トーラス結び目のトーラス上の自己融合について

On Self-fusions of Torus Knots on the Torus

長谷川 諒

甲南大学大学院 自然科学研究科

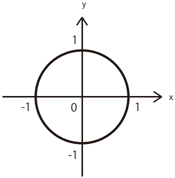
結び目の数理 Ⅶ　(早稲田大学)
2024 年 12 月 26 日

トーラスの定義

Definition 1 (トーラスの定義)

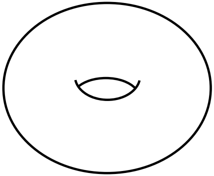
平面上の単位円周を $S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$ とし、
トーラスを $T = S^1 \times S^1$ として定める。

$S^1 =$

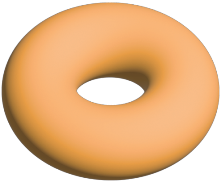


単位円

$S^1 \times S^1 =$



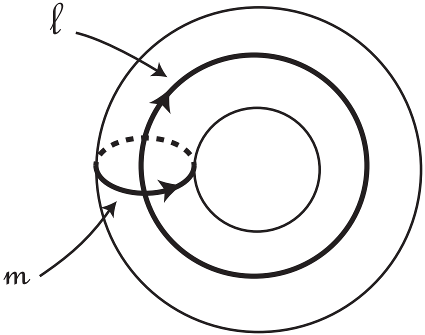
トーラス（無地）



トーラス（影あり）

ロンジチュードとメリディアン

1 つの S^1 に対応する閉曲線をロンジチュード ℓ、もう 1 つの S^1 に対応する閉曲線をメリディアン m という。

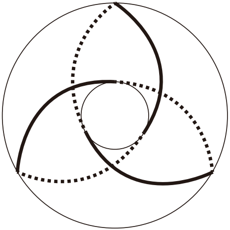


トーラス結び目の定義

Definition 2 (トーラス結び目の定義)

(p, q) を負でない整数とし、$\gcd(p, q) = 1$ とする。
トーラス上で、ℓ 方向に p 回、m 方向に q 回まわる単純閉曲線を $T(p, q)$ と書き、(p, q) 型のトーラス結び目という。

　例えば、$T(2, 3)$ は、1 本の紐を、トーラスの表面に、ℓ 方向に 2 回、m 方向に 3 回だけ巻き付けた結び目である。

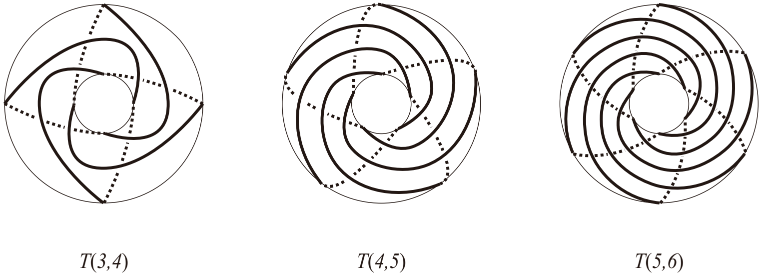


$T(2,3)$

トーラス結び目の例

トーラス結び目の例

同様に、$T(2,3)$ 以外にもさまざまなトーラス結び目があり、例えば、下図の $T(3,4)$ は 1 本の紐を、トーラスの表面に、ℓ 方向に 3 回、m 方向に 4 回だけ巻き付けた結び目である。

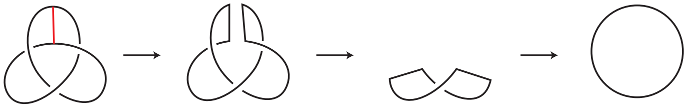


その他のトーラス結び目の例

結び目の自己融合

　ある結び目に対して、その結び目と両端点だけで交わる弧に沿って 2 つに分割してつなぎ、新たな結び目または絡み目を作ることを **自己融合 (self-fusion)** という。

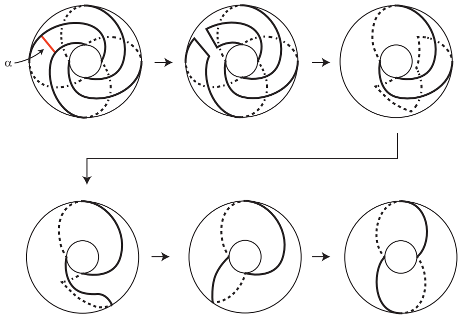
　自己融合をする際、結び目をつなぐ弧 α が必要になる。下図は、3 葉結び目における自己融合の図である。



3 葉結び目の自己融合
(バンドのひねりは省略する。)

トーラス結び目の自己融合

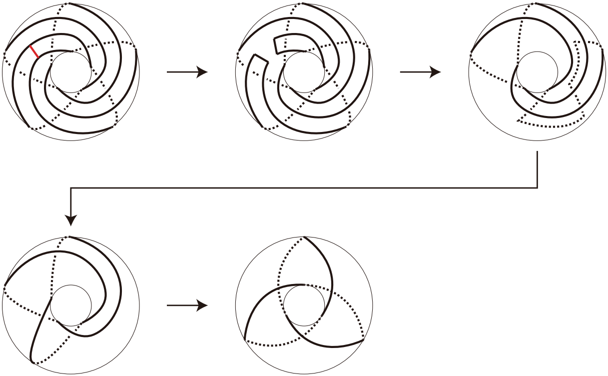
トーラス T 上に描かれたトーラス結び目に対して、T 上で自己融合を行う。すなわち、自己融合を指定する弧 α を T 上にとる。このとき、自己融合された結び目は再びトーラス上に描かれるので、新しいトーラス結び目が得られる。



$T(3,4)$ を自己融合して $T(1,2)$ が得られる

トーラス結び目の自己融合の例

下図は、$T(4, 5)$ を自己融合して $T(2, 3)$ が得られる例である。



注：α は、メリディアンに沿った弧とする。従って、トーラス結び目の自己融合は α の取り方に依らない。

$T(p, q)$ から $T(r, s)$ が得られるための条件

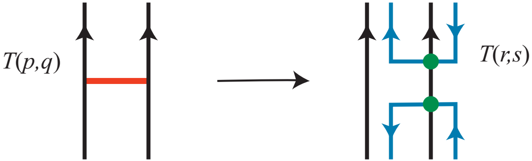
$T(p, q)$ から $T(r, s)$ となる条件として次を示した。

Theorem 1

$1 < p$ とする。$T(p, q)$ からトーラス結び目の自己融合で $T(r, s)$ が得られるための必要十分条件は、
$ps - qr = \pm 2$, $0 \leq r < p - 1$ かつ $\gcd(r, s) = 1$ である。

証明の要点

自己融合を行う T 上の弧を α とする。このとき、下図のように、α に沿って自己融合を実行し、重なりを少しずらした結び目を $T(r, s)$ とする。



上図のように、$T(p, q)$ と $T(r, s)$ は 2 点で交わる。また、2 つのトーラス結び目の代数的交差数は

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

である。従って、$ps - qr = \pm 2$ となる。

$sf(p, q)$ の定義

これ以降、トーラス結び目 $T(p, q)$ は、すべて $p < q$ とする。なぜなら、$T(p, q)$ と $T(q, p)$ は同値な結び目となるからである。

トーラス結び目の自己融合は、その定義から、1 回の自己融合で p は少なくとも 2 は減少する。従って、有限回の自己融合で、$p = 0$ または 1 となり、自明な結び目が得られ、下記が定義できる。

Definition 3 ($sf(p, q)$ の定義)

自明な結び目になるための最小の自己融合回数を、
$T(p, q)$ の自己融合数 (Self-fusion number) と言い、$sf(p, q)$ と書く。

このとき、次の問題を考える。

$sf(p,q)$ に関する問題設定

問題 A

与えられた $T(p,q)$ に対して、$sf(p,q)$ を決定せよ。

また、次のような問題設定も考えられる。

問題 B

任意の自然数 $n>0$ に対して、$sf(p,q)=n$ となる $T(p,q)$ を決定せよ。

$sf(p, q) = 1$ である例

1 回で自明になる例

$$T(2,3) \to T(0,1) \text{ より、} sf(2,3) = 1$$

$$T(5,7) \to T(1,1) \text{ より、} sf(5,7) = 1$$

$$T(7,12) \to T(1,2) \text{ より、} sf(7,12) = 1$$

$sf(p, q) = 1$ であるための条件

$sf(p, q) = 1$ であるための条件として、次が得られた。

Proposition 2

$1 < p < q, \gcd(p, q) = 1$ とする。$sf(p, q) = 1$ であるための必要十分条件は、$p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ である。

証明

$T(p,q)$ から $T(r,s)$ が得られるとすると、Theorem 1 より、$ps - qr = \pm 2$ である。$sf(p,q) = 1$ とすると、$T(r,s)$ は自明な結び目より、$r = 1$ または $s = 1$ である。

(I) $r = 1$ のとき、$ps - q = \pm 2$ より、$q = ps \pm 2$ $\therefore q \equiv \pm 2 \pmod{p}$

(II) $s = 1$ のとき、$p - qr = \pm 2$ より、$p = qr \pm 2$

- (i) $r = 0$ のとき、$p > 0$ より、$p = 2$
- (ii) $r = 1$ のとき、$p = q \pm 2$ より、$q \equiv \pm 2 \pmod{p}$
- (iii) $r \geq 2$ のとき、$1 < p < q$ より、$p \leq q - 1$ であるから、$p = rq \pm 2 \geq 2q \pm 2 = 2(q \pm 1) \geq 2p$ よって、$p \geq 2p$ となり不適。

従って、$sf(p,q) = 1$ ならば、$p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ である。

証明の続き

逆に、

(I) $p = 2$ のとき、$T(2, q)$ に対して、$\begin{vmatrix} 2 & q \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ より、
$T(r, s) = T(0, 1)$ が得られる。

(II) $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ のとき、$q = ps \pm 2$ であり、$\begin{vmatrix} p & q \\ 1 & s \end{vmatrix} = \pm 2$ より、
$T(r, s) = T(1, s)$ が得られる。

従って、$p = 2$ または $q \equiv \pm 2 \pmod{p}$ ならば、$T(r, s)$ は自明な結び目となり、$sf(p, q) = 1$ である。

$\square$

$sf(p,q)=2$ であるための条件

$sf(p,q)=2$ であるための条件について考える。そこで、$sf(p,q)$ の周期性について見てみる。以下は、$p=7$ のときの $sf(p,q)$ についての表である。

$sf(p,q)$ の周期性

$p=7$ のとき

q	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	20
$sf(7,q)$	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	22	23	24	25	26	27	29	30	31	32	33	34
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
	36	37	38	39	40	41	43	44	45	46	47	48
	3	1	2	2	1	3	3	1	2	2	1	3

上記の表から、 mod 7 で周期性をもつことが見てとれる。

$sf(p, q) = 2$ であるための条件

一般に、　mod p で周期性をもつことが、次の補題で示される。

Lemma 3

$1 < p < q < q'$, $\gcd(p, q) = 1$ とする。
このとき、$q \equiv q' \pmod{p}$ ならば、$sf(p, q) = sf(p, q')$ である。

例：$10 \equiv 17 \pmod{7}$ より、$sf(7, 10) = sf(7, 17) = 2$

証明

$sf(p,q)=n$ とすると、次のような自己融合列が得られる。

$$T(p,q)\to T(p_1,q_1)\to T(p_2,q_2)\to\cdots\to T(p_n,q_n)$$

ただし、自然数 i に対して、$1<p_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$ であり、$1<p_i<q_i, \quad p_n=0$ または 1 が成り立つ。($p_i<q_i$ の証明は省略する)。
　まず、$q'\equiv q \pmod p$ より、$q'=kp+q$ つまり、$q=q'-kp$ であるから、$T(p,q)\to T(p_1,q_1)$ より、

$$\begin{aligned} pq_1-qp_1&=\pm2\\ pq_1-(q'-kp)p_1&=\pm2\\ p(kp_1+q_1)-q'p_1&=\pm2 \end{aligned}$$

$q_1'=kp_1+q_1$ とおくと、$pq_1'-q'p_1=\pm2$ であるから、$T(p,q')\to T(p_1,q_1')$ が得られる。

証明の続き

次に、$q_1' = kp_1 + q_1 \equiv q_1 \pmod{p_1}$ より、同様の議論を用いて $T(p_1, q_1') \to T(p_2, q_2')$ が得られる。これを続けて、

$$T(p, q') \to T(p_1, q_1') \to T(p_2, q_2') \to \cdots \to T(p_{n-1}, q_{n-1}') \to T(p_n, q_n')$$

を得る。すなわち、$T(p, q)$ の自己融合列と、$T(p, q')$ の自己融合列の第 1 座標が一致する。

ここで、$1 < p < q'$ で $1 < p_1$ より $1 < p_1 < q_1'$ であり、同様に $1 < p_i < q_i' \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$, $p_n = 0$ または 1 が成り立つから、$sf(p, q') = n$ となる。

従って、$q \equiv q' \pmod{p}$ ならば、$sf(p, q) = sf(p, q')$ が成り立つ。 $\square$

$sf(p, q) = 2$ の例

Proposition 2 で $sf(p, q) = 1$ であるための必要十分条件を示した。
以下で、$sf(p, q) = 2$ であるための条件を考察する。
次は、$sf(p, q) = 2$ の例である。

$$T(8, 11) \to T(2, 3) \to T(0, 1) \text{ より、} sf(8, 11) = 2$$

$$T(11, 14) \to T(3, 4) \to T(1, 2) \text{ より、} sf(11, 14) = 2$$

$$T(12, 19) \to T(2, 3) \to T(0, 1) \text{ より、} sf(12, 19) = 2$$

$sf(p, q) = 2$ であるための条件

p が偶数の場合、次の結果が得られた。

Theorem 4

$1 < p < q < 2p,\ \gcd(p, q) = 1,\ p$ は偶数とする。このとき、$sf(p, q) = 2$ であるための必要十分条件は、$q = \dfrac{3}{2}p \pm 1$ である。

証明

p は偶数より、$p = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ とする。

$T(p, q)$ から $T(r, s)$ が得られるとすると、Theorem 1 より $ps - qr = \pm 2$ である。$sf(p, q) = 2$ とすると、$sf(r, s) = 1$ であるから、Proposition 2 より $r = 2$ または $s \equiv \pm 2 \pmod r$ である。

(I) $r = 2$ のとき、$ps - qr = 2ks - 2q = \pm 2$ より、$q = ks \pm 1$ となる。このとき、$1 < p < q < 2p$ より、$2k < sk \pm 1 < 4k$ であり、$\gcd(r, s) = 1, r = 2$ より、s は奇数。また、$r < s$ より $2 < s$ である。

- (i) $s = 3$ のとき、$2k < 3k \pm 1 < 4k$ より、$q = 3k \pm 1 = \dfrac{3}{2}p \pm 1$
- (ii) $s \geq 5$ のとき、$sk \pm 1 \geq 5k \pm 1 = 4k + (k \pm 1) \geq 4k$ より不適。

証明の続き

(II) $s \equiv \pm 2 \pmod r$ のとき、$s = mr \pm 2 \quad (m \in \mathbb{Z})$ ここで、r が偶数のとき、s も偶数であるから、$\gcd(r, s) = 1$ に反する。よって、r は奇数となり、

$$\begin{aligned} ps - qr = \pm 2 &\iff 2k(mr \pm 2) - qr = \pm 2 \\ &\iff (2km - q)r = \pm 2 \cdot 2k \pm 2 = 2(\pm 2k \pm 1) \end{aligned}$$

より、$2km - q$ は偶数となるため、整数 n を用いて、$2km - q = 2n$ と表される。故に、$q = 2(km - n)$ より、q は偶数となり、これは $\gcd(p, q) = 1$ に反するため不適。

証明の続き

逆に、$q = \frac{3}{2} \cdot 2k \pm 1 = 3k \pm 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ とする。k が奇数ならば、q は偶数となり不適より、$k = 2\ell \quad (\ell \in \mathbb{Z})$ とおける。
$(p, q) = (4\ell, 6\ell \pm 1)$ に対して、$(r, s) = (2, 3)$ とおくと、
$4\ell \cdot 3 - (6\ell \pm 1) \cdot 2 = \pm 2$ となり、Theorem 1 より $T(4\ell, 6\ell \pm 1)$ から $T(2, 3)$ が得られる。
次に、$(r, s) = (2, 3)$ に対して、$(t, u) = (0, 1)$ とおくと、$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$ となり、Theorem 1 より $T(2, 3)$ から $T(0, 1)$ が得られる。よって、$T(4\ell, 6\ell \pm 1) \to T(2, 3) \to T(0, 1)$ となり、$sf(p, q) = 2$ となる。

□

自己融合数 $sf(p, q)$ の最大条件

$T(p, q)$ に自己融合を行うと、その定義から、p は少なくとも 2 は減少する。そのため、次の不等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
sf(p, q) &\leq \frac{p}{2} && (p \text{ が偶数}) \\
sf(p, q) &\leq \frac{p-1}{2} && (p \text{ が奇数})
\end{aligned}
$$

このとき、次が成り立つ。

Theorem 5

上記の不等式において、等号が成立するための必要十分条件は、$q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ である。

証明は省略する。

今後の展望とまとめ

以上で、p が偶数のとき、$sf(p, q) = 2$ であるための必要十分条件が得られた。今後、p が奇数の場合について、研究を進めていきたい。

また、幾何的な状況と整数論との関係についても考えていきたい。