

# 交点数が3以下のロング溶接結び目について

西元勇樹

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程 2 年

2024 年 12 月 24 日

## Definition

はめこみ  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  が条件 (i) を満たすとき, その像を**仮想アーク図式**という. また条件 (i), (ii) を満たすとき, その像を**ロング仮想結び目図式**という.

(i)  $\alpha$  の多重点は横断的な 2 重点のみであり, その各 2 重点に実交点・仮想交点どちらかの情報が与えられている.

(ii)  $\alpha(0) = (0, \frac{1}{2}), \alpha(1) = (1, \frac{1}{2})$  ( $\alpha(0), \alpha(1)$  を端点とよぶ)  
ここでは,  $\alpha(0)$  から  $\alpha(1)$  へ向きが付いているとする.

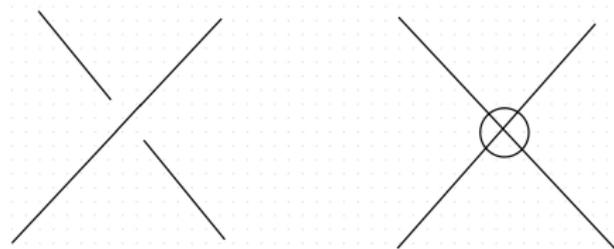
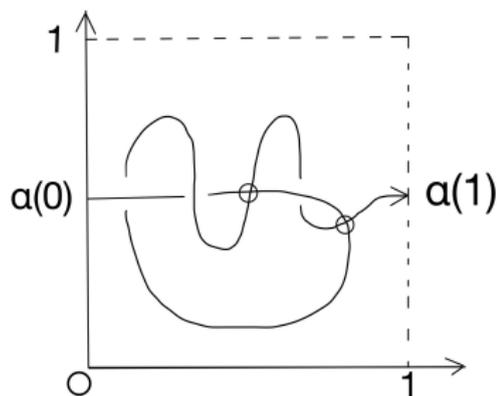
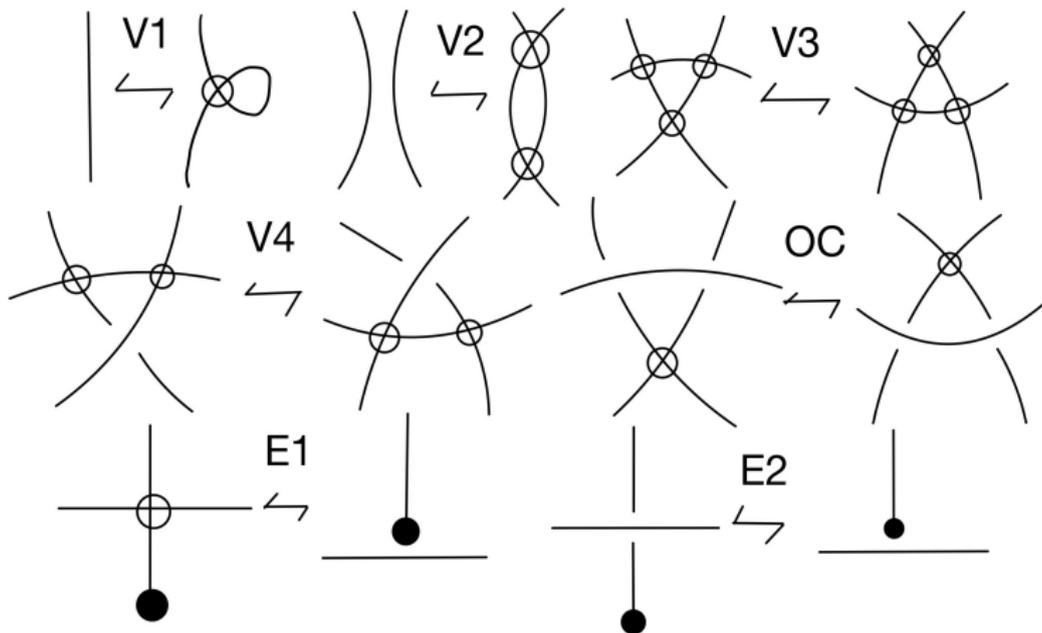


Figure: 実交点 (左) と仮想交点 (右)

# 用語と先行研究

ライデマイスター移動を  $R1, R2, R3$  と表す。  
また, 局所変形  $V1 \sim V4, OC, E1, E2$  を次で定める。  
ただし,  $E1$  と  $E2$  の黒丸は端点を表す。



## Definition

$D, D'$  : ロング仮想結び目図式

- $D \stackrel{v}{\sim} D' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} D, D'$  は  $R1 \sim R3, V1 \sim V4$  で移り合う ( $v$  同値).
- $D \stackrel{w}{\sim} D' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} D, D'$  は  $R1 \sim R3, V1 \sim V4, OC$  で移り合う ( $w$  同値).

$D, D'$  : 仮想アーク図式

- $D \stackrel{r}{\sim} D' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} D, D'$  は  $R1 \sim R3, V1 \sim V4, OC, E1, E2$  で移り合う ( $r$  同値).

## Remark

$D, D'$ : 仮想アーク図式       $D \stackrel{v}{\sim} D' \Rightarrow D \stackrel{w}{\sim} D' \Rightarrow D \stackrel{r}{\sim} D'$

## Definition

- $K \in \{ \text{ロング仮想結び目図式} \} / \stackrel{v}{\sim}$  を ロング仮想結び目 という.
- $K \in \{ \text{ロング仮想結び目図式} \} / \stackrel{w}{\sim}$  を ロング溶接結び目 という.

# 用語と先行研究

## Definition

$K$  : ロング仮想結び目, ロング溶接結び目, または仮想アーク図式の  $r$  同値類  
 $c(K) := \min\{D \text{ の実交点の数} \mid K = [D]\} : K \text{ の交点数}$

## [Yoshida '24]

交点数が 3 以下のロング仮想結び目の完全な分類を与えた.

## [Kanenobu-Komatsu '17], [Kanenobu-Sumi '19]

交点数が 4 以下の { 仮想アーク図式 } /  $\sim$  の分類を与えた.  
ただし  $\{R_{8,1}^4, R_{8,6}^4\}$  を除く.

## Remark(再掲)

$$D \overset{v}{\sim} D' \Rightarrow D \overset{w}{\sim} D' \Rightarrow D \overset{r}{\sim} D'$$

今回, ロング溶接結び目の分類に取り組んだ.

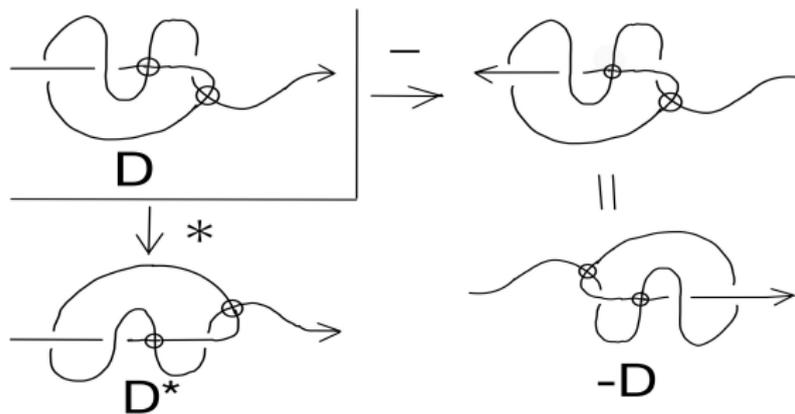
これ以降はロング溶接結び目  $K$  について考える.

# 用語と先行研究

$D$ : ロング溶接結び目  $K$  の図式

$D^*$ :  $D$  の鏡像,  $-D$ :  $D$  の向きを逆にして 180 度回転させた図式

$K^* := [D^*]$ ,  $-K := [-D]$



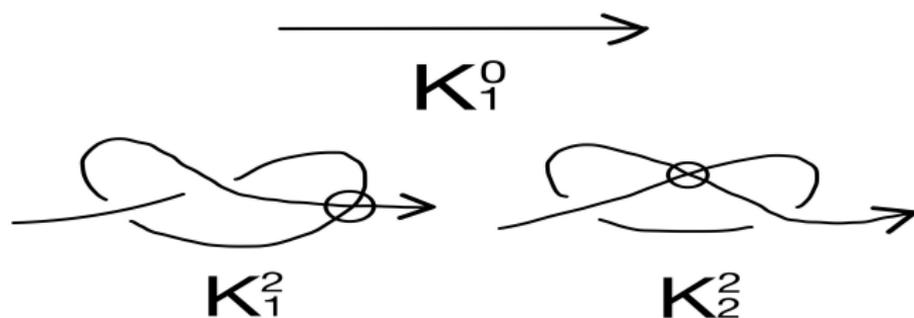
## Definition

- $\bar{K} := \{K, K^*, -K, -K^*\}$
- $c(\bar{K}) := c(K)$ :  $\bar{K}$  の交点数

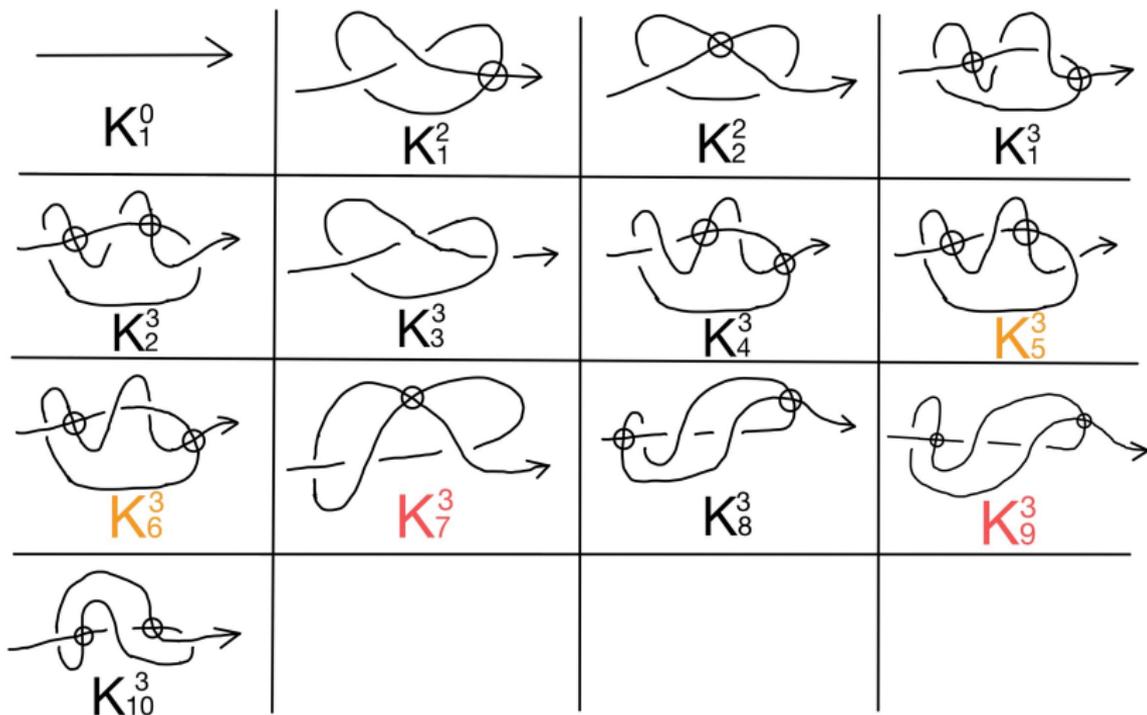
## Theorem

$\bar{K}$  : 交点数が 3 以下のロング溶接結び目

- $c(\bar{K}) = 0 \Leftrightarrow \bar{K} = \bar{K}_1^0$
- $c(\bar{K}) = 1$  となる  $\bar{K}$  は存在しない.
- $c(\bar{K}) = 2 \Leftrightarrow \bar{K} = \bar{K}_1^2, \bar{K}_2^2$  であり, これらは互いに異なる.
- $c(\bar{K}) = 3 \Leftrightarrow \bar{K} = \bar{K}_1^3, \bar{K}_2^3, \dots, \bar{K}_{10}^3$  であり,  
 $\{\bar{K}_5^3, \bar{K}_6^3\}, \{\bar{K}_7^3, \bar{K}_9^3\}$  を除いて, これらは互いに異なる.



# 主結果



# 証明の概略

## 証明の概略

ガウス図式を用いて漏れなく列挙し, ロング溶接結び目の不変量である閉包と正規化されたアレキサンダー多項式を計算した.

## 正規化されたアレキサンダー多項式

$K$ : ロング溶接結び目

$D$ :  $K$  の図式

$\{x_1, \dots, x_n\}$ :  $D$  のアークの集合

$G(K) := \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ :  $K$  の群

$\partial/\partial x_j$ :  $\mathbb{Z}F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$

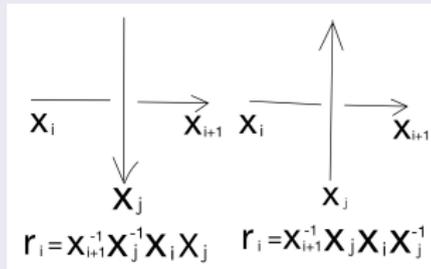
$\mathbb{Z}F(x_1, \dots, x_n)$ :  $x_j$  に関する自由微分

$\varphi$ :  $\mathbb{Z}F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ :

$x_j \mapsto t$  ( $\forall j = 1, \dots, n$ ) で定まる環準同型

$n \times m$  行列  $M = (\varphi(\partial r_i / \partial x_j))_{i,j}$  をとる.

アレキサンダー多項式  $\Delta_K(t)$ :  $M$  の  $(n-1)$  次小行列式が生成するイデアルの生成元



# アレキサンダー多項式

$K$  の正規化されたアレキサンダー多項式  $\tilde{\Delta}_K(t)$  を,  $\Delta_K(1) = 1$ ,  $(d\Delta_K/dt)(1) = 0$  をみたす  $\Delta_K(t)$  とする.

$\tilde{\Delta}_K(t)$  は  $K$  の不変量である.

$\tilde{\Delta}_{\bar{K}}(t) := \{\tilde{\Delta}_K(t), \tilde{\Delta}_{K^*}(t), \tilde{\Delta}_{-K}(t), \tilde{\Delta}_{-K^*}(t)\}$ :  $\bar{K}$  の正規化されたアレキサンダー多項式

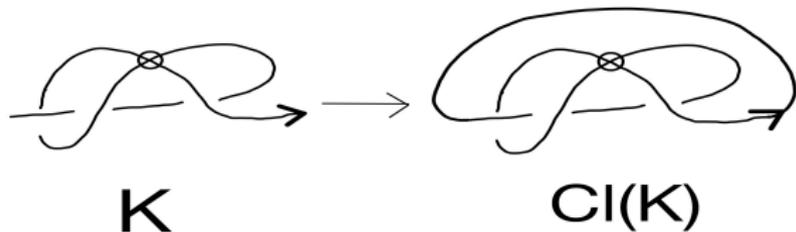
## Lemma

$K$ : ロング溶接結び目

$$\tilde{\Delta}_K(t^{-1}) = \tilde{\Delta}_{K^*}(t) = \tilde{\Delta}_{-K}(t)$$

Lemma より,  $\tilde{\Delta}_{\bar{K}}(t) = \{\tilde{\Delta}_K(t), \tilde{\Delta}_K(t^{-1})\}$

$K$  の閉包  $Cl(K)$  を, 図のように  $K$  の図式の端点同士をつなげてできる図式が表す溶接結び目とする.



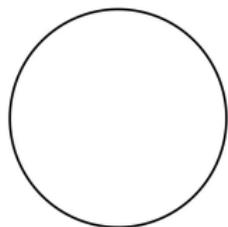
また,  $Cl(\bar{K}) := \{Cl(K), Cl(K^*), Cl(-K), Cl(-K^*)\}$  とする.

# 不変量の表

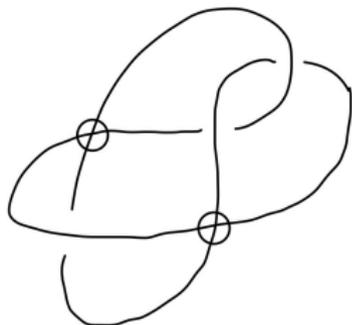
$\overline{K}$	$\widetilde{\Delta}_{\overline{K}}(t)$	$CI(\overline{K})$
$\overline{K}_1^0$	$\{1\}$	自明
$\overline{K}_1^2$	$\{t-1+t^{-1}\}$	自明
$\overline{K}_2^2$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_1^3$	$\{t^2-t+t^{-1}, t-t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_2^3$	$\{-t^3+t^2+t, t^{-1}+t^{-2}-t^{-3}\}$	自明
$\overline{K}_3^3$	$\{t-1+t^{-1}\}$	$\overline{w3.2}$
$\overline{K}_4^3$	$\{t-1+t^{-1}\}$	$\overline{w3.1}$
$\overline{K}_5^3$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	$\overline{w3.1}$
$\overline{K}_6^3$	$\{-t^2+2t, 2t^{-1}-t^{-2}\}$	$\overline{w3.1}$
$\overline{K}_7^3$	$\{t^2-2t+2, 2-2t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_8^3$	$\{-t+3-t^{-1}\}$	自明
$\overline{K}_9^3$	$\{t^2-2t+2, 2-2t^{-1}+t^{-2}\}$	自明
$\overline{K}_{10}^3$	$\{-t^3+2t^2-t+1, 1-t^{-1}+2t^{-2}-t^{-3}\}$	自明

# 不変量の表

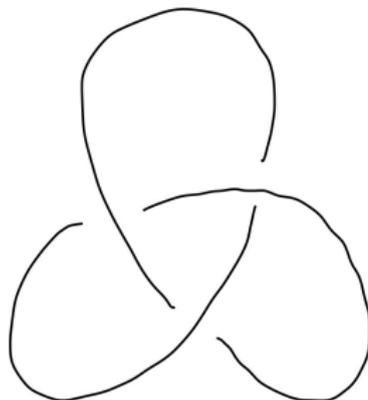
ただし,  $w3.1$ ,  $w3.2$  は次の溶接結び目である.



自明



$w3.1$



$w3.2$

# 閉包について

閉包は,  $r$  同値と  $w$  同値の差を検出する不変量である.

## Example

$$K_1^2 \stackrel{r}{\sim} K_3^3 \stackrel{r}{\sim} K_4^3$$

$$Cl(K_1^2) = \text{自明}, Cl(K_3^3) = \overline{w3.2}, Cl(K_4^3) = \overline{w3.1}$$

