ラックの G 族に付随しない多重群ラックの構成

研究集会「結び目の数理 VII」

新井克典

大阪大学 D2

2024/12/26

概要

問題 [cf. Y. Taniguchi 2024 (カンドルと対称空間 2023)]

次の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラック $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は存在するか：
$(\star)$ ある空間曲面の, Y 向き付けられたある図式 $D = D_1 \sharp D_2$ に対して, ある X 彩色 C が存在して, $C(\alpha) \notin \{e_\lambda \in G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を満たすものが存在する. ここで, α は下図で表される弧である.

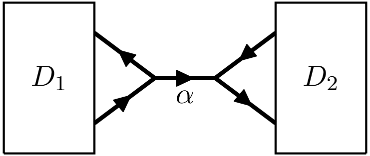


Figure: $D = D_1 \sharp D_2$

主結果

性質 $(\star)$ を満たす多重群ラックを構成した.

空間曲面

定義

空間曲面とは $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ に埋め込まれたコンパクト曲面のことである.

注意

本講演では, 空間曲面は

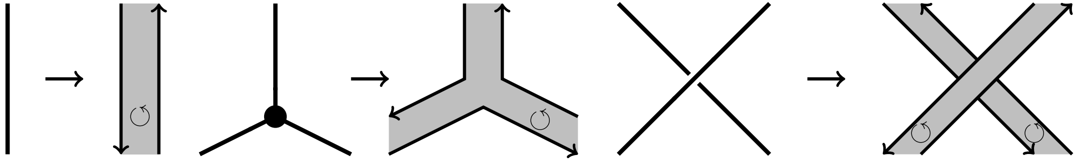
(i) 有向曲面であり,

(ii) 各連結成分は境界を持ち, 2 次元閉円板ではないものとする.

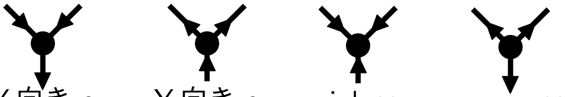
2 つの空間曲面 F_1 と F_2 が同値である ($F_1 \cong F_2$) とは, F_1 と F_2 が S^3 内で全同位なことをいう.

空間曲面の図式

空間曲面 $F = F(D)$ は空間 3 価グラフの図式 D から, 次の方法で得られる:



D を空間曲面 $F = F(D)$ の図式と呼ぶ.
空間 3 価グラフのY 向きとは, 各頂点周りで sink や source を持たないような向きのことである. 図式にも Y 向きが定義される.



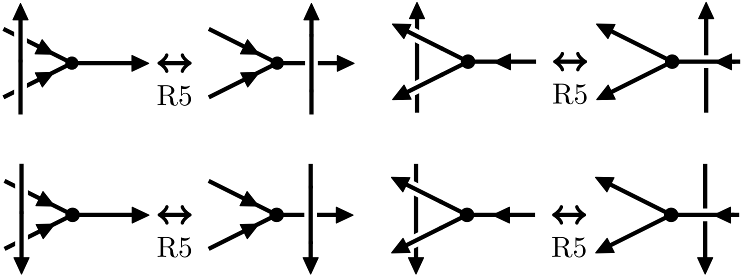
空間曲面の, Y 向きを与えられた図式を空間曲面のY 向き付けられた図式と呼ぶ.

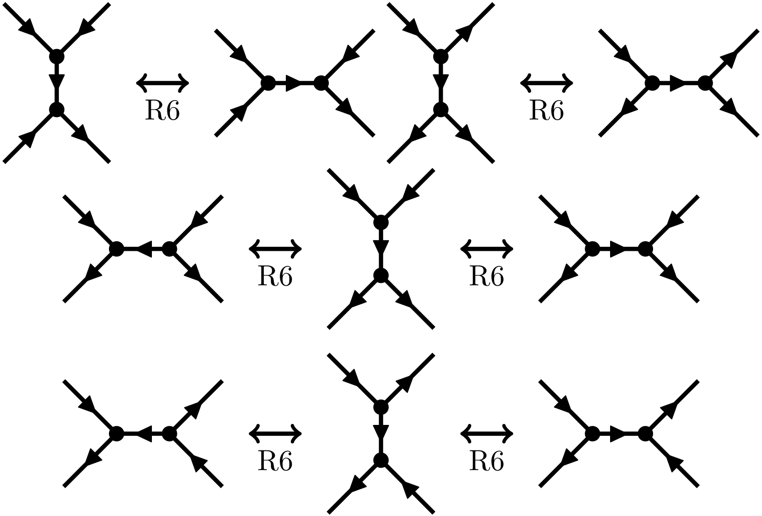
ライデマイスター変形

定理 [Matsuzaki 2021, Matsuzaki-Murao 2023]

F_i: 空間曲面, D_i: F_i の Y 向き付けられた図式 $(i = 1, 2)$.
このとき, 次は同値である.

- $F_1 \cong F_2$.
- D_1 と D_2 は R2, R3, R5, R6 変形と S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合う.




R6
R6
R6
R6
R6
R6

ラック

定義 [Joyce 1982, Matveev 1982, Fenn-Rourke 1992]

X: 集合, $*: X \times X \to X$: X 上の二項演算.
$(X, *)$ がラックであるとは (i) – (ii) の条件を満たすことをいう:

(i) $\forall y \in X$, $S_y : X \ni x \mapsto x * y \in X$ は全単射である.

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.

$n \in \mathbb{Z}$ に対して, $x *^n y := S_y^n(x)$ と書くことにする. また, $x^y := S_y(x)$ とも書く.

例

- G: 群. $\mathrm{Conj}(G) := (G, x * y = y^{-1}xy)$.
- G: 群, $N \triangleleft G$: 正規部分群. $\mathrm{Conj}(G) \times \mathrm{Conj}(N) = (G \times N, (x, y) * (z, w) = (x^{zw}, y^{zw}))$.

多重群ラック

定義 [Ishii-Matsuzaki-Murao 2020]

$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 群の族, e_λ: G_λ の単位元 ($\lambda \in \Lambda$).
$X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$: 群の非交和, $* : X \times X \to X$: X 上の二項演算.
$(X, *)$ が多重群ラックであるとは (i) – (iii) を満たすことをいう:

(i) $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G_\lambda$ に対して, $x * (gh) = (x * g) * h$ かつ $x * e_\lambda = x$ を満たす,
(ii) $\forall x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす,
(iii) $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G_\lambda$ に対して, $(gh) * x = (g * x)(h * x)$ を満たす.

例

$(R, \triangleright)$: ラック.
$N = \mathrm{Type}(R, \triangleright) := \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \forall x, y \in R,\ x *^n y = x\}$ (存在しない場合は ∞ と定める).
このとき, $R \times \mathbb{Z}_N = \bigsqcup_{x\in R}(\{x\} \times \mathbb{Z}_N)$ は次の演算で多重群ラックとなる:

$$(x, i) * (y, j) = (x \triangleright^j y, i),\ (x, i)(x, j) = (x, i + j)$$

多重群ラック彩色

$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$: 多重群ラック, D: 空間曲面の Y 向き付けられた図式.
D の弧: $D \setminus \{$全ての頂点$\}$ の連結成分, Arc(D): D の弧全体の集合.
D の X 彩色: 写像 $\mathrm{Arc}(D) \to X$ で各交差と各頂点において下図の条件を満たすもの:

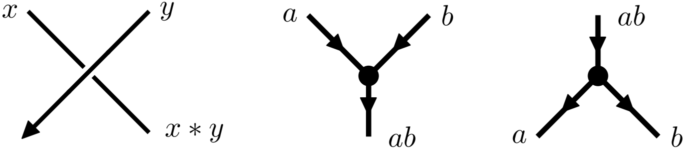


Figure: X 彩色条件 $(x, y \in X,\ a, b \in G_\lambda)$

Col$_X(D)$: D の X 彩色全体の集合.

定理 [Ishii-Matsuzaki-Murao 2020]

X: 多重群ラック, D_1, D_2: 空間曲面 F の Y 向き付けられた図式.
このとき, Col$_X(D_1)$ と Col$_X(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に, $\sharp$Col$_X(D_1)$ は F の不変量となる（Y 向きの取り方にもよらない）.

先行研究

問題 [cf. Y. Taniguchi 2024 (カンドルと対称空間 2023)]

次の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラック $X=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は存在するか：
$(\star)$ ある空間曲面の, Y 向き付けられたある図式 $D=D_1\sharp D_2$ に対して, ある X 彩色 C が存在して, $C(\alpha)\notin\{e_\lambda\in G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を満たすものが存在する．ここで, α は下図で表される弧である．

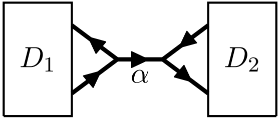


Figure: $D=D_1\sharp D_2$

- [Ishii 2015, Ishii-Matsuzaki-Murao 2020] ラックの G 族 $\to$ 多重群ラック,
- [Carter-Ishii-Saito-Tanaka 2017, Matsuzaki-Murao 2023]
  多重群ラックとその 2 コサイクル $\to$ 多重群ラック (コサイクル拡大).
- [Y. Taniguchi 2024] 性質 $(\star)$ を満たす多重共役カンドルの存在を示した.

ラックの G 族

定義 [Ishii-Iwakiri-Jang-Oshiro 2013]

G: 群, e: G の単位元, X: 集合, $*^g : X \times X \to X$: X 上の二項演算 $(g \in G)$.
$(X, \{*^g\}_{g\in G})$: <u>ラックの G 族</u>であるとは (i) と (ii) を満たすことという:

(i) $\forall x, y \in X$, $\forall g, h \in G$ に対して, $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$ かつ $x *^e y = x$ を満たす,

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $\forall g, h \in G$ に対して, $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$ を満たす.

例

$X = \mathbb{Z}_3$, $G = S_3 \cong \langle a, x \mid a^3 = x^2 = e,\ xax = a^2 \rangle$.

$g \in G$ に対して, $*^g : X \times X \to X$ を次で定義する: $\begin{cases} x *^g y = 2y - x & (g = x,\ ax,\ a^2x) \\ x *^g y = x & (\text{上記以外}) \end{cases}$.

このとき, $(X, \{*^g\}_{g\in G})$ はラックの G 族である.

ラックの G 族に付随する多重群ラック

命題 [Ishii 2015, Ishii-Matsuzaki-Murao 2020]

$(X, \{*^g\}_{g\in G})$: ラックの G 族.
$X \times G = \bigsqcup_{x\in X}(\{x\}\times G)$ は次の演算で多重群ラックとなる:

$$(x,g)*(y,h) = (x *^h y, h^{-1}gh),\ (x,g)(x,h) = (x,gh). \quad (x,y\in X, g,h\in G)$$

多重群ラック $X\times G$ をラックの G 族 $(X,\{*^g\}_{g\in G})$ に付随する多重群ラックと呼ぶ.

例

$X = \mathbb{Z}_3$, $G = S_3 \cong \langle a, x \mid a^3 = x^2 = e,\ xax = a^2\rangle$.

$g\in G$ に対して, $*^g : X\times X \to X$ を次で定義する: $\begin{cases} x *^g y = 2y - x & (g = x,\ ax,\ a^2x) \\ x *^g y = x & (\text{上記以外}) \end{cases}.$

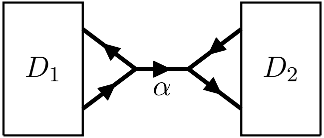
このとき, $(X, \{*^g\}_{g\in G})$ はラックの G 族である.
$X \times G = \bigsqcup_{x\in X}(\{x\}\times G)$ は次の演算で多重群ラックとなる:

$$(x,g)*(y,h) = (x *^h y, h^{-1}gh), \quad (x,g)(x,h) = (x,gh). \quad (x,y\in X, g,h\in G)$$

ラックの G 族に付随する多重群ラックによる彩色

問題 [cf. Y. Taniguchi 2024 (カンドルと対称空間 2023)]

次の性質 $(\star)$ を満たす多重群ラック $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は存在するか：
$(\star)$ ある空間曲面の、Y 向き付けられたある図式 $D = D_1 \sharp D_2$ に対して, ある X 彩色 C が存在して, $C(\alpha) \notin \{e_\lambda \in G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を満たすものが存在する．ここで, α は下図で表される弧である．



事実

$X \times G$: ラックの G 族に付随する多重群ラック．
D の任意の $X \times G$ 彩色 C に対して, ある $x \in X$ が存在して, $C(\alpha) = (x, e)$ を満たす．

$(\because)$ $\mathrm{pr}_2 \circ C : \mathrm{Arc}(D) \to X \times G \to G$ は群準同型 $\pi_1(\overline{S^3 - N(F(D))}) \to G$ に対応するから．

多重群ラックの構成法

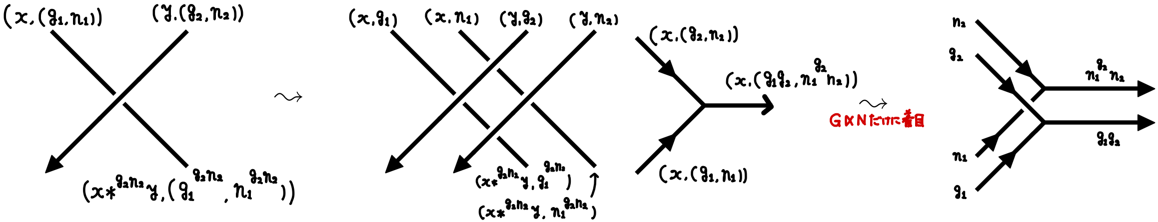
主結果 1

$(X, \{*^g\}_{g \in G})$: ラックの G 族, $N \triangleleft G$: G の正規部分群.
このとき, $X \times (G \ltimes N) = \bigsqcup_{x \in X}(\{x\} \times (G \ltimes N))$ は次の演算で多重群ラックとなる:

- $(x, (g_1, n_1)) * (y, (g_2, n_2)) = (x *^{g_2 n_2} y, (g_1^{g_2 n_2}, n_1^{g_2 n_2}))$,
- $(x, (g_1, n_1))(x, (g_2, n_2)) = (x, (g_1 g_2, n_1^{g_1} n_2))$.

ここで, $g, h \in G$ に対して, $g^h := h^{-1} g h$ である.

$(\because)$ 多重群ラックの定義を満たすことを直接計算で確認する.



主結果 1

$(X, \{*^g\}_{g\in G})$: ラックの G 族, $N \triangleleft G$: G の正規部分群.
このとき, $X \times (G \ltimes N) = \bigsqcup_{x\in X}(\{x\} \times (G \ltimes N))$ は次の演算で多重群ラックとなる:

- $(x, (g_1, n_1)) * (y, (g_2, n_2)) = (x *^{g_2 n_2} y, (g_1^{g_2 n_2}, n_1^{g_2 n_2}))$,
- $(x, (g_1, n_1))(x, (g_2, n_2)) = (x, (g_1 g_2, n_1^{g_1} n_2))$.

主結果 2

$N \curvearrowleft G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ は性質 $(\star)$ を満たす.

$(\because)$ 性質 $(\star)$ を満たす空間曲面とその図式, 彩色を与える（次のページ）.

系

$N \curvearrowleft G$ が右からの非自明な共役作用のとき, 多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ はどんなラックの G 族にも付随しない多重群ラックである.

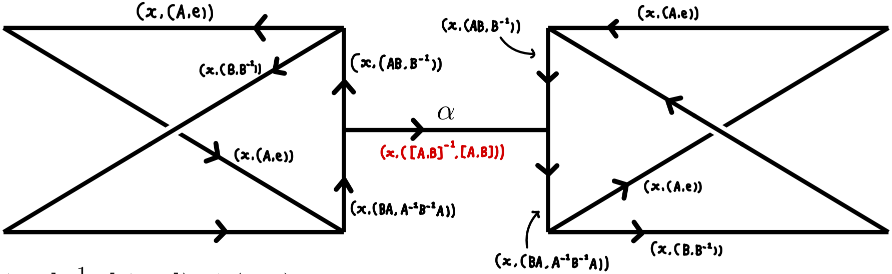
$(\because)$ ラックの G 族に付随する多重群ラックは性質 $(\star)$ を満たさないことから従う.

ラックの G 族に付随しない多重群ラック

主結果 2

$N \curvearrowleft G$ が右からの非自明な共役作用のとき，多重群ラック $X \times (G \ltimes N)$ は性質 $(\star)$ を満たす．

$(\because)$ $N \curvearrowleft G$: 非自明 $\Rightarrow \exists A \in G, \exists B \in N$ s.t. $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1} \neq e$.
D: 下図で与えられる空間曲面の Y 向き付けられた図式.
$C : \mathrm{Arc}(D) \to X \times (G \ltimes N)$: 下図で与えられる $X \times (G \ltimes N)$ 彩色.



$C(\alpha) = ([A, B]^{-1}, [A, B]) \neq (e, e) \in G \ltimes N$. $\square$

ラックの G 族に付随しない多重群ラックの例

例

$X = \mathbb{Z}_3$, $G = S_3 \cong \langle a, x \mid a^3 = x^2 = e,\ xax = a^2 \rangle$, $N = \mathbb{Z}_3 \cong \langle a \mid a^3 = e \rangle$.

$g \in G$ に対して, $*^g : X \times X \to X$ を次で定義する: $\begin{cases} x *^g y = 2y - x & (g = x,\ ax,\ a^2x) \\ x *^g y = x & (\text{上記以外}) \end{cases}$.

このとき, $(X, \{*^g\}_{g \in G})$ はラックの G 族である.

$N \curvearrowleft G$: 非自明 ($\because$ $x \in G$, $a \in N$ に対して, $a^x = a^2 \neq a$)

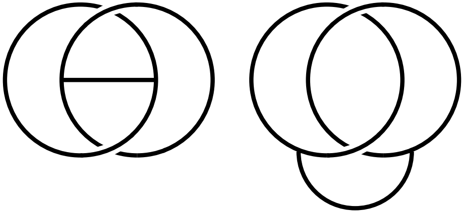
$X \times (G \ltimes N) = \bigsqcup_{x \in X} (\{x\} \times (G \ltimes N))$ は次の演算で, 性質 ($\star$) を満たす多重群ラックとなる:

$$(x, (g_1, n_1)) * (y, (g_2, n_2)) = (x *^{g_2 n_2} y, (g_1^{g_2 n_2}, n_1^{g_2 n_2})),$$

$$(x, (g_1, n_1))(x, (g_2, n_2)) = (x, (g_1 g_2, n_1^{g_2} n_2)).$$

ラックの G 族に付随しない多重群ラックによる彩色

$X=\mathbb{Z}_3$, $G=S_3$, $N=G$. $X\times(G\ltimes N)$: 主結果の構成法で得られる多重群ラック



D_1 D_2

- $\sharp\mathrm{Col}_{X\times(G\ltimes N)}(D_1)=1458$, $\sharp\mathrm{Col}_{X\times(G\ltimes N)}(D_2)=1242$.
- Y: ラックの G 族に付随する多重群ラック $\Rightarrow \sharp\mathrm{Col}_Y(D_1)=\sharp\mathrm{Col}_Y(D_2)$.
- ハンドル体結び目として,
  $N(F(D_1))\cong N(F(D_2))\cong$ (種数 2 の自明なハンドル体結び目).
- $\partial(F(D_1))\cong\partial(F(D_2))\cong$ L6n1.

ご清聴ありがとうございました.