

3重以上の交点を持つ図式に対する 3重絡み数の Polyak-Viro 型公式

奥原悠朔

信州大学大学院 総合理工学研究科

2024/12/25

結び目の数理

早稲田大学

次数 2 の有限型不変量である Casson knot invariant c_2 について、次の定理が証明されている。

Theorem. (R.Brooks and R Komendarczyk, 2024)

long knot K の横断的な 3 重以上の交点をもつ図式 D_K に対して、次の等式が成り立つ：

$$c_2(D_K) = \langle \text{Diagram 1}, G_{D_K} \rangle + \frac{1}{2}(\langle \text{Diagram 2}, G_{D_K} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_K} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle).$$

同じく次数 2 の有限型不変量である Milnor triple linking number について、次の定理が成り立つことを示した。

Theorem.

long link L の横断的な 3 重以上の交点をもつ図式 D_L に対して、次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mu_{123}(D_L) = & \langle \text{Diagram 1}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_L} \rangle \\ & + \frac{1}{2}(\langle \text{Diagram 4}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 5}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 6}, G_{D_L} \rangle). \end{aligned}$$

Definition. (Long Link)

3 成分の long link とは，滑らかな埋め込み

$$L : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

で右図のようなものである．

以降， $\mathcal{L} = \{long\ link\}$ とする．

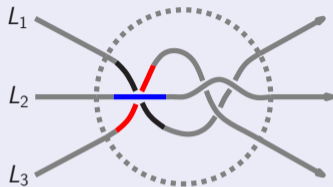


Figure: long link の図式の例

Definition. (Sign of Double Crossing)

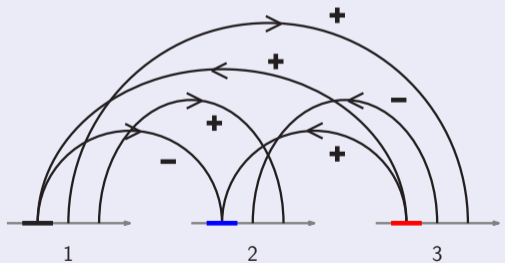
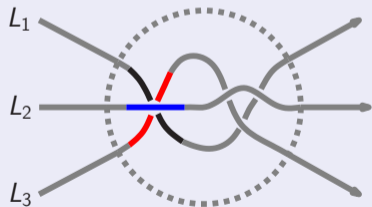
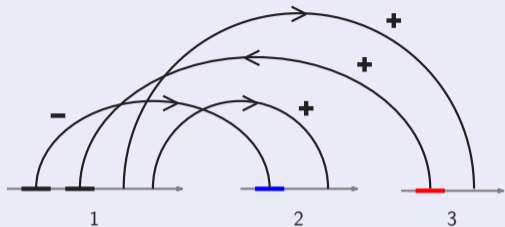
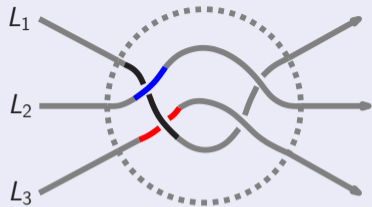


Figure: $sign(p_i) = +1$



Figure: $sign(p_j) = -1$

Definition. (Gauss Diagram of Long link)



Definition. (Chord Diagrams of X_1, X_2, X_3)



Definition. (η_N^ε)

η_N^ε は, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の 2-形式で, 以下の条件を満たすものである:

- 単位ベクトル $N = (0, 0, 1)$ の半径 ε の円盤上で台をもつ,
- $\int_{S^2} \eta_N^\varepsilon = 1$.

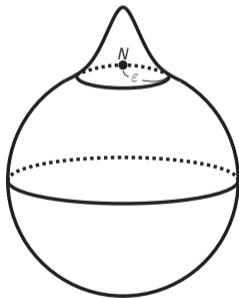


Figure: η_N^ε のイメージ

Definition. (Configuration Space Integral of X_1)

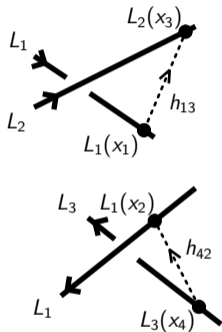
$$F_{X_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2\}.$$

$L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対して,

$$h_{13} : F_{X_1} \rightarrow S^2, \quad h_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{L_2(x_3) - L_1(x_1)}{|L_2(x_3) - L_1(x_1)|}.$$

$\overline{F_{X_1}}$: F_{X_1} の Axelrod-Singer's compactification,

$$I_{X_1} = \int_{\overline{F_{X_1}}} h_{13}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon.$$



Definition. (Configuration Space Integral of Y)

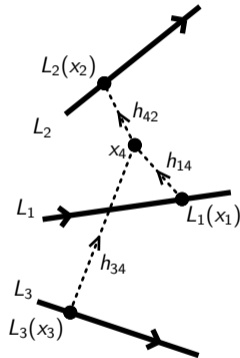
$$F_Y = \{((x_1, x_2, x_3), x_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid L_i(x_i) \neq x_4, i \neq 1, 2, 3\}.$$

$L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ に対して,

$$h_{14} : F_Y \rightarrow S^2, \quad h_{14}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_4 - L_1(x_1)}{|x_4 - L_1(x_1)|}.$$

$\overline{F_Y} : F_Y$ の Axelrod-Singer's compactification,

$$I_Y = \int_{\overline{F_Y}} h_{14}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^* \eta_N^\varepsilon.$$



Theorem. (R.Koytcheff and I.Volić, 2018)

$\mu_{123}(L)$: Milnor triple linking number,

任意の $L \in \mathcal{L}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\mu_{123}(L) = l_{X_1} + l_{X_2} + l_{X_3} - l_Y.$$

Definition.

$$C_{X_1}^2 = \{ \{ \alpha_{12}, \alpha_{13} \} \mid \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowright \\ \alpha_{12} \end{array} \}.$$

$$\langle \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowright \\ \alpha_{12} \end{array}, G_{D_L} \rangle = \sum_{\{ \alpha_{12}, \alpha_{13} \} \in C_{X_1}^2} \text{sgn}(\alpha_{12}) \text{sgn}(\alpha_{13}).$$

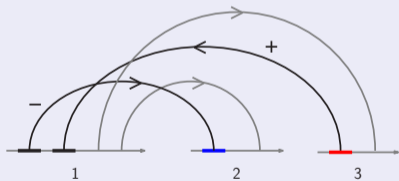


Figure: $\langle \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowright \\ \alpha_{12} \end{array}, G_{D_L} \rangle = -1$

$$C_{X'_1}^2 = \{ \{ \alpha_{12}, \alpha_{13} \} \mid \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowleft \\ \alpha_{12} \end{array} \}.$$

$$\langle \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowleft \\ \alpha_{12} \end{array}, G_{D_L} \rangle = \sum_{\{ \alpha_{12}, \alpha_{13} \} \in C_{X'_1}^2} \text{sgn}(\alpha_{12}) \text{sgn}(\alpha_{13}).$$

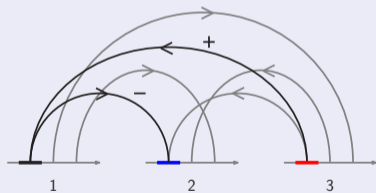


Figure: $\langle \begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \curvearrowleft \\ \alpha_{12} \end{array}, G_{D_L} \rangle = -1$

Theorem A.

$L \in \mathcal{L}$ の図式 D_L が横断的な 2 重点のみをもつとき、次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_{X_1} + I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y) \\ &= \langle \text{Diagram 1}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_L} \rangle. \end{aligned}$$

Theorem B.

$L' \in \mathcal{L}$ の図式 $D_{L'}$ が横断的な 3 重以上の交点をもつとき、次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_{X_1} + I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y) \\ &= \langle \text{Diagram 1}, G_{D_{L'}} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_{L'}} \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2} (\langle \text{Diagram 4}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 5}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 6}, G_{D_{L'}} \rangle). \end{aligned}$$

Proof of Theorem A.

ε が十分に小さいとき、図式における 2 重点の近傍を除き $h_{13}^* \eta_N^\varepsilon$ の値は 0 となる。つまり、 x_1 のある近傍 J_i^1 と、 x_3 のある近傍 J_i^3 が存在して、次の微分同相が成立する：

$$J_i^1 \times J_i^3 \approx \text{supp}(\eta_N^\varepsilon).$$

従って積分領域は、2 重点の近傍にのみ注目すれば良く、次のように分割できる：

$$\overline{F_{X_1}} = \bigcup_{i,j} J_i^1 \times J_j^2 \times J_i^3 \times J_j^4.$$

直接計算することで、次の等式が成り立つ：

$$\int_{J_i^1 \times J_j^2 \times J_i^3 \times J_j^4} h_{13}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon = \text{sign}(p_i) \text{sign}(p_j).$$

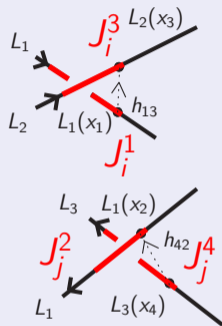


Figure: x_1, x_3 の配置

Proof of Theorem A.

F_Y の定義から x_4 が存在しうる範囲に限られる。 D_L が横断的な 2 重点しかもたないことから、 ε が十分小さいとき F_Y 上で

$$\text{supp}(h_{14}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{42}^* \eta_N^\varepsilon \wedge h_{34}^* \eta_N^\varepsilon) = \emptyset,$$

が成り立つ。したがって、次の式が成立する：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_Y = 0.$$

以上のことから、次の等式が成り立つことがわかる：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_{X_1} + I_{X_2} + I_{X_3} - I_Y) = \langle \text{Diagram 1}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_L} \rangle.$$

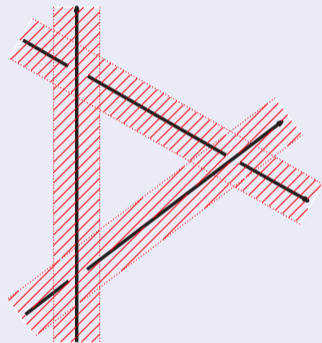


Figure: x_4 が存在しうる範囲

Proof of Theorem B.

$$G_{D_{L'}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \\ \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \\ \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \\ \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \\ \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \\ \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \\ \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \\ \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \\ \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \\ \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \\ \text{Diagram 65} \\ \text{Diagram 66} \\ \text{Diagram 67} \\ \text{Diagram 68} \\ \text{Diagram 69} \\ \text{Diagram 70} \\ \text{Diagram 71} \\ \text{Diagram 72} \\ \text{Diagram 73} \\ \text{Diagram 74} \\ \text{Diagram 75} \\ \text{Diagram 76} \\ \text{Diagram 77} \\ \text{Diagram 78} \\ \text{Diagram 79} \\ \text{Diagram 80} \\ \text{Diagram 81} \\ \text{Diagram 82} \\ \text{Diagram 83} \\ \text{Diagram 84} \\ \text{Diagram 85} \\ \text{Diagram 86} \\ \text{Diagram 87} \\ \text{Diagram 88} \\ \text{Diagram 89} \\ \text{Diagram 90} \\ \text{Diagram 91} \\ \text{Diagram 92} \\ \text{Diagram 93} \\ \text{Diagram 94} \\ \text{Diagram 95} \\ \text{Diagram 96} \\ \text{Diagram 97} \\ \text{Diagram 98} \\ \text{Diagram 99} \\ \text{Diagram 100} \end{array}, G_{D_L} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \\ \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \\ \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \\ \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \\ \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \\ \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \\ \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \\ \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \\ \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \\ \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \\ \text{Diagram 65} \\ \text{Diagram 66} \\ \text{Diagram 67} \\ \text{Diagram 68} \\ \text{Diagram 69} \\ \text{Diagram 70} \\ \text{Diagram 71} \\ \text{Diagram 72} \\ \text{Diagram 73} \\ \text{Diagram 74} \\ \text{Diagram 75} \\ \text{Diagram 76} \\ \text{Diagram 77} \\ \text{Diagram 78} \\ \text{Diagram 79} \\ \text{Diagram 80} \\ \text{Diagram 81} \\ \text{Diagram 82} \\ \text{Diagram 83} \\ \text{Diagram 84} \\ \text{Diagram 85} \\ \text{Diagram 86} \\ \text{Diagram 87} \\ \text{Diagram 88} \\ \text{Diagram 89} \\ \text{Diagram 90} \\ \text{Diagram 91} \\ \text{Diagram 92} \\ \text{Diagram 93} \\ \text{Diagram 94} \\ \text{Diagram 95} \\ \text{Diagram 96} \\ \text{Diagram 97} \\ \text{Diagram 98} \\ \text{Diagram 99} \\ \text{Diagram 100} \end{array},$$

$$\langle \text{Diagram 1}, G_{D_{L'}} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_{L'}} \rangle = 0,$$

$$\langle \text{Diagram 1}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_L} \rangle = -1,$$

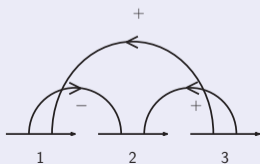
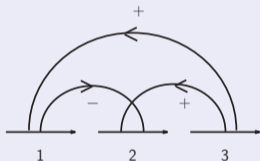
適当な補正項 α を加えることで次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \langle \text{Diagram 1}, G_{D_{L'}} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_{L'}} \rangle + \alpha \\ &= \langle \text{Diagram 1}, G_{D_L} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_L} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_L} \rangle. \end{aligned}$$

α は、 L を“少し動かした”ことで出現した2重点による式への寄与を反映している。

Definition.

$G_{D_{L'}}$ の 3 重点の部分
を“少し動かす”と、以下の 2 つの
パターンが出現しうるが、ともに
 $\alpha = 0$:



a, b, c を有理数として,

$$a \langle \text{Diagram 1}, G_{D_{L'}} \rangle + b \langle \text{Diagram 2}, G_{D_{L'}} \rangle + c \langle \text{Diagram 3}, G_{D_{L'}} \rangle = \alpha,$$

と置き、連立方程式を立て解を求めれば:

$$a = c = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

従って、 α が求まる:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\langle \text{Diagram 1}, G_{D_{L'}} \rangle - \langle \text{Diagram 2}, G_{D_{L'}} \rangle + \langle \text{Diagram 3}, G_{D_{L'}} \rangle).$$