Emergent version of Drinfeld's associator equations

久野雄介 (津田塾大学)

@結び目の数理 VII, 2024 年 12 月 24 日

Dror Bar-Natan 氏 (Toronto 大学) との共同研究

emergent 結び目

Σ: 有向曲面

$$\mathcal{K}_\Sigma := \{\Sigma \times [0,1]\ \text{内の結び目}\ \} \underset{\text{持ち上げ}}{\overset{\text{射影}}{\rightleftarrows}} \hat{\pi}(\Sigma) := \{\Sigma\ \text{内のループ}\ \}$$

「持ち上げ」は well-defined ではない.

しかし, 曲面上のループ演算の背後にはこの持ち上げがある.

Vassiliev フィルトレーション:

$$\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma \supset V_1 \supset \cdots \supset V_i = \mathrm{span}\{ i\ \text{箇所で}\ - \ \} \supset \cdots$$

$$\underset{\text{結び目}}{\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma} \to \cdots \to \underset{\text{emergent 結び目}}{\mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma / V_2} \to \mathbb{Q}\mathcal{K}_\Sigma / V_1 = \underset{\text{結び目じゃない}}{\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)}$$

Drinfeld 結合子

Φ: (カップリング定数 1 の)Drinfeld 結合子 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $\Phi = \Phi(x, y) = \exp(\frac{1}{24}[x, y] + \cdots) \in \exp(\mathrm{lie}_2)$
- Φ はある五角方程式, 六角方程式 (二種類) をみたす

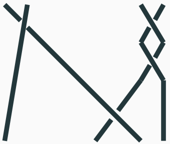
自由かつ推移的な可換な二つの群作用

$$\mathrm{GT}_1 \curvearrowright \mathrm{Ass}_1 := \{\text{Drinfeld 結合子}\} \curvearrowleft \mathrm{GRT}_1$$

Drinfeld 結合子 $\rightsquigarrow$Kontsevich 不変量の組み合わせ的構成

Bar-Natan: 3D トポロジーでの解釈

$$\mathrm{Ass}_1 = \{\text{圏} \underset{\text{括弧付き組ひも}}{\mathbf{PaB}} \text{の “expansion”}\}$$



$$\in \mathbf{PaB}(\bullet(\bullet(\bullet\bullet)), (\bullet\bullet)(\bullet\bullet))$$

Kashiwara-Vergne(KV) 問題 (/予想/定理)

KV 方程式 (Alekseev-Torossian('12)): $F \in \mathrm{tAut}(\mathrm{lie}_2)$ に対し

(KV1) $F(x+y) = \mathrm{bch}(x,y) (= \log(e^x e^y))$

(KV2) $j(F) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ (発散の条件)

$$\mathrm{KV}_2 \curvearrowright \mathrm{SolKV} := \{\text{(KV1), (KV2) の解}\} \curvearrowleft \mathrm{KRV}_2$$

Bar-Natan-Dancso: 4D トポロジーでの解釈

$$\mathrm{SolKV} = \{\text{サーキット代数 } \underbrace{wTF^0}_{\text{ウェルデッド・フォーム}} \text{ の "expansion"}\}$$

Alekseev-Kawazumi-K-Naef: 2D トポロジーでの解釈

$$\mathrm{SolKV} = \{\Sigma_{0,3} \text{ の } \underbrace{\mathrm{GT}}_{\text{Goldman-Turaev}} \text{ Lie 双代数の "expansion"}\}$$

Alekseev-Torossian の埋め込み

Alekseev-Torossian: 群作用と適合する水平方向の写像を構成

$$\mathsf{GT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KV}_2$$

$$\mathsf{Ass}_1 \hookrightarrow \mathsf{SolKV}$$

$$\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}_2$$

特に, $\nu : \mathsf{grt}_1 = \mathrm{Lie}(\mathsf{GRT}_1) \hookrightarrow \mathsf{krv}_2 = \mathrm{Lie}(\mathsf{KRV}_2)$ を構成.

問: トポロジカルな意味は? 3D/4D/2D 解釈の関係は?

主結果: 空間 $\mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ を導入し, ν を次のように分解:

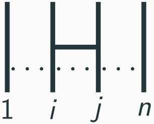
$$\mathsf{grt}_1 \hookrightarrow \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \overset{\nu^{\mathrm{em}}}{\hookrightarrow} \mathsf{krv}_2.$$

また, ν^{em} の像を特定. ($\mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ は次数付き Lie 代数になる.)

注意: 問にはまだ答えられていない

Drinfeld-Kohno Lie 代数, 五角関係式

$$\mathrm{dk}_n := \frac{\mathrm{lie}(t_{ij} = t_{ji}, 1 \le i < j \le n)}{\text{可換関係式}, \mathrm{4T}\ \text{関係式}}, \qquad t_{ij} =$$

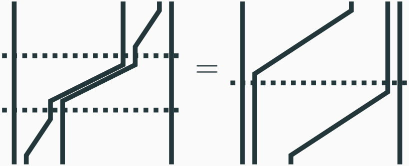


可換: $[t_{ij}, t_{kl}] = 0$, 4T: $[t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0$

Drinfeld の五角関係式 (下の図に対応): $\exp(\widehat{\mathrm{dk}_4})$ において

$\Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{1(23)}, t_{(23)4})\Phi(t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{(12)3}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{2(34)})$

ただし $t_{1(23)} = t_{12} + t_{13}$, etc.

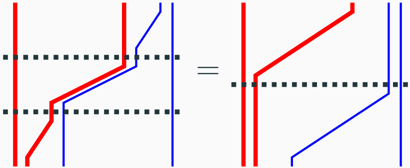


emergent 版の Drinfeld-Kohno Lie 代数

注意: $\Phi(t_{12}, t_{23}) \underset{\mathrm{4T}}{=} \Phi(-t_{13} - t_{23}, t_{23})$

よって五角関係式の両辺は $\exp(\widehat{\mathrm{dk}}_{2,2})$ に入る, ただし

$$\mathrm{dk}_{2,2} = (\cancel{t_{12}}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}) \subset \mathrm{dk}_4$$



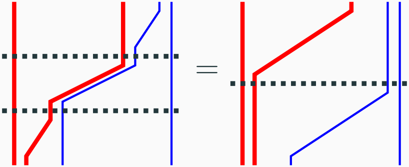
$D^2 \setminus \{2 \text{ 点 }\}$ における 2 本の組みひもに対応

emergent 条件: t_{34} が二つ以上あったら 0

定義-補題: $\mathrm{edk}_{2,2} := \mathrm{dk}_{2,2}/[\langle t_{34}\rangle, \langle t_{34}\rangle] \cong \mathrm{lie}_2 \oplus \mathrm{lie}_2 \oplus \mathrm{ass}_2[-1]$

リー括弧積は "偏微分" $\partial_x, \partial_y : \mathrm{lie}_2 \to \mathrm{ass}_2$ で記述できる

emergent 五角関係式



命題: $\mathrm{edk}_{2,2}$ での五角関係式の線形化は, $\varphi \in \mathrm{lie}_2$ に対して

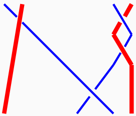
$$\begin{cases} \varphi(y,0) - \varphi(x+y,0) = 0 \\ (\partial_y \varphi)(x,y) + (\partial_y \varphi)(y,0) - (\partial_y \varphi)(x+y,0) - R(\varphi) = 0 \end{cases}$$

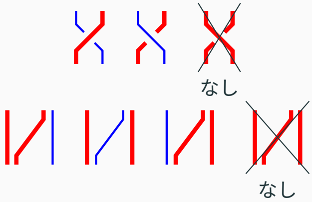
ここで $R : \mathrm{lie}_2 \to \mathrm{ass}_2$ は次をみたす写像: $R(x) = R(y) = 0$,

$$R([u,v]) = [R(u),v] + [u,R(v)] + (\partial_x v) x \overline{\partial_x u} - (\partial_x u) x \overline{\partial_x v}$$
$$+ (y \text{ について同様の項})$$

emergent 版 Grothendieck-Teichmüller “空間”

注意: トポロジカルな意味づけには, **PaB** の二色版が必要





$\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}}$:=emergent 五角関係式と次をみたす $\varphi \in \mathfrak{lie}_2$ の全体

$$[x, \varphi(y, x)] + [y, \varphi(x, y)] = 0$$

注意: (1) この条件は, ある対称性の仮定と六角関係式から

(2) 二色版の五角関係式はほんとうは数種類ある

定義から, $\mathfrak{grt}_1 \hookrightarrow \mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}}, \psi \mapsto \psi(-x - y, y)$

主結果

$\mathsf{krv}_2 :=$ 次をみたす $(a,b) \in \mathsf{lie}_2^{\oplus 2}$ の全体

(LKV1) $[x,a]+[y,b]=0$

(LKV2) ある 1 変数ベキ級数 f が存在して

$$x(\partial_x a) + y(\partial_y b) \underset{\text{巡回語として}}{=} f(x+y) - f(x) - f(y)$$

定理 1: $\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ に対し $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) := (\varphi(y,x), \varphi(x,y)) \in \mathsf{krv}_2$

定理 2: $\mathrm{Im}(\nu^{\mathrm{em}}) = \mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} = \{(a,b) \in \mathsf{krv}_2 \mid b(y,x) = a(x,y)\}$

特に, $\mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}} \cong \mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}}$ は次数付き Lie 代数の構造をもつ

注意: (1) 予想 (Deligne-Drinfeld): $\mathsf{grt}_1 \cong \mathsf{lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \ldots)$

(2) 予想 (Alekseev-Torossian): $\mathsf{krv}_2 = \underset{\text{次数 1}}{\mathbb{K}t} \oplus \nu(\mathsf{grt}_1)$

(3) 未知: $\mathsf{krv}_2^{\mathrm{sym}} \underset{?}{=} \mathsf{krv}_2$

定理 1 の証明の概略 (前半, krv_2 の言い換え)

$\mathrm{krv}_2 = \{(\mathrm{LKV1}), (\mathrm{LKV2})$ の解 $\} \subset \mathrm{lie}_2^{\oplus 2}$ であった.

$$\tilde{u} = (a, b) \in \mathrm{lie}_2^{\oplus 2} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{u} \text{ は } \mathrm{lie}_2, \mathrm{ass}_2 \text{ に作用 : } \begin{cases} x \mapsto [x, a] \\ y \mapsto [y, b] \end{cases}$$

事実: 曲面上のループ演算から, 次の演算が定まる:

$$\eta_{\mathrm{gr}} : \mathrm{ass}_2^{\otimes 2} \to \mathrm{ass}_2, \quad \delta_{\mathrm{gr}}^f : \mathrm{tr}_2 \to \mathrm{tr}_2^{\otimes 2}$$

ここで, $\mathrm{tr}_2 = \mathrm{ass}_2 / [\mathrm{ass}_2, \mathrm{ass}_2]$ (巡回語の空間)

注意: $\tilde{u}$ は η_{gr} と可換 $\iff$ $\tilde{u}$ は (LKV1) をみたす

証明の鍵: (1) AKKN: $\tilde{u} \in \mathrm{krv}_2 \iff \tilde{u}$ は $\eta_{\mathrm{gr}}, \delta_{\mathrm{gr}}^f$ と可換

(2) δ_{gr}^f の基点付き版 $\mu_{\mathrm{gr}}^f : \mathrm{ass}_2 \to \mathrm{ass}_2$ に対して,

$$\mu_{\mathrm{gr}}^f \big|_{\mathrm{lie}_2} = R$$

定理 1 の証明 (後半, emergent 五角関係式の使われ方)

補題: $\tilde{u}$ は (KV1) をみたすとする．さらに次を仮定:

$$\exists c \in \mathsf{ass}_2 \quad \mu_{\mathrm{gr}}^{f}(\tilde{u}(x)) = [x, c] \quad \text{かつ} \quad \mu_{\mathrm{gr}}^{f}(\tilde{u}(y)) = [y, c]$$

このとき, $\tilde{u} \in \mathsf{krv}_2$.

$\varphi \in \mathsf{grt}_1^{\mathrm{em}}$ のとき, 定義から $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)$ は (LKV1) をみたす.

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathrm{gr}}^{f}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)y) &= R([y, \varphi(x, y)]) \\
&= [y, R(\varphi)] + (\partial_y \varphi)y - y\overline{\partial_y \varphi} \\
&= [y, R(\varphi) - \partial_y \varphi] \\
&\underset{\pentagon}{=} [y, (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0)] \\
&= [y, -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)]
\end{aligned}$$

同様の計算で, $\mu_{\mathrm{gr}}^{f}(\nu^{\mathrm{em}}(\varphi)(x)) = [x, -(\partial_y \varphi)(y + x, 0)]$ もわかる．補題を適用して, $\nu^{\mathrm{em}}(\varphi) \in \mathsf{krv}_2$ となる. $\square$