

3つの軸方向の正射影がすべて木となる 空間グラフの構成

早稲田大学大学院教育学研究科数学教育専攻
小林怜央

結び目の数理 VII (2024年12月24日)

目次

1：導入

1.1 用語の定義

1.2 先行研究

1.3 主定理

2：主定理の証明

3：今後の課題

目次

1：導入

1.1 用語の定義

1.2 先行研究

1.3 主定理

2：主定理の証明

3：今後の課題

1.1 用語の定義

定義 1.1.1 (空間グラフ)

G : グラフ, $f : G \rightarrow R^3$: 埋め込み
 $f(G) \subseteq R^3$ を空間グラフという.

定義 1.1.2 ($f(G)$ は T-3 型)

$f(G)$ と全同位な空間グラフで, xy 平面, yz 平面, zx 平面それぞれへの正射影がすべて木となるものが存在するとき, $f(G)$ は T-3 型であるという.

例: 自明な結び目は T-3 型である.

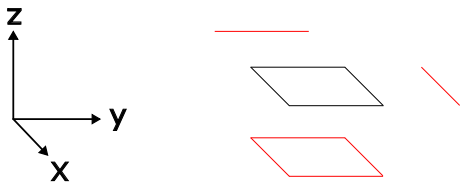


図1：サイクルあり

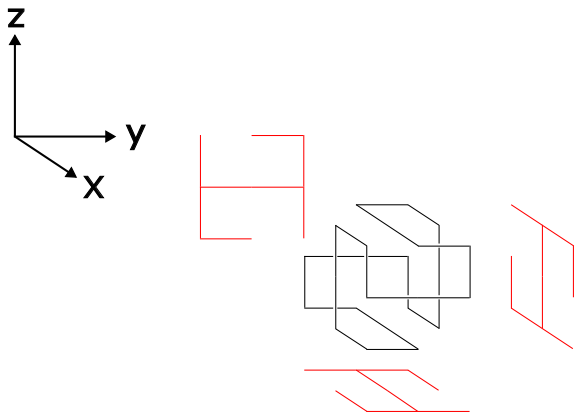


図2：3つの正射影は全て木 (trivialA と呼ぶ)

1.2 先行研究

定理 (川村,2011)

$(2,p)$ 型トーラス結び目 (絡み目) は T-3 型である.

以降, T-3 型の空間グラフは見つかっていない.

→その他に T-3 型の空間グラフは存在するか?

1.3 主定理

主定理 $f(G)$ を空間グラフとする.

$f(G)$ は T-3 型である

$\Leftrightarrow f(G)$ は, 2 個以上の孤立頂点のみから成る空間グラフでない

空間グラフの例：8の字結び目

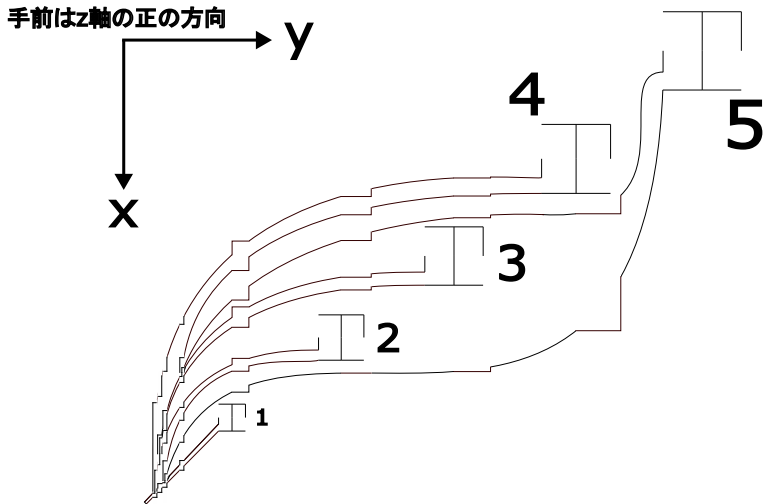


図3：xy 平面の正射影は木

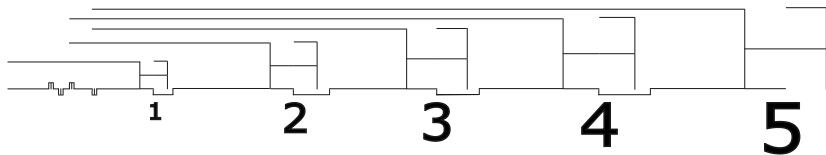
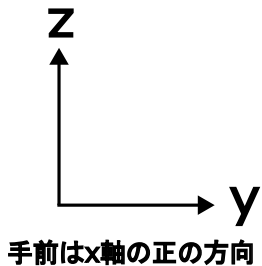


図4：yz平面の正射影は木

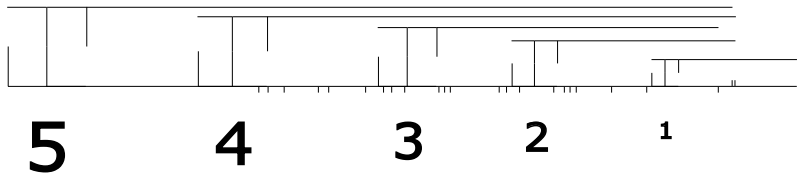
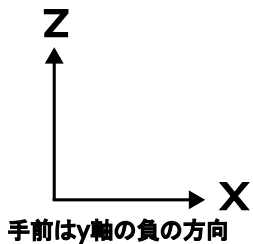


図5：zx 平面の正射影は木

目次

1：導入

1.1 用語の定義

1.2 先行研究

1.3 主定理

2：主定理の証明

3：今後の課題

主定理の証明の流れ

2.1 : 空間グラフの射影図のすべての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフになる. そして, その平面グラフを平面上で全同位変形する.

2.2 : 2.1 の平面グラフを空間グラフとして, T-3 型であることを証明する.

2.3 : 2.2 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型であることを証明する.

主定理の証明の流れ

2.1 : 空間グラフの射影図のすべての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフになる. そして, その平面グラフを平面上で全同位変形する.

2.2 : 2.1 の平面グラフを空間グラフとして, T-3 型であることを証明する.

2.3 : 2.2 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型であることを証明する.

2.1

8の字結び目を例に説明する.
すべての交差点の上下をなくし頂点とする.

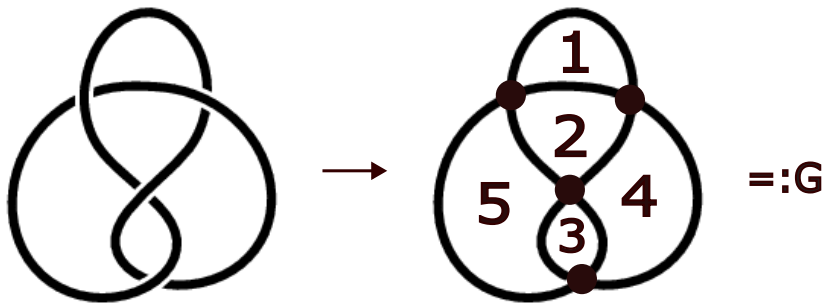
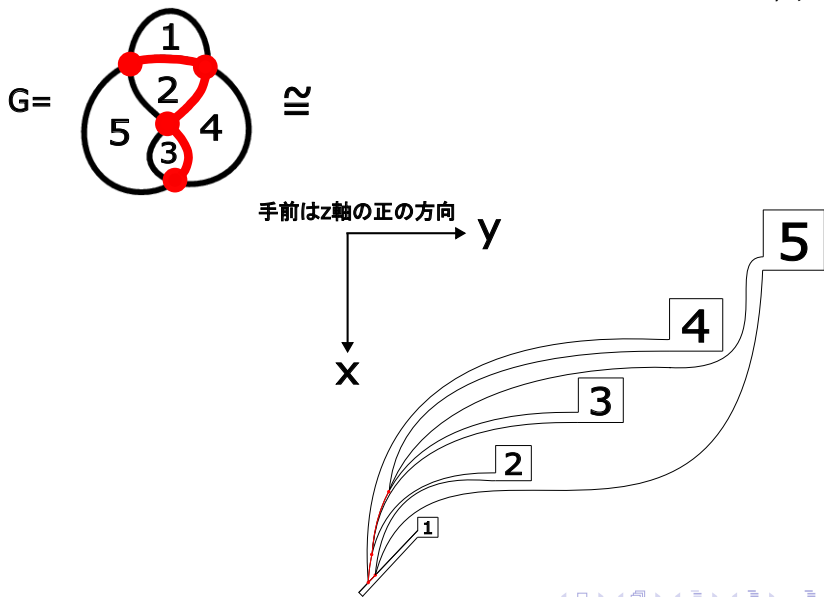


図 6

図6の平面グラフ G を xy 平面上で全同位変形する.

図7



注意点

- ・ 左下から斜め右上へ「 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 」の順で**大きさは1つずつ大きくして一直線上に並べる**.
- ・ 相異なる2つの頂点の y の値は異なるようにする.
- ・ すべての□は任意の頂点より y の値が**大きい位置**に置く.

主定理の証明の流れ

2.1 : 空間グラフの射影図のすべての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフになる. そして, その平面グラフを平面上で全同位変形する.

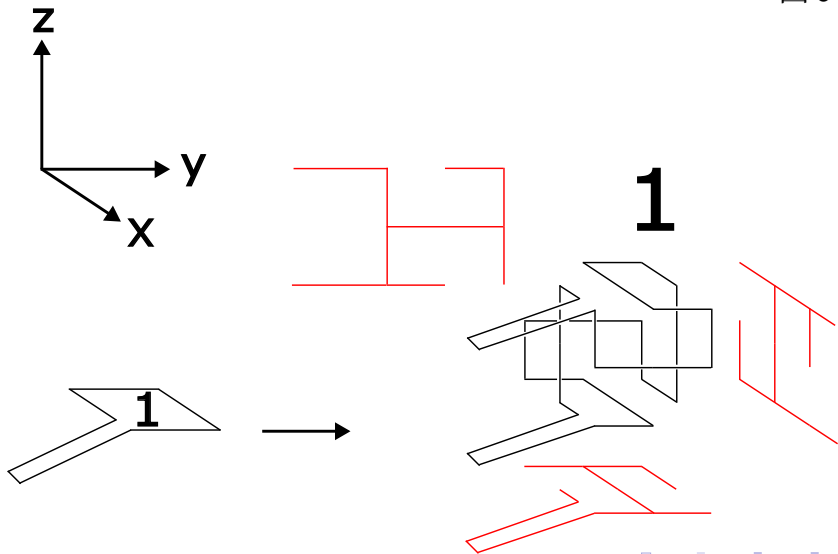
2.2 : 2.1 の平面グラフを空間グラフとして, T-3 型であることを証明する.

2.3 : 2.2 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型であることを証明する.

2.2 空間に埋め込む際のポイント

ポイント1

図8



ポイント 2

手前はz軸の正の方向

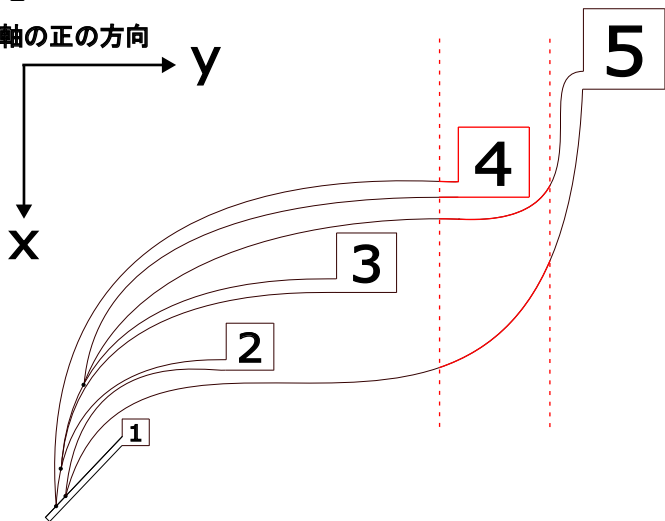


図 9



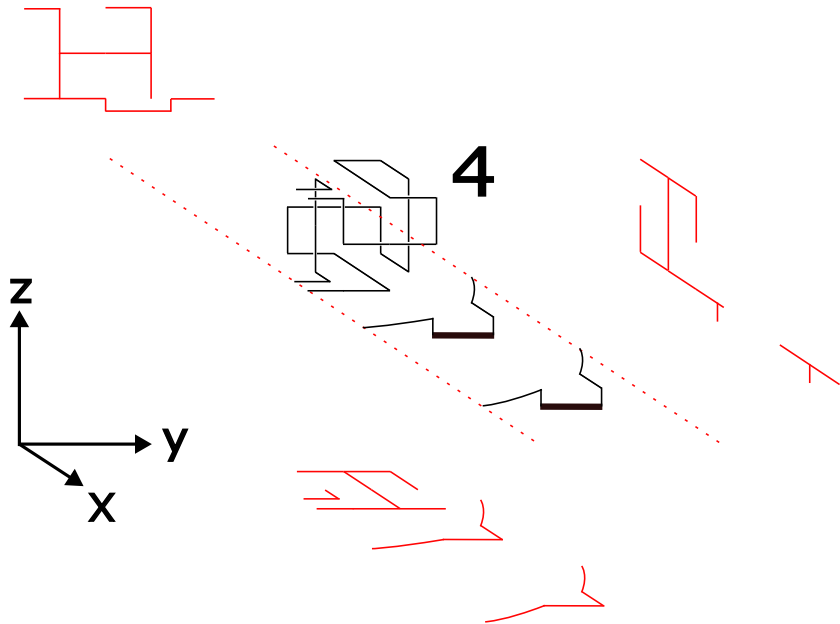


图 10

手前はz軸の正の方向

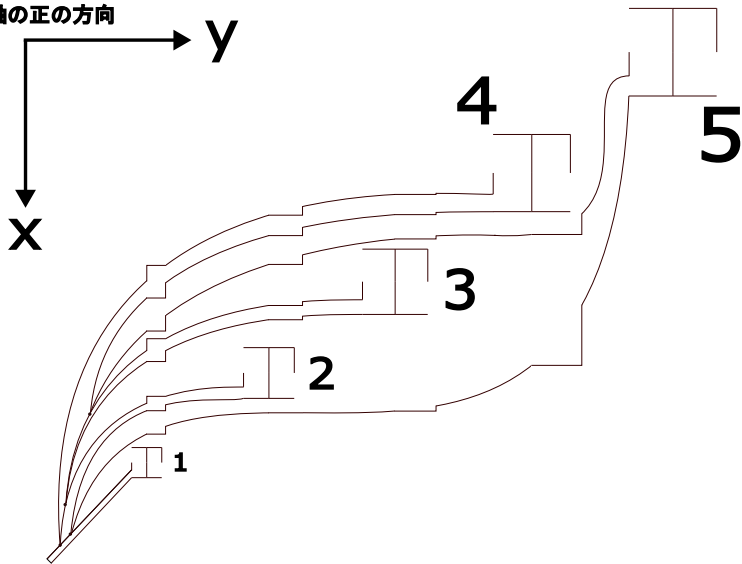


図 11 : xy 平面の正射影は木

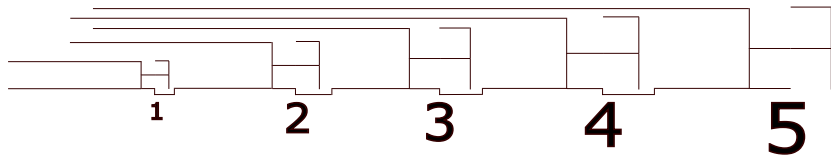
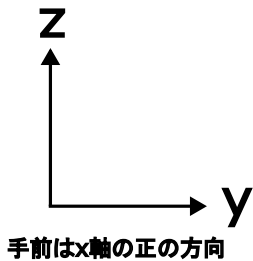


図 12 : yz 平面の正射影は木

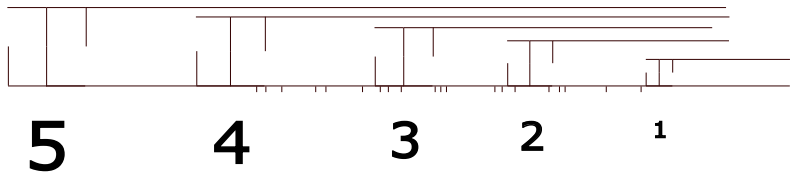
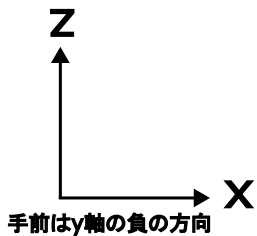


図 13 : zx 平面の正射影は木

… 図 7 の平面グラフ G を空間グラフとしたとき, **T-3型**. ■

主定理の証明の流れ

2.1 : 空間グラフの射影図のすべての交差点の上下をなくし頂点とすると, 平面グラフになる. そして, その平面グラフを平面上で全同位変形する.

2.2 : 2.1 の平面グラフを空間グラフとして, T-3 型であることを証明する.

2.3 : 2.2 でできた空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型であることを証明する.

2.3 図 14 の 4 つの頂点を交差点に戻す.
手前はz軸の正の方向

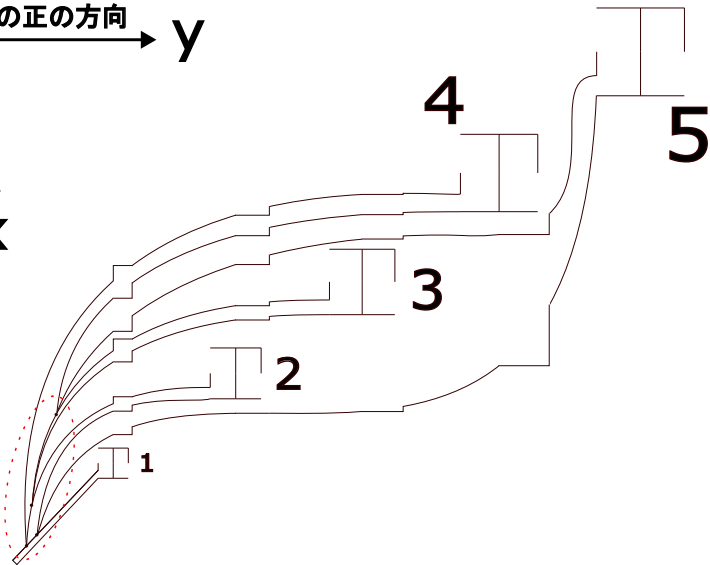
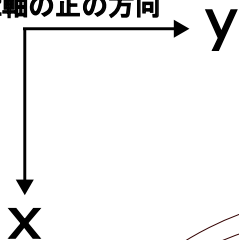


図 14

図 14 の赤い丸を拡大

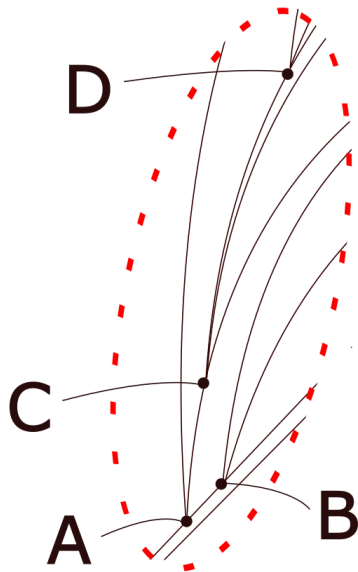


図 15

頂点から交差点への戻し方

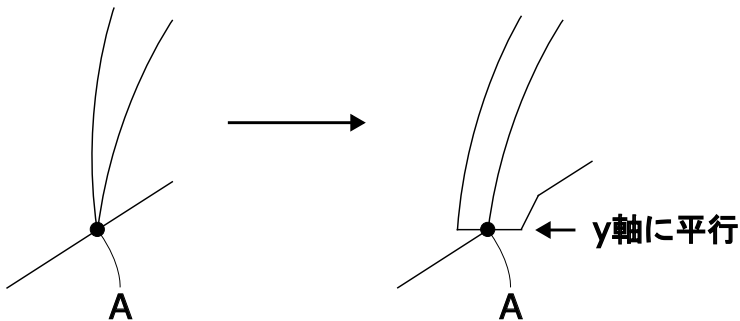
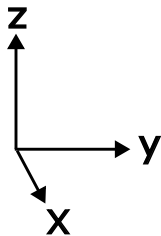


図 16

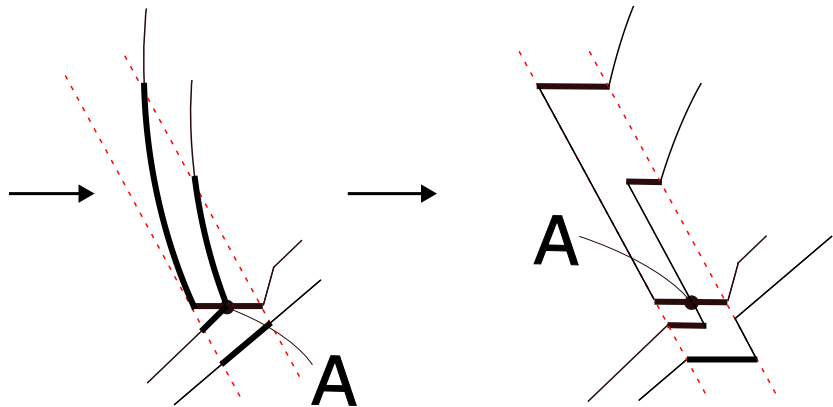
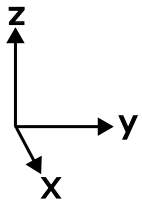


图 17

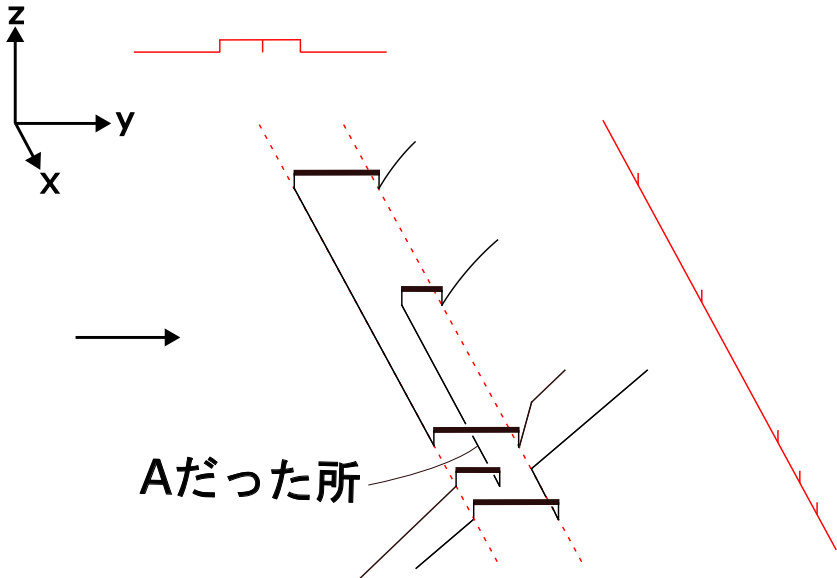
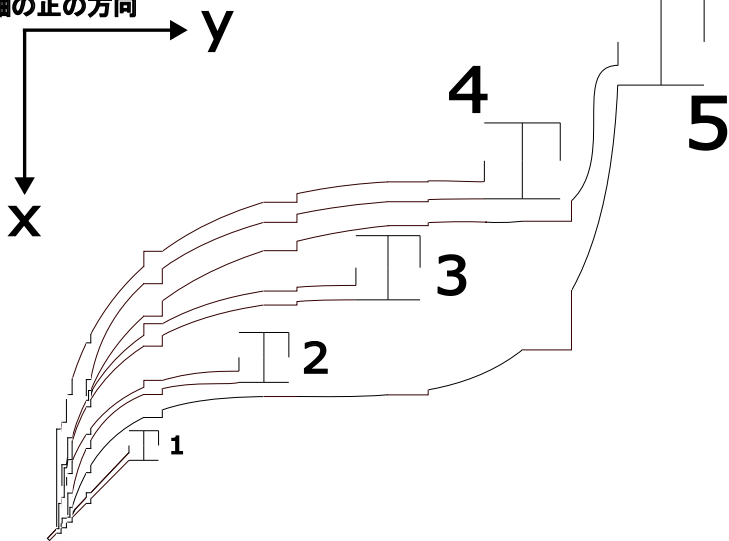


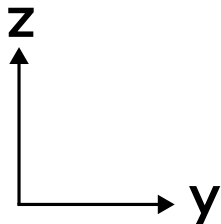
図 18

- 頂点 B は太線を z 軸の正の方向に, 頂点 C と頂点 D は太線を z 軸の負の方向に出っ張らす.
- 出っ張らす長さは全て同じ.

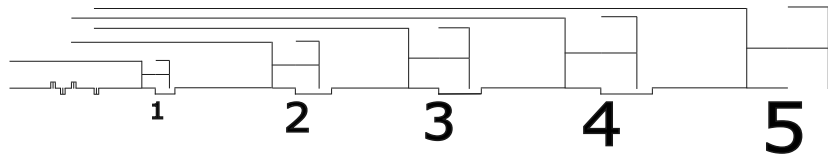
手前はz軸の正の方向



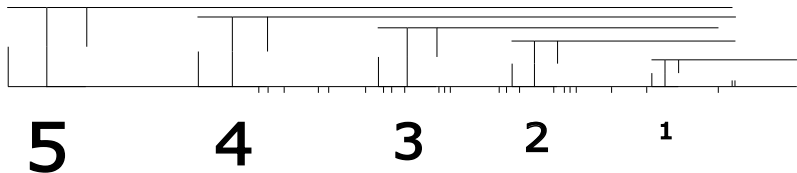
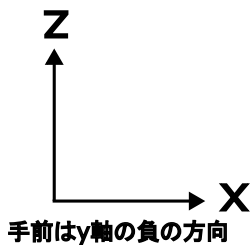
(再掲) 図3: xy 平面の正射影は木



手前はx軸の正の方向



(再掲) 図4：yz 平面の正射影は木



(再掲) 図5： zx 平面の正射影は木

… 8 の字結び目は **T-3型**. ■

まとめ

- 1 : 空間グラフの射影図のすべての交差点を頂点にすると, 平面グラフになる.
- 2 : 1 の平面グラフを空間グラフとしたとき, T-3 型.
- 3 : 2 の空間グラフの頂点 (もともと交差点だったところ) を交差点に戻しても T-3 型である.

空間グラフが非連結の場合

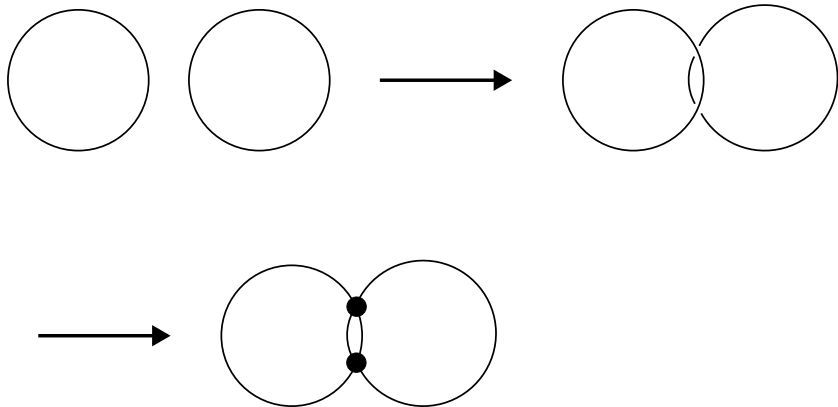


図 19

空間グラフに孤立頂点が存在する場合

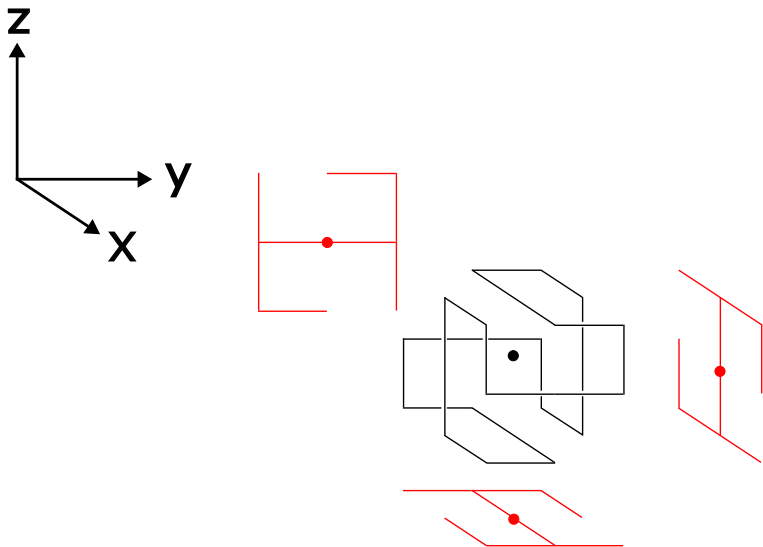


図 20

- 1 個の trivialA に置くことができる孤立頂点は 1 個まで.
- 有界領域の個数より孤立頂点の個数の方が多い場合, あらかじめライデマイスター移動 1 をして有界領域の個数を増やす.

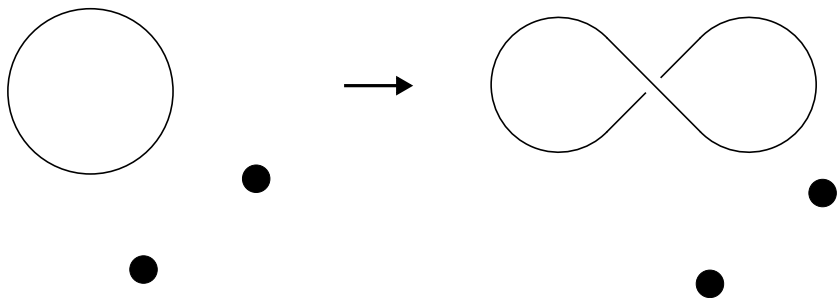


図 21

目次

1：導入

1.1 用語の定義

1.2 先行研究

1.3 主定理

2：主定理の証明

3：今後の課題

3：今後の課題

今回の研究により, 全ての空間グラフに対し, T-3型であるものとそうでないものに分類できた. 今後は, 射影の方向を増やせるか考えたい.

参考文献

- [1] K. Kawamura, CONSTRUCTION OF A LATTICE KNOT WHOSE THREE SHADOWS ARE ALL TREES, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol.20, No.5 (2011) 775–785
- [2] P. Winkler, Mathematical Mind-Benders (A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2007)

ご清聴

ありがとうございました。