knot Floer homology における二種類の位数と Upsilon torsion invariant

姫野　圭佑

2024 年 12 月 25 日
結び目の数理 VII

knot Floer homology とは

$K \subset S^3$: 結び目
$\rightsquigarrow$ chain complex $\widehat{\mathrm{CFK}}(K),\ \mathrm{CFK}^-(K),\ \mathrm{CFK}'(K),\ \mathrm{CFK}^\infty(K)$ など...
(その定義に高次元多様体の解析が要求される (難しい))
$\rightsquigarrow$ "適切な" ホモロジーを取る
$\widehat{\mathrm{HFK}}(K),\ \mathrm{HFK}^-(K),\ \mathrm{HFK}'(K),\ \mathrm{H}(\mathrm{CFK}^\infty(K))$ など...

これらから抽出される不変量 $\tau(K), \Upsilon_K, V_0(K)$ などは,
結び目理論への多くの応用がある.

二種類の位数

$\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$\mathbb{F}_2[U]$: U を形式的変数とした $\mathbb{F}_2$ 係数多項式環.
$\mathrm{HFK}^-(K)$, $\mathrm{HFK}'(K)$ は $\mathbb{F}_2[U]$ 上の加群の構造を持つ.

- $\mathrm{HFK}^-(K)$: minus knot Floer homology
  $\rightsquigarrow \mathrm{Ord}(K) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: knot Floer torsion order
- $\mathrm{HFK}'(K)$: unoriented knot Floer homology
  $\rightsquigarrow \mathrm{Ord}'(K) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: unoriented knot Floer torsion order

Remark

K は unknot $\iff \mathrm{Ord}(K) = 0 \iff \mathrm{Ord}'(K) = 0$.

先行研究

[Juhász–Miller–Zemke,2020]

S : K_0 から K_1 へのコボルディズムで極大点が M 個
このとき，$\mathrm{Ord}(K_0) \leq \max\{M, \mathrm{Ord}(K_1)\} + 2g(S)$.
系として，$\mathrm{Ord}(K) \leq \mathrm{bridge}(K) - 1$ も得られる．

[Gong–Marengon,2023]

S' : K_0 から K_1 への**向きづけ不可能な**コボルディズムで極大点が M 個
このとき，$\mathrm{Ord}'(K_0) \leq \max\{M, \mathrm{Ord}'(K_1)\} + \gamma(S')$,
$\gamma(S')$ は S' の crosscap の個数 (向きづけ不可能種数).

Remark

これらの論文ではそれぞれ，Ord は Ord_v，Ord' は Ord_U という記号で扱っている．

Torus knot の torsion order

$T_{p,q}$：(p,q)-torus knot

[Juhász–Miller–Zemke,2020]

$$\mathrm{Ord}(T_{p,q}) = \min\{p,q\} - 1.$$

[Gong–Marengon,2023]

$$\mathrm{Ord}'(T_{p,p+1}) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

$\therefore$ 任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，
$\mathrm{Ord}(K_1) = N$ をみたす K_1 も， $\mathrm{Ord}'(K_2) = N$ をみたす K_2 も torus knot で実現できる．

主結果

Theorem

任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_1) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_2) = N$ をみたす hyperbolic knot K_1，K_2 が無限個存在する．

Problem

$M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = M$ かつ $\mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？
もう少し弱く，$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = \mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？

$\mathrm{HFK}^-(K)$ と $\mathrm{Ord}(K)$

$K \subset S^3$
$\rightsquigarrow \mathrm{CFK}^-(K)$: chain complex
$\rightsquigarrow \mathrm{HFK}^-(K) \cong \mathbb{F}_2[U] \oplus \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(K))$
※ $\mathrm{Tor}(*) :=$
$\langle x \in * \mid U^n \cdot x = 0$ for some $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle$.

$\mathrm{Ord}(K) :=$
$\min\{n \mid U^n \cdot \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}^-(K)) = 0\}$.

例:
$\mathrm{HFK}^-(T_{3,4}) =$
$\mathbb{F}_2[U]\langle e \rangle \oplus \langle a, c \mid Ua = 0,\ U^2c = 0 \rangle$.
$\rightsquigarrow \mathrm{Ord}(T_{3,4}) = 2$.

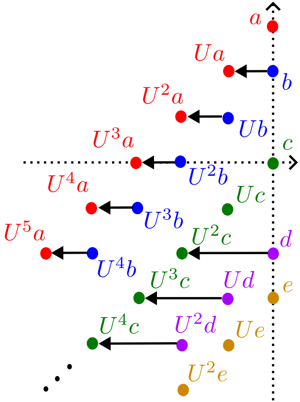


Figure: $\mathrm{CFK}^-(T_{3,4})$.

$\mathrm{HFK}'(K)$ と $\mathrm{Ord}'(K)$

$K \subset S^3$
$\rightsquigarrow \mathrm{CFK}'(K)$: chain complex
$\rightsquigarrow \mathrm{HFK}'(K) \cong \mathbb{F}_2[U] \oplus \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}'(K))$

$\mathrm{Ord}'(K) :=$
$\min\{n \mid U^n \cdot \mathrm{Tor}(\mathrm{HFK}'(K)) = 0\}.$

例:
$e' := e + a,\ a' := a + Uc.$
$\mathrm{HFK}'(T_{3,4}) =$
$\mathbb{F}_2[U]\langle c\rangle \oplus \langle e', a' \mid Ue' = Ua' = 0\rangle.$
$\rightsquigarrow \mathrm{Ord}'(T_{3,4}) = 1.$

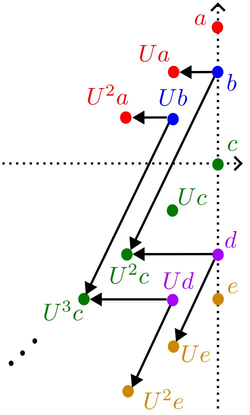


Figure: $\mathrm{CFK}'(T_{3,4})$.

主結果

Theorem (再掲)

任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_0) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_1) = N$ をみたす hyperbolic knot K_0，K_1 が無限個存在する.

Proposition

twisted torus knot $K = T(p, pk+1; 2, 1)$ $(p \geq 4, k \geq 1)$ は次を満たす:

- $\mathrm{Ord}(K) = p - 1$,
- $\mathrm{Ord}'(K) = \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor$.

さらに，$p \geq 5$ ならば $T(p, pk+1; 2, 1)$ は hyperbolic.

主結果の証明の概要

Theorem (再掲)

任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_0) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_1) = N$ をみたす hyperbolic knot K_0，K_1 が無限個存在する．

- $K_1 = T(2N+3, (2N+3)k+1; 2, 1)$ $(k \geq 1)$ とすると，$\mathrm{Ord}'(K_1) = N$ かつ K_1 は hyperbolic.

- $N \geq 4$ のとき，$K_0 = T(N+1, (N+1)k+1; 2, 1)$ $(k \geq 1)$ とすると，$\mathrm{Ord}(K_0) = N$ かつ K_0 は hyperbolic.
- 一般に $\mathrm{Ord}(K) \leq \mathrm{br}(K) - 1$ なので，2-bridge hyperbolic knot K_0 は $\mathrm{Ord}(K_0) = 1$.
- $K_0 = T(3, 4; 2, s)$ $(s \geq 2)$ は hyperbolic (Lee) で $\mathrm{Ord}(K_0) = 2$ (Krishna–Morton).
- $K_0 = [(2, 1, 3, 2)^{2n+1}, -1, 2, 1, 1, 2]$ $(n \geq 1)$ は hyperbolic (Baker–Kegel) で $\mathrm{Ord}(K_0) = 3$ (Krishna–Morton). □

Upsilon torsion invariant

$K \subset S^3 \rightsquigarrow$ Upsilon torsion invariant $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}} \colon [0,2] \to \mathbb{R}$.

[Allen–Livingston, arXiv 2022]

- $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ は連続かつ区分線形,
- $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(2-t) = \Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t)$, $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(0) = \Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(2) = 0$,
- ★ $\frac{d}{dt}\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(0) = \mathrm{Ord}(K)$, $\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(1) = \mathrm{Ord}'(K)$,
- $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ から計算可能.

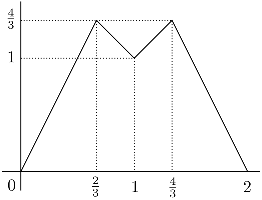


Figure: $T_{3,4}$ の Upsilon torsion invariant.

$T(p, pk+1; 2, 1)$ の Upsilon torsion invariant

$K = T(p, pk+1; 2, 1)$ とする.

Proposition

$p \geq 4,\ k \geq 1$ のとき,

$$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = \begin{cases} (p-1)t & (0 \leq t \leq \frac{2}{p}) \\ 2-t & (\frac{2}{p} \leq t \leq \frac{2}{p-2}) \\ (p-3)t & (\frac{2}{p-2} \leq t \leq \frac{4}{p}) \\ 2m + (-m-1)t & (\frac{2m}{p} \leq t \leq \frac{2m}{p-1},\ m = 2, \ldots, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor) \\ (p-2-m)t & (\frac{2m}{p-1} \leq t \leq \frac{2(m+1)}{p},\ m = 2, \ldots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1) \end{cases}$$

が成立 ($t = 1$ で対称的なので $0 \leq t \leq 1$ で十分).

Corollary

$p \geq 4,\ k \geq 1$ のとき, $\mathrm{Ord}(K) = p-1$, $\mathrm{Ord}'(K) = \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor$.

L–space knot

K が L–space knot.
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある正の整数係数 Dehn 手術で L–space (lens space など) を産む.
例：positive torus knot, pretzel$(-2,3,7)$ など.

Fact

K が L–space knot ならば, $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ ($\mathrm{CFK}^-(K)$, $\mathrm{CFK}'(K)$) は Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ から決まる:
$\Delta_K(t) = 1 - t^{\alpha_1} + \cdots - t^{\alpha_{n-1}} + t^{\alpha_n}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n)$ とでき,
隣り合った指数の差の列 $\alpha_1 - 0$, $\alpha_2 - \alpha_1$, ..., $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ が
"微分の長さ"を決める.

Remark

K : L–space knot
このとき, $\mathrm{Ord}(K) = \max\{\alpha_j - \alpha_{j-1}\}$ [Juhász–Miller–Zemke].

例：$T(5,6;2,1)$ の Upsilon torsion invariant

$K = T(5,6;2,1)$ は L–space knot [Vafaee]
$\Delta_K(t) = 1 - t + t^5 - t^6 + t^7 - t^8 + t^{10} - t^{11} + t^{12} - t^{14} + t^{15} - t^{16} + t^{17} - t^{21} + t^{22}$
指数の gap 列：$1, 4, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1.$

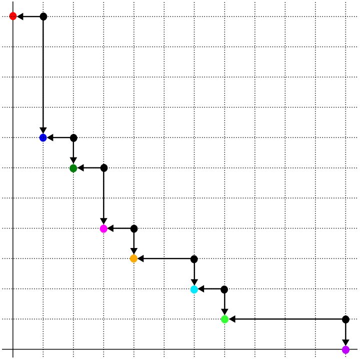


Figure: $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ (の基本領域).

例：$T(5,6;2,1)$ の Upsilon torsion invariant

$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}$ の変数 $t \in [0,2]$ を決め，
各生成元ごとに $\mathbb{R}$-filtration level を
座標 $(p,q) \to tq + (2-t)p$ で与える．

filtered base change で $\mathrm{CFK}^\infty(K)$ は
"孤立頂点" と "線分型" complex に
分解できる [Allen–Livingston].
$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) :=$
$\max\{$ 線分型の filtration level 差 $\}$.

右図は $0 \le t \le \frac{2}{5}$ のときの様子．
このとき，$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = 4t$.

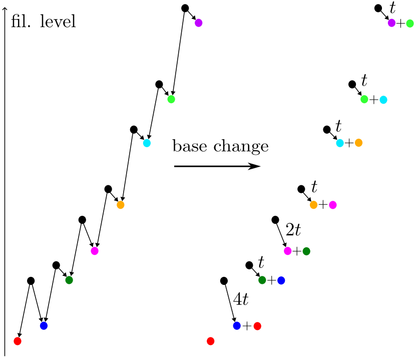
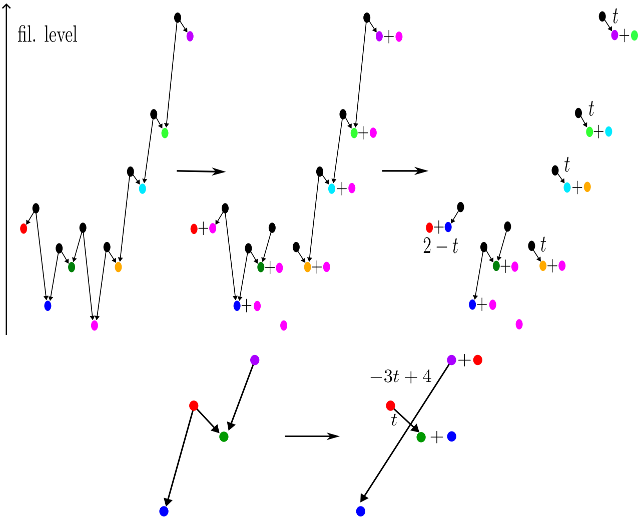


Figure: $0 \le t \le \frac{2}{5}$ における
filtered base change の様子．
ラベルは filtration level 差．

例：$T(5,6;2,1)$ の Upsilon torsion invariant

$\frac{4}{5} \leq t \leq 1$ のときの様子．このとき，$\Upsilon^{\mathrm{Tor}}_K(t) = -3t + 4.$

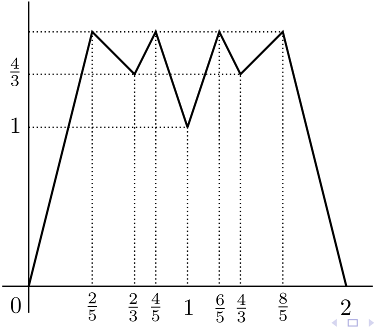


例：$T(5,6;2,1)$ の Upsilon torsion invariant

他の場合も同様にして,

$$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = \begin{cases} 4t & (0 \le t \le \frac{2}{5}) \\ 2-t & (\frac{2}{5} \le t \le \frac{2}{3}) \\ 2t & (\frac{2}{3} \le t \le \frac{4}{5}) \\ -3t+4 & (\frac{4}{5} \le t \le 1) \end{cases}$$

を得る.



$T(p, pk+1; 2, 1)$ の Upsilon torsion invariant

Proposition (再掲)

$K := T(p, pk+1; 2, 1)$ $(p \geq 4,\ k \geq 1)$.

$$\Upsilon_K^{\mathrm{Tor}}(t) = \begin{cases} (p-1)t & (0 \leq t \leq \frac{2}{p}) \\ 2-t & (\frac{2}{p} \leq t \leq \frac{2}{p-2}) \\ (p-3)t & (\frac{2}{p-2} \leq t \leq \frac{4}{p}) \\ 2m + (-m-1)t & (\frac{2m}{p} \leq t \leq \frac{2m}{p-1},\ m = 2, \ldots, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor) \\ (p-2-m)t & (\frac{2m}{p-1} \leq t \leq \frac{2(m+1)}{p},\ m = 2, \ldots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1). \end{cases}$$

Corollary

alternating でない (*Floer thin* でない) *hyperbolic knot* の組で,
Υ^{Tor} が一致するものが無限に存在する.

まとめ

Theorem

任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K_1) = N$, $\mathrm{Ord}'(K_2) = N$ をみたす hyperbolic knot K_1，K_2 が無限個存在する．

Problem

$M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = M$ かつ $\mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？
もう少し弱く，$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathrm{Ord}(K) = \mathrm{Ord}'(K) = N$ をみたす結び目 K は存在するか？