

# 概単純線形グラフを持つ Brieskorn 球面 に対する Ozsváth-Szabó の $d$ 不変量

鈴木 龍正

明治大学 研究・知財戦略機構 博士研究員/MIMS 研究員

2024 年 12 月 25 日  
研究集会「結び目の数理 VII」  
早稲田大学

# 目次

## 1 導入

- $\mathbb{K}HS^n$  と  $\mathbb{K}HB^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$  または  $\mathbb{Q}$ )
- 3次元 Brieskorn ホモロジー球面  $\Sigma(p, q, r)$
- Ozsváth–Szabó の  $d$  不変量とその性質

## 2 背景

- Kirby 氏の低次元トポロジーの問題集の Problem 4.2
- 3次元ホモロジー同境界群  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$
- 結び目コンコダンス群  $\mathcal{C}$
- 概単純線形グラフを持つ ( $pq + pr - qr = 1$  を満たす)  $\Sigma(p, q, r)$

## 3 主結果

- $p$  が奇数の場合の精密化
- $pq + pr - qr = 1$  の場合の不等式関係
- $d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3}))$  の評価
- 不等式関係を満たさない無限種類のクラスの例
- 結び目コンコダンス群  $\mathcal{C}$  に対する結果

1 導入

2 背景

3 主結果

# $\mathbb{K}HS^n$ と $\mathbb{K}HB^n$ ( $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ または $\mathbb{Q}$ )

本講演では特に断りのない限り, 多様体は全て滑らか, 連結, コンパクトかつ向き付けられているとし, 結び目は全て  $S^1$  から  $S^3$  への滑らかな埋め込みの像とする.

$n$ : 正の整数,  $Y$ :  $n$ 次元閉多様体,  $W$ :  $n$ 次元多様体.

## 定義 ( $\mathbb{Z}HS^n$ )

$Y$ :  $n$ 次元ホモロジー球面 ( $\mathbb{Z}HS^n$ ):  $\iff H_k(Y; \mathbb{Z}) \cong H_k(S^n; \mathbb{Z})$  for any  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 定義 ( $\mathbb{Z}HB^n$ )

$W$ :  $n$ 次元ホモロジー球体 ( $\mathbb{Z}HB^n$ ):  $\iff H_k(W; \mathbb{Z}) \cong H_k(B^n; \mathbb{Z})$  for any  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 3次元有理ホモロジー球面 ( $\mathbb{Q}HS^n$ ),  
4次元有理ホモロジー球体 ( $\mathbb{Q}HB^n$ ) も同様に定義される.

# 3次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(p, q, r)$

$(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3; 1 \leq p < q < r, \gcd(p, q) = \gcd(q, r) = \gcd(r, p) = 1.$   
 $S_\varepsilon^5$ :  $0 < \varepsilon \ll 1$  を半径に持つ5次元球面.

## 定義 (3次元 Brieskorn ホモロジー球面)

原点でのみ特異点を持つ多様体  $\Sigma(p, q, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \cap S_\varepsilon^5 \mid x^p + y^q + z^r = 0\}$  を3次元 Brieskorn ホモロジー球面と呼ぶ.

■  $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1, D_\varepsilon^6$  を  $\varepsilon$  を半径に持つ6次元球体.

$\Sigma(p, q, r)$  の平滑化 (smoothing) が Milnor ファイバー

$$M(p, q, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \cap D_\varepsilon^6 \mid x^p + y^q + z^r = \delta\}$$

の境界である:  $\partial M(p, q, r) \approx \Sigma(p, q, r).$

■  $\Sigma(p, q, r)$  (の平滑化) は  $\mathbb{Z}HS^3$  である. 特に  $\Sigma(1, q, r) = S^3.$

以下,  $p > 1$  とする.

■  $\Sigma(2, 3, 5)$  (の平滑化) は Poincaré ホモロジー球面に (微分) 同相である.

# $\Sigma(p, q, r)$ と連分数展開

3次元閉多様体  $\Sigma(p, q, r)$  は  $\mathbb{Z}HS^3$  であることから,  
Diophantine 方程式

$$e_0 pqr + p'qr + pq'r + pqr' = -1, \quad 0 < p' < p, \quad 0 < q' < q, \quad 0 < r' < r$$

を満たす唯一の整数の組  $(e_0, p', q', r')$  が存在する。  
 $p, q, r, p', q', r'$  をそれぞれ  $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$  と表記する。

$$-\frac{p_i}{p'_i} = t_{i1} - \frac{1}{t_{i2} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{t_{im_i}}}}$$

のように一意的に連分数展開される。

# $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式

$t \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Q}$  とする. 3次元閉多様体の同相型を変えない手術図式上の操作として, slam-dunk と呼ばれる操作がある (図1).

$\Sigma(p, q, r)$  の手術図式は図2に示される頂点に数字が付いたグラフで表現される.

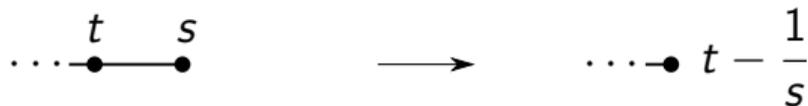


図1: Slam-dunk.

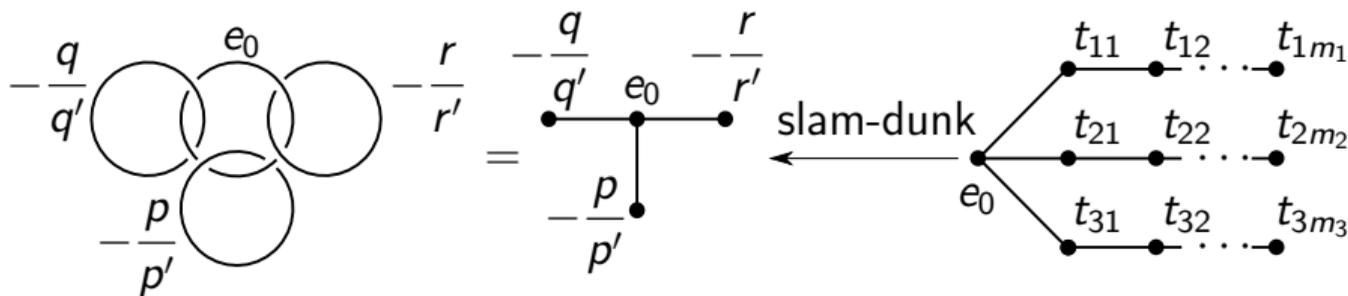


図2:  $\Sigma(p, q, r)$  の手術図式. 右は  $\Sigma(p, q, r)$  に特異点解消 (resolution) を行うことで得られる3次元多様体の手術図式に相当する.

## 定義 (Ozsváth–Szabó の $d$ 不変量)

$Y$ : 3次元有理ホモロジー球面 ( $\mathbb{Q}HS^3$ ),  $\mathfrak{s}(Y)$ :  $Y$  上の  $\text{spin}^c$  構造.

Ozsváth–Szabó の  $d$  不変量  $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$  とは,  $+$  版の Heegaard Floer ホモロジー  $HF^+(Y, \mathfrak{s}(Y))$  内の  $\infty$  版の Heegaard Floer ホモロジー  $HF^\infty(Y, \mathfrak{s}(Y))$  の像内の捩れの無い元全体の中での最小の absolute grading のことである.

- $d$  不変量は有理ホモロジー  $\text{spin}^c$  同境不変量である.
- $d(-Y, \mathfrak{s}(Y)) = -d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ . ( $-Y$ :  $Y$  の逆向き. )
- $Y$  が  $\mathbb{Z}HS^3$  なら,  $\text{spin}^c$  構造はただ一つである.  $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$  を  $d(Y)$  と略記する.
- $L(p, q)$ :  $(p, q)$  型レンズ空間.  $\mathfrak{s}(L(p, q)) \in \mathbb{Z}_p$ .  
 $d(L(1, q)) = d(L(1, 0)) = d(S^3) = 0$ ,  
 $d(L(2, 2m+1), n) = d(L(2, 1), n) = (-1)^n/4$ .

# 3次元ホモロジー球面に対する $d$ 不変量の性質

■  $Y: \mathbb{Z}HS^3 \implies d(Y) \in 2\mathbb{Z}$ .

■  $Y$  が  $\mathbb{Z}HS^3$  であるとき,  $d(Y)$  はホモロジー同境不変量:

$$Y_1, Y_2: \mathbb{Z}HS^3.$$

$d(Y_1) \neq d(Y_2) \implies Y_1$  と  $Y_2$  はホモロジー同境ではない.

$$S(p, q) := \{ap + bq \mid (a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2\},$$

$T(p, q)$ :  $(p, q)$  型トーラス結び目,  $g(p, q) := (p-1)(q-1)/2$ .

$$S_{-1/n}^3(T(p, q)) = \Sigma(p, q, pqn - 1), \quad S_{-1/n}^3(-T(p, q)) = \Sigma(p, q, pqn + 1).$$

## 定理 (Tweedy, 2013)

$$d(\Sigma(p, q, pqn - 1)) = 2|\{s \notin S(p, q) \mid s \geq g(p, q)\}|,$$

$$d(\Sigma(p, q, pqn + 1)) = 0.$$

1 導入

2 背景

3 主結果

## Kirby 氏の問題集の Problem 4.2 の更新版

どのような  $\mathbb{Z}HS^3$  が, ある可縮な 4 次元多様体の境界になるか.

- $C$ : 可縮な 4 次元多様体  $\implies C: \mathbb{Z}HB^4$ .
- $d$  不変量は, この未解決の分類問題の否定的解決を推進する手段になる:  $Y$  が  $\mathbb{Z}HS^3$  かつ  $d(Y) \neq 0$ .
  - $\implies Y$  は任意の  $\mathbb{Z}HB^4$  の境界にならない.
  - $\implies Y$  は任意の可縮な 4 次元多様体の境界にならない.
- この未解決の分類問題を肯定的に解決する際には, Kirby 計算が有効である:  $Y$  がある可縮な 4 次元多様体の境界になることは,  $Y$  の手術図式が, ある 3, 4 ハンドルを持たない可縮な 4 次元多様体のハンドル図式 (の点付き円周を 0-framed knot に変更した図式) と同一であることを, Kirby 計算で証明できる.

# $n$ 次元ホモトピー同境界群

$M_0, M_1$ :  $n$ 次元ホモトピー球面.  $M_0 \# M_1$ :  $M_0$  と  $M_1$  との連結和.

$M_0 \sim M_1$ :  $M_0$  と  $M_1$  が  $h$ 同境界

:  $\iff$  ある  $n+1$ 次元多様体  $W$  が存在して,

- $\partial W = -M_0 \cup M_1$ ,

- 包含写像  $M_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow M_1$  がホモトピー同値

$$M_0 \simeq W \simeq M_1$$

を誘導する.

$$[M_0]_{\sim} + [M_1]_{\sim} := [M_0 \# M_1]_{\sim}.$$

$\Theta^n := \{n \text{次元ホモトピー球面}\} / \sim$ :  $n$ 次元ホモトピー同境界群.

$[S^3]_{\sim}$ :  $\Theta^n$  の単位元,  $[-M]_{\sim}$ :  $\Theta^n$  の  $[M]_{\sim}$  に対する逆元.

# $n$ 次元ホモロジー同境界群

$M_0, M_1$ :  $n$ 次元ホモロジー球面.

$M_0 \sim_{\mathbb{Z}} M_1$ :  $M_0$  と  $M_1$  がホモロジー同境界

:  $\iff$  ある  $n+1$ 次元多様体  $W$  が存在して,

- $\partial W = -M_0 \cup M_1$ ,

- 包含写像  $M_0 \hookrightarrow W \hookleftarrow M_1$  がホモロジー群の同型

$$H_k(M_0; \mathbb{Z}) \cong H_k(W; \mathbb{Z}) \cong H_k(M_1; \mathbb{Z}) \text{ for any } k \in \mathbb{Z}$$

を誘導する.

$$[M_0]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}} := [M_0 \# M_1]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

$\Theta_{\mathbb{Z}}^n := \{n \text{次元ホモロジー球面}\} / \sim_{\mathbb{Z}}$ :  $n$ 次元ホモロジー同境界群.

$[S^3]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ :  $\Theta_{\mathbb{Z}}^n$  の単位元,  $[-M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ :  $\Theta_{\mathbb{Z}}^n$  の  $[M]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$  に対する逆元.

	$ \Theta^n $	$ \Theta_{\mathbb{Z}}^n $
$n = 3$	1	$\infty$
$n \neq 3$	有限	有限

# $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の構造についての進展 (1/3)

## 定理 (Rokhlin, 1952)

全射準同型  $\mu : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  が存在する. 特に  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  は非自明な群である.

## 定理 (Fintushel–Stern, 1985)

$\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  は  $\Sigma(2, 3, 5)$  で生成される  $\mathbb{Z}$  部分群を持つ:

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \supset \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 5)]_{\sim \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[S_{-1}^3(T(2, 3))]_{\sim \mathbb{Z}}.$$

## 定理 (Furuta, 1990)

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \supset \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 6n - 1)]_{\sim \mathbb{Z}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[S_{-1/n}^3(T(2, 3))]_{\sim \mathbb{Z}}.$$

# $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の構造についての進展 (2/3)

## 定理 (Frøyshov, 2002)

$\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  は  $\Sigma(2, 3, 5)$  で生成される  $\mathbb{Z}$  直和因子をもつ:  
ある非自明な  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  の  $\mathbb{Z}$  部分加群  $A$  が存在して,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus \mathbb{Z}[\Sigma(2, 3, 5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

## 定理 (Dai–Hom–Stoffregen–Truong, 2023)

ある非自明な  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  の  $\mathbb{Z}$  部分加群  $A$  が存在して,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 4n+1, 4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

# $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ の構造についての進展 (3/3)

## 定理 (Karakurt-Şavk, 2022)

ある非自明な  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  の  $\mathbb{Z}$  部分加群  $A$  が存在して,

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 = A \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 4n+1, 4n+3)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \\ \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 3n+2, 6n+1)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[\Sigma(2n+1, 3n+1, 6n+5)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.$$

## 未解決問題

$\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  は  $\mathbb{Z}^{\infty}$  と同型か?

# 結び目コンコードダンス群 (1/3)

$K_0, K_1$ : 有向結び目 ( $S^1$  から  $S^3$  への滑らかな埋め込みの像).

$K_0 \# K_1$ :  $K_0$  と  $K_1$  との連結和.

$K_0 \sim_c K_1$ :  $K_0$  と  $K_1$  がコンコードダンスの関係にある:

:  $\iff$  あるシリンダー  $C (\simeq S^1 \times [0, 1])$  が存在して,

- $C \subset S^3 \times [0, 1]$ ,
- $\partial C = -(K_0) \cup K_1$ .

$$[K_0]_{\sim_c} + [K_1]_{\sim_c} := [K_0 \# K_1]_{\sim_c}.$$

$\mathcal{C} := \{ \text{有向結び目} \} / (\text{isotopy}, \sim_c)$ : 結び目コンコードダンス群.

$[O]_{\sim_c}$ :  $\mathcal{C}$  の単位元 ( $O$ : 自明な結び目),  $[-K]_{\sim_c}$ :  $\mathcal{C}$  の  $[K]_{\sim_c}$  に対する逆元.

$\mathcal{C}_{\text{TS}}$ : 位相的スライス結び目で生成される  $\mathcal{C}$  の部分群.

# 結び目コンコードダンス群 (2/3)

- $p, q, r$  が全て奇数であるとき, プレツツェル結び目  $K(-p, q, r)$  上で分岐される  $S^3$  の 2 重分岐被覆が  $\Sigma(p, q, r)$  である.

## 定理 (Endo, 1995)

結び目の系列  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  がプレツツェル結び目の 5 系列:

$\{K(-2n-1, 4n+1, 4n+3)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{K(-2n-1, 2n+3, 2n^2+4n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 $\{K(-2n-1, 2n+5, n^2+3n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 $\{K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)\}_{n=1}^{\infty}$  のいずれかになる場合は,

$$C_{\text{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K_n].$$

# 結び目コンコードダンス群 (3/3)

## 系 (Karakurt-Şavk, 2022)

ある非自明な  $\mathcal{C}_{\text{TS}}$  の  $\mathbb{Z}$  部分加群  $A_1, A_2$  が存在して,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\text{TS}} &= A_1 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-1, 6n+1, 12n+5)] \\ &= A_2 \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-4n-3, 6n+5, 12n+7)].\end{aligned}$$

- $\mathcal{C}$  は  $\mathbb{Z}_2^\infty$  直和因子を持つことが保証されている。  
「 $\mathcal{C}$  が  $\mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty$  と同型になるか」も未解決問題である。

# $d(\Sigma(p, q, r))$ を計算する動機

- $d(Y)$  を計算することは, Kirby 氏の Problem 4.2 に対して否定的に解決できる例について推進することに直結する.
- $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  が  $\mathbb{Z}^\infty$  直和因子を構成することを示す手法には,  $d$  不変量の計算が用いられている. そして,  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  が  $\mathbb{Z}^\infty$  直和因子を構成することが  $\mathcal{C}_{\text{TS}}$  の構造の理解にも繋がる.
- 単連結な 4 次元スパインレス多様体  $X$  (つまり, 全ての piecewise linear に  $X$  内に埋め込まれた  $S^2$  は  $X$  とホモトピー同値にならない) の検出に  $d$  不変量  $d(\Sigma(2, q, r))$  を計算している. (特に  $\Sigma(p, q, r)$  が任意の結び目  $K$  の Dehn 手術  $S_r^3(K)$  ( $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ) に微分同相にならない可能性がある)  
 $\Sigma(p, q, r)$  ( $p > 5$ ) の  $d$  不変量の計算を推進することで, 4 次元多様体の研究に対する貢献も期待できる.

# $pq + pr - qr = 1$ を満たす $\Sigma(p, q, r)$ の手術図式

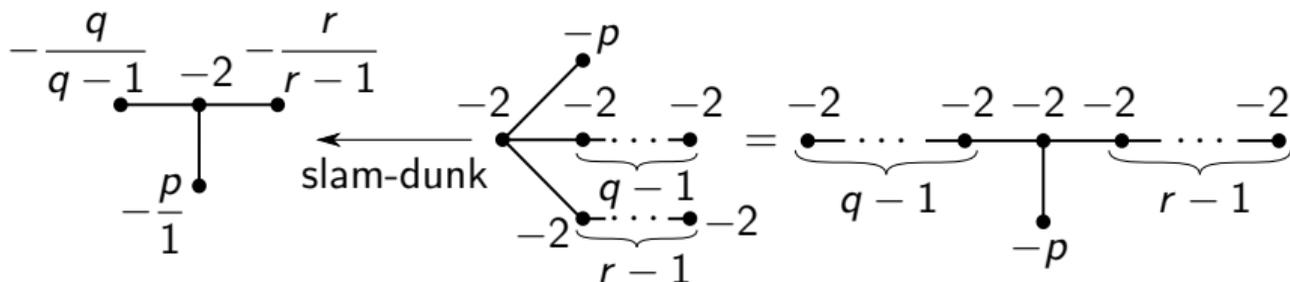


図 3:  $pq + pr - qr = 1$  を満たす  $\Sigma(p, q, r)$  の手術図式.

図 3 の右のグラフは、単純線形グラフに 1 個の頂点と 1 個の辺を枝分かれになるように繋ぐことで構成されることから、**概単純線形グラフ (almost simple linear graph)** と呼ばれる。

- $pq + pr - qr = 1$  を満たす最も代表的な  $\Sigma(p, q, r)$  は  $\Sigma(2, 3, 5)$  であり、その概単純線形グラフは  $E_8$  グラフである。

# $d(\Sigma(p, q, r))$ ( $pq + pr - qr = 1$ ) の公式 (1/2)

## 命題 (Karakurt–Şavk, 2020)

$p$  が偶数かつ  $pq + pr - qr = 1$  であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = (q + r)/4 (> 0).$$

■  $p$  が偶数かつ  $pq + pr - qr = 1$  であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = -2\bar{\mu}(\Sigma(p, q, r)).$$

ここで,  $\bar{\mu}(Y)$  は  $\mathbb{Z}HS^3$   $Y$  の Neumann–Siebenmann の  $\bar{\mu}$  不変量である.

これにより,  $\Sigma(p, q, r)$  の connected Heegaard Floer ホモロジーは自明であるから,  $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$  に新たな情報を提示できない. よって,  $pq + pr - qr = 1$  であるときは  $p$  が奇数の場合のみが重要な対象である.

# $d(\Sigma(p, q, r))$ ( $pq + pr - qr = 1$ ) の公式 (2/2)

$p$ : 奇数,  $n_p := (p - 1)/2$ .

$pq + pr - qr = 1$  とする. ( $r$  は  $p, q$  のみから一意に決まる.)

$F_{p,q}(x, y) := (-(q + r)x^2 + 4qxy - 4(q - p)y^2 - 4y + q + r)/4$ ,

$\mathfrak{L}_p := \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm p\} \times \{0, 1, \dots, n_p\}$ ,

$R_{p,q} := \{(a, m) \in \mathfrak{L}_p \mid F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, 1)\}$ .

## 定理 (Karakurt–Şavk, 2020)

$p$  が奇数かつ  $pq + pr - qr = 1$  であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = \max_{(a,m) \in R_{p,q}} F_{p,q}(a, m) (\geq F_{p,q}(1, 1) = p - 1 > 0).$$

- $pq + pr - qr = 1$  であるとき,  $p$  の偶奇によらずに  $d(\Sigma(p, q, r)) \neq 0$  であるから  $\Sigma(p, q, r)$  は, どの可縮な 4 次元多様体の境界にもならない.

1 導入

2 背景

3 主結果

# $p$ が奇数の場合の精密化

$t_{p,q}$ :  $n_p = (p-1)/2$  を  $q-p$  で割ったときの商,

$\alpha_{p,q}$ :  $n_p = (p-1)/2$  を  $q-p$  で割ったときの剰余:

$$n_p = (q-p)t_{p,q} + \alpha_{p,q}, \quad 0 \leq \alpha_{p,q} < q-p.$$

$\mathfrak{M}'_{p,q} := \{(a, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \in 2\mathbb{N} + 1, a < m \leq n_p\}$ ,  $\mathfrak{M}_{p,q} := \{(1, t_{p,q} + 1)\} \sqcup \mathfrak{M}'_{p,q}$ ,

$S_{p,q} := \{(a, m) \in \mathfrak{M}_{p,q} \mid F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, 1)\}$ .

## 定理 A (S.)

$p$ が奇数かつ  $pq + pr - qr = 1$  であるとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = \max_{(a,m) \in S_{p,q}} F_{p,q}(a, m) \geq F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q}).$$

# 精密化による範囲の変化

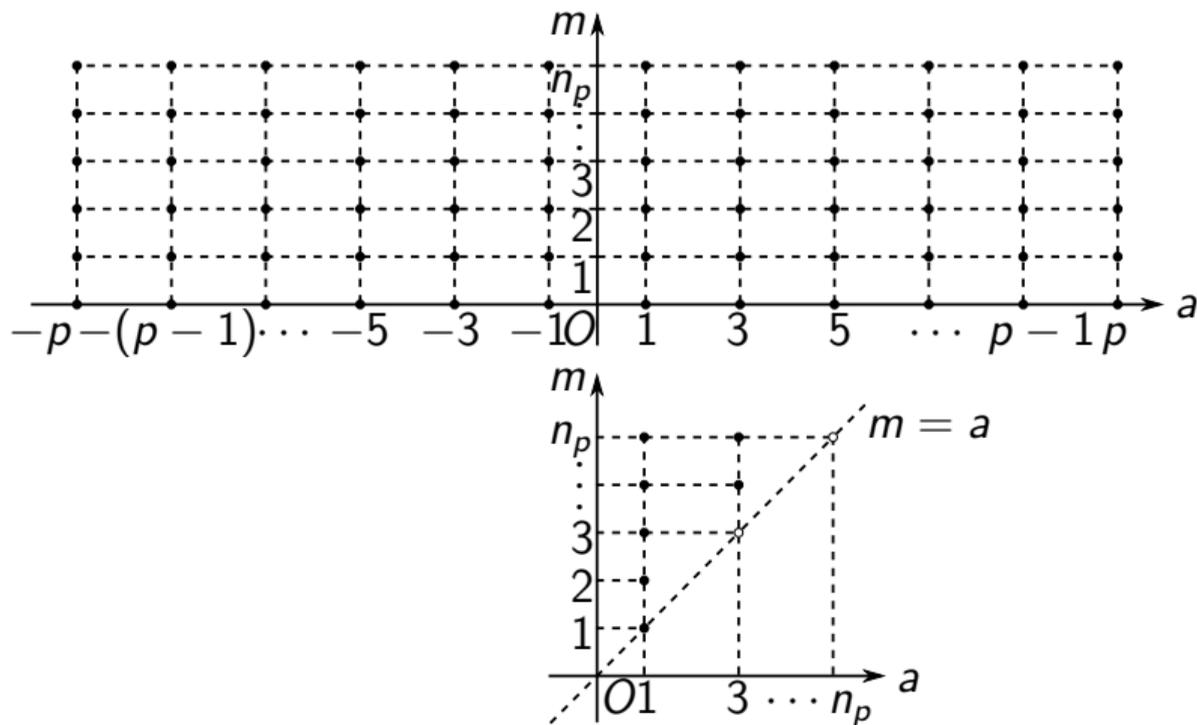


図 4:  $\mathfrak{L}_p$  の点全体 (上) と  $\mathfrak{M}_{p,q}$  の点の候補全体 (下).

# 定理 A の証明

## 証明

$\mathcal{L}'_p := \{1, 3, \dots, p\} \times \{1, \dots, n_p\}$  とする.

このとき,  $\mathcal{L}_p \cap R_{p,q} = \mathcal{L}'_p \cap R_{p,q}$ . 任意の  $(a, m) \in \mathcal{L}'_p \cap R_{p,q}$  に対して,

$$a \geq m \implies F_{p,q}(a, m) \leq F_{p,q}(1, 1).$$

$\mathcal{N}'_{p,q} := \{(a, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid a : \text{odd}, 1 \leq a < m \leq n_p, F_{p,q}(x, y) \geq F_{p,q}(1, 1)\}$   
とすると,

$$d(\Sigma(p, q, r)) = \max_{(a,m) \in \mathcal{N}'_{p,q}} F_{p,q}(a, m).$$

また,  $\max_{1 \leq m \leq n_p} F_{p,q}(1, m) = F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q})$  が成り立つ. □

# $pq + pr - qr = 1$ の場合の不等式関係

$$D(p, q, r) := \begin{cases} (t_{p,q} + 1)(n_p + \alpha_{p,q}) & (p \in 2\mathbb{N} + 1), \\ d(\Sigma(p, q, r)) & (p \in 2\mathbb{N}). \end{cases}$$

$(p_i, q_i, r_i): 1 < p_i < q_i < r_i, \gcd(p_i, q_i) = \gcd(q_i, r_i) = \gcd(r_i, p_i) = 1,$   
 $p_i q_i + p_i r_i - q_i r_i = 1$  を満たす整数の組 ( $i = 1, 2$ ).

## 定理 B (S.)

$p_1 = p_2 = p$  かつ  $q_1 \geq q_2$

$$\implies 2 \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq D(p_1, q_1, r_1) \leq D(p_2, q_2, r_2) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

■  $p$  が奇数かつ  $l_{p,q} \geq n_p \implies D(p, q, r) = p - 1.$

# $l_{p,q} \geq n_p$ かつ $d(\Sigma(p, q, r)) = p - 1$ になる例と反例

$$s_{p,q} := l_{p,q}/n_p.$$

$$F_{p,q}(a, m) = \frac{1}{4s_{p,q}} (2(a+1) - (2m - a - 1)s_{p,q}) (((2m - a + 1)s_{p,q} - 2(a-1))n_p - 2(a-1)).$$

## 例 I (S.)

$$s_{p,q} = \frac{2u}{u+1} \quad (u \in \mathbb{N}) \implies d(\Sigma(p, q, r)) = p - 1.$$

## 定理 C (S.)

十分大きい  $p$  に対して,

$s_{p,q} \in (1, 2)$  かつ  $s_{p,q} \neq 2u/(u+1)$  for any  $u \in \mathbb{Z}_{>1}$  になる場合は,  
 $d(\Sigma(p, q, r)) > F_{p,q}(1, t_{p,q} + 1) = F_{p,q}(1, 1) = p - 1.$

# $d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3}))$ の評価

Karakurt 氏とŞavk 氏により構成された  $\Sigma(p, q, r)$  の具体例の中で、現状唯一  $d$  不変量の値が完全には明らかではないクラスに  $\{\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})\}_{k=1}^{\infty}$  がある ( $F_j$  は  $j$  番目の Fibonacci 数). これらの一部に対し、非自明な不等式評価を可能にした:

## 命題 (S.)

$k \geq 5$  かつ  $F_{2k+1}$  が奇数の場合に対して

$$d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) \geq F_{p,q}(3, 4) > F_{2k+1} - 1.$$

- $k < 5$  の場合は、 $d(\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})) = F_{2k+1} - 1$ .
- $k \geq 5$  かつ  $F_{2k+1}$  が奇数の場合に対して、 $\Sigma(F_{2k+1}, F_{2k+2}, F_{2k+3})$  は  $\Sigma(F_{2k+1}, (3F_{2k+1} - 1)/2, 3F_{2k+1} + 2)$  や  $\Sigma(F_{2k+1}, 2F_{2k+1} - 1, 2F_{2k+1} + 1)$  とホモロジー同境ではない.

# 不等式関係を満たさない無限種類のクラスの例

## 例 II (S.)

$p = 4t(2t + 1)k + 4t + 1$ ,  $q = (2t + 1)(6t + 1)k + 6t + 2$ ,  $r = 4t(6t + 1)k + 12t + 1$   
( $(t, k) \neq (2, 1)$ ) のとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) > p - 1.$$

( $t, k$ ) = (2, 1) の場合は,  $F_{p,q}(1, 1) = F_{p,q}(3, 4)$ .

## 例 III (S.)

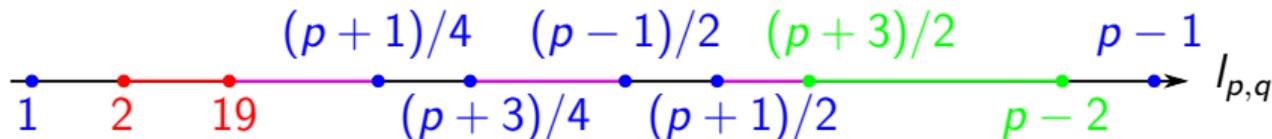
$p = t(2t - 1)k + 4t - 1$ ,  $q = t(3t - 1)k + 6t - 1$ ,  $r = (2t - 1)(3t - 1)k + 12t - 5$   
( $tk \in 2\mathbb{Z}$ ,  $(t, k) \neq (3, 2), (4, 1)$ ) のとき,

$$d(\Sigma(p, q, r)) > p - 1.$$

( $t, k$ ) = (3, 2), (4, 1) の場合は,  $F_{p,q}(1, 1) \geq F_{p,q}(3, 4)$ .

# 先行研究と本研究で得られた具体例

- $l_{p,q} = q - p \in [1, p - 1] \cap \mathbb{Z}$ ,  $n_p = (p - 1)/2$ ,  $s_{p,q} = l_{p,q}/n_p$ .



- 青色が先行研究, 赤色が本研究で  
具体的に  $d(\Sigma(p, q, r))$  が計算できている範囲である.
- 緑色は本研究で具体的に  $d(\Sigma(p, q, r))$  が計算できた例と  
不等式関係を満たさない例の両方が得られた範囲である.
- 桃色は現時点でも基本的に未解明の範囲である.
- 他にも,  $l_{p,q}$  が  $n_p$  の約数になる場合は常に

$$d(\Sigma(p, q, r)) = (t_{p,q} + 1)n_p$$

であることが本研究により判明した.

# $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ に対する結果 (1/2)

$n$ : 正の整数.  $p_n, q_n, r_n$ ;  $1 < p_n < q_n < r_n$ ,  $\gcd(p_n, q_n) = \gcd(q_n, r_n) = \gcd(r_n, p_n) = 1$ ,  
 $p_n q_n + p_n r_n - q_n r_n = 1$  とする.

$p_n, q_n, r_n$  が全て奇数  $\implies K(-p_n, q_n, r_n)$  の Alexander 多項式は

$$\Delta_{K(-p_n, q_n, r_n)}(t) = \frac{1}{4} t^{-1} ((-p_n q_n + q_n r_n - r_n p_n)(t-1)^2 + (t+1)^2) = 1$$

を満たすプレッツェル結び目である. また, この場合は常に Fintushel–Stern 不変量は  
 $R(p_n, q_n, r_n) = 1 > 0$  であることから, 実際には次が成立する:

## 定理 (Endo, 1995)

$p_n, q_n, r_n$ : 奇数. 全ての正の整数  $n$  に対して,  $p_n q_n + p_n r_n - q_n r_n = 1$  かつ  
 $p_n q_n r_n < p_{n+1} q_{n+1} r_{n+1}$  を満たすとき

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} > \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_n, q_n, r_n)].$$

# $\mathcal{C}_{\text{TS}}$ に対する結果 (2/2)

## 定理 D (S.)

$(p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1}) =$   
 $(4t(2t+1)(2k+1) + 4t + 1, (2t+1)(6t+1)(2k+1) + 6t + 2, 4t(6t+1)(2k+1) + 12t + 1),$   
 $(p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2}) = (2t(2t-1)k + 4t - 1, 2t(3t-1)k + 6t - 1, 2(2t-1)(3t-1)k + 12t - 5)$   
のとき,

$$\mathcal{C}_{\text{TS}} \supset \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,1}, q_{t,k,1}, r_{t,k,1})], \quad \mathcal{C}_{\text{TS}} \supset \bigoplus_{t=1}^{\infty} \mathbb{Z}[K(-p_{t,k,2}, q_{t,k,2}, r_{t,k,2})].$$

- $(t_1, k_1, i_1) \neq (t_2, k_2, i_2) \implies (p_{t_1, k_1, i_1}, q_{t_1, k_1, i_1}) \neq (p_{t_2, k_2, i_2}, q_{t_2, k_2, i_2})$  が成り立つ.  
 $t, k$  の固定の仕方は無限通りあることから,  $\mathcal{C}_{\text{TS}}$  の具体的な  $\mathbb{Z}^{\infty}$  部分群を可算無限通り検出したことを意味する.