇数</u>/<u>偶数</u>)個 $\Leftrightarrow \psi_C^{\phi_1}=\underline{\iota_2\circ\psi_1}/\underline{0}$

・$\phi=\phi_2$のとき

$C(\ell)$が囲む三角形が(<u>奇数</u>/<u>偶数</u>)個 $\Leftrightarrow \psi_C^{\phi_2}=\underline{\psi_1}/\underline{0}$

($f_K=0$なので$C(\ell)$が囲む三角形は常に<u>偶数</u>個)



$\mathfrak{a}_4$のケーリーグラフ

・$\phi=\phi_3$のとき　常に$\psi_C^{\phi_3}=0$.

☑

まとめ

定理. 四面体カンドル Q_4 のとき

$\Phi_\phi(F(K,K'))$ = "Kの不変量" と "K'の不変量" でかいた。

(framing, コサイクル不変量)　(framing)

今後の課題

- $$\begin{tikzcd} F(K,K') \arrow[r, squiggly, "\text{一般化}"'] \arrow[d, dotted] & F(K_1,K_2,K_1'\cup K_2') \arrow[d, dotted] \\ \text{定理} & ? \end{tikzcd}$$

- Q_4 以外のカンドルへ拡張 (アレキサンダーカンドル等)