曲面結び目の crossed module について

三木　亮介

大阪大学大学院理学研究科，M2

December 26, 2024

目次

crossed module と不変量

Crossed module

Definition

crossed module とは、群 G、E、群準同型 $\partial : E \to G$、
G の E への左作用 $\triangleright$ からなる 4 つ組であり、次の条件を満たすもの:

① $\partial(X \triangleright a) = X\partial(a)X^{-1}(\forall X \in G, \forall a \in E)$

② $\partial(a) \triangleright b = aba^{-1}(\forall a, b \in E)$

crossed module を $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ と表す。

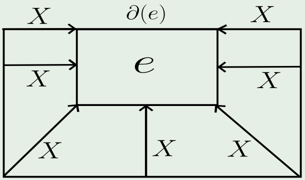
crossed module の具体例

Fundamental crossed module

$(M, N, *)$: 基点 $* \in N$ 付きの弧状連結空間の対

$\partial : \pi_2(M, N, *) \to \pi_1(N, *)$ をホモトピー完全系列における境界写像、π_1 の π_2 上の作用 $\triangleright$ を下図の自然な作用とする。

$\Pi_2(M, N, *) = (\pi_1(N, *), \pi_2(M, N, *), \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。
この crossed module を $(M, N, *)$ の fundamental crossed module という。



$X \in \pi_1(N, *), e \in \pi_2(M, N, *)$

① G : 群、E : G の正規部分群
$\partial : E \longrightarrow G$: 包含写像
$\triangleright$ を $X \triangleright a = XaX^{-1} (\forall X \in G, \forall a \in E)$ で定める
このとき、$(G, E, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

② G : 群
$\partial : G \longrightarrow \mathrm{Aut(G)}$, $g \mapsto \partial(g)$
(ここで $\partial(g)(x) = gxg^{-1} (\forall x \in G)$)
$\triangleright$ を $\phi \triangleright g = \phi(g) (\forall \phi \in \mathrm{Aut(G)}, \forall g \in G)$ で定める。
このとき、$(\mathrm{Aut(G)}, G, \partial, \triangleright)$ は crossed module になる。

crossed module 間の射

Definition

$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$, $\mathcal{G}' = (G', E', \partial', \triangleright')$: crossed modules

crossed module 間の射 $F := (\phi, \psi) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ は群準同型
$\phi : G \to G'$ と $\psi : E \to E'$ の組で次の条件を満たすものである:

① $\phi \circ \partial = \partial' \circ \psi$;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

② $\phi(X) \triangleright' \psi(a) = \psi(X \triangleright a) \quad (\forall X \in G, \forall a \in E)$

Crossed module 不変量

Theorem[J.F.Martins,2009]

M : コンパクトな連結多様体
M のハンドル分解を１つ固定し、ただ１つの 0-ハンドルを持つと仮定する。
$*$: 0-ハンドル内の基点
$M^{(1)}$: M の 0、1-ハンドルの全体
$\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$: a finite crossed module

$$I_{\mathcal{G}}(M) := \frac{\#\mathrm{Hom}(\Pi_2(M, M^{(1)}, *), \mathcal{G})}{(\# E)^{b_1(M^{(1)})}}$$

$I_{\mathcal{G}}(M)$ は M のホモトピー不変量である。

曲面絡み目外部への考察

曲面絡み目外部のハンドル分解

Σ : 曲面絡み目 $\subset S^4$
$M := S^4 \setminus \nu(\Sigma)$ $\quad$ ($\nu(\Sigma)$: Σ の開正則近傍)

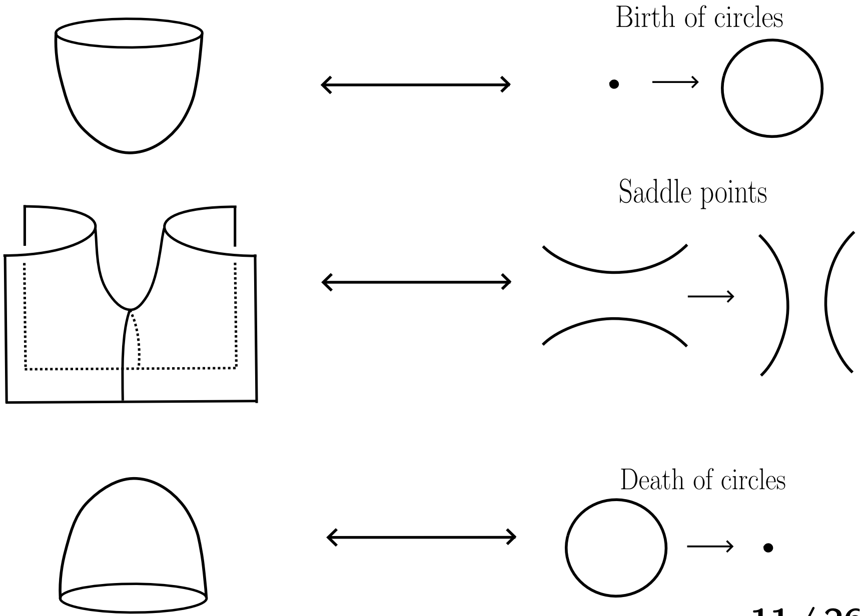
$I_{\mathcal{G}}(M)$ は Σ のバンド付きモーション・ピクチャーから計算できる。

Σ の 2 次元 0-ハンドル $\longleftrightarrow$ M の 4 次元 1-ハンドル

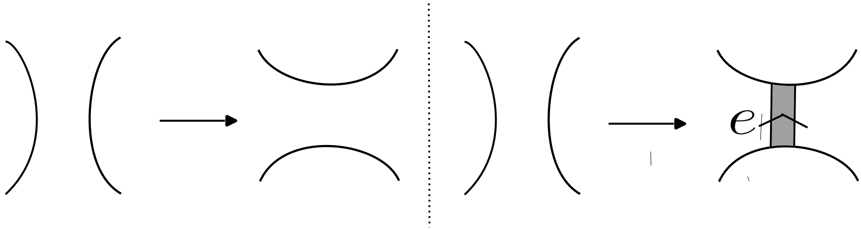
Σ の 2 次元 1-ハンドル $\longleftrightarrow$ M の 4 次元 2-ハンドル

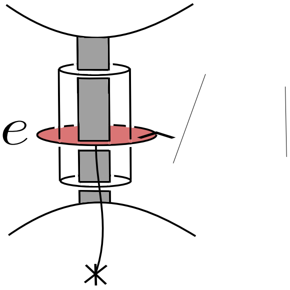
Σ の 2 次元 2-ハンドル $\longleftrightarrow$ M の 4 次元 3-ハンドル

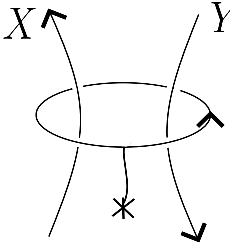
Σ のハンドルとモーション・ピクチャー



$\pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の元の境界について

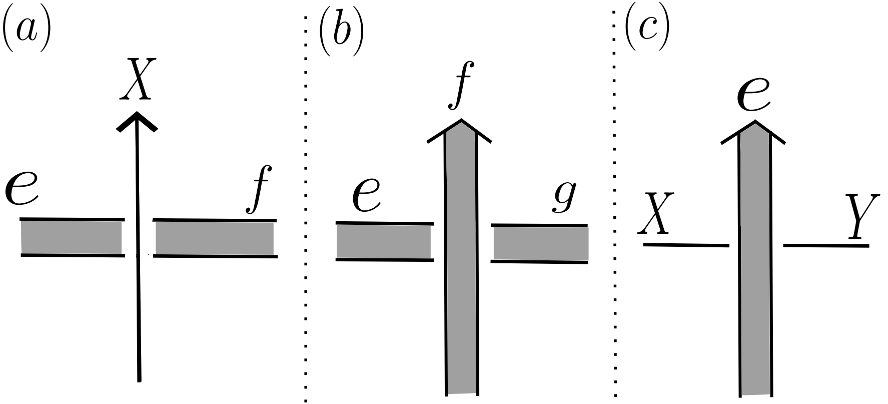






$\partial(e) = Y^{-1}X$

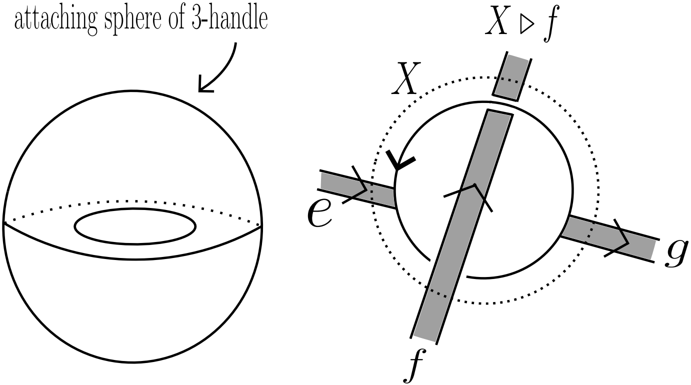
バンドとアークの代表する元の間の関係



$$e = X^{-1} \triangleright f \qquad e = f^{-1} g f \qquad X = \partial(e)^{-1} Y \partial(e)$$

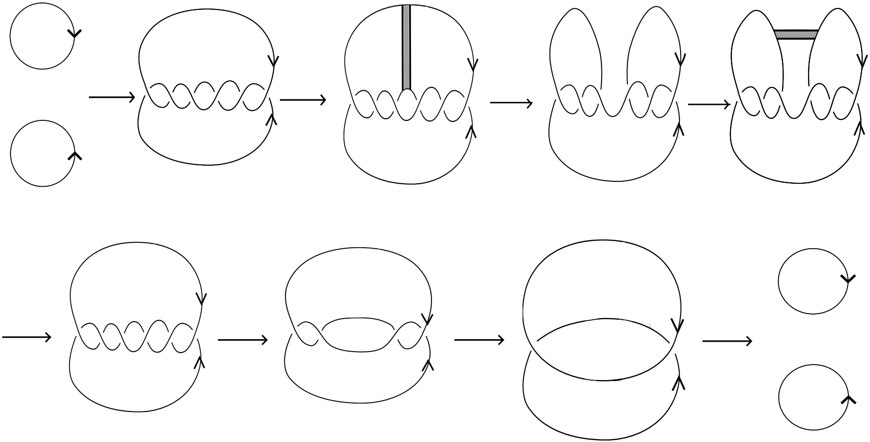
$\Pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式

M の 4 次元 3-ハンドルは $\Pi_2(M, M^{(1)}, *)$ の関係式を誘導する。

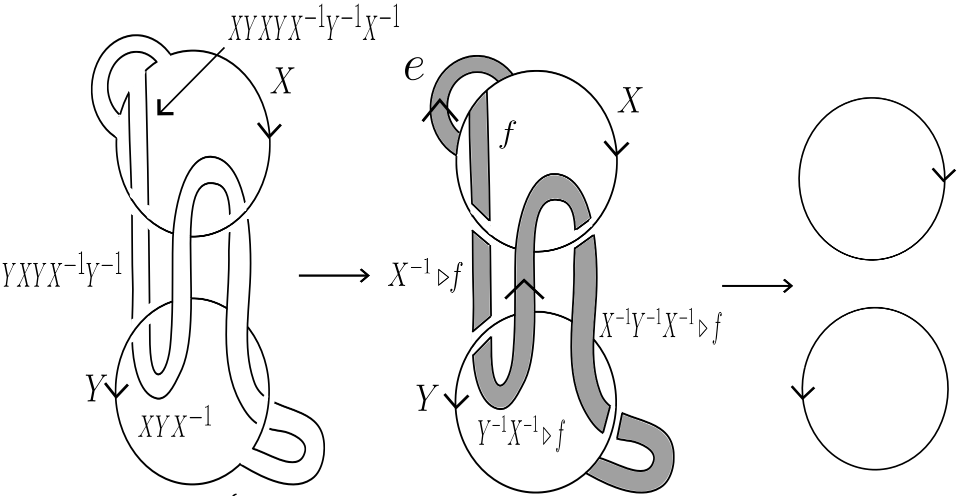


$$e^{-1} f^{-1} g (X \triangleright f) = 1$$

Σ : a spun trefoil



$I_{\mathcal{G}}$ の計算例

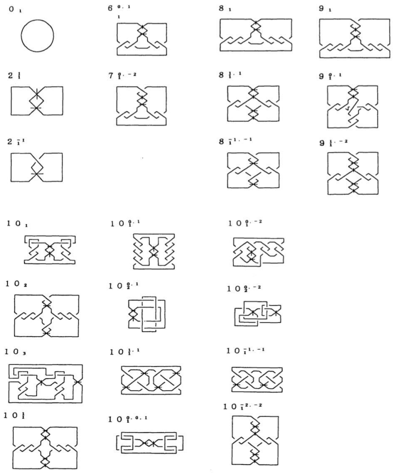


$$I_{\mathcal{G}}(M) = \frac{\#\left\{ (X,Y,e,f) \in G^2 \times E^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial(e) = XYXY^{-1}X^{-1}Y^{-1} \quad , \quad \partial(f) = 1 \\ (X^{-1} \triangleright f)(Y^{-1}X^{-1} \triangleright f)^{-1}(X^{-1}Y^{-1}X^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right\}}{(\#E)^2}$$

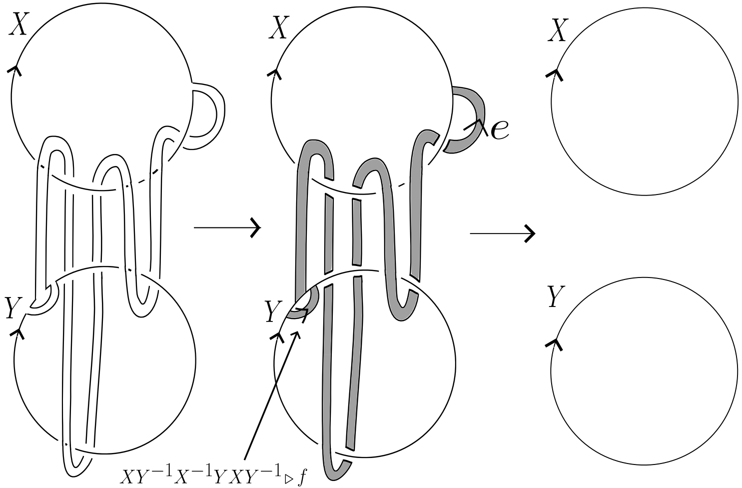
主結果

主結果

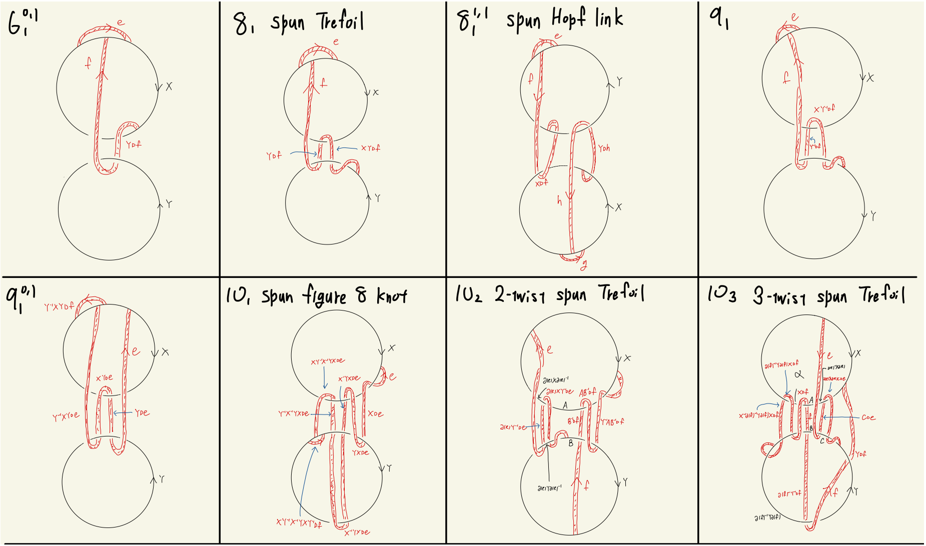
吉川の分類表（下図）にある全ての向き付け可能な曲面絡み目 Σ について $I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma) := I_{\mathcal{G}}(S^4 \setminus \nu(\Sigma))$ の計算公式を獲得した。



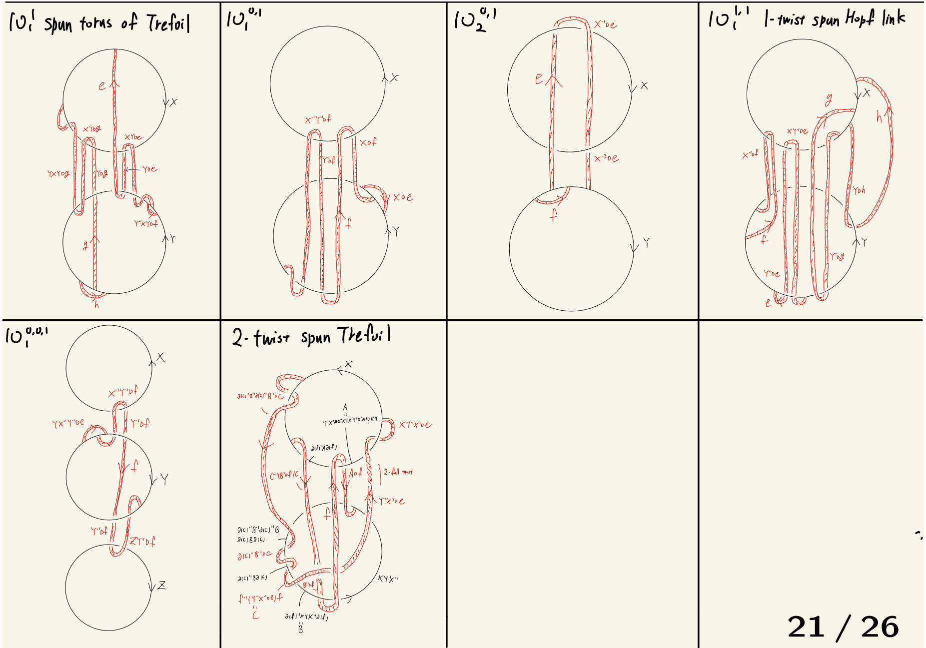
主結果



$$\frac{\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial(e)=1 \quad \partial(f)=YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1} \\ (X\triangleright e)(YX\triangleright e)^{-1}(X^{-1}YX\triangleright e)(Y^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)^{-1}(XY^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)=1 \end{array}\right\}}{(\#E)^2}$$


$6_1^{0,1}$
8_1 spun Trefoil
$8_1^{1,1}$ spun Hopf link
9_1
$9_1^{0,1}$
10_1 spun figure 8 knot
10_2 2-twist spun Trefoil
10_3 3-twist spun Trefoil

主結果


10_1^{1} spun torus of Trefoil
$10_1^{0,1}$
$10_2^{0,1}$
$10_1^{1,1}$ 1-twist spun Hopf link
$10_1^{0,0,1}$
2-twist spun Trefoil
2-full twist

主結果

Σ	$I^{e}_{\mathcal{G}}(\Sigma)$
$6_1^{0,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=Y^{-1}X^{-1}YX \ , \ \ \partial(f)=1 \\ f(Y\triangleright f)^{-1}=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
8_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX \ , \ \ \partial(f)=1 \\ f^{-1}(Y\triangleright f)(XY\triangleright f)^{-1}=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
$8_1^{1,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f,g,h)\in G^2\times E^4 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=X^{-1}YXY^{-1} \ , \ \ \partial(f)=1 \\ \partial(g)=X^{-1}Y^{-1}XY \ , \ \ \partial(h)=1 \\ f(X\triangleright f)^{-1}h(Y\triangleright h)^{-1}=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
9_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=YX^{-1}YXY^{-1}X^{-1} \ , \ \ \partial(f)=1 \\ f^{-1}(Y^{-1}\triangleright f)(XY^{-1}\triangleright f)^{-1}=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
$9_1^{0,1}$	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=1 \ , \ \ \partial(f)=Y^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX \\ e(Y\triangleright e)^{-1}(XY\triangleright e)(Y^{-1}XY\triangleright e)^{-1}=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
10_1	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=1 \ , \ \ \partial(f)=YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1} \\ (X\triangleright e)(YX\triangleright e)^{-1}(X^{-1}YX\triangleright e)(Y^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)^{-1}(XY^{-1}X^{-1}YX\triangleright e)=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$
10_2	$\#\left\{(X,Y,e,f)\in G^2\times E^2 \middle\| \begin{array}{l} \partial(e)=XYXY^{-1}X^{-1}Y^{-1} \ , \ \ \partial(f)=Y^{-1}X^{-2}YX^2 \\ f^{-1}(A\triangleright f)(Y^{-1}X^{-1}\triangleright e)^{-1}(\partial(c)^{-1}B^{-1}\partial(c)^{-1}B^{-1}\triangleright c)c^{-1}(B^{-1}\triangleright f)c=1 \end{array}\right\} \Big/ (\#E)^2$ ここで、$A=Y^{-1}X^{-1}\partial(e)^{-1}XYXY^{-1}X^{-1}\partial(e)XY$ $B=\partial(f)^{-1}XYX^{-1}\partial(f)$ $c=f^{-1}(Y^{-1}X^{-1}\triangleright e)f$

主結果

Σ	$I^e_{\mathcal{G}}(\sum)$
10_3	$\# \left\{ (X,Y,e,f) \in G^2 \times E^2 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = X^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}YXY^{-1}X^{-1}Y \;,\; \partial(f) = YX^{-1}Y^{-1}X^{-1}YX \\ f^{-1}(X \triangleright f)(\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X \triangleright f)^{-1}(X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X \triangleright f)(Y \triangleright f)\partial(e)^{-1}A\partial(e)C \triangleright e)^{-1}(C \triangleright e)e^{-1} = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^2$ ここで、$A = X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y^{-1}\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$ $B = X\partial(f)X^{-1}\partial(f)^{-1}Y\partial(f)X\partial(f)^{-1}X^{-1}$ $C = \partial(e)^{-1}B\partial(e)$
10_1^1	$\# \left\{ (X,Y,e,f,g,h) \in G^2 \times E^4 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = 1 \;,\; \partial(f) = Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}XYX \\ \partial(g) = 1 \;,\; \partial(h) = X^{-1}Y^{-1}X^{-1}YXY \\ (XY \triangleright e)(Y \triangleright e)^{-1}e(Y \triangleright g)(XY \triangleright g)^{-1}(YXY \triangleright g) = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^2$
$10_1^{0,1}$	$\# \left\{ (X,Y,e,f) \in G^2 \times E^2 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = YXYX^{-1}Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}X \;,\; \partial(f) = 1 \\ f^{-1}(X \triangleright f)(X^{-1}Y^{-1} \triangleright f)^{-1}(Y^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^2$
$10_2^{0,1}$	$\# \left\{ (X,Y,e,f) \in G^2 \times E^2 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = 1 \;,\; \partial(f) = YX^2Y^{-1}X^{-2} \\ e(X^{-2} \triangleright e)^{-1} = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^2$
$10_1^{1,1}$	$\# \left\{ (X,Y,e,f,g,h) \in G^2 \times E^4 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = XYX^{-1}Y^{-1} \;,\; \partial(f) = XYXY^{-1}X^{-2} \\ \partial(g) = X^2YX^{-1}Y^{-1}X^{-1} \;,\; \partial(h) = YXY^{-1}X^{-1} \\ h^{-1}(Y \triangleright h)(Y^{-1} \triangleright g)g^{-1}(XY^{-1} \triangleright e)^{-1}(Y^{-1} \triangleright e)f^{-1}(X^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^2$
$10_1^{0,0,1}$	$\# \left\{ (X,Y,Z,e,f) \in G^3 \times E^2 \;\middle\vert\; \begin{array}{l} \partial(e) = YZ^{-1}Y^{-1}ZXYX^{-1}Y^{-1} \;,\; \partial(f) = 1 \\ (Y^{-1} \triangleright f)(X^{-1}Y^{-1} \triangleright f)^{-1} = 1 \;,\; (Y^{-1} \triangleright f)^{-1}(ZY^{-1} \triangleright f) = 1 \end{array} \right\} \Big/ (\#E)^3$

$I_{\mathcal{G}}$ による区別

ここで Q_8 ： 四元数群、に対して前述の構成法から crossed module $\mathcal{G} = (\mathrm{Aut}(Q_8), Q_8, \partial, \triangleright)$ を考える。

このとき、$I_{\mathcal{G}}(S^4 \setminus \nu(\text{spun terfoil})) = \frac{4608}{8^2} = 6$、
$I_{\mathcal{G}}(S^4 \setminus \nu(\text{spun figure 8 knot})) = \frac{192}{8^2} = 3$

Σ	$I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma)$	Σ	$I^e_{\mathcal{G}}(\Sigma)$
$6_1^{0,1}$	18	10_3	3
8_1	6	10_1^1	24
$8_1^{1,1}$	72	$10_1^{0,1}$	30
9_1	6	$10_2^{0,1}$	30
$9_1^{0,1}$	24	$10_1^{1,1}$	54
10_1	3	$10_1^{0,0,1}$	54
10_2	6		

参考文献

[1] 鎌田聖一. 曲面結び目理論. (丸善出版), 2012.

[2]João Faria Martins. The fundamental crossed module of the complement of a knotted surface. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 361, No. 9, pp. 4593 – 4630, 2009.

[3]João Faria Martins. On 2-dimensional homotopy invariants of complements of knotted surfaces. arXiv preprint math/0507239, 2005.

[4]Robert E Gompf and Stipsicz. 4-manifolds and Kirby calculus, Vol. 20. American Mathematical Society, 2023.

[5]Katsuyuki Yoshikawa. An enumeration of surfaces in four-space. Osaka Journal of Mathematics, Vol. 31, No. 3, pp. 497 – 522, 1994.

ご清聴ありがとうございました!!