カンドルのオイラー標数

甲斐 涼哉

大阪公立大学 D2

2024/12/26
結び目の数理 VII @ 早稲田大学

田丸博士氏 (大阪公立大学) との共同研究

概要

起 カンドルは結び目と相性の良い代数系である.

承 カンドルは対称空間の一般化とみなすことができ，
対称空間の離散化としても研究されている.

転 対称空間のオイラー標数は自然な群作用で計算でき，
その一般化としてカンドルにオイラー標数を定義する.

結 今回定義するカンドルのオイラー標数は,
位相空間のオイラー標数と似た性質を持つ.

定義

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

カンドル

X: 集合, $s: X \to \mathrm{Map}(X, X); x \mapsto s_x$: 写像.

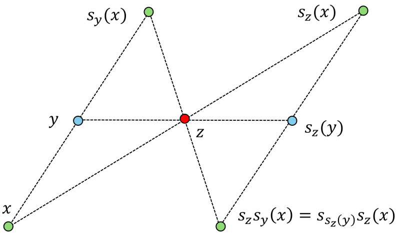
(X, s): カンドル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の条件を満たす:

- $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$,
- $\forall x \in X,\ s_x : X \to X$: 全単射,
- $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

カンドル構造は二項演算としても与えられる: $x * y = s_y(x)$.

例 (cf. Loos; 1969)

対称空間はカンドル.



カンドルへの群作用とカンドルオイラー標数

カンドル $X = (X, s)$ に対して,

- $\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid f$: カンドル同型 $\}$: 自己同型群.
- $\mathrm{Inn}(X) := \langle s_x \mid x \in X\rangle_{\mathrm{grp}} \lhd \mathrm{Aut}(X)$: 内部自己同型群.
- $\mathrm{Dis}(X) := \langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in X\rangle_{\mathrm{grp}}$: displacement 群.

$\rightsquigarrow$ これらの群は自然に X に作用する.

- X: 等質 (resp. 代数的連結) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright X$: 推移的 (resp. $\mathrm{Inn}(X) \curvearrowright X$: 推移的).

事実

- $\forall x \in X$, $\mathrm{Inn}(X) \cdot x = \mathrm{Dis}(X) \cdot x$.

定義 (K.–Tamaru)

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}$$

: カンドルオイラー標数.

例：n 次元球面

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, $s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x$.

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \quad \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

$g \in \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1)$ は次の形の元と $\mathrm{Dis}(S^n)$ 内で共役:

$$g \sim_{\mathrm{conj}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 偶数}, \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 奇数}. \end{cases} \quad (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)).$$

$\rightsquigarrow \chi^{\mathrm{Qdle}}(S^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n)$ ($\because$ 共役な元の固定点の数は等しい)

コンパクト Riemann 対称空間の場合

G: 連結コンパクト Lie 群, $\underline{T < G}$: 極大トーラス
$\rightsquigarrow \exists t_0 \in G$ s.t. $T = \langle t_0 \rangle_{\mathrm{grp}}$

事実 [Hopf–Samelson; 1941]

M: G の等質空間
$\Longrightarrow \chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T \curvearrowright M) = \#\mathrm{Fix}(t_0 \curvearrowright M)$.

定理 (K.–Tamaru)

X: 連結コンパクト Riemann 対称空間
$\Longrightarrow \chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X)$.

[証明の概要]

- $\mathrm{Dis}(X)$ は連結コンパクト Lie 群.
- X は $\mathrm{Dis}(X)$ の等質空間.

$\rightsquigarrow$ "事実"を適用する.

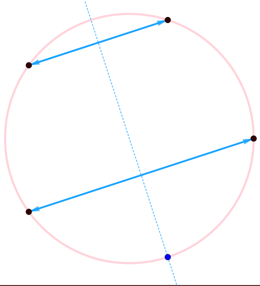
例：具体的なカンドル

例

(X, s): 自明カンドル (i.e. $\forall x \in X,\ s_x = \mathrm{id}$)
$\implies \chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \#X$.

例

$R_p := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, s)$: 二面体カンドル $(s_y(x) := 2y - x)$.
$\rightsquigarrow p > 2 \implies \chi^{\mathrm{Qdle}}(R_p) = 0 = \chi^{\mathrm{Top}}(S^1)$.



例：群から得られるカンドル

例

$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$: コアカンドル ($G$: 群, $s_y(x) := yx^{-1}y$).
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Core}(G)$: 非自明 $\Longrightarrow$ $\chi^{\mathrm{Qdle}}(\mathrm{Core}(G)) = 0$.

注意

G: 非自明な連結コンパクト Lie 群 $\Longrightarrow$ $\chi^{\mathrm{Top}}(G) = 0$.

例

$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) = (G, s)$: 一般化 Alexander カンドル
(G: 群, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $s_g(x) := \sigma(xg^{-1})g$).
$\rightsquigarrow$ $\sigma \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\chi^{\mathrm{Qdle}}(\mathrm{GAlex}(G, \sigma)) = 0$.

注意

X: 等質カンドル $\Longrightarrow$ $\exists\ \mathrm{GAlex}(G, \sigma) \twoheadrightarrow X$: カンドル準同型

例：離散球面

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, $s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x$.
$DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots n+1\} \subset S^n$: 離散 n-球面

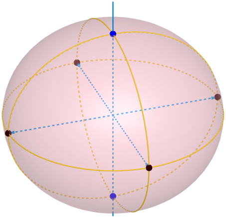
- DS^n は S^n の離散部分カンドル.

定理（K.–Tamaru）

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数}, \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数}. \end{cases}$$

注意

DS^n は等質カンドル.



カンドルの直積

$(X_1, s^1), (X_2, s^2)$: カンドル.

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

$\rightsquigarrow X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$: カンドルの直積.

定理 (K.–Tamaru)

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

注意

- X_1, X_2: CW 複体 $\Longrightarrow \chi^{\mathrm{Top}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Top}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Top}}(X_2)$.
- $\forall n > 1$, $\exists X$: 非自明な有限等質カンドル s.t. $\chi^{\mathrm{Top}}(X) = 2^n$.

カンドルの"直和"

$(X_1, s^1), (X_2, s^2)$: カンドル,

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s^i_x(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases} \quad (x, y \in X_1 \bigsqcup X_2)$$

$\rightsquigarrow X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 := (X_1 \bigsqcup X_2, s)$: interaction-free union.

定理 (K.–Tamaru)

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

注意

- X_1, X_2: 位相空間
  $\Longrightarrow \chi^{\mathrm{Top}}(X_1 \sqcup X_2) = \chi^{\mathrm{Top}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Top}}(X_2)$.
- 次を満たすカンドル X_1, X_2 が存在する:
  $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \neq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2)$.

まとめ & 課題

- $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}$.
- χ^{Qdle} はコンパクト Riemann 対称空間 X の χ^{Top} の拡張:
$$\chi^{\mathrm{Top}}(X) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X).$$
- $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2)$.
- $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2)$.

課題

- カンドルのオイラー標数に対応するホモロジーを構成できるか？
- 与えられた対称空間のオイラー標数と同じカンドルオイラー標数を持つ離散部分カンドルを構成できるか？
- 代数的連結な有限カンドルで $\chi^{\mathrm{Qdle}} > 0$ なものは存在するか？
  ($\#X < 48$ では存在しない...)

離散部分カンドルの絵

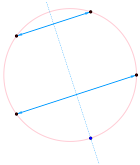


Figure: S^1 と R_5.

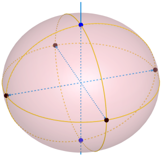


Figure: S^2 と DS^2.

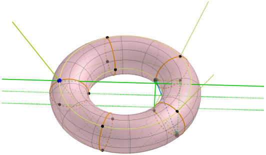


Figure: T^2 と $DT^2_{5,3}$.

ご清聴ありがとうございました.