$\mathbb{R}^4$ に自明に埋め込まれた射影平面上の曲面ブレイド

津野 玄親

大阪大学大学院理学研究科 修士 2 年

December 26, 2024

Topics

1. 背景・先行研究
2. Mb 上のブレイド状曲面のチャート表示
3. Möbius 型チャート変形と Möbius 型チャートの標準形

Topics

1. 背景・先行研究
2. Mb 上のブレイド状曲面のチャート表示
3. Möbius 型チャート変形と Möbius 型チャートの標準形

ブレイド状曲面

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$．D^2, B^2：2 次元円板，$\mathrm{pr}_2 : D^2 \times B^2 \to B^2$：射影

Def.（ブレイド状曲面）

$D^2 \times B^2$ に適切に埋め込まれた曲面 S が次数 m の**ブレイド状曲面**
$:\Longleftrightarrow$ (1)，(2)．

(1) $\mathrm{pr}_2|_S : S \hookrightarrow D^2 \times B^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} B^2$ が次数 m の分岐被覆写像．

(2) ∂S は $D^2 \times \partial B^2$ 内の閉ブレイド．

次数 m のブレイド状曲面 S が**シンプル**
$:\Longleftrightarrow\ \forall y$：分岐点，$\#(S \cap D^2 \times \{y\}) = m - 1$

Def.（同値）

S, S'：ブレイド状曲面が**同値** $:\Longleftrightarrow\ D^2 \times B^2$ の fiber-preserving な isotopy$\{h_u\}_{u\in[0,1]}$ によって S と S' が ambient isotopic．

ブレイド状曲面のチャート表示

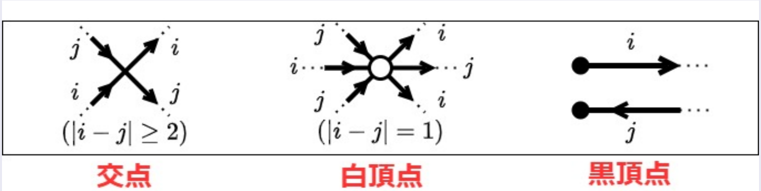
Def. (チャート)

B^2 上の有限グラフ $\Gamma = (V, E)$ が次数 m のチャート
: $\Longleftrightarrow$ Γ の各辺は向きとラベルを持ち，(1)-(3) を満たす．

(1) $\deg(V) \subset \{1, 4, 6\}$，$\mathrm{label}(E) \subset \{1, \ldots, m-1\}$．

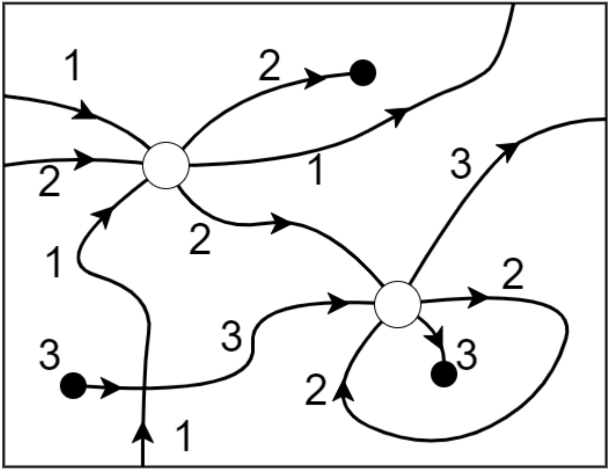
(2) $\Gamma \cap \partial B^2$ は 1-vertices(境界点)．

(3) Γ は頂点 $\subset \mathrm{int} B^2$ の近くで図のように見える．



チャートの例

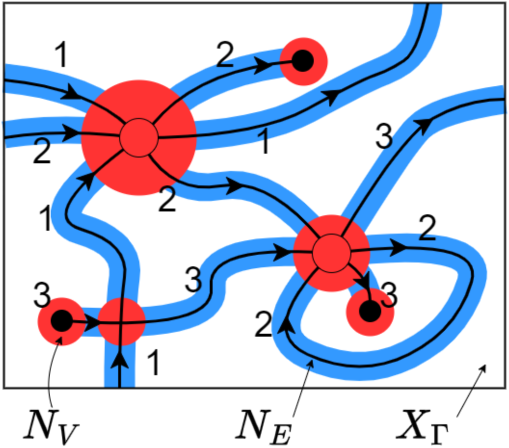
$m = 4$

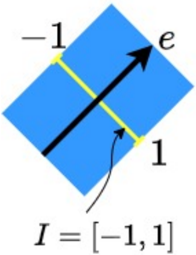


チャートに沿った B^2 の分割

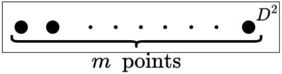
$\Gamma = (V, E)$：チャート

Γ に沿った B^2 の分割 (N_V, N_E, X_Γ) とは，次のような分割である：





ブレイド状曲面とチャートの対応

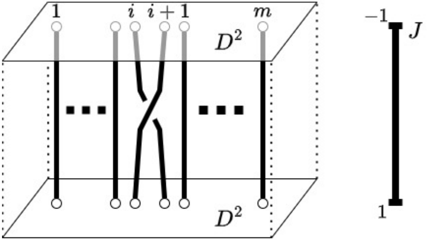
$Q_m :=$ 

ブレイド状曲面 $S(\Gamma)$ を以下で定める；

X_Γ)

$$S(\Gamma) \cap D^2 \times X_\Gamma := Q_m \times X_\Gamma.$$

N_E) $J \subset N_E$：I-ファイバー，$e \cap J \neq \varnothing$，$i = \mathrm{label}(e) \implies$

$S(\Gamma) \cap D^2 \times J =$ 

ブレイド状曲面とチャートの対応

$N_V)$

- N が白頂点または交点の近傍のとき
  $$S(\Gamma) \cap D^2 \times N = \text{分岐点を持たないブレイド状曲面}$$
- N が黒頂点の近傍のとき
  $$S(\Gamma) \cap D^2 \times N = \text{分岐点をただ 1 つ持つブレイド状曲面}$$

Remark

$S(\Gamma)$ は同値の意味で一意.

Topics

P^2 上の曲面ブレイド

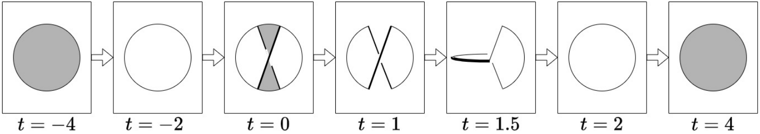
$m \in \mathbb{Z}_{>0}$，D^2：2 次元円板，P^2：$\mathbb{R}^4$ に自明に埋め込まれた $\mathbb{R}P^2$
$D^2 \widetilde{\times} P^2$：$P^2$ の正則近傍 $N(P)$ として与えられる D^2 束
$\mathrm{pr}_2 : D^2 \widetilde{\times} P^2 \to P^2$：射影

Def.（P^2 上の曲面ブレイド）

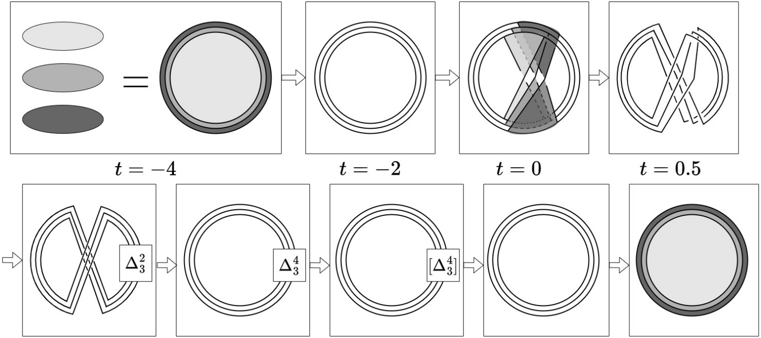
S：$D^2 \widetilde{\times} P^2$ に適切に埋め込まれた曲面
S が次数 m の P^2 上の曲面ブレイド：$\Longleftrightarrow$

- $\mathrm{pr}_2|_S : S \hookrightarrow D^2 \widetilde{\times} P^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} P^2$ は次数 m の分岐被覆写像である．

以降は P^2 として下図で与えられる P^2_- を考える．



P^2 上の曲面ブレイドの例



$t=-4$ $t=-2$ $t=0$ $t=0.5$

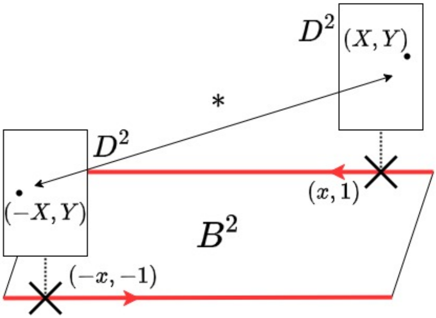
$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=3.5$ $t=4$

ただし $\Delta_3 =$ , $[\Delta_3] =$ .

Mb と $D^2\tilde{\times}\mathrm{Mb}$

D^2, B^2：正方形 $I \times I$，Mb：Möbius の帯 $B^2/(x,1) \sim (-x,-1)$
$D^2\tilde{\times}\mathrm{Mb}$：$\mathrm{Mb}$ の D^2 束で，次の商空間

$$D^2 \times B^2/((X,Y),(x,1)) \sim ((-X,Y),(-x,-1)) \qquad (*)$$



Mb 上のブレイド状曲面と Möbius 型

Def.(Mb 上のブレイド状曲面)

$D^2\widetilde{\times}\mathrm{Mb}$ に適切に埋め込まれた曲面 S が次数 m の Mb 上のブレイド状曲面 $:\Longleftrightarrow$ (1), (2).

(1) $\mathrm{pr}_2|_S : S \hookrightarrow D^2\widetilde{\times}\mathrm{Mb} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{Mb}$ が次数 m の分岐被覆写像.

(2) ∂S は $D^2 \times \partial\mathrm{Mb}$ 内の閉ブレイド.

Def.(Möbius 型ブレイド状曲面)

B^2 上のブレイド状曲面 S が Möbius 型である:⇔

$$((X,Y),(x,1)) \in S \iff ((-X,Y),(-x,-1)) \in S.$$

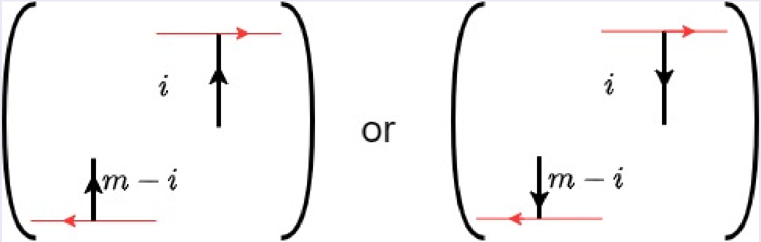
Möbius 型チャート

Def.(Möbius 型チャート)

B^2 上のチャート $\Gamma = (V, E)$ が Möbius 型 : $\Longleftrightarrow$ (1), (2)

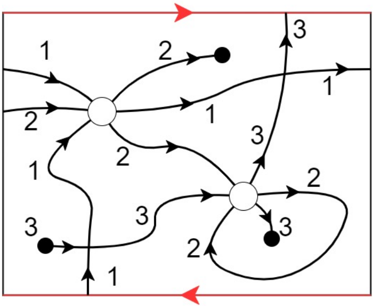
(1) $(-x, -1) \in \Gamma \iff (x, 1) \in \Gamma$.

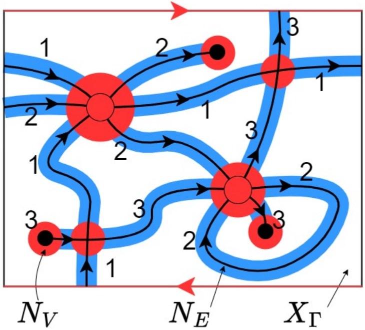
(2) $(-x, -1), (x, 1) \in \Gamma$ の近くで



Möbius 型チャート

$m = 4$





Q_m：$(X, Y) \mapsto (-X, Y)$ で不変 $\Longrightarrow S(\Gamma)$：Möbius 型

Mb 上のブレイド状曲面のチャート表示

$$D^2 \widetilde{\times} \mathrm{Mb} = D^2 \times B^2 / ((X,Y),(x,1)) \sim ((-X,Y),(-x,-1)) \quad (*)$$

(再掲)

Main result 1

(1) $(*)$ の同一視によって，
Mb 上のブレイド状曲面 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ B^2 上の Möbius 型ブレイド状曲面

(2) Γ：Möbius 型チャート $\Longrightarrow$ $S(\Gamma)$：Möbius 型ブレイド状曲面.

(3) 逆に $\forall S$:Möbius 型ブレイド状曲面，$\exists\Gamma$:Möbius 型チャート s.t. $S(\Gamma) \simeq S$.

$$\underset{\left[\begin{array}{c}\text{Möbius 型}\\ \text{チャート}\end{array}\right]}{\Gamma} \ \underset{(3)}{\overset{(2)}{\rightleftarrows}} \ \underset{\left[\begin{array}{c}\text{Möbius 型}\\ \text{ブレイド状曲面}\end{array}\right]}{S(\Gamma)} \ \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \ \underset{\left[\begin{array}{c}\text{Mb 上の}\\ \text{ブレイド状曲面}\end{array}\right]}{S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma)}$$

Topics

1. 背景・先行研究
2. Mb 上のブレイド状曲面のチャート表示
3. Möbius 型チャート変形と Möbius 型チャートの標準形

Möbius 型チャート変形

Def.（同値）

S, S'：Mb 上のブレイド状曲面
S, S' が**同値** $:\iff$ $D^2 \widetilde{\times} \mathrm{Mb}$ の fiber-preserving な isotopy$\{h_u\}_{u \in [0,1]}$ によって S と S' が ambient isotopic.

Question

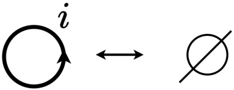
Möbius 型チャート Γ, Γ' が $S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma) \simeq S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma')$ を満たすための条件は？

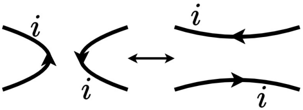
$\longrightarrow$**Möbius 型チャート変形** (CI-CIII, ∂I-∂III, idI, idII)

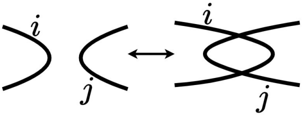
CI 変形

CI: **黒頂点を持たない円板領域 $E \subset B^2$ 内のチャートを任意に取り換える.**

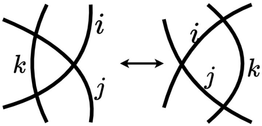
e.g.







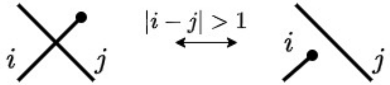
$|i-j|>1$



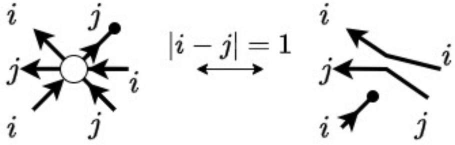
$|i-j|, |j-k|, |k-i| > 1$

CII, CIII 変形

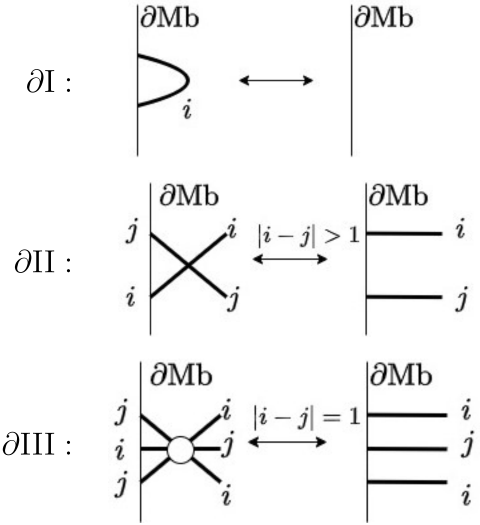
CII :



CIII :



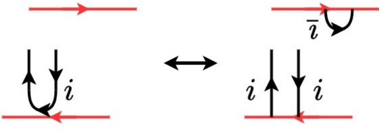
∂変形



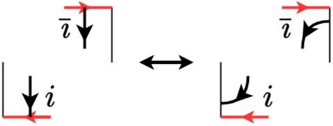
idl 変形

idl: 黒頂点を持たず，上下対辺の同一視で貼り合う 2 つの円板領域 E_-, E_+ 内のチャートを任意に取り変える．

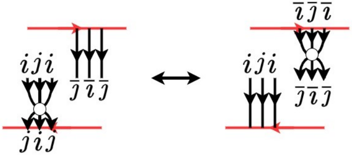
e.g.



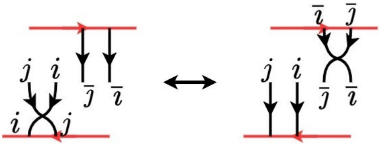
$$\bar{i} = m - i$$



$$\bar{i} = m - i$$



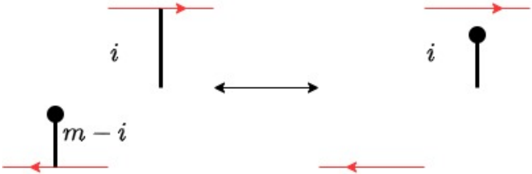
$$\bar{i} = m - i, \bar{j} = m - j$$
$$|i - j| = 1$$



$$\bar{i} = m - i, \bar{j} = m - j$$
$$|i - j| > 1$$

idII 変形

idII :



MC 同値

Def. (MC 同値)

Γ, Γ':Möbius 型チャートが MC 同値: $\Longleftrightarrow$
Γ と Γ' が有限回の Möbus 型チャート変形で移り合う.

Main result 2

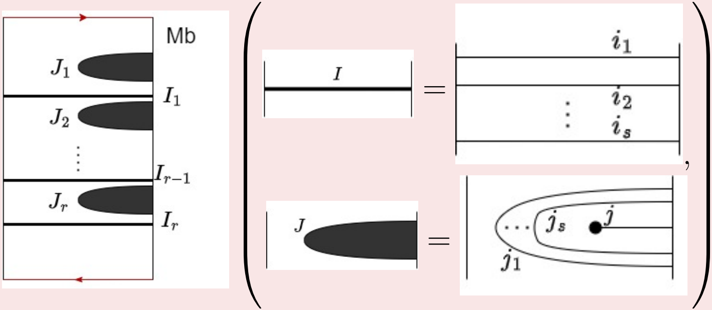
Γ, Γ':Möbius 型チャートが MC 同値 $\Longrightarrow$ $S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma) \simeq S^{\mathrm{Mb}}(\Gamma')$

Möbius 型チャートの標準形

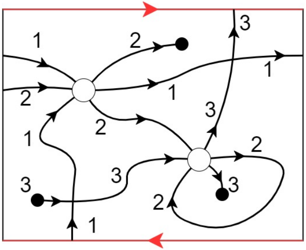
Main result 3

任意の Möbius 型チャート Γ は有限回のチャート変形で

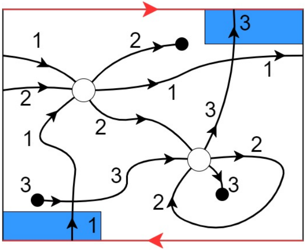
$\Gamma^* :=$



に変形できる．$r = \Gamma$ の黒頂点数．

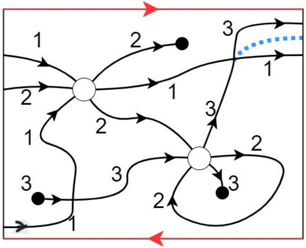


$=$

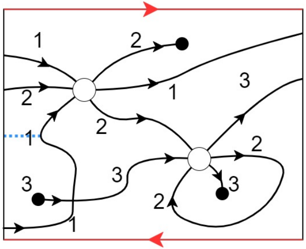


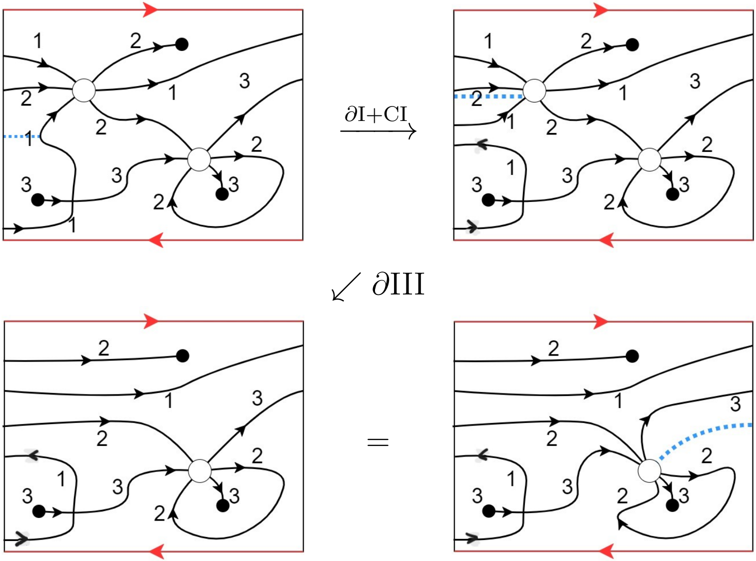
黒頂点数 : 3

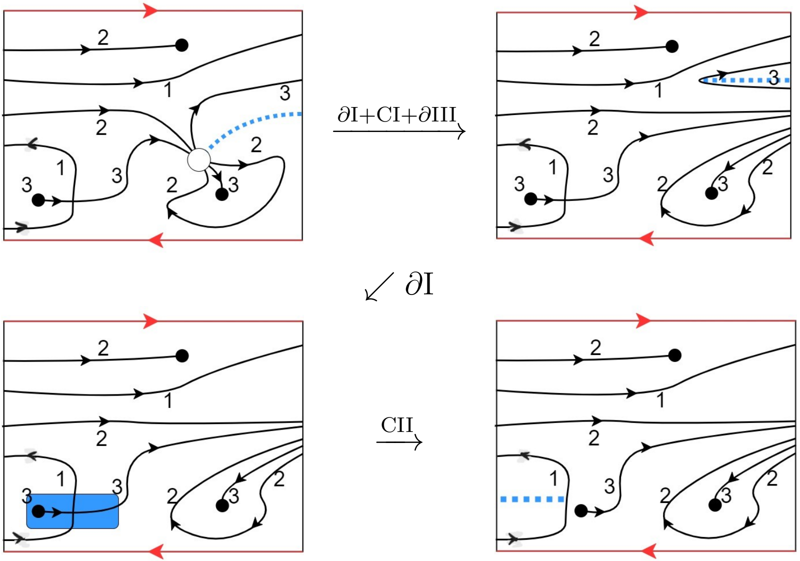
$\swarrow \mathrm{idI}$

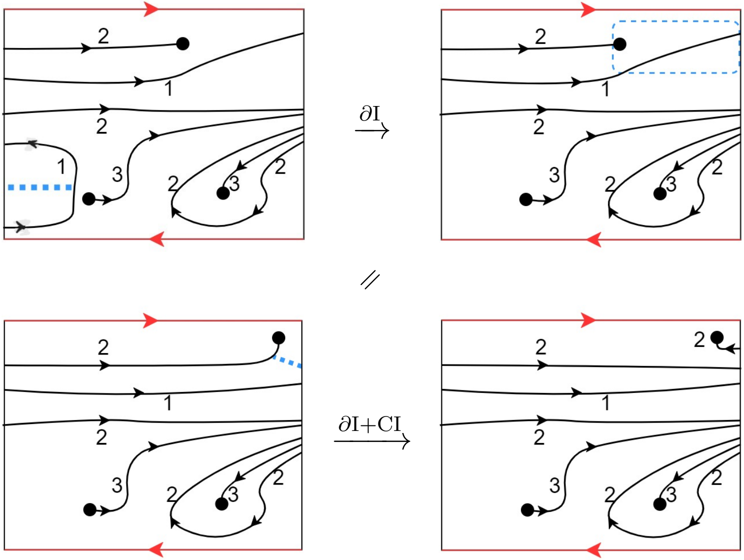


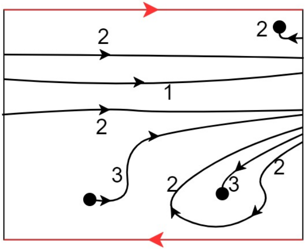
$\xrightarrow{\partial \mathrm{II}}$



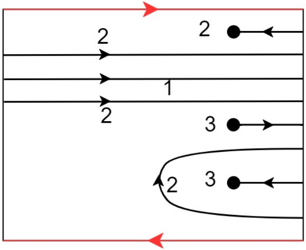

∂I+CI
∂III
=
1
2
3


∂I+CI+∂III
∂I
CII


∂I
//
∂I+CI



$=$



$$r = 3$$