Vassiliev不変量の基本定理の別証明

岩元　悠一郎

信州大学大学院　総合理工学研究科　理学専攻数学分野

2024年12月25日
結び目の数理VII
早稲田大学

定理 (Vassiliev 不変量の基本定理)

Vassiliev 不変量と weight system に 1 対 1 対応がある.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Kontsevich 積分}} \arrow[r] & \boxed{\text{Vassiliev 不変量の基本定理}} \\
\boxed{\text{D. Bar-Natan と A. Stoimenow の予想}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

主結果

Vassiliev 不変量の基本定理に対して，Kontsevich 積分等の飛び道具を回避した（自然な）方法での証明として 3 次の不変量の場合の部分的証明を与えた.

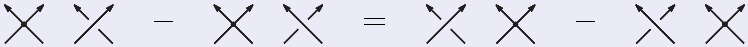
定義

横断的な二重点のみを許した S^1 のはめ込みを**特異結び目**と呼ぶ．また，横断的な二重点を**特異点**と呼ぶ．

m 特異結び目の isotopy class の集合を $\mathcal{K}^0_m$ と書く． m 特異結び目の張るベクトル空間を $\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ で表す．

定義

任意の特異結び目に対して，次で関係を定める：



この関係式を**微分関係式**と呼び，(DR) で表す．

$\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ を (DR) で割った空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/(DR)$ も単に $\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ で表す．

定義

- 写像 $\delta : \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$ を次で定める：

 $\mapsto$  $-$ 

- 任意の結び目不変量 f は，次の式で特異結び目の不変量へ拡張できる．

$\delta^*(f)\Bigg($  $\Bigg) := f \circ \delta \Bigg($  $\Bigg) = f\Bigg($  $\Bigg) - f\Bigg($  $\Bigg)$

この δ^* を結び目不変量の**微分**という．

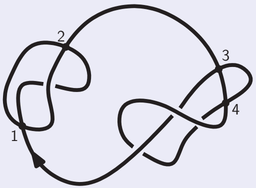
- 結び目の不変量 f が次をみたすとき，f を **m 次以下の Vassiliev 不変量**という．

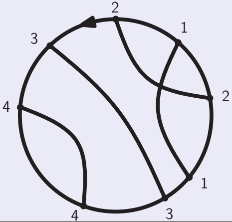
$(\delta^*)^{m+1}(f)\Bigg($  $\Bigg) = 0$

m+1

定義

m 本の chord を持つ chord 図全体の集合を $\mathcal{D}^0_m$ と書く．
写像 $F : \mathcal{K}^0_m \to \mathcal{D}^0_m$ を図のように，自然に chord 図をつくる写像として定義する．





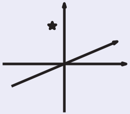
命題

列 $\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m \xrightarrow{F} \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m$ は完全列である．

δ によって特異点を分解してできた 2 項は F で交点の正負に寄らず，同じ chord 図に書き換えられるので，$F \circ \delta = 0$ である．

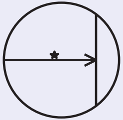
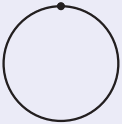
定義

- triple point と $m-2$ 個の特異点を持つ特異結び目や，marked point と $m-1$ 個の特異点を持つ特異結び目の isotopy class の集合を $\mathcal{K}_m^1$ で表す．（ただし $3 \leq m$.）

$\mathcal{K}_m^1 := \Big\{$  with $m-2$ singular points,  with $m-1$ singular points $\Big\}$

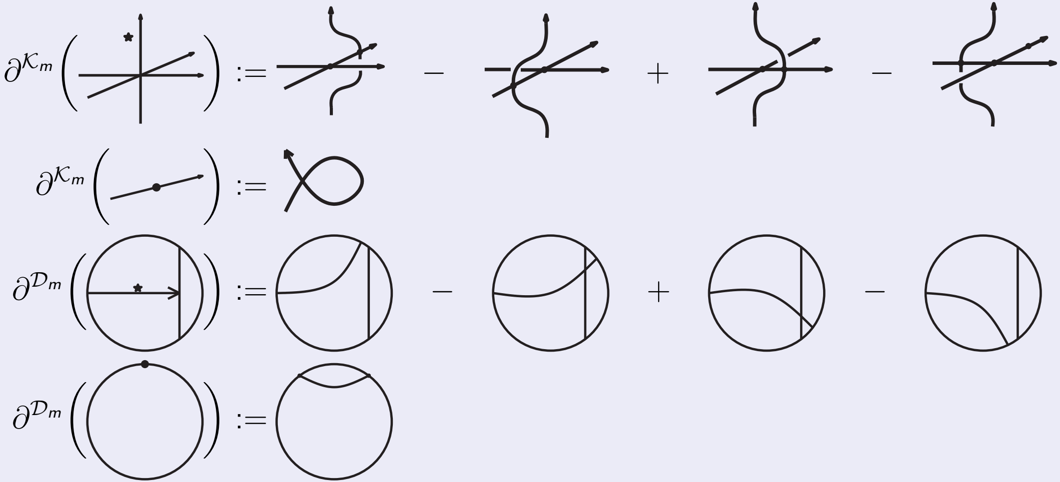
$\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ と同じように，$\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1$ を (DR) で割った空間 $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1/(DR)$ も単に $\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1$ で表す．

- triple point を表す chord と $m-2$ 本の chord を持つ chord 図や，marked point と $m-1$ 本の chord を持つ chord 図全体の集合を $\mathcal{D}_m^1$ で表す．

$\mathcal{D}_m^1 := \Big\{$  with $m-2$ chords,  with $m-1$ chords $\Big\}$

定義

$\partial^{\mathcal{K}_m} : \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^1 \to \mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0$ と $\partial^{\mathcal{D}_m} : \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^1 \to \mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0$ を次で定める：



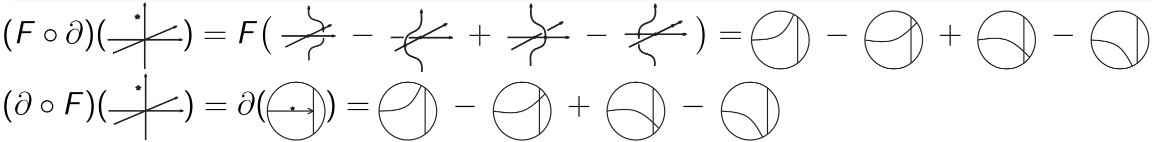
命題

次の列は完全列である： $\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m$

命題

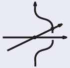
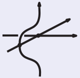
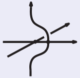
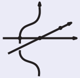
次の横 2 列は完全列であり，図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\partial"] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m \arrow[r, "\mathsf{F}"] \arrow[d, "\partial"] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1} \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m \arrow[r, "\mathsf{F}"] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

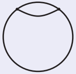
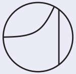
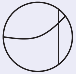
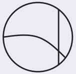


定義

次が成り立つとき $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0)^*$ は Topological 1-Term relation, Topological 4-Term relation をみたすという.

- $(T1T)$ $f($  $) = 0$
- $(T4T)$ $f($  $-$  $+$  $-$  $) = 0$

次が成り立つとき $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0)^*$ は 1-Term relation, 4-Term relation をみたすという.

- $(1T)$ $f($  $) = 0$
- $(4T)$ $f($  $-$  $+$  $-$  $) = 0$

$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0)^*$ が $(T1T), (T4T)$ をみたす $\iff$ $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}_m^0/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m})^*$ である.
また, $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0)^*$ が $(1T), (4T)$ をみたす $\iff$ $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{D}_m^0/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{D}_m})^*$ である.

定理 (Vassiliev 不変量の基本定理)

Order m の weight system の空間 $(\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{D}_m})^*$ と m 次の Vassiliev 不変量の空間 $\mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1}$ は同型である．つまり，

$$(\mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{D}_m})^* \cong \mathbb{Q}\mathcal{V}_m/\mathbb{Q}\mathcal{V}_{m-1}$$

である．

予想 (D.Bar-Natan, A.Stoimenow による予想)

任意の不変量 $f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m)^*$ が $(T1T),(T4T)$ をみたすならば，f の積分 $g \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m-1})^*$ が存在して，g も $(T1T),(T4T)$ をみたす．

$f \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m})^*$ に対し，$g \in (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m-1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m-1}})^*$ が存在し，$\delta^*(g) = f$ をみたす
$\iff \delta^* : (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m-1}/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_{m-1}})^* \to (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\ \partial^{\mathcal{K}_m})^*$ が全射である．

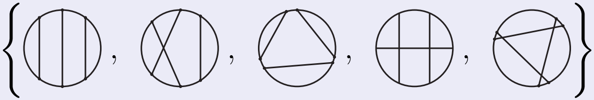
$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \ker\,\partial^{\mathcal{K}_m} \arrow[r, "\mathsf{F}"] \arrow[d] & \ker\,\partial^{\mathcal{D}_m} \arrow[d] \arrow[dddll, dashed] & \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_{m+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^1_m \arrow[r, "\mathsf{F}"] \arrow[d, "\partial"'] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^1_m \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m \arrow[r, "\mathsf{F}"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}\mathcal{D}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{D}_m} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

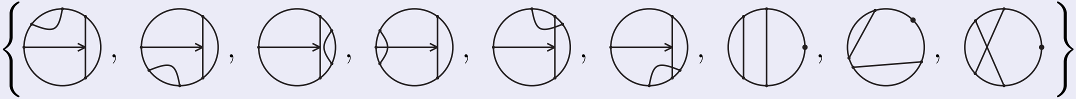
$\delta^* : (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m})^* \to (\mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}})^*$が全射

$\iff \delta : \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_{m+1}/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_{m+1}} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}^0_m/\mathrm{Im}\,\partial^{\mathcal{K}_m}$が単射

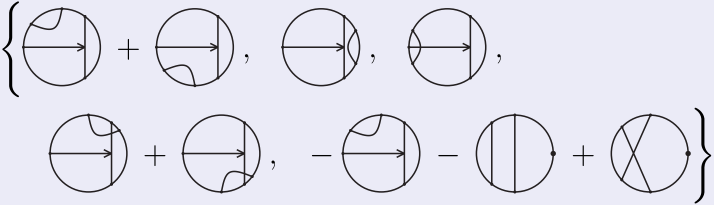
$\iff F : \ker\,\partial^{\mathcal{K}_m} \to \ker\,\partial^{\mathcal{D}_m}$が全射

F : ker $\partial^{\mathcal{K}_3} \to$ ker $\partial^{\mathcal{D}_3}$ が全射であることの証明

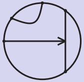
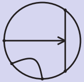
$\mathcal{D}_3^0 =$ 

$\mathcal{D}_3^1 =$ 

ker $\partial^{\mathcal{D}_3}$ は次の 5 つの基底からなることがわかった.

ker $\partial^{\mathcal{D}_3} = \mathbb{Q}$ 

ker $\partial^{\mathcal{D}_3}$ の基底を与える $\mathcal{K}_3^1$ の元をひとつ取り，ker $\partial^{\mathcal{K}_3}$ の元であることを示す.

計算例 :  +  の場合