

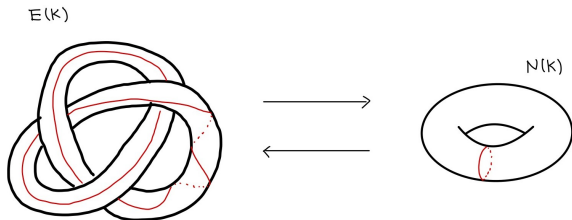
# レンズ空間内の双曲結び目でレンズ空間の連結和を得るデーモン手術

祝井 堅太郎

京都大学大学院理学研究科

2024 年 12 月 25 日

# イントロダクション (1)



## 定義 (デーン手術)

$S^3$  内の結び目  $K$  について,  $\mu \in H_1(\partial N(K))$  が  $\partial E(K)$  のスロープ  $p/q$  を代表するように  $N(K)$  を  $E(K)$  に貼り合わせて得られる多様体を  $K(p/q)$  と書き,  $K$  にそって  $p/q$  デーン手術して得られた多様体とよぶ.

より一般に, 3次元多様体内の結び目の管状近傍を取り除き埋め戻す操作をデーン手術とよぶ.

可約な多様体を得るデーン手術を可約手術とよぶ.

# イントロダクション (2)

## 予想 (The Cabling Conjecture, González-Acuña and Short 1986)

$S^3$  内の結び目の可約手術は,  $(p, q)$  ケーブル結び目の  $pq$  手術に限る.

手術結果をレンズ空間の連結和に限定すると, ケーブリング予想が成立することが示されている (Greene 2015).

## 予想 (The Lens Space Cabling Conjecture, Baker 2014)

レンズ空間内の結び目の可約手術は, 双曲結び目から  $L(r, 1) \# L(s, 1)$  を得る手術か, トーラス結び目, クラインボトル結び目, ケーブル結び目, レンズ空間内の球に含まれる結び目での手術である.

双曲結び目でない場合は Baker が同論文内で証明している.

# イントロダクション (3)

## 定理 (Gainullin 2022)

$L(15, 4)$  内の双曲結び目でのデー手術で  $L(3, 1) \# L(5, 3)$  を得るものが存在する.

さらに Gainullin は  $L(19, 4)$  内の結び目で  $L(3, 1) \# L(5, 3)$  を得るデー手術を構成し, Snappy の計算によるとこの手術は双曲結び目での手術である.

## 問

- ① レンズ空間のケーブリング予想の反例は無限に存在するか.
- ② どのような  $L(p, q) \# L(r, s)$  が得られるか.

# イントロダクション (4)

Gainullin の構成を一般化してデー手術を組織的に構成した。

## 主定理

整数  $n$  に対して以下のデー手術が存在する。

- ❶  $L(9n + 6, 3n + 1) \longrightarrow L(3, 1) \# L(3n + 2, 3)$
- ❷  $L(8n + 6, 4n + 1) \longrightarrow L(2, 1) \# L(4n + 3, 4)$
- ❸  $L(21n - 2, 7n - 3) \longrightarrow L(3, 1) \# L(3n + 2, 3)$
- ❹  $L(9n + 3, 3n + 2) \longrightarrow L(3, 1) \# L(7n - 3, 7)$
- ❺  $L(18n + 1, 9n - 4) \longrightarrow L(2, 1) \# L(4n + 3, 4)$
- ❻  $L(8n + 2, 4n + 3) \longrightarrow L(2, 1) \# L(9n - 4, 9)$

そして、

- (i)  $n \neq -1$ , (ii)  $n \neq -1$  は双曲結び目での手術。
- (iv), (vi) は有限個の  $n$  を除いて双曲結び目での手術。
- (iii), (v) は SnapPy による計算を認めると、有限個の  $n$  を除いて双曲結び目での手術。

(i)  $n = 1$  と (iii)  $n = 1$  は Gainullin が構成した例。

# イントロダクション (5)

系

Baker の予想の反例は無数存在する。

# 準備 (1)

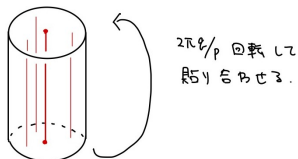


Figure:  $(p, q)$  ファイバードソリッドトーラス

ある 3 次元多様体  $M$  がファイバーの非交和になっている状態を考える.  $M$  のファイバー  $t$  のファイバー近傍を, ファイバーの和からなる閉管状近傍であって  $(p, q)$  ファイバードソリッドトーラスとファイバーを保つ同相写像が存在するものとする.  $M$  の各ファイバーがファイバー近傍を持つとき, このファイバーの和集合としての構造を  $M$  のザイフェルトファイブレーション, または単にファイブレーションとよぶ.

## 定義 (ザイフェルト多様体)

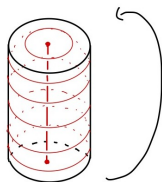
ザイフェルトファイブレーションを持つ 3 次元多様体をザイフェルト多様体とよぶ.

## 準備 (2)

- ギャイフェルト多様体  $M$  のファイバーで、そのファイバー近傍が同相写像で  $|p| \geq 2$  の  $(p, q)$  ファイバーソリッドトーラスに対応するものを、指数 (index)  $|p|$  の例外ファイバーといい、 $|p| = 1$  のとき正則ファイバーとよぶ。
- ギャイフェルト多様体のファイバーを一点に同一視して得られる曲面を底曲面という。
- 例外ファイバー  $t_1, \dots, t_m$  の近傍を取り除いた多様体  $M_0 = M - \bigcup_{i=1}^m \text{int}N(t_i)$  の全てのファイバーとちょうど一回交わる曲面  $S$  を取る。このとき  $s_i = S \cap \partial N(t_i)$  とすると、 $s_i$  と正則ファイバー  $h_i \subset \partial N(t_i)$  は  $H_1(\partial N(t_i))$  を生成する。  
メリディアン  $\mu_i$  について、 $\mu_i = a_i s_i + b_i h_i$  となることを  $(a_i, b_i)$  で表す。
- 本講演ではギャイフェルト多様体  $M$  の底曲面  $B$  とファイバーが持つ上記の情報を合わせて、 $M$  を  $B((a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m))$  と表す。



# 準備(3)



- $(p, q)$  ファイバーソリッドトーラスに加えて, 図のように正則ファイバーがメリディアンになるソリッドトーラスもファイバー近傍として認める. 図のソリッドトーラスの中心線を指数 0 のファイバーとみなして退化したファイバーとよび, 退化したファイバーを含むファイブレーションを退化したザイフェルトファイブレーションとよぶ.
- $S^2(0, (a_1, b_1), (a_2, b_2)) \cong L(a_1, b_1) \# L(a_2, b_2)$

# 準備 (4)

## 定義 (ザイフェルト手術)

$K(m)$  がザイフェルトファイブレーション, または退化したザイフェルトファイブレーションを持つとき,  $(K, m)$  をザイフェルト手術とよぶ.

## 定義 (ザイフェルター, Deruelle Miyazaki Motegi 2012)

$(K, m)$  : ザイフェルト手術

$c$  :  $K$  と交わらない結び目

とする. 以下の条件を満たすとき,  $c$  をザイフェルト手術  $(K, m)$  のザイフェルターとよぶ.

- ①  $c$  は  $S^3$  で自明な結び目である.
- ②  $c$  は  $K(m)$  の, ある (退化した) ザイフェルトファイブレーションにおいて正則ファイバー, 例外ファイバーあるいは退化したファイバーになる.

## ザイフェルターの遺伝性 (D-M-M)

$(K, m)$  : ザイフェルター  $c$  を持つザイフェルト手術

$K_n$  :  $K$  を  $c$  で  $n$ -twist して得られる結び目

$$\begin{array}{ccc}
 K \subset S^3 & \xrightarrow[(-1/n \text{ surgery on } c)]{n \text{ twist along } c} & K_n \subset S^3 \\
 \downarrow m \text{ surgery on } K & & \downarrow m_n \text{ surgery on } K_n \\
 K(m) : \text{Seifert fibered} & \xrightarrow{\text{surgery on } c} & K_n(m_n) : \text{Seifert fibered}
 \end{array}$$

自明な結び目  $c$  での  $-1/n$  手術は  $c$  での  $n$ -twist で実現される。

ザイフェルト多様体  $K(m)$  のファイバーである  $c$  (の像) での手術は、ファイバーソリッドトーラスの取り替えと考えられる。

## 定義 (ザイフェルターのアニュラス対, D-M-M)

$(K, m)$  : ザイフェルト手術

$c_1, c_2$  :  $(K, m)$  のザイフェルター

$c_1$  と  $c_2$  が  $K(m)$  の1つの (退化した) ザイフェルトファイブレーションで同時にファイバーになるとき, 組  $\{c_1, c_2\}$  を  $(K, m)$  のザイフェルター対とよぶ.

特に  $c_1$  と  $c_2$  が  $S^3$  内のアニュラスの境界になっているとき, 順序対  $(c_1, c_2)$  をザイフェルターのアニュラス対とよぶ.

## ザイフェルターのアニュラス対の遺伝性 (D-M-M)

$(K, m)$  : ザイフェルターのアニュラス対  $(c_1, c_2)$  を持つザイフェルト手術  
 $K_n$  :  $K$  を  $(c_1, c_2)$  が張るアニュラス  $A$  で  $n$ -twist して得られる結び目  
 $\text{lk}(c_1, c_2) = l$  (ただし  $c_1, c_2$  が  $A$  でホモロガスになるように  $c_1, c_2$  に向きを入れたときの絡み数とする.)

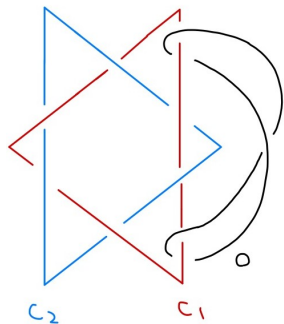
$$\begin{array}{ccc}
 K \subset S^3 & \xrightarrow[l \mp 1/n \text{ surgery on } c_1, c_2]{n \text{ twist along } A} & K_n \subset S^3 \\
 \downarrow m \text{ surgery on } K & & \downarrow m_n \text{ surgery on } K_n \\
 K(m) : \text{Seifert fibered} & \xrightarrow{\text{surgery on } c_1, c_2} & K_n(m_n) : \text{Seifert fibered}
 \end{array}$$

$c_1 \cup c_2$  での  $(l - 1/n, l + 1/n)$  手術は  $A$  での  $n$ -twist で実現される。

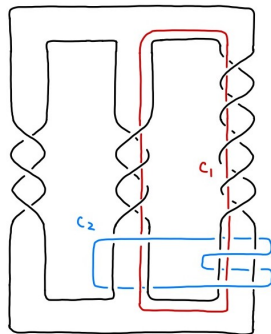
ザイフェルト多様体  $K(m)$  のファイバーである  $c_1, c_2$  での手術は、ファイバーソリッドトーラスふたつの取り替えと考えられる。

# 例

$(0,1)$  のザイフェルターのアニユラス対  $(c_1, c_2)$  に沿った 1 ツイスト

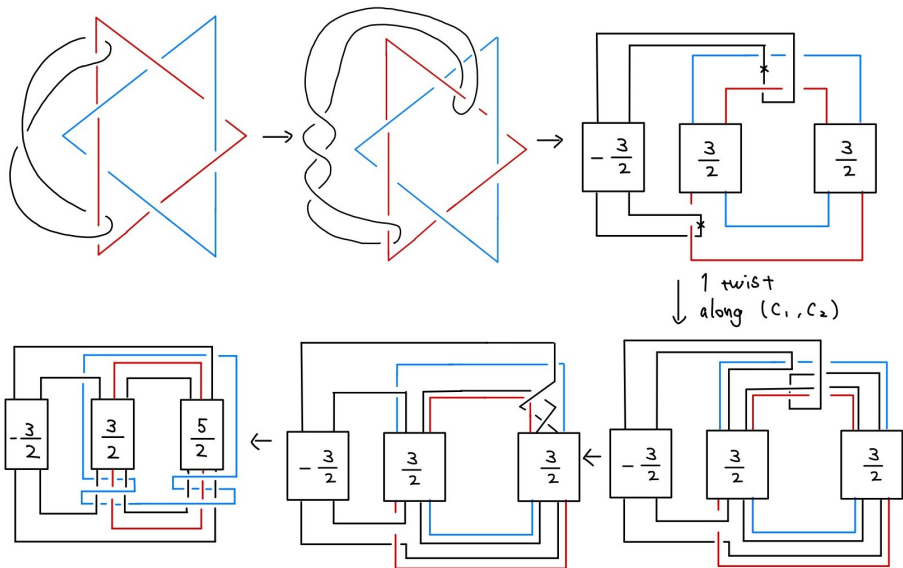


$1\text{-twist}$   
along  $(c_1, c_2)$



$P(-3, 3, 5)$

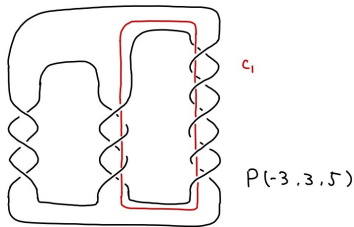
# 例



# デーノン手術の構成 (1)

## Gainullin の構成

$$\begin{array}{ccc} P(-3, 3, 5) \subset S^3 & \xrightarrow{15/4 \text{ surgery on } c_1} & K \subset L(15, 4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(-3, 3, 5)(1) & & \\ = S^2((3, 1), (4, 1), (5, -3)) & \xrightarrow{\text{degenerated surgery on } c_1} & L(3, 1) \# L(5, 3) \end{array}$$



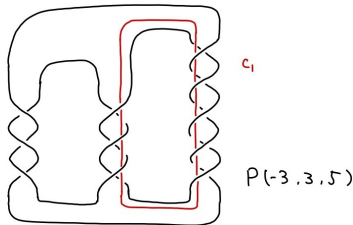


## デーンス手術の構成 (2)

$P(-3, 3, 5)(1) = S^2((3, 1), (4, 1), (5, -3))$  において

- ①  $c_1$  ( $c_1$  の像) は  $(4, 1)$  のファイバーに対応している。
- ②  $\partial N(c_1)$  上の正則ファイバー  $h$  は  $h = 15\mu + 4\lambda$  をみたす。<sup>1</sup>

→  $c_1 \subset S^2((3, 1), (4, 1), (5, -3))$  での手術は,  $(4, 1)$  のファイバーのファイバー近傍を取り除いて, 正則ファイバーが disk を張るように埋め戻すことに対応する. よって得られる多様体は  $L(3, 1) \# L(5, 3)$  に同相である.



<sup>1</sup> $(\mu, \lambda)$  は  $c_1 \subset S^3$  でのメリディアン・ロンジチュード対のこと.

## デーノン手術の構成 (3)

$c_1$  での  $15/4$  手術による,  $P(-3, 3, 5) \subset S^3$  の像  $K \subset L(15, 4)$  が双曲結び目かどうか.

双曲結び目でない場合は Baker により分類されている.

### 補題 (Baker 2014)

レンズ空間内の結び目  $K$  が双曲結び目ではなく可約手術を持つならば,  $K$  はトーラス結び目, クラインボトル結び目, ケーブル結び目, またはレンズ空間内の球に含まれるかである.

Gainullin は, これらの双曲結び目でない場合を否定することで証明をした. もとのレンズ空間  $L(15, 4)$  と得られるレンズ空間の連結和  $L(3, 1) \# L(5, 3)$  の  $15, 3, 5$  の情報から証明ができる. 詳細は後述.

# デーンス手術の構成 (4)

Gainullin の構成方法を元に、無限個のデーンス手術を構成する。

## Gainullin の構成

ザイフェルター  $c_1$  が退化したファイバーになる ( $\partial N(c_1)$  の正則ファイバーが disk を張る) ように手術係数を選んで手術する.  $c_1 \subset S^3$  は自明な結び目なので、手術をしたらレンズ空間を得る.

## 主定理のアイデア

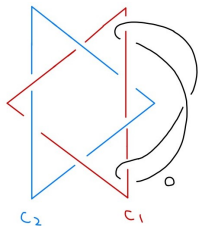
ザイフェルターのアニュラス対  $(c_1, c_2)$  のうち,  $c_1$  が退化したファイバーになるように手術係数を選ぶ. そして,  $c_1 \cup c_2 \subset S^3$  での手術がレンズ空間になるように  $c_2$  の手術係数を選ぶ.

$c_2$  の手術係数の選び方が無限個あるので、無限個の手術を構成できる.

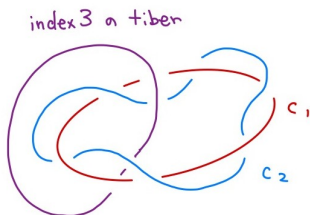
# デーモン手術の構成 (5)

## 主定理 (i) の構成

$$\begin{array}{ccc} O \subset S^3 & \xrightarrow[3 + \frac{1}{n} \text{ surgery on } c_2]{6 \text{ surgery on } c_1} & K_n \subset L(9n + 6, 3n + 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(1) & & \\ = S^2((1, 0), (2, -1), (3, 1)) & \xrightarrow[\text{surgery on } c_2]{\text{degenerated surgery on } c_1} & L(3, 1) \# L(3n + 2, 3) \end{array}$$



$$c_1 \cup c_2(6, 3 + \frac{1}{n}) \cong L(9n + 6, 3n + 1)$$



(手術前の)  $S^3$  のファイブレーションで  $c_1, c_2$  をファイバーとするものを考える．断面をひとつ選ぶと  $c_1, c_2$  と index 3 のファイバー  $c$  それぞれについて以下の関係が成り立つ．

$$c_1 : \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ h \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ h \end{pmatrix}$$

$$c : \mu = 3s + 2h$$

$$c_1 \cup c_2(6, 3 + \frac{1}{n}) \cong L(9n + 6, 3n + 1)$$

$c_1$  で 6 手術すると新たなメリディアン  $\mu'$  について

$$\begin{aligned}\mu' &= 6(s - h) + (-3s + 2h) \\ &= 3s - 4h\end{aligned}$$

が成り立つ.

$c_2$  で  $3 + 1/n$  手術すると新たなメリディアン  $\mu'$  について

$$\begin{aligned}\mu' &= (3n + 1)s + n(-3s - h) \\ &= s - nh\end{aligned}$$

が成り立つ.

よって  $c_1 \cup c_2$  での手術で得られる多様体は

$$S^2((3, -4), (1, -n), (3, 2)) \cong L(9n + 6, 3n + 1)$$

$$O \cup c_1 \cup c_2(1, 6, 3 + 1/n) \cong L(3, 1) \# L(3n + 2, 3)$$

$O(1) = S^3$  のファイブレーションで  $c_1, c_2$  (の像) をファイバーとするものを考える. 断面をひとつ選ぶと  $c_1, c_2$  と残りの特異ファイバー  $c_3$  それぞれについて以下の関係が成り立つ.

$$c_1 : \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ h \end{pmatrix} \quad c_2 : \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ h \end{pmatrix}$$

$$c_3 : \mu = 3s + h$$

$c_1$  で 6 手術すると退化する.

$c_2$  で  $3 + 1/n$  手術すると新たなメリディアン  $\mu'$  について

$$\begin{aligned} \mu' &= (3n + 1)(2s - h) + n(-3s + h) \\ &= (3n + 2)s + (-2n - 1)h \end{aligned}$$

が成り立つ.

よって  $O \cup c_1 \cup c_2$  での手術で得られる多様体は

$$\begin{aligned} S^2(0, (3n + 2, -2n - 1), (3, 1)) &\cong L(3, 1) \# L(3n + 2, -2n - 1) \\ &\cong L(3, 1) \# L(3n + 2, 3) \end{aligned}$$

# 双曲性 (1)

$L(9n + 6, 3n + 1)$  内の結び目  $K_n$  での  $L(3, 1) \# L(3n + 2, 3)$  を得るデーンス手術を構成できた. 手術結果は  $n \neq -1$  のときレンズ空間の連結和である. あとは  $n \neq -1$  について  $K_n$  が双曲結び目であることを示す必要がある.

Gainullin が  $K \subset L(15, 4)$  が双曲結び目だと示した方法を, 一般の形にして定式化した以下の補題を用いる.

## 補題

$L(x, y)$  ( $1 \leq |y| < |x|$ ) 内の結び目  $K$  でのデーンス手術で  $L(p, q) \# L(r, s)$  を得るとする. このとき

$$(*) \begin{cases} \gcd(x, p) \nmid r \\ \gcd(x, r) \nmid p \\ (x, y) \neq (4k, 2k \pm 1) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

が成り立つならば,  $K$  は  $L(x, y)$  内の双曲結び目である.



## 双曲性 (2)

### 補題

$L(x, y)$  ( $1 \leq |y| < |x|$ ) 内の結び目  $K$  でのデーモン手術で  $L(p, q) \# L(r, s)$  を得るとする。このとき

$$(*) \begin{cases} \gcd(x, p) \nmid r \\ \gcd(x, r) \nmid p \\ (x, y) \neq (4k, 2k \pm 1) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

が成り立つならば、 $K$  は  $L(x, y)$  内の双曲結び目である。

この補題を認めると、 $n \neq -1$  のとき

$$\begin{cases} \gcd(9n + 6, 3) = 3 \nmid 3n + 2 \\ \gcd(9n + 6, 3n + 2) = 3n + 2 \nmid 3 \\ (9n + 6, 3n + 1) \neq (4k, 2k \pm 1) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

より  $K_n \subset L(9n + 6, 3n + 1)$  が双曲結び目であることが従う。

## 双曲性 (3)

### ・ 補題の証明の概略

Baker により  $K \subset L(x, y)$  が双曲結び目ではない場合は

- ①  $K$  が  $L(x, y)$  内の球に含まれる.
- ②  $K$  はクライントル結び目である.
- ③  $K$  はトーラス結び目である.
- ④  $K$  はケーブル結び目である.

に分類されている. 条件 (\*) のもとでこれらになりえないことを示す.

- ①  $K$  が  $L(x, y)$  内の球に含まれる場合,  $L(x, y) \cong L(p, q)$  または  $L(x, y) \cong L(r, s)$  である. 条件  $\gcd(x, p) \nmid r$  より  $x \neq p$  かつ  $x \neq r$  なので,  $K$  が  $L(x, y)$  内の球に含まれる場合は否定される.
- ②  $L(x, y)$  がクライントルを含むならば, ある整数  $k$  が存在して  $L(x, y) \cong L(4k, 2k - 1)$  である. よって条件  $(x, y) \neq (4k, 2k \pm 1)$  により  $K$  がクライントル結び目である場合は否定される.

## 双曲性 (4)

- ④  $K$  が正則ファイバーとなるような  $L(x, y)$  のファイブレーションが取れる。今,  $K$  に沿った手術で  $L(p, q) \# L(r, s)$  を得るので特異ファイバーは 2 本である。  $L(x, y) \cong S^2((1, 0), (a_1, b_1), (a_2, b_2))$  とおくと以下が成り立つ。

$$\begin{cases} x = |a_1 b_2 + b_1 a_2| \\ p = a_1 \\ r = a_2 \end{cases}$$

$a_1$  と互いに素な  $b_1$  は  $p$  と互いに素で,  $a_2$  と互いに素な  $b_2$  は  $r$  と互いに素であることが従う。

$$\begin{aligned} x &= |a_1 b_2 + b_1 a_2| \\ &= |p b_2 + b_1 r| \end{aligned}$$

左辺  $x$  は  $\gcd(x, p)$  で割り切れる。一方で, 右辺は条件  $\gcd(x, p) \nmid r$  より  $\gcd(x, p)$  で割り切れない。よって  $K$  がトーラス結び目である場合は否定される。

## 双曲性 (5)

- ④  $K$  を  $T$  の  $(a, b)$  ケーブルとする.  
(中略)  
今回の  $L\#L$  手術は

$$L(x, y) \rightarrow L(x, y)(T; b/a)\#L(a, b)$$

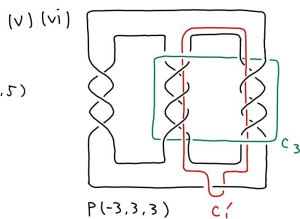
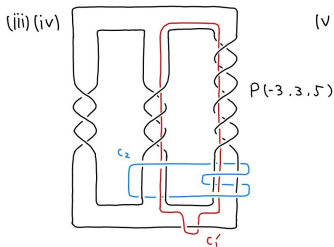
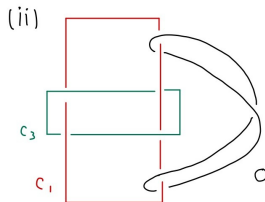
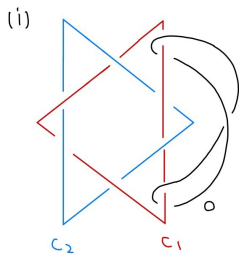
と表される.  
手術結果の 1 次ホモロジー群の位数比べると

$$\{|p|, |r|\} = \{|a|, |bx - ay'c^2|\}$$

を得る.  
これは条件  $\gcd(x, p) \nmid r, \gcd(x, r) \nmid p$  に反する.

以上, 条件 (\*)のもとで双曲結び目でない場合は全て否定された.

# 主定理のデーモン手術の構成に用いるザイフェルターたち



レンズ空間でのデーン手術で他にどのような可約多様体を得られるかは自然な問である。Baker が構成した  $L(r, 1) \# L(s, 1)$ ，本講演で構成した  $L(p, q) \# L(r, 1)$  をさらに拡張した  $L(p, q) \# L(r, s)$  の形の多様体は得られるだろうか。本講演のデーン手術の構成方法を発展させて考えると，現時点では  $L(p, q) \# L(r, s)$  を得る手術はレンズ空間内の結び目での手術はおろか，より一般であるザイフェルト多様体内の結び目での手術でさえ構成できていない。

## 問題

レンズ空間内の双曲結び目でのデーン手術で  $L(p, q) \# L(r, s)$  は得られるか。（ただし  $L(p, q) \not\cong L(p, 1)$ ， $L(r, s) \not\cong L(r, 1)$ ）