研究集会

「結び目の数理 IV 」

報告集

２０２２年２月

　この報告集は２０２１年１２月２３日から２６日までオンサイト（早稲田大学）並びに
オンライン（Zoom 配信）によるハイブリッド形式で開催された研究集会「結び目の数理 IV 」
における講演要旨を収録したものです。

　この研究集会は、トポロジー連絡会議の支援するトポロジープロジェクトの一環として、

２０２１年度科学研究費補助金　基盤研究（A）
「３次元双曲多様体上の量子トポロジー」研究代表者：大槻知忠（課題番号：21H04428）

２０２１年度科学研究費補助金　基盤研究（B）
「結び目のトポロジーとその高分子科学への応用の研究」研究代表者：下川航也（課題番号： 21H00978）

の援助を受けて開催されました。

　研究集会の開催に際して、多くの方々のご協力を賜わりました。
ここに厚く御礼申し上げます。

２０２２年２月

谷山公規（早稲田大学教育学部）
安原晃　（早稲田大学商学部）
村尾智　（早稲田大学グローバルエデュケーションセンター）
丹下稜斗（早稲田大学教育学部）
木村直記（早稲田大学基幹理工学部）

目次

Continued fractions of even type related to amphicheiral two bridge links

門上晃久（金沢大学大学院自然科学研究科）

2021 年 12 月 23 日発表

1 Introduction

以下、数学用語は英単語表記を基本とする。

[Kd] 内にある結果を報告する。[Kd] の主結果は、2-bridge link の link symmetric group [Wh, Hi] の決定である。ordered oriented link に対する *link symmetric group* とは、その link の invertibility や amphicheirality を併せた symmetry を表すものである。amphicheirality のみを考える場合、link の order や orientation を考えるのは不要に思えるが、symmetry の invariant への反映の仕方の多くは、（たとえ 1 成分の場合でも）ordered oriented link としてのものである。今回は link symmetric group そのものには立ち入らず、2-bridge link の amphicheirality の条件のみに注目する。link が *amphicheiral* とは、mirror image と equivalent のときをいう。例えば、2-bridge knot の 1 つである figure eight knot 4_1 は、以下の Figure 1 のように amphicheiral である。以後、図中の四角形内の数は half twist の数を表す。

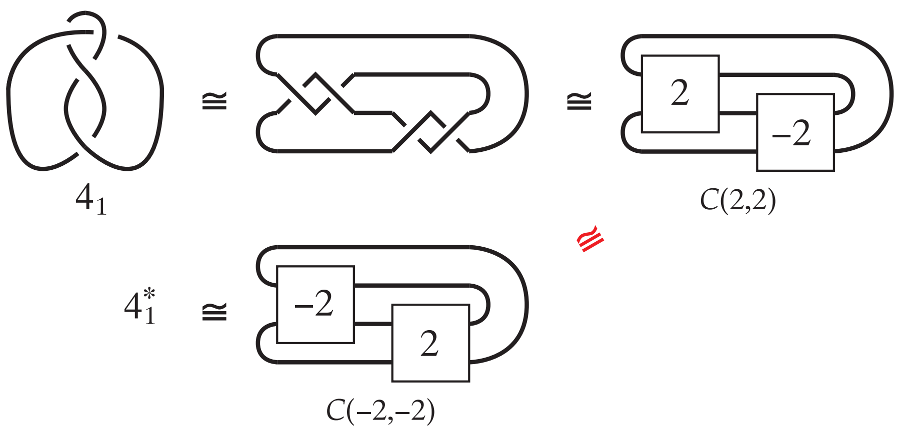


Figure 1: figure eight knot 4_1 の amphicheirality

4_1 の Conway form [Co] は $C(2,2)$ であり、対称的な数の並びから直ちに amphicheiral であることがわかる。$2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ より、Schubert form [Sc] は $S(5,2)$ で、この場合 $2^2=4\equiv -1 \pmod 5$ からも amphicheiral であることがわかる。

2-component 2-bridge link $6_2^2=C(3,3)$ の場合も同様に数の並びから直ちに amphicheiral であることがわかる。$3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$ より、$6_2^2=S(10,3)$ でもあり、$3^2=9\equiv -1 \pmod{10}$ からも amphicheiral であることがわかる (Figure 2)。

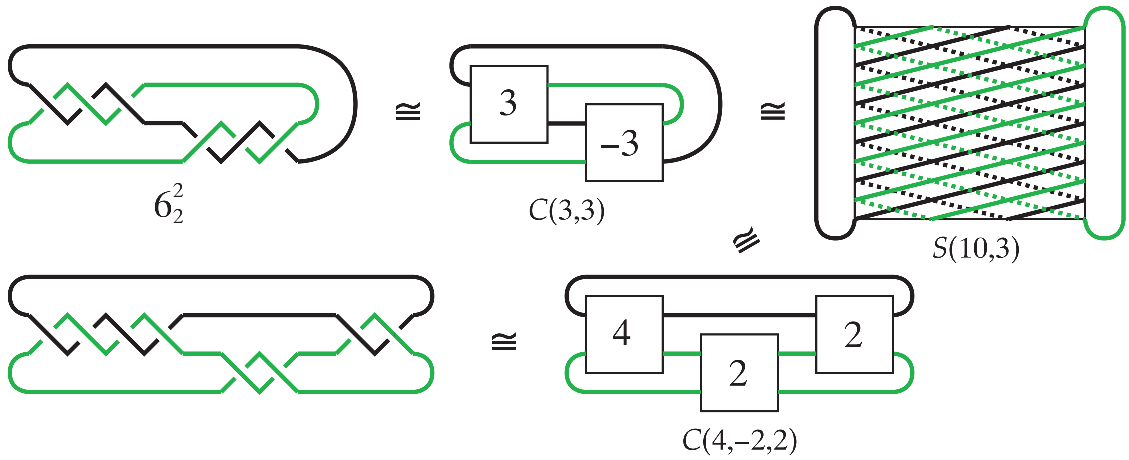


Figure 2: $6_2^2=C(3,3)$ の amphicheirality

2-bridge link は 2 つの 2-string trivial tangle の和でできる link のことである。1 つの 2-string trivial tangle は最も見易いものを想定してよいが、もう 1 つの 2-string trivial tangle は、3-ball の境界の S^2 上にある 2 つの string の境界の 4 点を集合として固定する範囲の自由度で考える。これを rational tangle という。rational tangle の表示法は大きく以下の 2 通りある。

(1) 2-string trivial tangle を 2 つの closed loop で twist する。 (Figure 3)

2 つの string の境界の 4 点のうち 1 点 A を固定し、他の 3 点が互いに入れ替わる変化をさせる。S^2 上で境界の 4 点を 2 つずつに分ける simple closed loop α,β を特別に取り、それらに沿った twist を順に行うことで rational tangle を得る。

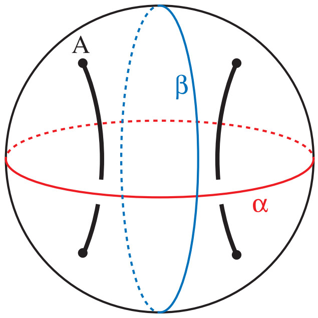


Figure 3: 2-string trivial tangle を twist する closed loop

(2) 2 つの string を 3-ball の境界に交わらせずに乗せる。

1 辺の長さ 1 の正方形 2 つを境界に沿って張り合わせると S^2 ができ、これを境界とする 3-ball で内部を埋めたとする。境界の正方形を xy 平面に置き、4 頂点が $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ にあるとする。そして、2 つの正方形に表裏を指定する。ここでは p,q は互いに素で $p>0, q>0$ を仮定する。はじめの string を、$(0,0)$ から表の正方形上 $y=\frac{q}{p}x$ に沿わせ、辺にたどり着くと裏に回り傾きを $-\frac{q}{p}$ にして沿わせ、辺にたどり着くと表に回り、を繰り返して頂点で止める。使っていない頂点同士で平行にもう 1 つの string を沿わせる。これが rational tangle になる。Figure 2 に $p=10, q=3$ の例がある。p,q の一方が負のときは、はじめに裏の正方形を沿わせる。

(1) の rational tangle を自明に閉じることで、Figure 4 のような 2-bridge link の Conway form $C(a_1,\ldots,a_m)$ を得る。a_i $(i=1,\ldots,m)$ は 0 でない整数で、α,β に沿った twist 数を表す。

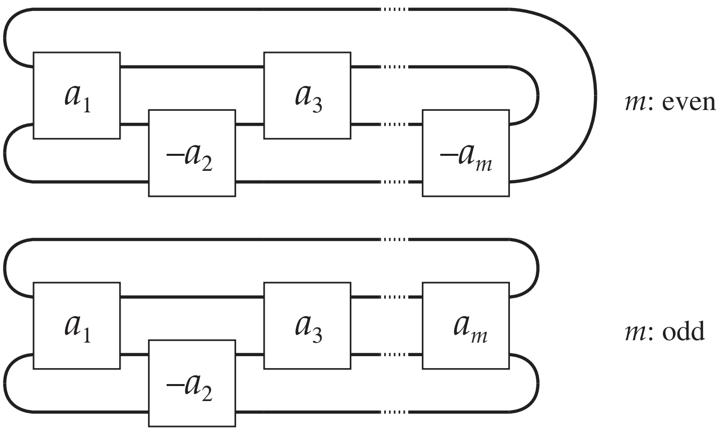


Figure 4: 2-bridge link の Conway form $C(a_1,\ldots,a_m)$

(2) の rational tangle を自明に閉じることで、2-bridge link の Schubert form $S(p,q)$ を得る。

$$[a_1,\dots,a_m]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{\ddots}{a_{m-1}+\cfrac{1}{a_m}}}}=\frac{p}{q}=\frac{-p}{-q}$$

$a_i,p,q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $(i=1,\dots,m)$, $\gcd(p,q)=1$ $(|p|\geq|q|)$ とするとき、以下を得る。

Theorem 1.1. $C(a_1,\dots,a_m)\cong S(p,q)$.

この結果により、Conway form と Schubert form が繋がる。$[a_1,\dots,a_m]$ から p/q が唯一決まる一方で、p/q から $[a_1,\dots,a_m]$ が唯一決まらない。Figure 2 において、$C(3,3)\cong C(4,-2,2)$ である。$C(3,3)$ からは amphicheirality は即座にわかるが、$C(4,-2,2)$ からは直ちにはわからない。もちろん $S(10,3)$ を経由すればよいのだが、

$C(4,-2,2)$ から amphicheirality を直接知る術はないのか？

が今回の主旨である。

Assumption $|a_i|=1\Longrightarrow a_{i-1}a_i>0$ & $a_ia_{i+1}>0$.

Definition 1.2. $[a_1,\dots,a_m]$, $(a_1,\dots,a_m)$ $({}^\forall a_i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\};i=1,\dots,m)$ が *even type* $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall a_i$: even $(i=1,\dots,m)$.

2 Basic properties

2-bridge link に関する基本結果を述べる。

Lemma 2.1.
(1) 2-bridge knot/link は strongly invertible. i.e. $S(p,q)\cong S(-p,-q)$.
(2) $S(p,q)^*\cong S(p,-q)$, $C(a_1,\dots,a_m)^*\cong C(-a_1,\dots,-a_m)$.
(3) 2-component 2-bridge link は interchangeable.

Lemma 2.2.
(1) $[a_1,\dots,a_m]=p/q$: even type, m : even
$\Longrightarrow p$: odd, q : even, r : even, s : odd, $qr\equiv-1 \pmod p$, $S(p,q)$: knot, Seifert genus $g=m/2$.

(2) $[a_1,\dots,a_m]=p/q$: even type, m : odd
$\Longrightarrow p$: even, q : odd, r : odd, s : even, $qr\equiv 1 \pmod{2p}$, $S(p,q)$: 2-component link, Seifert genus $g=(m-1)/2$ (Figure 5).

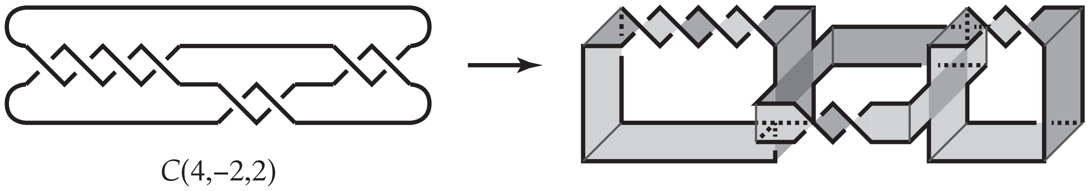


Figure 5: 2-bridge link の minimal genus Seifert surface

Theorem 2.3.
(1) $S(p,q)$ 上 2-fold branched covering は $L(p,q)$.

(2) p : odd, $S(p,q) \cong S(p',q') \iff p=p'$ & $q=q'$ or $qq' \equiv 1 \pmod p$.

(3) p : even, $S(p,q) \cong S(p',q')$ as oriented links $\iff p=p'$ & $q=q'$ or $qq' \equiv 1 \pmod{2p}$.

(4) p : even, $S(p,q) = K_1 \cup K_2$ as an oriented link, $S(p',q') = K_1 \cup (-K_2)$
$\iff p=p'$ & $q' \equiv q+p \pmod{2p}$ or $qq' \equiv 1+p \pmod{2p}$.

Theorem 2.3 より、以下を得る。

Corollary 2.4. $S(p,q)$: amphicheiral $\iff q^2 \equiv -1 \pmod p$.

Remark $q^2 \equiv -1 \pmod p \iff s(q,p)=0$. （$s(q,p)$ は Dedekind sum）

3 Main Theorems

以下が Main Theorem である：

Main Theorem 1
L : amphicheiral 2-bridge knot/link
$\iff {}^{\exists}m$: even & ${}^{\exists}a_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $(i=1,\ldots,m)$
s.t. ${}^{\forall}a_i = a_{m+1-i}$ & $L \cong C(a_1,\ldots,a_m)$: symmetric form.

特に、L : knot $\Longrightarrow {}^{\forall}a_i$: even と取ることができる。

表面上 2-bridge link に無関係な表現にすると次のようになる：

Main Theorem 1′
$p,q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ s.t. p or q : even, $q^2 \equiv -1 \pmod p$.
$\iff {}^{\exists}m$: even &
${}^{\exists}a_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $(i=1,\ldots,m)$ s.t. ${}^{\forall}a_i = a_{m+1-i}$ & $[a_1,\ldots,a_m] = p/q$.

Main Thorem 2 を述べるための準備をする。

m : odd として、$m = 2g+1$ とする。

$\mathcal{E}_m = \{(a_1, \ldots, a_m) : \text{even type}\}$,
$\mathcal{E}_m^+ = \{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{E}_m \mid a_1 > 0\}$, $\mathcal{E}_m^- = \{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{E}_m \mid a_1 < 0\}$,

$$\mathcal{E} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{E}_{2g+1},\ \mathcal{E}^{\pm} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{E}_{2g+1}^{\pm}$$

とするとき、以下を (A1)–(A6) により生成する集合とする：

$$\mathcal{A}_g^{\pm} \subset \mathcal{E}_{2g+1}^{\pm},\ \mathcal{A}_g = \mathcal{A}_g^+ \cup \mathcal{A}_g^- \subset \mathcal{E}_{2g+1},\ \mathcal{A} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{A}_g$$

(A1) : $\mathcal{A}_0^+ = \{(2)\},\ \mathcal{A}_0^- = \{(-2)\}$.

(A2) : $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}_g \longleftrightarrow (a_m, \ldots, a_1) \in \mathcal{A}_g$.

(A3) : $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (-a_1, \ldots, -a_m) \in \mathcal{A}_g^-$.

(A4) : $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (a_1+2, a_2, \ldots, a_m, -2, 2) \in \mathcal{A}_{g+1}^+$.

(A5) : $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (2, a, a_1, \ldots, a_m, -a-2, 2) \in \mathcal{A}_{g+2}^+$, where $a \neq -2$.

(A6) : $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{A}_g^- \longleftrightarrow (2, a, a_1, \ldots, a_m, -a, 2) \in \mathcal{A}_{g+2}^+$.

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{E},\ C(\mathbf{a}) = C(a_1, \ldots, a_m)$ の記号を用いる。

Main Theorem 2
$\mathbf{a} \in \mathcal{E}$, $C(\mathbf{a})$: amphicheiral $\Longleftrightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{A}$.

いずれの定理の証明も

$$(\star) \quad \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

をただただ用いるのが基本である。

Example
(1) $\mathbf{a}_g = (2g+2, \underbrace{-2, 2}_{1}, \ldots, \underbrace{-2, 2}_{g}) \in \mathcal{E}_g^+$, $\quad L_g = C(\mathbf{a}_g)$.

$\mathbf{a}_0 = (2) \xrightarrow{(A4)} \mathbf{a}_1 = (4, -2, 2) \xrightarrow{(A4)} \cdots \xrightarrow{(A4)} \mathbf{a}_g \in \mathcal{A}_g^+$.

$L_g = C(2g+1, 2g+1)$.

(2) $\mathcal{A}_1^+ = \{(4, -2, 2), (2, -2, 4)\}$,

$\mathcal{A}_2^+ = \{(6, -2, 2, -2, 2), (4, -2, 4, -2, 2), (2, -2, 2, -2, 6)$,
$(2, -2, 4, -2, 4), (2, a, 2, -a-2, 2)\ (a \neq -2), (2, a, -2, -a, 2)\}$.

4 Problems

最後に、思い付くままいくつか問題を挙げておく。

Problem 1 (A1) を他に置き換えると何が起きるか？$q^2 \pmod p$ を保つのか？

Problem 2 Main Theorem 2 中の変形はもっと統一的に簡潔に述べられないか？

Problem 3 even amphicheiral form（$\mathcal{A}$ の元）と symmetric form の間の翻訳はどのようになるのか？

Problem 4 Main Theorem 2 の純数論的証明はあるか？今回でも行列を使った意味では十分代数的･数論的だが、link の向きや、linking number を気にして、algebraically split (linking number 0) の可能性を排除するために Alexander polynomial を使っている。

Problem 5 Problem 4 に関連して、数論において（実用的な意味合いで）、link の成分数や linking number に対応する概念は何か？link の成分数なら、permutation に対応させて、各数の orbit で述べることはできる。一方、linking number は even form なら、奇数項の和で述べられるが、数論上自然な意味はあるのか？

Acknowledgement 講演の機会を与えていただいた早稲田大学の主催者の方々に感謝致します。

amphicheirality の内容での講演はこれまで幾度かしてきましたが、[Kd] の内容そのものは一度も講演しませんでした。理由は、2-bridge knot/link の symmetry はこれまで研究され尽くされていて、今更その話題を扱っても新奇性に訴えないと当時は感じたからです。偶数連分数展開は新しいとは思ってはいましたが、そのことを伝えるのは難しいとも感じていました。今回この発表を行おうと思ったのは、地引芳紀氏 [Jb] の講演を拝聴して、内容が偶数連分数展開の話だったことから [Kd] の結果を思い起こし、発表の価値があると感じたからです。ただ今回も、[Kd] の主結果である link symmetric group の話ではありませんでした。地引氏含む数論では無限長の周期的展開を扱っているので [KL, SW]、2 次の無理数の話なのが相違点ではあります。発表年から、偶数連分数展開は数論でも意外と最近の話題と言えるでしょう。しかし Euclid 以来 2000 年以上の連分数展開の歴史のどこかで類似の結果がないとも限らないとも考えています。何かご存知の方は是非お教え下さい。

講演中や講演後に平澤美可三先生、作間誠先生からコメントをいただきました。豊富なコメントで全ては書ききらないですが、3 つ抽出して、順に書きますと、

平澤先生より (1) Seifert surface の張り方から symmetry が見えないか？
作間先生より (2) Main Theorem 1 は既にある結果である [Sa2]。
作間先生より (3) (1) 同様、symmetry が見える diagram 表示を知りたい [Sa1, Sa3]。

でした。

以前、和久井道久先生 [Wa] に [Kd] について触れていただいたことがありました。Main Theorem 1 の逆方向はすぐわかるが、順方向の証明のある文献が見当たらない中で、見つけていただきました。

References

[Sa3] S. Aimi, D. Lee, S. Sakai and M. Sakuma, *Classification of parabolic generating pairs of Kleinian groups with two parabolic generators*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **52** (2020), 477–511.

[Co] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, In: Computational problems in Abstract Algebra (Oxford, 1967) (1970), 329–358, Pergamon Press.

[Hi] J. Hillman, *Symmetries of knots and links, and invariants of abelian coverings (Part I)*, Kobe J. Math., **3** (1986), 7–27.

[Jb] 地引芳紀, 実 2 次無理数の偶数連分数展開について／通常連分数と偶数連分数の間の変換について, 北陸数論セミナー 2021 年 3 月 4 日／ 11 月 18 日.

[Kd] T. Kadokami, *The link-symmetric groups of 2-bridge links*, J. Knot Theory Ramif. **20** (8) (2011), 1129–1144.

[KL] C. Kraaikamp and A. Lopes, *The theta group and the continued fraction expansion with even partial quotients*, Geomeriae Dedicata **59** no.3, (1996), 293–333.

[Sa1] M. Sakuma, *On strongly invertible knots*, Algebraic and Topological Theories –to the memory of Dr. Takehiro MIYATA (1985), 176–196.

[Sa2] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japan. J. Math., **21**, No.2 (1995), 393–439.

[Sc] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z., **65** (1956), 133–170.

[SW] I. Short and M. Walker, *Even-integer continued fractions and the Faray tree*, Symmetries in Graphs, Maps, and Polytopes Workshop (2016), 287–300. arXiv: 1508.01373.

[Wa] 和久井道久, 結び目と連分数, 金沢大学 2016 年 11 月.
`http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~ wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf`

[Wh] W. Whitten, *Symmetries of links*, Trans. Amer. Math. Soc., **135** (1969), 213–222.

四角形の切り貼りとその合同類

東北大学 大学院情報科学研究科 村上研究室　佐藤 史弥

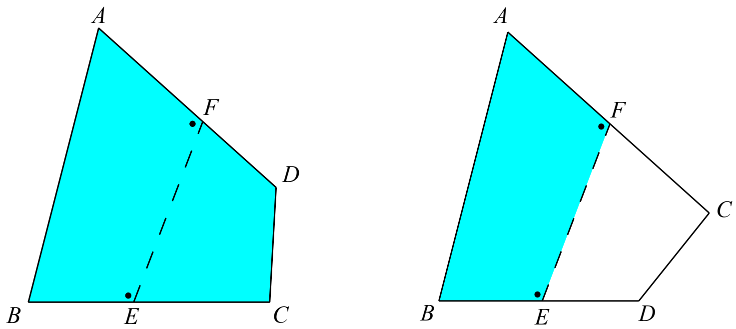
2022 年 1 月 31 日

1　準備

1.1　切り貼りの定義と性質

はじめに, 四角形の切り貼りを定義する. なお, この報告書において「四角形」は凸四角形のことを指し, 4 つの角は全て π 未満であるとする.

定義 1.1. 四角形 $ABCD$ において辺 BC 上の点 E と辺 AD 上の点 F(ただし, 頂点は除く) を $\angle BEF = \angle AFE$ となるように取ることが出来るとき, 線分 EF で四角形 $ABCD$ を 2 つに分割し, 片方を裏返して貼りなおすことで新たな四角形 $ABDC$ が得られる. これを四角形の (線分 EF による) **切り貼り**という. また, 切り貼りに使った線分 EF を (辺 AD と辺 BC に対する) **切り取り線**という. 同様にして辺 AB と辺 CD に対する切り取り線とその切り取り線による切り貼りも定義する.



辺 AD と辺 BC に対する切り取り線の取り方を変えても四角形 $ABDC$ の形は変わらず表と裏の面積比が変わるだけである. よって四角形 $ABCD$ に切り貼りを施して得られるのは四角形 $ABDC$ と四角形 $ACBD$ の高々 2 つである.

切り取り線 EF における切り貼りにおいて

$$\angle BEF = \angle AFE = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

である. よって, 4 つの角の大きさが決まると四角形に対する切り取り線の角度も決まるが, 図 1.1(a) のように辺 BC 上のどの点から切り取り線を引いても辺 AD と交わらないときは切り貼りが出来ない. 図 1.1(b) は対角線 BD によって切り貼りが出来てしまうが, 図 1.1(c) のように辺 AD と辺 BC が平行であるときに対角線 BD(あるいは AC) によって切り貼りを施すと四角形から三角形に移ってしまう.

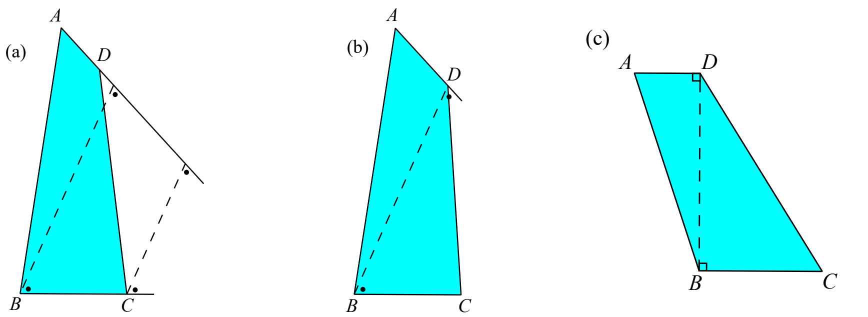


図 1.1

これらの四角形を除くために, 次の前提 1 を満たす四角形に限定して考えるものとする.

前提 1. 以下で扱う四角形は 2 組の向かい合う辺のそれぞれに対して切り取り線を取ることが出来る四角形とする. さらに, 切り貼り後もこの条件を満たすとする.

前提 1 の後半部分について補足をする. 図 1.2 の四角形 $ABCD$ は辺 AD と辺 BC が平行な等脚台形であり, 頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りで平行四辺形 $ABDC$ が得られるが, 平行四辺形 $ABDC$ は辺 DC から下ろす垂線が辺 AB とは交わらないため前提 1 の条件を満たしていない. 前提 1 の後半部分では, このような四角形 $ABCD$ も除くものとしている. なお, これらの切り貼りが出来ない四角形は極端に縦あるいは横に長い四角形が該当するが, 詳細な条件については分かっていない.

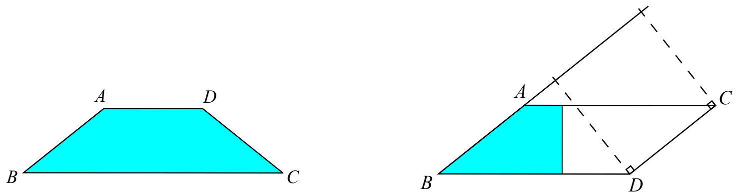


図 1.2

切り取り線 EF における切り貼りにおいて, $\angle C = \angle D$ のときは $\angle C = \angle D = \angle BEF = \angle AFE$ となり, 四角形 $FECD$ は等脚台形である. よって次の補題と系を得る.

補題 1.2. $\angle C$ と $\angle D$ の大きさが等しい四角形 $ABCD$ において, 線分 EF による切り貼りを施して得られる四角形 $ABDC$ は四角形 $ABCD$ と合同である.

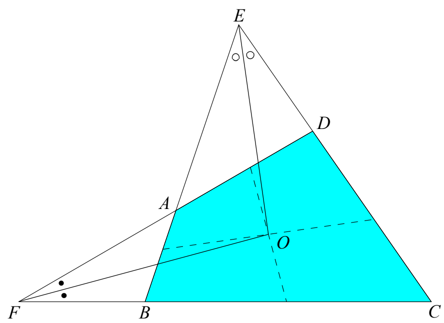
系 1.3. 3 つの角の大きさが等しい四角形に切り貼りを何回施しても得られる四角形は変わらない.

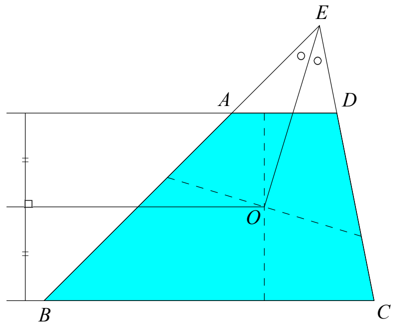
1.2 基準点

切り取り線は条件を満たせばどこに取っても良いが, 全ての切り取り線を 1 点で交わるように取れば切り貼りを分類しやすくなる. そこで, 次の基準点を定義する.

定義 1.4. どの対辺の組も平行でない四角形 $ABCD$ に対し, 直線 AB と直線 CD の交点を E, 直線 AD と直線 BC の交点を F とする. このとき, $\angle E$ の二等分線と $\angle F$ の二等分線の交点 O を（切り貼りの）**基準点**という. AB と CD が平行であるときは, それぞれの直線上の点を両端に持つ垂線を引き, その垂線の垂直二等

分線を $\angle E$ の二等分線の代わりに用いる. AD と BC が平行であるときも同様である.





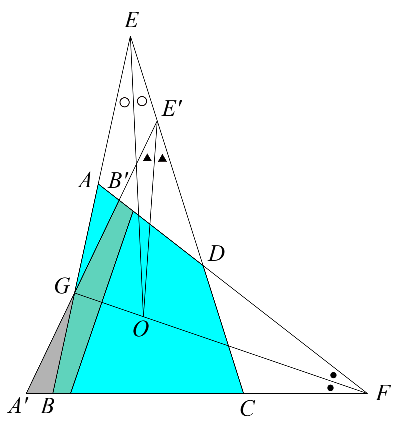
命題 1.5. 四角形に切り貼りを施し, 新たな四角形を得たとする. このとき, 切り貼りで裏返さなかった方の図形が一致するように 2 つの四角形を重ねると, それぞれの基準点も同じ位置で重なる.

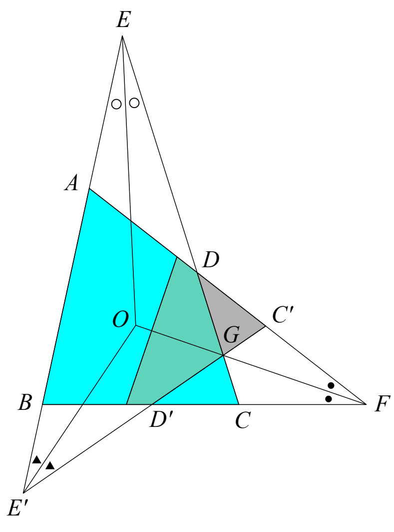
証明. (1) 四角形が台形でないとき.

四角形 $ABCD$ から四角形 $ABDC$ を得る切り貼りについて証明する. 直線 AB と直線 CD の交点を E, 直線 AD と直線 BC の交点を F とし, $\angle E$ の二等分線と $\angle F$ の二等分線の交点を O とする. また、命題の条件に合うように四角形 $ABDC$ を四角形 $ABCD$ の上に重ねる. ただし, 四角形 $ABDC$ は頂点 A と頂点 B を入れ替える切り貼りの場合と頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りの場合のそれぞれで重ね方が異なる.

- ◎ 頂点 A と頂点 B を入れ替える切り貼りをした場合, 四角形 $ABDC$ の点 A, 点 B をそれぞれ点 A', 点 B' と名前を付け直し, 直線 CD と直線 $A'B'$ の交点を点 E' とする. 線分 AB と線分 $A'B'$ の交点を G とすると, 線分 FO は AB と $A'B'$ の線対称の軸となっており, FO も点 G を通る.
- ◎ 頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りをした場合は四角形 $ABDC$ の点 C, 点 D をそれぞれ点 C', 点 D' と名前を付け直し, 直線 AB と直線 $C'D'$ の交点を点 E' とする. 線分 CD と線分 $C'D'$ の交点を G とすると, 線分 FO は CD と $C'D'$ の線対称の軸となっており, こちらも FO は点 G を通る.

2 種類の重ね方のうちどちらかは点 E と点 E' が直線 FG の同じ側にあり, もう片方は反対側にある. 同じ側にあるときは点 O は三角形 EGE' の傍心となり, 反対側にあるときは三角形 EGE' の内心である. したがって, $\angle A'E'C$ の二等分線 (または $\angle AE'C'$ の二等分線) も点 O を通る. 四角形 $ABCD$ から四角形 $ACBD$ を得る切り貼りも同様である.





(2) 四角形が台形であるときも同様に出来るので割愛する.

□

図 1.4 の四角形 $ABCD$ は切り貼りは出来るが, 基準点での切り貼りは出来ない四角形である. 実際, 図 1.4(b) のように頂点 C と D を入れ替える切り貼りの切り取り線が基準点 O を通るように取ると, 線分 AD とは交わらない. しかし, その切り取り線を少し左に動かせば辺 AD と辺 BC それぞれの内分点を通るため, この四角形 $ABCD$ は 1.1 節の前提 1 は満たしていることが分かる.

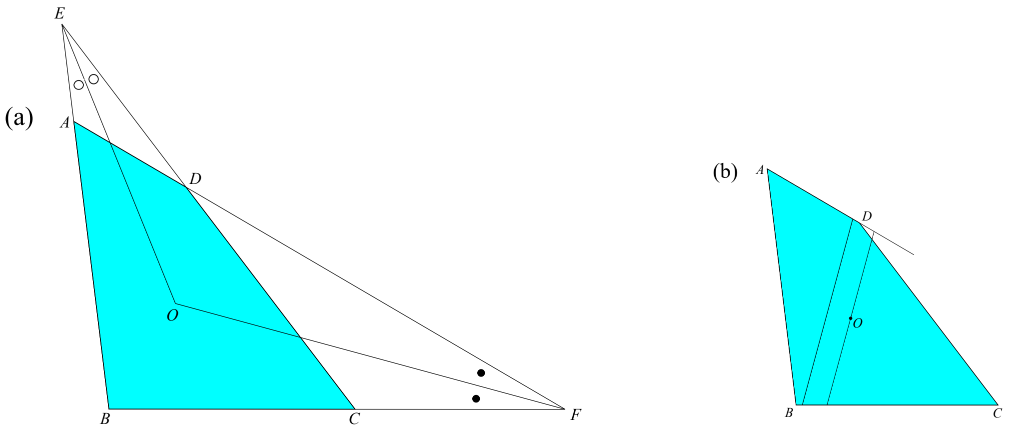


図 1.4

前提 1 を満たせば切り貼り自体は可能であるが, 複数回の切り貼りを円滑に行うため, 以下では次の前提 2 を満たす四角形に限定して考えるものとする.

前提 2. 以下で扱う四角形は 2 組の向かい合う辺のそれぞれに対して基準点を通る切り取り線を取ることが出来る四角形とする. さらに, 前提 1 と同じように, 切り貼り後もこの条件を満たすとする.

前提 2 についても基準点での切り貼りが出来ない四角形の詳細な条件については分かっていない.

2 切り貼りの分類

この章では 1.2 節で定義した基準点での切り貼りを分類する. 四角形に切り貼りを繰り返し施すと $ABCD$, $ABDC$, $ADBC$, $ADCB$, $ACDB$, $ACBD$, $ABCD^{(2)}$... の順に移り合う. よって, 前提 2 を満たす四角形であれば複数回の切り貼りによって角の並べ替えを全て網羅することが出来るので, それぞれの合同類の代表元は

$$\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$$

を満たす四角形 $ABCD$ とすることが出来る. また, 切り取り線の角度の候補となるのは $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ のうち 2 つの和の平均であるため 6 通りである. 四角形の分け方に違いが生じうるのはこの 6 通りの大小関係が変わるときであるが, $\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$ とすれば

$$\angle A + \angle B \leq \angle A + \angle C \leq \pi \leq \angle B + \angle D \leq \angle C + \angle D$$

$$\angle A + \angle C \leq \angle A + \angle D \leq \angle B + \angle D, \quad \angle A + \angle C \leq \angle B + \angle C \leq \angle B + \angle D$$

が得られる. 以上から

◎ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ の中に等しいものがあるときと無いとき
◎ $\angle A + \angle D$ と $\angle B + \angle C$ の大小関係が変わるとき

に四角形の分け方が変わる. 実際に四角形を分類すると次の 12 パターンに分かれる.

◎ $\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ のとき
- $\angle A + \angle D > \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(i)
- $\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(ii)
- $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(iii) (台形)

◎ $\angle A = \angle B < \angle C < \angle D$ となる四角形 ... パターン 2
◎ $\angle A < \angle B = \angle C < \angle D$ のとき
- $\angle A + \angle D > \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(i)
- $\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(ii)
- $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(iii) (直角を持つ台形)

◎ $\angle A < \angle B < \angle C = \angle D$ となる四角形 ... パターン 4
◎ $\angle A = \angle B < \angle C = \angle D$ となる四角形 ... パターン 5 (等脚台形)
◎ $\angle A = \angle B = \angle C < \angle D$ となる四角形 ... パターン 6
◎ $\angle A < \angle B = \angle C = \angle D$ となる四角形 ... パターン 7
◎ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ となる四角形 ... パターン 8 (長方形)

この報告書ではパターン 1-(i) と 1-(ii) のみ説明する.

2.1 パターン 1-(i)

まずは, パターン 1-(i) の四角形の分け方 (図 2.1 左図) について詳しく説明する.

$\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ かつ $\angle A + \angle D > \angle B + \angle C$ を満たす四角形 $ABCD$ に対し, 基準点 O を通る線分 EF を引く. ただし, 点 E, F はそれぞれ辺 BC, AD の内分点であり,

$$\angle OEC = \angle OFD = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \blacktriangle$$

を満たすとする. さらに, 辺 BC 上に点 G, H, I, J, 辺 AD 上に点 K, L を

$$\angle OGC = \angle OJB = \angle OKD = \frac{\angle A + \angle C}{2} = \circ, \quad \angle OHC = \angle OIB = \angle OLD = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \bullet$$

を満たすようにとる. このとき, $\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ の条件から $\blacktriangle < \circ < \bullet$ となるため, 辺 BC 上の点は B, E, G, H, I, J, C の順に, 辺 AD 上の点は A, F, K, L, D の順に並ぶ.

次に, 基準点 O を通る線分 MN を引く. ただし, 点 M, N はそれぞれ辺 AB, CD の内分点であり,

$$\angle OMA = \angle OND = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \bullet$$

を満たすとする. さらに, 辺 AB 上に点 P, Q, R, S, T, 辺 CD 上に点 U を

$$\angle OPB = \angle OTA = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \blacktriangle, \quad \angle OQB = \angle OSA = \angle OUD = \frac{\angle A + \angle C}{2} = \circ,$$

$$\angle ORB = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \bullet$$

を満たすようにとる．このとき, $\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ の条件から辺 AB 上の点は A, P, Q, R, M, S, T, B の順に, 辺 CD 上の点は C, U, N, D の順に並ぶ.

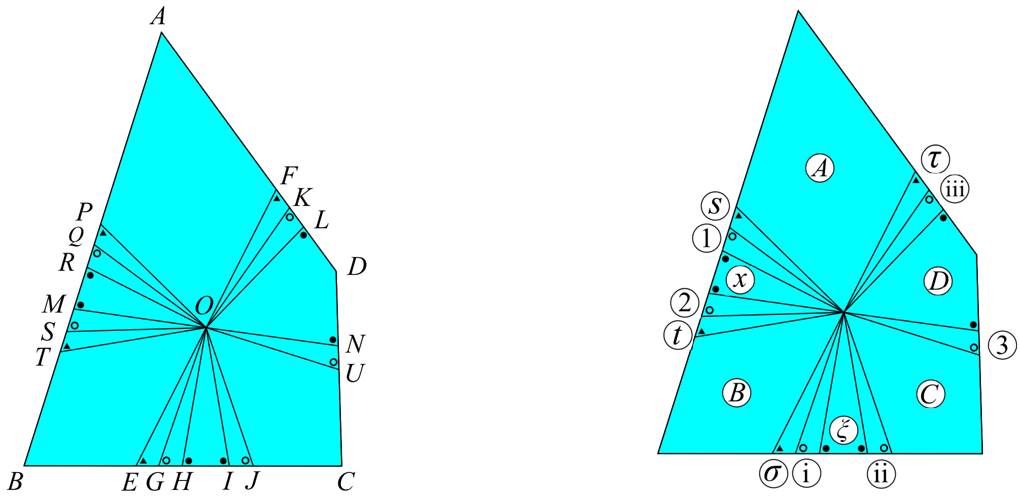


図 2.1 四角形 $ABCD$

ここからはパターン 1-(i) の四角形に切り貼りを施す．点 O は基準点であるため $OE = OF$, $OM = ON$ となり, 四角形の分け方から

$$OG = OJ = OK, \quad OH = OI = OL, \quad OP = OT, \quad OQ = OS = OU, \quad OR = OM = ON$$

も得られる．よって図 2.1 の右図のように三角形や四角形に名前を付けると次のことが分かる.

◎ 三角形 s と三角形 t は合同

◎ 三角形 σ と三角形 τ は合同

◎ 三角形 1 と三角形 2 と三角形 3 は合同

◎ 三角形 i と三角形 ii と三角形 iii は合同

◎ 三角形 s と三角形 σ は相似

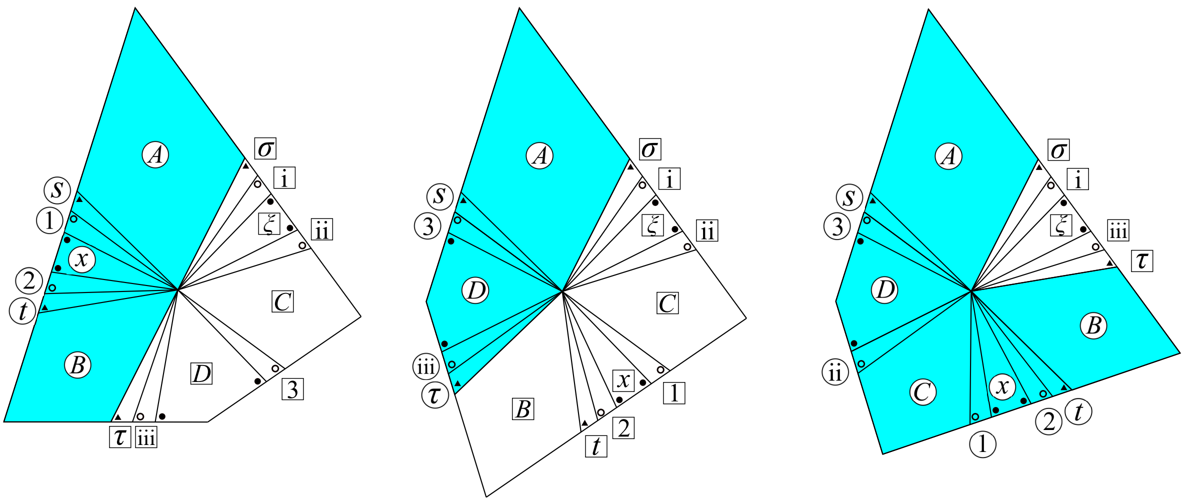
◎ 三角形 1 と三角形 i は相似

◎ 三角形 x と三角形 ξ は相似な二等辺三角形

ここからは切り貼りを行う．1 回目の切り貼りは線分 EF を切り取り線として頂点 C と D を入れ替える切り貼りを行う．このとき, 四角形 $ABDC$ が得られる.

四角形 $ABDC$ では $2\circ + \angle B + \angle D = 2\pi$ となるため, 1, x, 2, t, B, τ, iii, D, 3 を合わせた図形が四角形になる．s と 1, C と 3 を分ける線分で切り貼りを施し, 四角形 $ADBC$ が得られる.

四角形 $ADBC$ は $2\bullet + \angle A + \angle D = 2\pi$ となり, iii, τ, B, t, 2, x, 1, C, ii を合わせた図形が四角形になる. D と iii, ξ と ii を分ける線分で切り貼りを施し, 四角形 $ADCB$ が得られる.

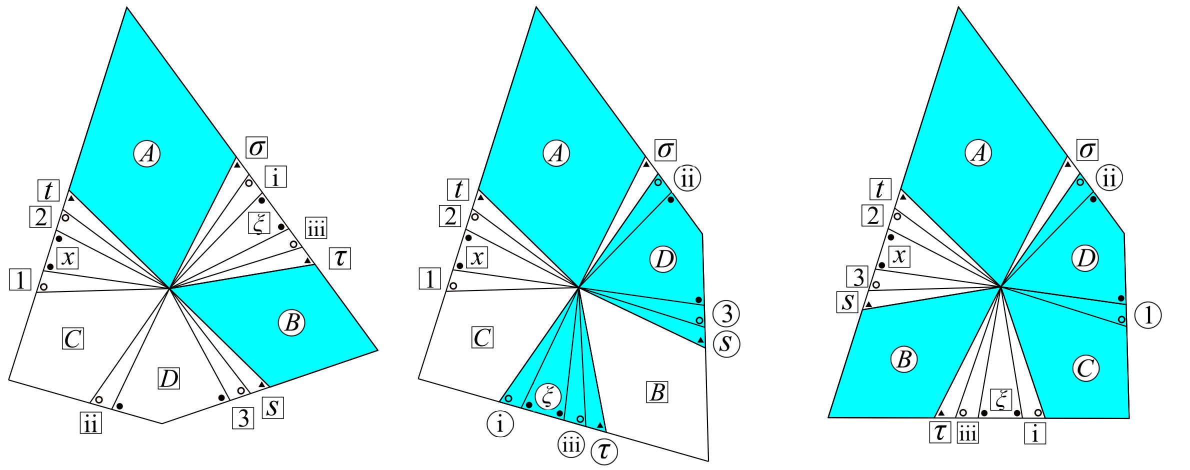


(1) 四角形 $ABDC$　　　(2) 四角形 $ADBC$　　　(3) 四角形 $ADCB$

四角形 $ADCB$ は, s, 3, D, ii, C, 1, x, 2, t を合わせた図形が四角形となり, A と s, B と t を分ける線分で切り貼りを施すことで, 四角形 $ACDB$ が得られる.

四角形 $ACDB$ では ii, D, 3, s, B, τ, iii, ξ, i を合わせた図形が四角形となり, C と ii, σ と i を分ける線分で切り貼りを施すと, 四角形 $ACBD$ が得られる.

四角形 $ACBD$ は, 1, C, i, ξ, iii, τ, B, s, 3 を合わせた図形が四角形となり, x と 1, D と 3 を分ける線分で切り貼りを施すことで, 四角形 $ABCD^{(2)}$ が得られる.



(4) 四角形 $ACDB$　　　(5) 四角形 $ACBD$　　　(6) 四角形 $ABCD^{(2)}$

次の切り貼りは 1 回目の切り貼りと同じものであるので, 裏表の区別をしなければ 6 種類の四角形が図 2.2 のように循環する.

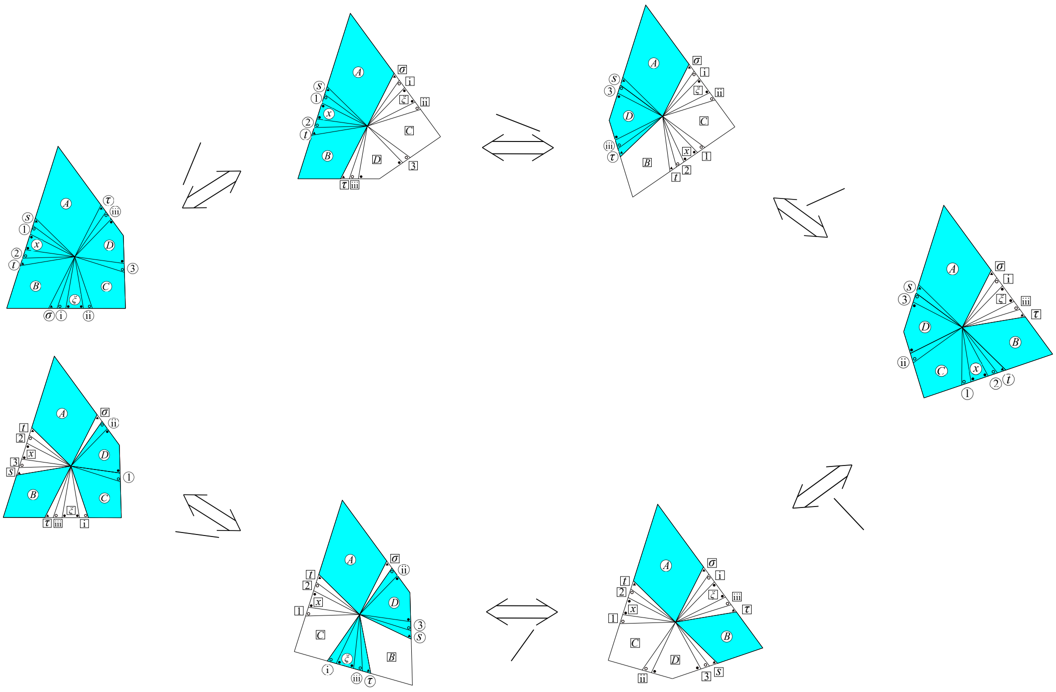
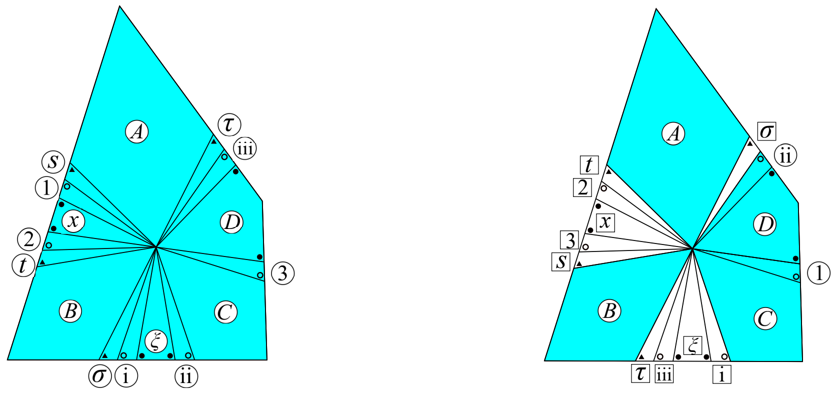


図 2.2

四角形 $ABCD$ と四角形 $ABCD^{(2)}$ を比較すると,

◎ s と t が裏返りながら入れ替わっている.
◎ σ と τ が裏返りながら入れ替わっている.
◎ 1 は 3, 2 は 1, 3 は 2 の位置に移動し, 2 と 3 が裏返っている.
◎ i は ii, ii は iii, iii は i の位置に移動し, i と iii が裏返っている.
◎ x と ξ は場所は変わっていないが, 裏返っている.

よって, s や t, σ や τ は合計 2 周 (12 回), 1, 2, 3 と i, ii, iii, iii は合計 3 周 (18 回), x と ξ は合計 2 周 (12 回) の切り貼りで元の位置に戻り, 表にも戻る. すなわち, 裏表の区別をすると四角形 $ABCD$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数である 6 周 (36 回) の切り貼りで初めて全ての面が表に戻る.



四角形 $ABCD$　　　　四角形 $ABCD^{(2)}$

2.2　パターン 1-(ii)

パターン 1-(ii) は $\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$ となる四角形に切り貼りを施す．分け方をパターン 1-(i) と比べると，三角形 s, t, σ, τ や 1, 2, 3, i, ii, iii の関係性はパターン 1-(i) と同様であるが，y と η がパターン 1-(i) には無かった二等辺三角形である．このとき，三角形 y は三角形 x と合同，三角形 η は三角形 ξ と合同であり，三角形 x と三角形 ξ は相似である．パターン 1-(ii) も切り貼りを繰り返し施すと，裏表の区別をしなければ 6 種類の四角形が図 2.3 のように循環する．

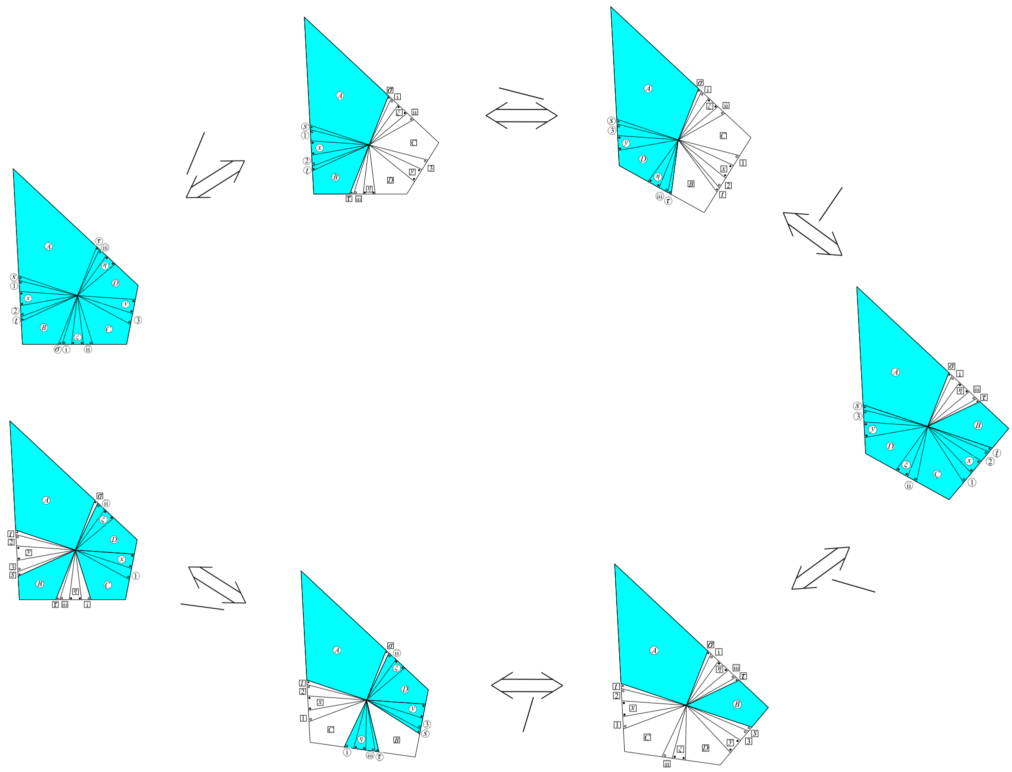


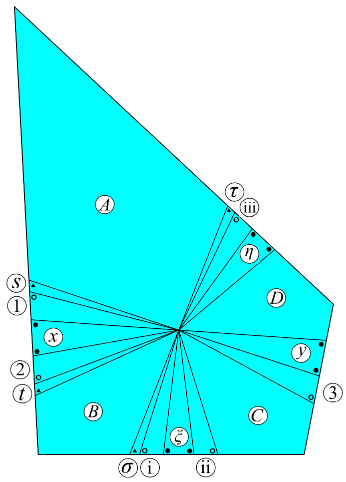
図 2.3

四角形 $ABCD$ と四角形 $ABCD^{(2)}$ を比較すると，

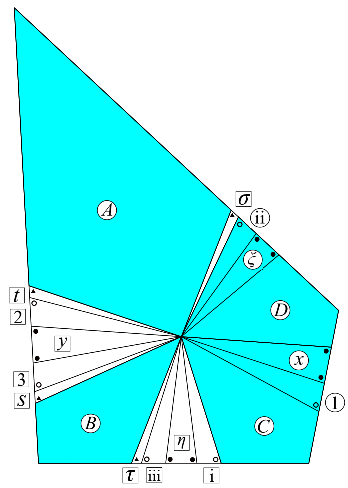
◎ s と t が裏返りながら入れ替わっている．
◎ σ と τ が裏返りながら入れ替わっている．
◎ 1 は 3, 2 は 1, 3 は 2 の位置に移動し，2 と 3 が裏返っている．
◎ i は ii, ii は iii, iii は i の位置に移動し，i と iii が裏返っている．
◎ x と y が入れ替わり，y だけが裏返っている．
◎ ξ と η が入れ替わり，η だけが裏返っている．

よって，s や t, σ や τ は合計 2 周 (12 回)，1, 2, 3 と i, ii, iii, iii は合計 3 周 (18 回)，x や y, ξ や η は合計 4 周 (24 回) の切り貼りで元の位置に戻り，表にも戻る．パターン 1-(i) と比較すると，y と η が現れたために二等辺

三角形を表に戻すまでに必要な回数が増えている．裏表の区別をするとき, 四角形 $ABCD$ は 12 周 (72 回) の切り貼りで初めて全ての面が表に戻る．



四角形 $ABCD$



四角形 $ABCD^{(2)}$

3　主結果と今後の展望

この報告書ではパターン 1-(i) と 1-(ii) の四角形に切り貼りを施し, どちらも裏表の区別をつけなければ 6 回の切り貼りで循環した．裏表の区別を考える場合, パターン 1-(i) は 6 周 (36 回), パターン 1-(ii) は 12 周 (72 回) の切り貼りで全ての面が表に戻った．記載出来なかった残りの 10 パターンについてはパターン 1-(i) またはパターン 1-(ii) のどちらかが退化した切り貼りとなり, 裏表の区別をつけなければ 6 回の切り貼りで循環し, 裏表の区別をつける場合はそれぞれのパターンごとに全ての面が表に戻るまでの切り貼りの回数が異なるという結果が得られた．

今後の展望としては, 前提 1 や前提 2 を満たすための条件については分かっておらず, 前提 2 を満たさない四角形は切り貼り自体は可能であるため, 前提 2 を満たす四角形と同様に 6 回の切り貼りで循環するのかを調べる必要がある．そして, この切り貼りを五角形や六角形など他の多角形に施した場合はどうなるのか, ということは非常に興味深い内容である．また, 私は「面積と外周の長さが等しい 2 つの多角形を考えたとき, 外周の長さを保ったまま切り貼りで移り合うのか」をテーマとして考える中で四角形の切り貼りを見つけ研究を進めた．元々のテーマについても研究を進めたい．

さらに, 12 月 23 日の発表で私は導入として「ボヤイ-ゲルビンの定理」を提示したが, 金沢大学の牛島顕先生からボヤイ-ゲルビンの定理はユークリッド平面の全ての等長写像 (回転, 平行, 対称移動) を用いる equidecomposability(分割合同) であり, 先行研究では使える写像を制限するような研究が色々あるのでそれらと組み合わせると研究が広がるかもしれないと助言をして頂いた．また, 抽象的な定義をすればボヤイ-ゲルビンの定理は球面幾何学や双曲幾何学にも応用できる．先行研究と組み合わせたり定義を抽象化させたりするといった四角形の切り貼りを拡張させる研究にも積極的に取り組んでいきたい．

WEAVING DIAGRAM の構成と同値類について

福田瑞季 (小谷元子氏と SONIA MAHMOUDI 氏との共同研究)

Abstract. Weaving diagram とは 2-周期な 4-正則グラフに対し、各頂点に上下の情報を与えたもののことを言う。Weave を含む編み物の数学的モデル化は既にいくつか研究されており、例えば Grishanov- Meshkov-Omelchenko によって基本領域を用いて作られるトーラス上の絡み目に対してライデマイスターの定理が成り立つことが知られている。本講演では平面充填を用いた weave の組み合わせ的構成法について説明した後、基本領域内の交点の情報を用いて同値関係について調べた結果を紹介する。

1. Introduction

Weave とは 3 次元空間に埋め込まれた二重周期を持つ無限個の曲線の集合であり，各成分は $\mathbb{R}$ と同相であるものをいう．Weave はその周期性から weaving motif と呼ばれる基本領域を与えることができる．Grishanof-Meshkov-Omelchenko や Mortin-Grishanov, 河内氏によって結び目理論を用いた weaving motif の研究が行われており，トーラス上のライデマイスター変形や多変数アレクサンダー多項式，Kauffman bracket を用いた分類 [1, 2, 3] が進められている．特にライデマイスター変形による同値類は実際の編み物の性質を変えることはなく，光沢のないプレーン織りや光沢のあるサテン織り (図 1) といった物性の違いを数学的モデル化を行うことで調べることができる．

Figure 1. 平織り (左) とサテン織り (右)

本論文では geodesic weave と呼ばれる weave を定義し，性質を調べる．

定義 1.1. N を 2 以上の自然数とし，T_i $(1 \leq i \leq N)$ を $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ に埋め込まれた曲線の族とする．平面内のアイソトピーを除いて次を満たすある射影 $p : \{(x, y, z)\} \to \{(x, y, 0)\}$ が存在するとき，各 T_i を colored geodesics, $T = (T_1, \cdots, T_n)$ を geodesic weave と呼ぶ．

(0) $p(T)$ は平面上の二重周期を持つ 4 価正則グラフである．
(1) 全ての i, j に対し $p(t_i^j)$ は平面内の直線である．
(2) 全ての i, j, k に対し $p(t_i^j) \cap p(t_i^k) = \emptyset$ $(t_i^j, t_i^k \in T_i)$.

定義で用いた射影 p を用いて weaving diagram を定義する.

定義 1.2. T を geodesic weave とする. $p(T)$ の各交点に T 由来の上下の情報を与えたものを *weaving diagram* という. また, その基本領域を *weaving motif* と呼ぶ.

注意 1.3. Geodesic weave と weaving diagram は 1:1 対応である.

Weave の同値類を $\mathbb{R}^3$ 上のアンビエントアイソトピーで移り合うものとして定義すると, 以下のことが知られている.

定理 1.4 (Mortin-Grishanov [3]). 2 つの weave T_1 と T_2 が同値であるための必要十分条件はそれぞれの weaving motif がトーラス上のライデマイスター変形 (図 1) とトーラスツイスト, 及びトーラス上のアイソトピーを用いて移り合うことである.

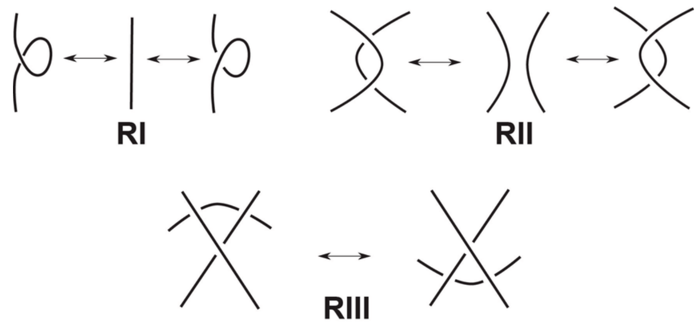


FIGURE 2. トーラス上のライデマイスター変形

2. Crossing matrix

前章で述べたように weaving diagram や weaving motif は geodesic weave と 1:1 対応がある. そこで平面内の 4 価グラフに対して交点に上下の情報を与えたときに復元される geodesic weave が一意に定まるかどうかを考えたい. その準備として以下の 2 つを定義する.

定義 2.1. ある geodesic $\gamma_i^k \in \Gamma_i$ に対し, Γ_j に対し交差列 $C_{i,j}^k$ を次のように定義する.

(i) γ_i^k が Γ_j の全ての成分より上を通るとき, $C_{i,j}^k = (1, 0)$,

(ii) γ_i^k 上で, ある交点 $c = \gamma_i^k \cap \gamma_j^l$ から隣接する p_n 個の交点全てで γ_i^k は Γ_j の成分の上を通り, 次の p_{n+1} 個の交点では γ_i^k は Γ_j の成分の下を通り, 更に次の p_{n+2} 個の交点では γ_i^k は Γ_j の成分の上を通る $\cdots$ とき, $C_{i,j}^k = (\cdots, p_n, -p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots)$.

G_i 上の交点がどの G_j $(1 \leq j \leq N)$ と交わっているかを調べるために次を定義する.

定義 2.2. ある geodesic $\gamma_i \in G_i$ に対し $v_{i,j} = \gamma_i \cap \gamma_j$ とする. 添字 i に対して空でない $v_{i,j}$ を並べたもの $V_{i,j} = (v_{i,j_1}, \cdots, v_{i,j_n})$ を *vertex sequence* という. 更に $V_{i,j}$ 全ての集合を V と書くことにする.

V によって平面内の 4 価正則グラフを構成することができ，交点列の情報を C によって付加すること weaving diagram が構成できる．

> **例 2.3** (カゴメ格子)．$V_1 = (v_{1,2}, v_{1,3})$，$V_1 = (v_{2,3}, v_{2,1})$，$V_1 = (v_{3,1}, v_{3,2})$ とし，$V = (V_1, V_2, V_3)$ とする．また全ての k に対して $C^k_{1,2} = C^k_{2,3} = C^k_{3,1} = (1, -1)$ とする．このとき，V を用いて図 2 の上側のように交点を決定していくことによりカゴメ格子を得る．次に C を用いて図 2 の下側のように交点の情報を付与することで weaving diagram が構成できる．

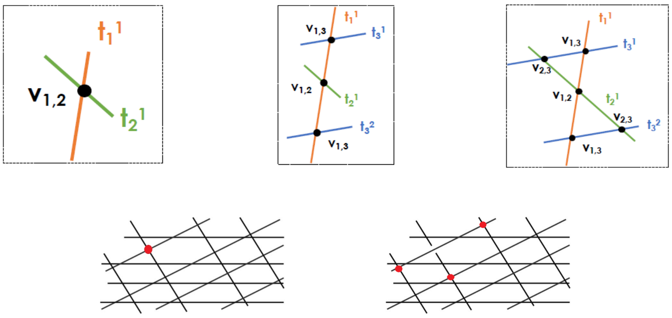
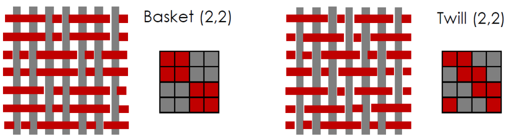


FIGURE 3. Vertex sequence から 4 価正則グラフを作る (上) と交点の情報を与える (下)

定理 2.4. $C = \{C^k_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq N\}$ とする．Weaving diagram は C と V によって構成できる．

注意 2.5. 定理 2.4 では weave は一意に決まるとは限らない．実際，Bascket(2,2) と Twill(2,2) は同じ V, C から構成できるが weave としては異なる．



定義 2.6. D_W を weaving motif とする．次で定まる行列 $M_{ij} = (m_{kl}) \in M(n_i, n_j; \{0, \pm 1\})$ を D_W の (i,j)-*crossing matrix* という．

(i) 各成分 m_{kl} は $t^k_i \in T_i$ と ${}^l_j \in T_j$ の交差の情報で決まる．

(ii) $t^k_i \in T_i$ が ${}^l_j \in T_j$ の上 (もしくは下) を通るなら $m_{kl} = 1$ (もしくは -1).

(iii) $t^k_i \in T_i$ が ${}^l_j \in T_j$ 交差しないなら $m_{kl} = 0$.

注意 2.7. Weaving motif の鏡映に対する crossing matrix は $-{}^tM_{ji}$ である．

定理 2.8. 同じ交差列から定まる geodesic weave T と T' が同値であるための必要十分条件は　それぞれの crossing matrix の集合が次の操作を除き集合として一致することである．

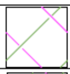
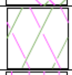
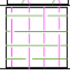
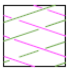
(i) 行または列の一斉巡回置換.
(ii) 行列の一斉シフト.
(iii) 行列の一斉転置.
(iv) 全ての行列の成分の符号の入替.

Proof. Geodesic weave では ライデマイスター変形の RI と RII は起こらない．また，crossing matrix が 2 つの colored geodesics によって定義されるため， RIII を行っても crossing matrix は変化しない．よって motif の取り替え操作とトーラスツイストによる変化を見れば良いが，操作 (i) が weaving motif の平行移動，操作 (ii) がトーラスツイストに対応した操作であるため主張が成り立つ．最後の操作 (iii) と (iv) はそれぞれ weaving motif の回転と鏡映に関するものである． □

References

[1] S.A. Grishanov, V.R. Meshkov, A.V. Omel'Chenko, *Kauffman-type polynomial invariants for doubly periodic structures*, J. Knot Theory Ramifications. **16** (2007) 779–788.
[2] A. Kawauchi, *Complexities of a knitting pattern*, Reactive and Functional Polymers, **131** (2018) 230–236.
[3] H.R. Morton, S.A. Grishanov, *Doubly periodic textile structures*, J. Knot Theory Ramifications. 18 (2009) 1597–1622.

CLASSIFICATION SQUARE WEAVING DIAGRAMS: |T| = 2

Set of Crossing Sequences	Crossing number (Writhe)	Minimal Diagram	Set of Crossing Matrices	Matrices	Number of Crossings by S.C.C.	Number of S.C.C. for Each Set on the Minimal Diagram	Name
{(1,1)}	2 (0)		$\left\{\begin{bmatrix}+1 & -1\\ -1 & +1\end{bmatrix}\right\}$	Rank = 1	2	1 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (1,1)
{(2,1)}	3 (1)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & -1\\ +1 & -1 & +1\\ -1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	3	1 *Ex: (2,1) and (-1,1)*	Twill Square Weaving (1,1)
{(2,2)}	4 (0)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & -1 & -1\\ -1 & +1 & +1 & -1\\ -1 & -1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 2 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (2,2)
{(2,2)}	8 (0)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	4	2 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (2,2)
{(3,1)}	4 (2)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & -1\\ +1 & +1 & -1 & +1\\ +1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (3,1)
{(3,1)}	16 (8)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & -1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & +1 & +1 & -1\\ +1 & -1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4	4	4 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Satin Square Weaving (3,1)
{(3,2)}	5 (1)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (1,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (3,2)
{(3,3)}	6 (0)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	6	1 *Ex: (3,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (3,3)
{(3,3)}	18 (0)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	6	3 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (3,3)

CLASSIFICATION SQUARE WEAVING DIAGRAMS: |T| = 2

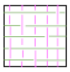
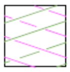
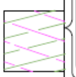
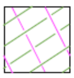
Set of Crossing Sequences	Crossing number (Writhe)	Minimal Diagram	Set of Crossing Matrices	Matrices	Number of Crossings by S.C.C.	Number of S.C.C. for Each Set on the Minimal Diagram	Name
{(4,1)}	5 (3)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (1,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (4,1)
{(4,1)}	25 (15)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5	5	5 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Satin Square Weaving (4,1)
{(4,2)}	6 (2)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	6	1 *Ex: (3,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (4,2)
{(4,3)}	7 (1)		$\left\{\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$	Rank = 7 "Diagonal configuration"	7	1 *Ex: (4,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (4,3)
{(4,4)}	8 (0)		$\left\{\begin{bmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\right\}$	Rank = 4 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (2,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (4,4)
{(4,4)}	32 (0)		$\left\{\begin{bmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1\end{bmatrix}\right\}$	Rank = 1	5	4 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (4,4)

FIGURE 4. 正方格子から作れられる weave の交点数テーブル

曲面の写像類群に含まれる純ブレイド群の最高次数について

片山 拓弥　(学習院大学)*

1. 導入

本稿は，2021 年 12 月に早稲田大学において開催された研究集会「結び目の数理IV」での著者の講演を纏めた記事である．発表された研究内容は大阪大学の久野恵理香氏との共同研究に基づく．

主結果を述べるために記号を用意する．$S_{g,p}^b$ を種数 g，p 点穴あき，b 個の境界成分を持つ連結な向き付け可能曲面とする．本稿では向き付け不可能な曲面は一切扱わず，曲面といえば向き付け可能な曲面を指す．また，慣習により，$b=0$ または $p=0$ のときは $S_{g,p}^b$ から 0 に等しい添字を削除する．ただし g は 0 であっても削除しないこととする．例えば 2 次元球面 $S_{0,0}^0$ は以下 S_0 と表される．$S_{g,p}^b$ の**写像類群** $\mathrm{Mod}(S_{g,p}^b)$ とは，$S_{g,p}^b$ の向き付けを保ち境界を固定する同相写像全体が合成によりなす群を，境界を固定するイソトピーで割って得られる群のことである．$\mathrm{Mod}(S_{0,n}^1)$ を n **次ブレイド群**と呼び B_n と記す．同相写像を穴の置換として見ることによりブレイド群 B_n から n 次対称群への自然な全射を得るが，この全射の核を n **次純ブレイド群**と呼び PB_n と記す．曲面 $S_{g,p}^b$ の Euler 標数を次の等式により定義する:

$$\chi_{g,p}^b := 2-2g-p-b.$$

主結果は以下である．

定理 1.1. $PB_n \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,p})$ なるための必要十分条件は n が以下の不等式を満たすこと．

$$n \leq \begin{cases} 1 & ((g,p)\in\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}) \\ 2 & ((g,p)\in\{(0,4),(1,0),(1,1)\}) \\ -\chi_{g,p} & (g=0,\ p\geq 5) \\ 2-\chi_{g,p} & (g\geq 2,\ p=0) \\ 1-\chi_{g,p} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

定理 1.2. $b\geq 1$ とする．このとき $PB_n \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,p}^b)$ なるための必要十分条件は n が以下の不等式を満たすこと．

$$n \leq \begin{cases} 2-\chi_{g,p}^b & (g\geq 1,\ p+b\leq 2) \\ 1-\chi_{g,p}^b & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

では先行研究について簡単に紹介しよう．写像類群の間の既知の単射準同型として，Aramayona–Leininger–Souto [1]，Birman–Hilden [3]，Ivanov-McCarthy [8] などに見ら

キーワード：曲面の写像類群，埋め込み, 純ブレイド群, 直角アルティン群
* 〒170-0031 東京都豊島区目白 1-5-1　学習院大学理学部
e-mail: katayama@math.gakushuin.ac.jp

れるような曲面の分岐または不分岐被覆から誘導される単射準同型と，Paris–Rolfsen [13] に見られるような曲面の包含写像から誘導される単射準同型がある．単射準同型の非存在性に関する大きな成果は Birman–Lubotzky–McCarthy [4], Harer [7]，[8] などに見られる．特に [4] と [7] からは，少数の例外を除き写像類群の同型類は曲面の同相類によって決まるという結果が得られ，[8] は写像類群の自己単射準同型は同型である (co-Hopf 性) という結果を直接述べている．Aramayona–Souto [2] は曲面の被覆と (純) 写像類群の間の単射準同型の存在性について調べた論文と思うことができ，特殊な仮定のもとではあるが被覆の関係にない場合に単射準同型の非存在を示している．そして，Castel [5] はブレイド群から写像類群への単射準同型を特徴づけており，任意の単射準同型は特殊な分岐被覆から誘導される単射準同型の "transvection" であるという成果を得ている．本研究では純ブレイド群というブレイド群の有限指数部分群に注目して単射準同型を考察しているが，その根源は上記の研究に既に見られるものである．例えば，[4] と [7] は初めから有限指数部分群の間で保たれる不変量を計算しており，co-Hopf 性についても Shakeleton [14] が写像類群の有限指数部分群に一般化している．ただし，定理 1.1 と定理 1.2 のように，ソースの写像類群をある程度固定してターゲットの写像類群を勝手にとる，というタイプの結果は [5] のみであり，手法も結果もかなり異なったものとなっている．実際，定理 1.2 の中にはブレイド群全体には拡張できない純ブレイド群の埋め込みが含まれ，[5] は定理 1.2 を示唆しないし，定理 1.2 もまた [5] の主結果を示唆しない．

2. 謝辞

研究集会「結び目の数理 IV」のお世話をしてくださり，また著者に講演の機会をくださった谷山公規先生，安原晃先生，村尾智さん，丹下稜斗さん，木村直記さんに厚くお礼申し上げます．著者は課題番号 20J01431 を通して科研費により支援を受けています．

3. 純ブレイド群の埋め込み

この節では，純ブレイド群から曲面の写像類群への単射準同型の構成方法を解説する．まず，曲面の包含写像から得られる写像類群の間の準同型について述べる．この種の準同型は単射になることもならないこともあるが，それ自身が単射にならない場合でも別の単射準同型を構成するのに使われるので重要である．連結な向き付け可能曲面の包含写像 $i\colon S \to F$ を考える．本稿では i を S の**拡張**と呼ぶ．拡張 i が**適格**であるとは $i(S)$ が F の閉集合であって，$i(\partial S)$ の各成分が ∂F のどの成分とも並行にならないときをいう．適格な拡張は写像類群の間の自然な準同型を誘導する．この誘導準同型の核は以下のようによく調べられている．

命題 3.1 ([13])**.** 拡張 $i\colon S \to F$ が適格であるとする．もし $F \setminus \mathrm{Int}(i(S))$ がアニュラスと 1 点穴あき円盤の非交和ならば，誘導準同型 $\mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(F)$ の核は自由アーベル群であって，その自由生成系は

$$\mathcal{A} = \{[T_{c_1}][T_{c_2}]^{-1} \mid c_1, c_2 \text{は外部のアニュラスの境界成分}\}$$

と

$$\{[T_c] \mid c \text{は外部の１点穴あき円盤の境界成分}\}$$

の和である．ここで，T_c は曲線 c についての Dehn ツイスト．

適格な拡張 i が**円環的**であるとは $F \setminus \mathrm{Int}(i(S))$ の各連結成分がアニュラスであるときをいう．また，適格な拡張 i が**双曲的**であるとは $F \setminus \mathrm{Int}(i(S))$ の各連結成分が負の Euler 標数をもつときをいう．

命題 3.2 ([13]). 拡張 $i\colon S \to F$ が双曲的であるとする．このとき誘導準同型 $\mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(F)$ は単射である．

自然数 n, m が $n \leq m$ を満たすとき，双曲的拡張 $S^1_{0,n} \to S^1_{0,m}$ が存在する．従って次が成り立つ．

系 3.3. もし $n \leq m$ ならば，$B_n \hookrightarrow B_m$ であり $PB_n \hookrightarrow PB_m$.

次に，球面の分岐被覆により誘導されるブレイド群の単射準同型を復習しよう．$S^2_{g-1,0}$ の超楕円的対合により誘導される二重分岐被覆 $S^2_{g-1,0} \to S^1_{0,2g}$ を考える．底曲面の写像類群である B_{2g} は，Birman–Hilden 理論により $\mathrm{Mod}(S^2_{g-1})$ のファイバーを保つ写像類全体がなす部分群に同型である．いま，S^2_{g-1} と $S^{b+2}_{0,p}$ を境界に沿って貼り合わせることで円環的または双曲的な拡張 $S^2_{g-1} \to S^b_{g,p}$ を得る．すると誘導準同型 $\mathrm{Mod}(S^2_{g-1}) \to \mathrm{Mod}(S^b_{g,p})$ を部分群 B_{2g} に制限しても単射になることが命題 3.1 と命題 3.2 により分かる．すなわち B_{2g} は $\mathrm{Mod}(S^b_{g,p})$ に埋め込まれる．また，二重分岐被覆 $S^1_g \to S^1_{0,2g+1}$ からは単射準同型 $B_{2g+1} \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S^1_g)$ を得る．もし $b + p \geq 2$ ならば拡張 $S^1_g \to S^b_{g,p}$ は双曲的なので単射準同型 $B_{2g+1} \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S^b_{g,p})$ を得る．Birman–Hilden 理論についてのより詳しい説明は原論文 [3] や最近の進展を纏めた記事 [12] にある．

定理 1.2 の証明では以下の埋め込みも使っている．これは一番目の二重分岐被覆の例と命題 3.1 を組み合わせることで得られる．

命題 3.4. $B_{2g+2} \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S^1_{g,1})$.

主結果を得るためにはもう一つ別の種類の単射準同型が必要である．

定義 3.5. S を穴あき曲面，F を曲面とする．$\overline{S}$ を S の無限遠に境界として円周を加えて得られるコンパクトな曲面とする ($S \cong S^b_{g,p}$ ならば $\overline{S} \cong S^{b+p}_g$)．拡張 $i\colon S \to F$ が**擬円環的**であるとは，i が $\overline{S}$ に幾つかのアニュラスと 1 点穴あき円盤を以下のように貼り合わせて得られるときをいう：アニュラス A (resp. 1 点穴あき円盤 D) の 1 つの境界成分は $\overline{S} - S$ の連結成分と貼り合い，A のもう片方の境界成分は $\partial\overline{S}$ の成分と貼り合うかまたは何とも貼り合わない．定義から直ちに分かるように，$S \subset F$ は適格でない．しかしながら $\overline{S} \subset F$ は適格である．

曲面 S の**純写像類群** $\mathrm{PMod}(S)$ は，ブレイド群から純ブレイド群を定義した方法と同様にして定義される．球面の純写像類群については次の補題が成立する．これは，定義 3.5 中の記法で言えば，$\mathrm{PMod}(S)$ が $\mathrm{PMod}(\overline{S})$ の直積分解の因子になっていると読むこともできる．

補題 3.6 ([6]). $\mathrm{PMod}(S^b_{0,p}) \times \mathbb{Z}^b \cong \mathrm{PMod}(S^{p+b}_0)$.

そこで命題 3.1 を使うと次を得る．

命題 3.7. $S \to F$ を擬円環的拡張とする．もし S が球面ならば，$\mathrm{PMod}(S)$ は $\mathrm{PMod}(F)$ に埋め込まれる．

擬円環的拡張は非常に多くの場合において最高次の純ブレイド群を見つけるのに役に立つ．実際，定理 1.1 と定理 1.2 に現れる上限 $1 - \chi^b_{g,p}$ は擬円環的拡張によって実現

される．実際の絵を見たい方にはアップロードされた講演スライドを読んでいただきたい．

4. 写像類群に含まれる直角アルティン群

この節では，特殊な直角アルティン群の曲面の写像類群への埋め込みに関する著者らの結果を紹介する．有限単純グラフ Γ 上の直角アルティン群 $A(\Gamma)$ とは次の群表示によって定義される群のことである：

$$A(\Gamma) := \langle V(\Gamma) \mid v_i v_j = v_j v_i \text{ if } \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma)\rangle.$$

ここで $V(\Gamma)$ は Γ の頂点集合，$E(\Gamma)$ は Γ の辺集合である．直角アルティン群は，曲面の写像類群の部分群として以下のように自然に現れる．

定理 4.1 (Koberda の埋め込み定理 [11])**.** S を Euler 標数が負の曲面とし Γ を有限グラフとする．もし $\Gamma \leq \mathcal{C}(S)$ ならば，$A(\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S)$ である．

ここで $\mathcal{C}(S)$ は Harvey による S の曲線複体の 1-骨格である．Koberda の埋め込み定理において主張されている直角アルティン群の埋め込みは，$\Gamma \leq \mathcal{C}(S)$ が与える曲線に沿った Dehn ツイストの十分大きな冪を取ることによって実現される．

C_m^c を m 頂点の巡回グラフの補グラフとする．Koberda の埋め込み定理と直角アルティン群の埋め込みの標準形の理論 ([10]) を駆使することにより，以下が得られる．

定理 4.2. $A(C_m^c)$ が $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるための必要十分条件は m が以下の不等式を満たすこと．

$$m \leq \begin{cases} 0 & ((g,p) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}) \\ 3 & ((g,p) \in \{(0,4),(1,0),(1,1)\}) \\ 5 & ((g,p) = (1,2),(0,5)) \\ 2g+2 & (g \geq 2,\ p = 0) \\ 2g+p+1 & (g \geq 2,\ 1 \leq p \leq 2) \\ 2g+p & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

定理 4.3. $A(C_m^c) \times \mathbb{Z}$ が $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるための必要十分条件は m が以下の不等式を満たすこと．

$$m \leq \begin{cases} 0 & (g,p) \in \{(0,4),(1,1)\} \\ 3 & (g,p) \in \{(0,5),(1,2)\} \\ p-1 & (g = 0,\ p \geq 6) \\ p+2 & (g = 1,\ p \geq 3) \\ 2g+1 & (g \geq 2,\ p = 0) \\ 2g+p & (g \geq 2,\ p \geq 1). \end{cases}$$

純ブレイド群への埋め込みについては以下が成り立つ．

定理 4.4 ([9])**.** Suppose $n \geq 3$. $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow PB_n$.

定理 1.1 と定理 1.2 は以上の結果を組み合わせて証明される．もう少し詳しく述べると，純ブレイド群を写像類群へ埋め込むパートは 3 節の結果を組み合わせることで容易に達成される．最高次の評価には上の形の直角アルティン群を使う．実際，n が定理で与えられた上限よりも大きいとき，自由アーベル群または上の形の直角アルティン群で，PB_n には含まれるが $\mathrm{Mod}(S^b_{g,p})$ には含まれないものが存在する．また，定理 4.2 と定理 4.3 は境界なし曲面に関する結果であるが，境界付き曲面の場合にも写像類群のキャップ準同型を使って同種の定理が得られることに注意しておく．

参考文献

[1] J. Aramayona, C. Leiniger and J. Souto, *Injections of mapping class groups*, Geom. Topol. **13** (2009), no. 5, 2523–2541.

[2] J. Aramayona and J. Souto, *Homomorphisms between mapping class groups*, Geom. Topol. **16** (2012), no. 4, 2285–2341.

[3] J. Birman and H. Hilden, *On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), no. 3, 424–439.

[4] J. Birman, A. Lubotzky and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.

[5] F. Castel, *Geometric representations of the braid groups*, Asterisque, No. 378 (2016), vi+175 pp. ISBN: 978-2-85629-835-0.

[6] M. Clay, C. Leininger and D. Margalit, *Abstract commensurators of right-angled Artin groups and mapping class groups*, Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 3, 461–467.

[7] J. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), 157–176.

[8] N. Ivanov and J. McCarthy, *On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups. I*, Invent. Math. **135** (1999), 425–486.

[9] T. Katayama and E. Kuno, *The RAAGs on the complement graphs of path graphs in mapping class groups*, preprint, available at arXiv: 1804.03470v2.

[10] S. Kim and T. Koberda, *An obstruction to embedding right-angled Artin groups in mapping class groups*, Int. Math. Res. Not. **2014** (2014), no. 14, 3912–3918.

[11] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1541–1590.

[12] D. Margalit and R. Winarski, *The Birman–Hilden theory*, Celebratio Mathematica (2017) and Bulletin of the London Mathematical Society, **53** (2021), no. 3, 643–659.

[13] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. Reine Angew. Math. **521** (2000), 47–83.

[14] K. Shackleton, *Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups*, Pac. J. Math. **230** (2007), no. 2, 217–232.

Twisted Milnor pairings of Casson-Gordon type and non-slice knots

柳田幸輝

概要

これは [Yan21] の概要であり、2021 年 12 月 23 日〜26 日に行われた研究集会「結び目の数理 IV」の報告書である。

1 導入

S^3 内の結び目 K が（位相的）*slice* であるとは、四次元球体 B^4 内に局所平坦に埋め込まれた円板 D で空間対 (B^4, D) の境界が (S^3, K) に一致しているものが存在することを言う。slice な結び目は algebraically slice となるが、その逆が成り立たないことを Casson-Gordon が示した [CG86]。それと同時に、Casson-Gordon により新しく定義された τ-不変量は、より強いスライス性の障害となることが予想される。しかし、その定義に四次元多様体の交叉形式を含んでいるため、計算は容易ではない。対して、Milnor pairing の捻じれコホモロジーへの一般化である twisted Milnor pairing より、τ-不変量の符号数が計算可能であることを Kirk-Livingston は示唆している [KL99]。しかしながら、詳細な証明や計算例はなかった。

そこで本研究では、twisted Milnor pairing の非退化性に詳細な証明を与えた。さらに、Casson-Gordon τ-不変量に類似した設定で、twisted Milnor pairing がスライス性の障碍となることを示した。twisted Milnor pairing は計算機を用いることで具体的に導出できる。その応用として次を示した。

Theorem 1.1. 八の字結び目の *(2,1)-cable* 結び目はスライス結び目ではない。

これは河内氏 [Kaw80] によって提起された問題であり、長い間解けていなかった。

本稿は以下で構成されている。2 節では、twisted Milnor pairing を定義し主定理を述べる。3 節で、与えられた結び目に主定理を適用するための計算手法について述べる。

2 結び目の twisted Milnor pairing

本節では、結び目より構成される三次元多様体の twisted Milnor pairing の定義を述べる。そして、twisted Milnor pairing がスライス性の障碍であることを見る (Theorem 2.1)。

2.1 記号の準備

twisted Milnor pairing の定義に向けて、結び目より構成される多様体とその上の捩れコホモロジーを定義する。そして、主定理の重要な要素である linking 形式も復習する。

まず、$K \subset S^3$ を向き付けられた結び目とし、素冪 $q \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する。X_K は K に沿って 0-手術を施すことによって得られる多様体とする。X_q は X_K の q 次巡回被覆空間、さらに $\tilde{X}_q$ は被覆写像が誘導する準同型 $H_1(X_q;\mathbb{Z}) \to H_1(X_K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に対応する X_q の無限巡回被覆空間とする。次に $\tilde{X}_q$ 内の曲面 $\tilde{\Sigma}_0$ を次で構成する。K のザイフェルト膜の境界と円板の境界を貼り合わせることによって得られる曲面 Σ_0 は、自然に X_K 内の曲面とみなせる。$\tilde{X}_q$ の構成法より、これは $\tilde{X}_q$ に持ち上がるから、その曲面を $\tilde{\Sigma}_0$ とする。

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}_q & \xrightarrow{\infty\text{-cover}} & X_q & \xrightarrow{q\text{-sheeted cover}} & X_K \\ \cup & & & & \cup \\ \tilde{\Sigma}_0 & & \xrightarrow{\qquad\sim\qquad} & & \Sigma_0. \end{array}$$

次に $\tilde{X}_q$ の捩れコホモロジーを以下で構成しよう。$\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z})$ を $H_1(X_q;\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-捩れ部分加群としよう。これを定義域にもつ準同型 $\chi : \mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/d$ を一つ固定する。ここで、d は q とは互いに素な素冪である。ζ_d を 1 の原始 d 乗根とし、$\mathbb{Q}(\zeta_d)$ は ζ_d を添加した円分体として、次の合成写像を考える。

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X_q) \xrightarrow{\alpha} H_1(X_q;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}(\zeta_d)^\times.$$

ここで $p : \tilde{X}_q \to X_q$ は被覆写像、α はアーベル化写像、ι は $n \mapsto \zeta_d^n$ で定まる準同型である。この $\bar{\chi}$ が誘導する $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ への作用によって、**局所系を係数にもつコホモロジー** $H^*(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}})$ が定まるのであった。これは有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間であることが知られている（[CG86, Lemma 4 and the corollary]、[FP12, Corollary 4.2]）。通常のコホモロジーと同様に、カップ積が以下で定まる。

$$\smile : H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}) \otimes H^1(\tilde{X}_q;\overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}}) \to H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}}).$$

ここで有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間 V に対して $\bar{V}$ は、アーベル群として $(V,+)$ と一致し、スカラー積が $a \cdot v := \bar{a}v\ (a \in \mathbb{Q}(\zeta_d),\ v \in \bar{V})$ で定まる有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間とする。

最後に $\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z})$ 上の linking 形式について復習する。M を有理ホモロジー 3 球面とする。このとき、*linking* **形式**という $H_1(M;\mathbb{Z})$ 上で定められる非特異双線形写像

$$\mathrm{lk} : H_1(M;\mathbb{Z}) \times H_1(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が定まる事が知られている [Sei35]。B_q を K で分岐する q 重分岐被覆空間とする。このとき、q が素冪であることから、B_q は有理ホモロジー球面となる [Gor72]。すなわち、B_q 上で linking 形式が定められる。一方で、q が素冪より、$\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z}) \cong H_1(B_q;\mathbb{Z})$ であるから、自然に $\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z})$ に linking 形式が誘導されることが分かる。

2.2 Twisted Milnor pairing の定義と主定理

前節の記号の下、*twisted Milnor pairing* は次で構成される。

$$\smile_\psi\colon H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}})\otimes H^1(\tilde{X}_q;\overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}\otimes\overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}})$$
$$\xrightarrow{\psi} H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)) \xrightarrow{[\tilde{\Sigma}_0]\frown} H_0(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d))\cong\mathbb{Q}(\zeta_d).$$

ここで、ψ は $\mathbb{C}$ 上の通常のエルミート内積が誘導する射であり、$[\tilde{\Sigma}_0]\in H_2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d))$ は $\tilde{\Sigma}_0\subset\tilde{X}_q$ の表すホモロジー類である。この pairing は非退化である [KL99]。[?] にてその証明を与えた。

この twisted Milnor pairing を、符号数を一般化した Witt 群の元として考える。捩じれカップ積は $\tilde{X}_q\to X_q$ 上の被覆変換 t と同変であった。よって、t-同変エルミート空間 $(H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}),\sqrt{-1}\smile_\psi,t)$ が構成される。この t-同変エルミート空間が表す **$\mathbb{Z}$-同変 *Witt* 群** $\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ の元を $\mu(K,\chi):=[(H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}),\sqrt{-1}\smile_\psi,t)]\in\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ であらわす。$\mathbb{Z}$-同変 Witt 群についての定義や性質は付録 A にて詳しく述べる。

このとき、次が示せた。

Theorem 2.1. スライス結び目 $K\subset S^3$ を任意にとり、$q,d\in\mathbb{Z}$ は互いに素な素冪で、d は奇数とする。このとき、*linking* 形式のメタボライザー $N\subset H_1(B_q;\mathbb{Z})$ であって、$\chi(N)=\{0\}$ をみたす任意の非自明な準同型 $\chi: H_1(B_q;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/d$ にたいして、$\mu(K,\chi)=0\in\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ となるものが存在する。

また、上で定めた twisted Milnor pairing から Casson-Gordon signature が得られることを Kirk-Livingston が示唆していたが、具体的に与えられていなかった。[Yan21] ではそれを明記した。

3 計算手法と実際の応用

Theorem 2.1 によれば、linking 形式と捩じれミルナーペアリングが導出できれば、結び目の非スライス性を判定できる可能性がある。ここでは、各々を具体的に計算するうえで有用な手法について紹介する。

3.1 linking 形式とねじれカップ積の計算

まず、linking 形式と $H_1(B_q;\mathbb{Z})$ の行列表示に関しては、[Nos21] が応用可能である。特にこの行列表示に用いている基底は、基本群からのアーベル化写像を容易に記述できる。そのため、$\bar{\chi}:\pi_1(\tilde{X}_q)\to\mathbb{Q}(\zeta_d)^\times$ を具体的に求めることができる。

さらに、$H_1(B_q;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/d'\oplus\mathbb{Z}/d'$ (d' は素数) である場合に、応用上の利点が二つある。一つが、linking 形式のメタボライザーがすべて求められることである。二つ目に、リンキング形式のメタボライザー N に対して、$\chi(N)=0$ となる非自明な準同型 $\chi: H_1(B_q;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/d'$

は、ある $x \in N$ によって $\chi = d'\mathrm{lk}(x, \bullet)$ と表すことができる点である。そこで実際の計算では、$H_1(B_q; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d' \oplus \mathbb{Z}/d'$ となる場合に絞って計算している。

捩じれミルナーペアリングについては、その定義より、捩れカップ積を計算できればよい。結び目より構成される多様体の捩れカップ積は、群コホモロジーを用いた議論によって計算される手法が確立されている [Tro62][Nos21]。すなわち、結び目の外部補空間の Heegaard 分解から結び目の表示を与え、その群コホモロジーを考えることでカップ積を計算できる。

3.2 八の字結び目の $(2,1)$-cable 結び目への応用

この小節では、K を八の字結び目の $(2,1)$-cable 結び目とおき、Theorem 1.1 の証明概略を述べる。

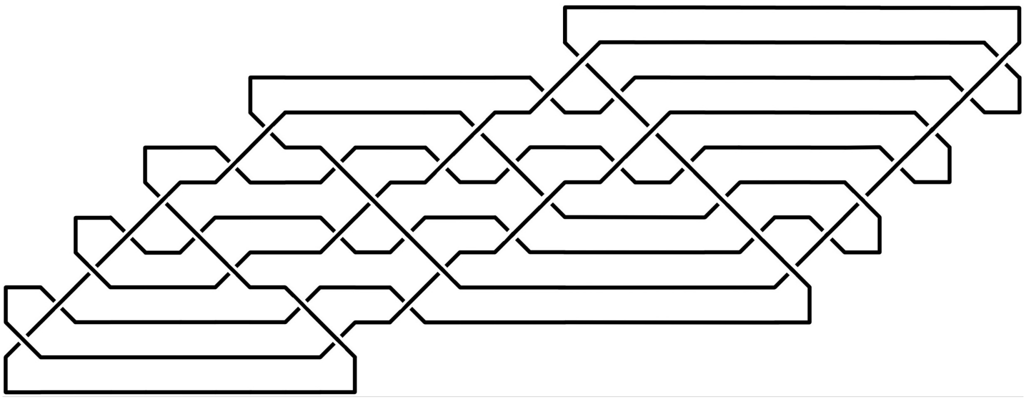


図 1 $K = (4_1)_{(2,1)}$ の結び目図式

Proof of Theorem 1.1. 結び目の外部補空間の Heegaard 分解から結び目群を与えれば、K で分岐する S^3 の 11 重分岐被覆を B_{11} について、$H_1(B_{11}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/199 \oplus \mathbb{Z}/199$ であり、その linking 形式 lk は

$$\mathrm{lk}((1,0),(1,0)) = \frac{23}{199},\ \mathrm{lk}((1,0),(0,1)) = \frac{121}{199},\ \mathrm{lk}((0,1),(0,1)) = \frac{23}{199}$$

によって表示されることがわかる。特に linking 形式のメタボライザーは $(1,137), (1,138) \in \mathbb{Z}/199 \oplus \mathbb{Z}/199$ で生成される二つの部分群 $\langle(1,137)\rangle, \langle(1,138)\rangle$ のどちらかであることがわかる。各メタボライザーで消える準同型 $\chi_1, \chi_2 : H_1(B_{11}; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/199$ をそれぞれ $\chi_1(x) := 199\mathrm{lk}((20,153), x), \chi_2(x) := 199\mathrm{lk}((55,172), x)$ で与える。この二つの指標による捩れ Milnor pairing の符号数を計算機を用い計算すれば、どちらも 2 であることが分かる。よって Theorem 2.1 の対偶よりこの結び目はスライスではない。 □

付録 A エルミート形式のなす $\mathbb{Z}$-同変 Witt 群

この節では $\mathbb{Z}$-同変 Witt 群について述べる。

F を標数が 2 でない体で対合 $\bar{\cdot}^F : F \to F$ を持つとする。さらに F 上の有限次元ベクトル空間を V で表し、$t : V \to V$ は自己同型写像とする。V 上の半双線形形式 $b : V \times V \to F$ が t-**同変エルミート形式**であるとは、任意の $x, y \in V$ に対して $b(x,y) = \overline{b(y,x)}^F$ と $b(tx,ty) = b(x,y)$ がなりたつことを言う。ここでは組 (V,b,t) を t-**同変エルミート空間**とよぶ。また、エルミート空間 (V,b,t) が**非特異**であるとは、b より自然に誘導される写像 $V \to \mathrm{Hom}(V,F)$ が単射であることを意味する。さらに、エルミート空間 (V,b,t) が**メタボリック**であるとは、部分ベクトル空間 $N \subset V$ で、$N = N^\perp$ かつ $tN \subset N$ を満たすものが存在することと定義する。さらに、このような N を**メタボライザー**と呼ぶ。

F 上の t-同変非特異エルミート空間の同型類は、直和によって可換モノイドとなる。この可換モノイドが誘導する *Grothendieck* **群**を $\mathrm{Gr}(F)$ とあらわす。$\mathrm{Gr}(F)$ において、メタボリックなエルミート空間全体は部分群をなす。この部分群による $\mathrm{Gr}(F)$ の剰余群を t-**同変** *Witt* **群**と呼ぼう。ここでは $\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(F)$ と表す。

付録 B　今後の課題

河内氏が提起した問題の拡張として次が考えられている [Miy94][KW18]。

Question. 結び目 K は fiber かつ $-$amphicheiral で、そのアレキサンダー多項式が既約とする。このとき、K の $(2n,1)$-cable 結び目は非スライスか？

我々の手法は条件を満たす他の結び目に対しても適用できるかもしれない。

参考文献

[CG86] A. J. Casson and C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, À la recherche de la topologie perdue, Progr. Math., vol. 62, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986, With an appendix by P. M. Gilmer, pp. 181–199.

[FP12] Stefan Friedl and Mark Powell, *An injectivity theorem for Casson-Gordon type representations relating to the concordance of knots and links*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012), no. 2, 395–409.

[Gor72] C. McA. Gordon, *Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972), 357–370.

[Kaw80] Akio Kawauchi, *The (2,1)-cable of the figure eight knot is rationally slice*, a handwritten manuscript, 1980.

[KL99] Paul Kirk and Charles Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), no. 3, 635–661.

[KW18] Min Hoon Kim and Zhongtao Wu, *On rational sliceness of Miyazaki's fibered, -amphicheiral knots*, Bull. Lond. Math. Soc. **50** (2018), no. 3, 462–476. MR 3829733

[Mil68] John W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., 1968, pp. 115–133.

[Miy94] Katura Miyazaki, *Nonsimple, ribbon fibered knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), no. 1, 1–44.

[Nos21] Takefumi Nosaka, *Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds*, 2021, preprint, arXiv:2107.08851.

[Sch85] Winfried Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Sei35] H. Seifert, *Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 84–101.

[Tro62] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 464–498.

[Yan21] Koki Yanagida, *Twisted milnor pairings of casson-gordon type and non-slice knots*, 2021, preparation.

8交点以下の非ファイバー結び目のHeegaard分解とMilnorペアリング

2021年12月23日
結び目の数理IV

大倉 拓実
東京工業大学理学院修士課程

概　要

結び目の基本群における Lin の表示 (又は Heegaard 分解) に関し，多くの例を与えたい．本研究ではひねり付きプレッツェル結び目という結び目の族を導入し，その族に対して Lin の表示を計算するアルゴリズムを与えた．これにより 8 交点以下の非ファイバー結び目の Lin の表示をすべて計算できる．応用として，8 交点以下の非ファイバー結び目の Milnor ペアリングも全て計算できる．これについても紹介する．

1　スパインの誘導する双対語による Lin 表示の構成

はじめに本稿における基本事項を確認したい. ここでは主に**スパイン**, **双対語**, **Heegaard 分解**などの概念について説明する. 尚, 各種定義は参考文献 [KGM] によった.

1.1　平面的な結び目

K を (S^3 上の) 向きづけられた結び目, D をその正則表示とする．正則表示 D に対し, **平面性**という概念を導入する：

定義 1.1. 正則表示 D が**平面的である**とは, D を平滑化した際にどの Seifert 円周の内側にも他の Seifert 円周が存在しないことをいう.

1.2　スパイン

K の Seifert 曲面を F, その F の種数を g とおく.

定義 1.2. いくつかのサークルを一つの基点 $*$ で同一視したものを**ブーケ**と呼ぶ. F に埋め込まれたブーケで F に変位レトラクトなものを, F の**スパイン**といい, 特に次の条件を満たすとき, **正則なスパイン**という：

　(条件)　F から得られる S^3 への埋め込みが標準的な埋め込みである.

注意 1.3. Seifert アルゴリズムにより得られる Seifert 曲面であれば, 正則なスパインの存在は必ず担保される.

以下, F は正則なスパイン $W = \bigvee_{i=1}^{2g} e_i$ をもち, 各サークル $e_1, e_2, \ldots e_{2g}$ は向きづけられているものとする．F のカラー近傍 $F \times [-1, 1]$ に対し, $W^{\pm} := W \times \{\pm 1\}$, $e_i^{\pm} := e_i \times \{\pm 1\}$ とする. 境界 $\partial(F \times [-1, 1])$ 上には, W^+ の基点 $*^+$ と W^- の基点 $*^-$ とを結ぶアークで, その内点が $W^{\pm}$ と交わらないものが存在する. これを γ とおく.

1.3 双対語と Heegaard 分解

$N(F)$ を F の管状開近傍とすると, $S^3\backslash N(F)$ は種数 $2g$ のハンドル体であり, $\pi_1(S^3\backslash N(F))$ は階数 $2g$ の自由群である．γ を一点に縮めた $\partial(F\times[-1,1])$ 上の点を基点として, $\pi_1(S^3\backslash N(F))$ の生成元 (を表す向きづけられたループ) として $x_1,\dots,x_{2g}$ をとる.

このとき, 各 e_i^+, e_i^- を $x_1,\dots,x_{2g}$ を用いて表した語をそれぞれ y_i, z_i と定義する．ループ e_i の張る円盤を D_i として, これら円盤に適当に表裏を定めておく．ループ x_i とは, $2g$ 個の円盤のうち D_i とのみ一度だけ (横断的に) 交わるループであると特徴づけて良い[1]．**双対語** y_1 とは, $*$ を始点に e_1^+ を辿り, D_j を通過する毎に $x_j^{\pm}$ で記録し, e_1^+ を一巡した時点で, 記録された $x_j^{\pm}$ らを左から順に並べて得られる語のことである．$x_j^{\pm}$ の指数は, e_1^+ が D_j の裏から表へ通過すれば$+$, 表から裏へ通過すれば－と定める．一般に双対語 y_i,z_i は, 同様に曲面上のループの経路を観察することで構成できる．これら y_i,z_i らを**スパイン W の誘導する双対語**と呼ぶ.

K' を, K に平行で $K'\cap W=\emptyset$ を満たす F 内のサークルとする．$\mathfrak{m}:=\gamma\cap(\{*\}\times[-1,1])$ はループで, $\gamma\cap(\bigvee_{i=1}^{2g}D_i)=\emptyset$ より, これは K' のメリディアンと考えて良い．そこで h を $\mathfrak{m}$ の表す $\pi_1(S^3\backslash K)$ の生成元とすると、van Kampen の定理を用いて以下の結果を得ることができる：

補題 1.4 ([Lin, Tro] による．[KGM, Lemma 1.3.1] 等参照)**.** 次の群同型が存在する：

$$\pi_1(S^3\backslash K)\cong\langle x_1,x_2,...,x_{2g},h \mid r_i:=hy_ih^{-1}z_i^{-1}\quad(i=1,2,...,2g)\rangle.$$

このような群表示を, 結び目群の **Heegaard 分解**ないし **Lin の表示**と呼ぶ．サイト [KI] にはファイバー結び目の双対語のリストがあり, いくつかの非ファイバー結び目の双対語は参考文献 [GS] で与えられている．また参考文献 [Oha] では, 3 タングルプレッツェル結び目がファイバー結び目であることの必要十分条件を与えている.

2 ひねり付きプレッツェル結び目の導入と双対語の計算

2.1 ひねり付きプレッツェル結び目の定義

本稿では, プレッツェル結び目を一般化した**ひねり付きプレッツェル結び目**というものを考える.

一般に結び目の図式が以下の図 1 左のようにひねられた部分をもつとき, これを整数 a を用いて図 1 右のように略記することにする．ここで $|a|$ はひねりの交点の個数, a の正負はひねりの交点の正負を表す.

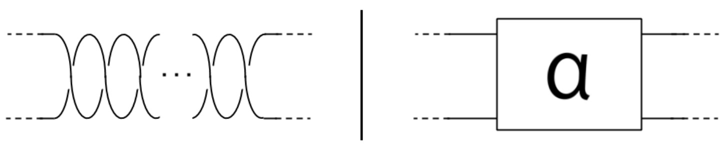


図 1: 図式の略記．左は正の交点からなるひねりである.

このとき, 正の整数 n, $a_i\in\mathbb{Z}(1\leqq i\leqq n)$ に対して, (n タングル) プレッツェル絡み目 $P(a_1,a_2,\dots,a_n)$ とは下図 2 の左側ような図式で表される絡み目のことを云う：

図 2 の左側において, 図式の左側, 右側の部分にさらにひねりを加えることを考える：

図 2 のような図式 D を, 本稿ではその図式を指定する各整数 a_i,b_i,c_i を用いて

$$D=(a_{1_{(b_1,c_1)}}a_{2_{(b_2,c_2)}}\dots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}}a_n).$$

[1]$i\neq j$ のとき, $D_i\cap D_j=\{*\}$, $D_i\cap\gamma=\emptyset$ が成立することに注意する.

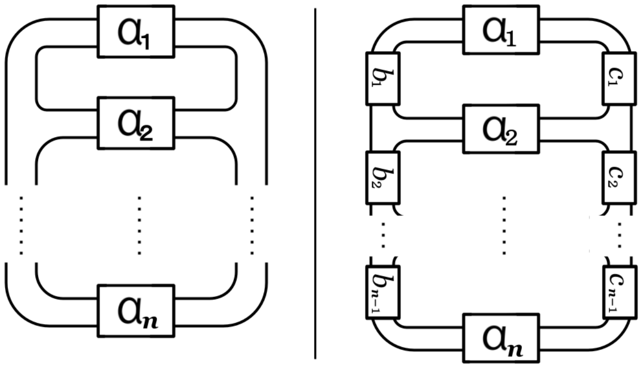


図 2: プレッツェル結び目とひねり付きプレッツェル結び目.

のように表記する.

定義 2.1. 図式 $D = (a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ が表す絡み目の成分数が 1 のとき, これを**ひねり付きプレッツェル結び目**と呼び, $P(D)$ もしくは $P(a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ と表記する.

注意 2.2. 任意の i で $b_i = c_i = 0$ となる場合,

$$P(a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n) = P(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

が成り立つため, 通常のプレッツェル結び目は確かにひねり付きプレッツェル結び目の特別な場合である.

注意 2.3. Reidemeister 移動により,

$$P(a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n) = P((a_1+b_1+c_1)_{(0,0)} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(0,0)}} (b_{n-1}+c_{n-1}+a_n))$$

が常に成立することが容易にわかる. これを受けて $b_1, c_1, b_{n-1}, c_{n-1}$ をすべて 0 と仮定することも可能だが, 本稿では一貫して $P(a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ という表記をとることにする.

2.2 ひねり付きプレッツェル結び目の双対語

定義 2.4. $\mathbb{Q}$ 上のベクトル $V_i := \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し, $\underset{i=1}{\overset{n}{\circ}} V_i := V_1 \circ V_2 \circ \cdots \circ V_n := \begin{pmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}$ を定める.

定理 2.5. 図式 $D = (a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \ldots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ が平面的であると仮定する. $\mathbb{Z}[G]$ を $x_1, \ldots, x_{2g}$ により生成される自由群の群環とし,

$$d_m := \sum_{j=0}^{m} c_j \ , \ c_0 := 0 \ , \ x_0 := 1 \ , \ c_n := 1 \ , \ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

このとき, 結び目 $P(D)$ には *(ある Seifert 曲面の)* 正則スパイン W が存在し, 円板の表裏と各ループの向きを適切に設定することで, W の誘導する双対語を成分とするベクトル $\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ が次の $\mathbb{Z}[F]$ 上の行列の演算に一致するようにできる：

$$\left(\underset{j=0}{\overset{i-1}{\circ}} \left(J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \circ \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(\underset{k=0}{\overset{i-1}{\circ}} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

定理 2.5 の証明. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

3 8 交点以下の非ファイバー結び目の双対語の計算

下図 3 は, 交点数 8 以下の全ての非ファイバー結び目について, Reidemeister 移動により平面的な図式を得て, Seifert アルゴリズムを施し, 各 Seifert 曲面の表と裏をそれぞれ赤色, 青色で塗り分けたものである：

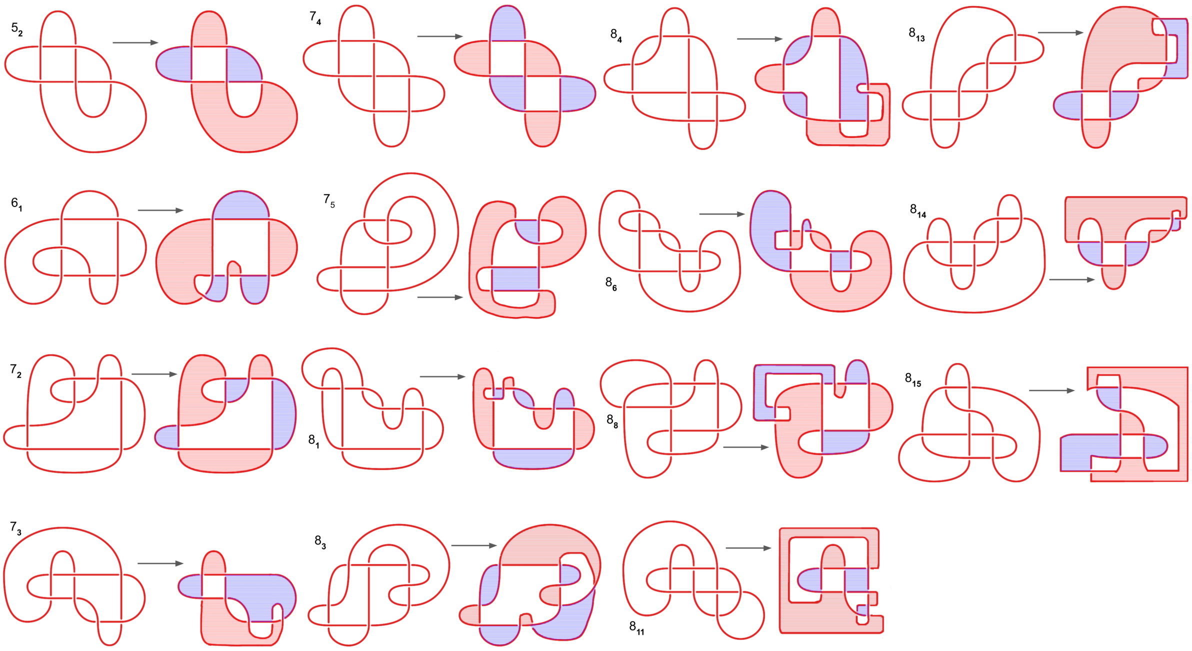


図 3: 8 交点以下の非ファイバー結び目.(図式はサイト [KI] によった)

図 3 の各曲面から, 8 交点以下の非ファイバー結び目はすべて, 平面的な図式によってひねりつきプレッツェル結び目としてみなせることが分かる. 各結び目を定義 2.1 の方法で表記したものを以下にまとめる：

$$
\begin{aligned}
5_2 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
6_1 &= P(-5_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1),\\
7_2 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 5),\\
7_3 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
7_4 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 3),\\
7_5 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,-1)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
8_1 &= P(1_{(0,0)} 1_{(0,0)} - 7),\\
8_3 &= P(1_{(0,0)} 3_{(0,0)} - 5),\\
8_4 &= P(-5_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1),\\
8_6 &= P(1_{(0,0)} 1_{(-1,-3)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1),\\
8_8 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,4)} 1_{(0,0)} 1),\\
8_{11} &= P(-1_{(0,0)} - 3_{(0,0)} - 1_{(0,-2)} 1_{(0,0)} 1),\\
8_{13} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,2)} 1_{(0,0)} 3),\\
8_{14} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-2,0)} - 1_{(-2,0)} 1_{(0,0)} 1),\\
8_{15} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,0)} - 2_{(-1,0)} - 1_{(0,0)} - 1).
\end{aligned}
$$

各ひねり付きプレッツェル結び目を表す整数を定理 2.5 の式に代入することで, 8 交点以下の非ファイバー結び目の双対語をすべて計算できる. *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは [Ohk] に掲載した：

	y_1	z_1	y_2	z_2	y_3	z_3	y_4	z_4
5_2	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2	$x_1^{-1}x_2$	-	-	-	-
6_1	x_1^2	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^{-1}$	x_2^{-1}	-	-	-	-
7_2	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^3	$x_1^{-1}x_2^3$	-	-	-	-
7_3	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$	$x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	x_4	$x_3^{-1}x_4$
7_4	$x_1^2x_2^{-1}$	x_1^2	x_2^2	$x_1^{-1}x_2^2$	-	-	-	-
7_5	$x_1x_2^{-1}$	x_1	x_2^2	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$x_2^{-1}x_3$	$x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_2$	$x_3^{-1}x_4$	$x_2^{-1}x_4x_2$
8_1	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^3$	x_2^3	-	-	-	-
8_3	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^{-1}x_1x_2^2$	$x_2^{-1}x_1x_2^2$	-	-	-	-
8_4	x_1^2	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^{-1}$	$x_2^{-1}x_3$	$x_2x_3^{-1}$	$x_3^{-1}x_4$	$x_3x_4^{-1}$	x_4^{-1}
8_6	x_1^{-1}	$x_1^{-1}x_2$	$x_1x_2^2$	$x_3^{-1}x_2^2$	$x_2^{-2}x_3x_2$	$x_2^{-2}x_3x_4^{-1}x_2^2$	$x_2^{-1}x_3^{-1}x_4x_2$	$x_2^{-2}x_4x_2^2$
8_8	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$	x_3^{-2}	$x_2^{-1}x_4x_3^{-2}$	$x_3^3x_4^{-1}x_3^{-2}$	$x_3^2x_4^{-1}x_3^{-2}$
8_{11}	$x_1x_2^{-1}x_1x_2^{-1}$	$x_1x_2^{-1}x_1$	$x_2x_1^{-1}x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2$	x_3	$x_2^{-1}x_4x_3$	$x_4^{-1}x_3$	$x_3^{-1}x_4^{-1}x_3$
8_{13}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2$	x_3^{-1}	$x_2^{-1}x_4x_3^{-1}$	$x_3^2x_4^{-2}x_3^{-1}$	$x_3x_4^{-2}x_3^{-1}$
8_{14}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2^2$	x_3	$x_2^{-1}x_3x_4$	$x_3x_4^{-1}$	x_4^{-1}
8_{15}	$x_1x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2x_3^{-1}$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$x_3x_2^{-1}x_3x_4^{-1}$	$x_2^{-1}x_3^2$	x_4	$x_3^{-1}x_4$

4　ひねり付きプレッツェル結び目の緯線

$D = (a_{1_{(b_1,c_1)}} a_{2_{(b_2,c_2)}} \dots a_{n-1_{(b_{n-1},c_{n-1})}} a_n)$ を平面的な図式とし, K をひねり付きプレッツェル結び目 $P(D)$ とする. また, F は D に Seifert アルゴリズムを施して得られる種数 $2g$ の Seifert 曲面とし, 定理 2.5 の証明と同様に, F のスパインを図 4 のようにとるものとする:

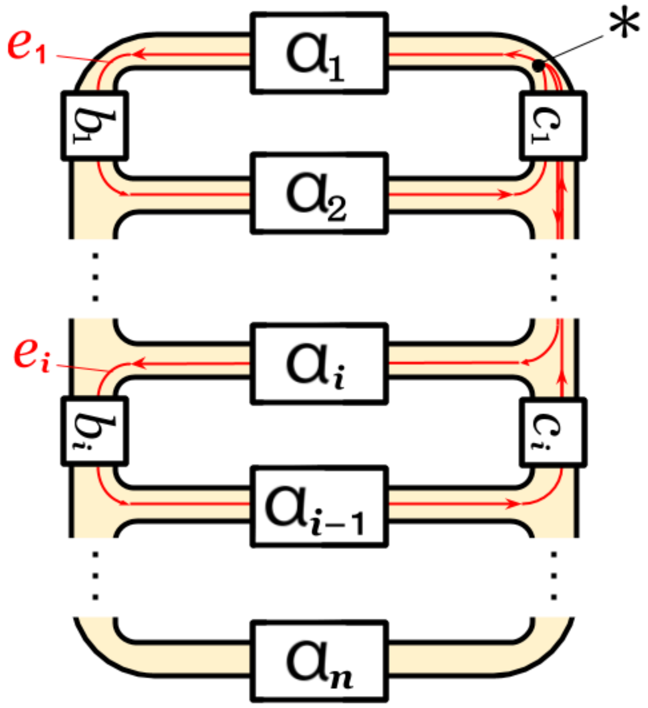


図 4: スパインのとり方

この節では $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の緯線 $\mathfrak{l}_K$ を, K の双対語を用いて表記したい. その為には, 緯線を F のスパインを構成するループ $e_1, e_2, ..., e_{2g}$ によって, $\mathfrak{l}_K = e_{i_1}^{\epsilon_1} e_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}$ (各 ϵ_{i_j} は 1 か -1) のように表すので十分である.

実際 $e_{i_1}^{\epsilon_1}e_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}$, $y_{i_1}^{\epsilon_1}y_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots y_{i_m}^{\epsilon_m}$, $z_{i_1}^{\epsilon_1}z_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots z_{i_m}^{\epsilon_m}$ は定義より同じ基本群の元である.

定理 4.1. $K=P(D)$ の緯線について, 以下が成り立つ：
(1) 全ての a_i が奇数であり, かつ全ての b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1e_3\cdots e_{2g-1}(e_1e_2\cdots e_{2g})^{-1}e_2e_4\cdots e_{2g}.$$

(2) 全ての a_i およびが b_2, c_2 奇数であり, かつ b_2, c_2 を除く全て b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1(e_2e_4\cdots e_{2g})^{-1}e_1^{-1}e_2e_3\cdots e_{2g}(e_3e_5\cdots e_{2g-1})^{-1}.$$

証明. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

例 4.2. 前節の結果を観察することにより, 8 交点以下の非ファイバー結び目のうち, 定理 4.1 のいずれかの仮定を満たさないものは 8_{15} のみであることがわかる. この結び目については個別に緯線を求めた：

$$\mathfrak{l}_{8_{15}} = y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_3y_4^{-1}y_3^{-1}y_4.$$

8 交点以下の非ファイバー結び目はすべて, 各 i について $\mathfrak{l}$ に現れる y_i の指数の合計が 0 となることに注意する.

以上の結果から, 8 交点以下のすべての非ファイバー結び目を含むひねり付きプレッツェル結び目について, 緯線 $\mathfrak{l}_K$ を双対語で表せるようになった.

5 応用例：巡回被覆空間の Milnor ペアリング

本節では応用として巡回被覆空間の Milnor ペアリングを幾つか計算する。Milnor ペアリングは Blanchfield ペアリングないしザイフェルト行列を用い計算できる公式が知られている ([Lit, Theorem A.1] と [Erle, Satz 4.4] 参照) が、本論文ではカップ積を直接計算する別の新しい方法を提唱する。
本論では簡単の為, M を連結で向き付き滑らかな閉 3 次元多様体とし, 全射準同型 $\alpha : \pi_1(M)\to\mathbb{Z}$ を固定する. また $\widetilde{M}$ でそれに付随する巡回被覆空間とする. $t:\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ を被覆変換とする.

5.1 Milnor ペアリングの準備

この時, ミルナーは次の双対定理を示した.

定理 5.1 ([Mil1, §4])**.** $\mathbb{Q}$ を有理数体とする. $\widetilde{M}$ の有理ホモロジー $H_*(\widetilde{M};\mathbb{Q})$ が有限次元とする. この時, $H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ であり, 次のカップ積は非退化である：

$$\smile : H^1(\widetilde{M};\mathbb{F})\times H^1(\widetilde{M};\mathbb{Q})\longrightarrow H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}.$$

さらに等長性 $t^*x\smile t^*y = x\smile y$ を満たす.

この非退化形式は **Milnor ペアリング**や**ミルナー双対**ともいう. この定理の主張は端的で美しいが, その様な交代型式の計算例は今まで皆無であった. もしその交代型式が行列表示できれば, 定量的な情報が得られる. 実際, Milnor[Mil2] は等長的な非退化交代型式の同型類を全て分類し, 或る不変量で特徴づけている.
そこで, 本論では結び目を 0 手術して得られる 3 次元多様体に対して, 計算のアルゴリズムを与え, 例を挙げる. 以下, 結び目 $K\subset S^3$ に対して、M_K を K を 0 手術して得られる 3 次元多様体とする. $H_*(M_K;\mathbb{Z})\cong H_*(S^2\times S^1;\mathbb{Z})$ に注意し, 全射 $\pi_1(M_K)\to\mathbb{Z}$ を一つ固定する. 次の補題に注意しておこう：

補題 5.2. $\widetilde{S^3\setminus K}\to S^3\setminus K$ を無限巡回被覆とする. $H_2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ の生成元は結び目 K の緯線 $\mathfrak{l}_K$ で代表される. また $H_1(\widetilde{S^3\setminus K};\mathbb{Q})$ は $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ に同型である. 特に, $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q})$ は有限次元である.

注意 5.3. Milnor [Mil1] は次の相対版ペアリングも考察し、その非退化性を論じていた：

$$\smile : H^1(\widetilde{S^3\setminus K}, \partial(\widetilde{S^3\setminus K}); \mathbb{Q})^{\otimes 2} \longrightarrow H^2(\widetilde{S^3\setminus K}, \partial(\widetilde{S^3\setminus K}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}. \tag{1}$$

また自然な同型射 $H_1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K, \partial(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q})$ が存在する事に注意すれば、$M = M_K$ の Milnor ペアリングと、(1) は一致する事が、コホモロジー長完全列の考察から確かめられる。

次に基本群 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の記述を与えよう．補題 1.4 の表示から, $\pi_1(S^3\setminus K)$ の緯線 $\mathfrak{l}_K$ を用いて, $\pi_1(M_K)$ の表示は次で得られる．

$$\pi_1(M_K) \cong \langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid \mathfrak{l}_K,\ \ r_i := hy_ih^{-1}z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g)\rangle.$$

次に $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示を得る為に記号を用意する．$k \in \mathbb{Z}$ に対して, $x_i^{(k)}$ を不定元 x_i のコピーとする．$y_i^{(k)}$ を語 y_i 内にある x_i を $x_i^{(k)}$ に置き換える事で得られる語とする．すると, Reidemeister-Schreier 手法によって, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示は次で得られる．

$$\pi_1(\widetilde{M}_K) \cong \langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{2g}^{(k)} \quad (k\in\mathbb{Z}) \mid \mathfrak{l}_K^{(k)},\ \ r_i^{(k)} := y_i^{(k)}(z_i^{(k+1)})^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g, k \in \mathbb{Z})\rangle.$$

ここで注意する事に, 任意の $\mathfrak{l}_K^{(k)}$ は $\mathfrak{l}_K^{(0)}$ に等しい事が, 関係 $r_i^{(k)}$ から解る．よって $\mathfrak{l}_K^{(k)}$ 達は $\mathfrak{l}^{(0)}$ のみとして良い．以下, $\mathfrak{l}_K^{(0)}$ は $\mathfrak{l}_K$ と単に書く．

次に, $\widetilde{M}_K$ の (2 次以下の) 胞体複体を与える． ここで注意する事に, Gabai 等の結果によって M_K が Eilenberg-MacLane 空間である事に気づこう．特に, その巡回被覆 $\widetilde{M}_K$ もそうである．従って, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の群複体は、$\widetilde{M}_K$ のセル複体とみなすことが出来る．であるので, $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の (自明係数) 群複体 $C_*(\pi_1(\widetilde{M}_K);\mathbb{Q})$ から考察してもよい．そこで $i \leq 2g$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ と $\mathbb{Q}\,b_i^{(k)}$ をそれぞれ不定元 $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$ を基底とする $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする．すると二次までの複体は次で書ける：

$$\mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,b_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_2^{\mathfrak{l}_K}\oplus\partial_2} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,a_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Q} \to 0.$$

ここで ∂_1 は零写像で, ∂_2 は $r_i^{(k)}$ のヤコビ行列で書ける事が知られている (例えば [Lin, Tro] を参照)．厳密に書けば, 次で定まる線形写像で与えられる．

$$\partial_2 : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,b_i^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,a_i^{(k)}; \quad b_i^{(k)} \longmapsto \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon\Big(\frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial x_j^{(k)}}\Big) a_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon\Big(\frac{\partial z_i^{(k+1)}}{\partial x_j^{(k+1)}}\Big) a_j^{(k+1)}.$$

また $\partial_2^{\mathfrak{l}_K} : \mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ を零写像とする．∂_2 の $\mathrm{Hom}(\bullet, \mathbb{Q})$ をとったものを ∂_2^* と書くと, 次を得る：

$$H^1(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Ker}(\partial_2^*). \tag{2}$$

また補題 5.2 から $H^2(\widetilde{M}_K;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元は緯線 $\mathbb{Q}\,\mathfrak{l}_K$ で代表される事にも注意しよう．

次に、カップ積を [Tro, §2.4] から復習する．以下, $C_1 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}\,a_i^{(k)}$ を X_1 と書く．準備として, 次の関数を考えよう：

$$\kappa : F \times F \longrightarrow X_1 \otimes X_1; \quad (u, v) \longmapsto \alpha(u) \otimes u\alpha(v),$$

ここで $\alpha(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{2g} \varepsilon(\partial w/\partial x_i^{(k)})a_i^{(k)}$ とする．すると, 簡単に確かめられる事に κ は (正規化された) F の 2-コサイクルである．だが $H^2(F; X_1 \otimes X_1) = 0$ の事もあり, 一意的に $\Upsilon : F \to X_1 \otimes X_1$ で次を満たすように取れる[2]：

$$\Upsilon(uv) = \Upsilon(u) + \Upsilon(v) + \kappa(u, v), \quad \Upsilon(1) = 0 \quad \Upsilon(x_i^{(k)}) = 0, \qquad {}^\forall u, v \in F, i \in I.$$

すると次が知られている：

[2] この一意性は代数的にすぐ解る．なお Υ は u の語の長さの帰納法で構成される；[Tro, Lemma 2.4] を参照.

命題 5.4 ([Tro, §2.4]). 任意の *1*-コサイクル $f : X_1 \to \mathbb{Q}$ と $f' : X_1 \to \mathbb{Q}$ に対し, カップ積 $f \smile f'$ と 2 サイクル $\mathfrak{l}_K$ のペアリングは $(f \otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K))$ に等しい. つまり

$$\langle f \star f', \mathfrak{l}_K \rangle = (f \otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K)) \in \mathbb{Q}\,.$$

(2) によれば, 1-コサイクルの集合はコホモロジー $H^1(\pi_1(\widetilde{M}_K); \mathbb{Q}) = H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ と同一視される. 以上をまとめると次の定理を得る：

定理 5.5. 結び目 $K \subset S^3$ に対して、M_K を K を 0 手術して得られる *3* 次元多様体とする.
この時, $H^1(X_1; \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(\partial_2^*)$ はコホモロジー $H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ に同型であり, 双線形写像

$$H^1(X_1; \mathbb{Q}) \times H^1(X_1; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}; \quad (f, f') \mapsto (f \otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K))$$

は *Milnor* ペアリングと一致する.

以上より, $\mathrm{Ker}(\partial_2^*)$ と $\Upsilon(\mathfrak{l}_K)$ が計算出来れば、Milnor ペアリングは計算できることになった.
最後に、結び目の符号数との関連を述べる. 結び目 K の緯線を $\mathfrak{l}_K$ に対し, $\omega(K) := (f \otimes f')(\Upsilon(\mathfrak{l}_K)) \in X_1 \otimes X_1$ とおく. u_i $(i = 1, 2, \ldots, 2g)$ を $t^*(u_i) = u_{i+1}$ $(i \leq 2g - 1)$ を満たすような F の元として, $\omega(K)$ の $\alpha(u_i) \otimes \alpha(u_j)$ の係数を (i, j) 成分とする $\mathbb{Q}$ 上の $2g \times 2g$ 行列を, 以下 $\Omega(K)$ と表す. Milnor[Mil1] は次の定理を示唆した (証明は [Ke2] を参照)

定理 5.6 ([Mil1, Ke2]). 被覆変換が誘導する同型射 $t^* : H^1(M_K; \mathbb{Q}) \to H^1(M_K; \mathbb{Q})$ の $(2g \times 2g)$-行列表示を T と置く。
この時、$\Omega T^\tau - T\Omega$ の符号数 S が元の結び目の符号数に一致する.

5.2 双対語からの Milnor ペアリングの計算

前節の最後に述べた記法を用いて、Lin 表示から Milnor ペアリングの計算法を与えるアルゴリズムを示す：

定理 5.7. 結び目群 $\pi_1(S^3 \backslash K)$ の *Lin* の表示が $\langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid r_i := h y_i h^{-1} z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g) \rangle$ で与えられ, K の *Alexander* 多項式の次数が $2g$ に一致すると仮定する.
結び目 K の緯線が $\mathfrak{l}_K = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ (すべての j について$\epsilon_j = \pm 1, 1 \leq i_j \leq 2g$) で表され, 各 i について $\mathfrak{l}_K$ に現れる x_i の指数の合計が 0 となるとき, *Milnor* ペアリングは $\Omega(K)$ で与えられ, $\Omega(K)$ は以下の式で計算される：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \epsilon_k}{2} E_{i_k, i_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k \left(\sum_{m=1}^{2g} \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ \wedge i_l = m}} \epsilon_l E_{i_k, m} \right) \right).$$

ただし $E_{i,j}$ は (i, j) 成分のみ 1, その他の成分はすべて 0 となるような $2g \times 2g$ 行列とする.

定理 5.7 **の証明**. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

5.3 8 交点以下の非ファイバー結び目の Milnor ペアリングの計算

各ひねり付きプレッツェル結び目を表す整数から, 定理 2.5 を用いて双対語ひいては緯線を計算し, 定理 5.7 に代入するという手順で, 8 交点以下の非ファイバー結び目の Ω をすべて計算できる. *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは [Ohk] に掲載した：

K	Ω	$\det\Omega$
5_2	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
6_1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	4
7_2	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	9
7_3	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
7_4	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16
7_5	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	9
8_3	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	16
8_4	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_6	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_8	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	9

参考文献

[Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.

[Erle] Erle, Dieter. *Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten.* (German) J. Reine Angew. Math. 236 (1969), 174–218. MR0248856

[Fox] R. H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring*, Ann. of Math. **57** (1953), no. 2, 547–560

[GS] H. Goda, T. Sakasai, *Factorization formulas and computations of higher-order Alexander invariants for homologically fibered knots,* Journal of Knot Theory and Its Ramifications 20 (2011), 1355–1380.

[KGM] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之 ねじれ *Alexander* 不変量, (2006), 6, 100–102.

[Ke1] C. Kearton, *Blanchfield duality and simple knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 141–160.

[Ke2] C. Kearton, *Signatures of knots and the free differential calculus*, Quart J. Math.

[KI] *KnotInfo: Table of Knots* (最終閲覧：2020) https://knotinfo.math.indiana.edu/

[Lic] W.B. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1974

[Lin] X.S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380

[Lit] R. A. Litherland, *Cobordism of satellite knots. Four-manifold theory* (Durham, N.H., 1982), 327–362, Contemp. Math., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. MR0780587

[Mil1] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.

[Mil2] J. W. Milnor, *On isometries of inner product spaces*, Invent. Math. 8 (1969), 83–97.

[N1] T. Nosaka, *Twisted Alexander invariants of knot group representations*, to appear Tokyo Journal of Mathematics.

[N2] T. Nosaka, *Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds*, preprint

[Oha] 大橋 明行, プレッツェル結び目のファイバー性とねじれアレキサンダー不変量について, (2013), 35–37.

[Ohk] Takumi Ohkura, *Heegaard presentations and Milnor pairings of some knots*, preprint

[Tro] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. **76** (1962), 464–498

Ribbon knots with different symmetric union presentations

吉川修平 (大阪市立大学大学院)*

概要

対称和 (symmetric union) で表された結び目図式における同値関係である対称同値 (symmetric equivalence) の概念と共に，その不変量 refined Jones polynomial が Eisermann と Lamm により導入された．refined Jones polynomial が一致する対称同値でない例を構成した.

1　導入

この章では symmetric union 図式と同値関係 symmetric equivalent を紹介した後に, その不変量となる refined Jones 多項式の定義と性質について紹介する.

定義 1 (symmetric union 図式 [1])**.** D を向き付けられていない絡み目とし D を平面上の軸に対称的に写したものを D^* とする.D, D^* を対称的に配置し, 対称軸上にある 0-タングル T_i $(i = 0, \ldots, k)$ を n_i-タングル $(n_0 = \infty, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ に置き換えた図式を D の ***symmetric union* 図式**と呼び, $D \cup D^*(n_1, \ldots, n_k)$ と表す.

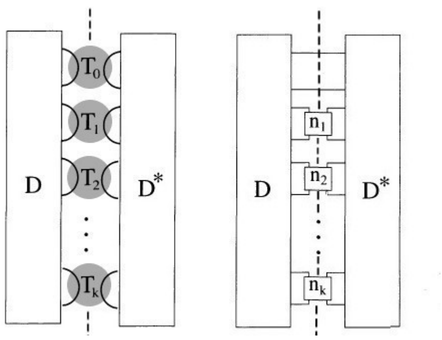


Figure 1: symmetric union 図式

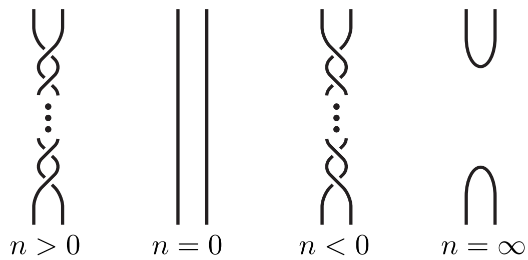


Figure 2: n-タングル

symmetric union 図式における対称軸 ℓ に対して symmetric Reidemeister 移動 [3] を定義する.

- 対称軸上以外での symmetric Reidemeister 移動は Figure 2 に表されている通常の Reidemeister 移動を軸を挟んで左右同時に行う.

*E-mail:m20sa037@vx.osaka-cu.ac.jp

- 対称軸上での symmetric Reidemeister 移動は Figure 3 に表されている通常の Reidemeister 移動 $S1$-$S3$, 及び Reidemeister 移動を対称軸に対して拡張した $S2(\pm)$,$S4$ の移動を行う.

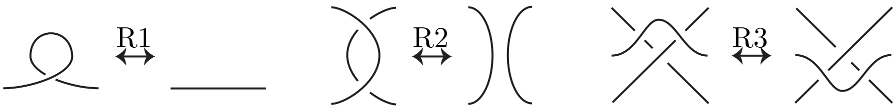


Figure 3: Reidemeister 移動

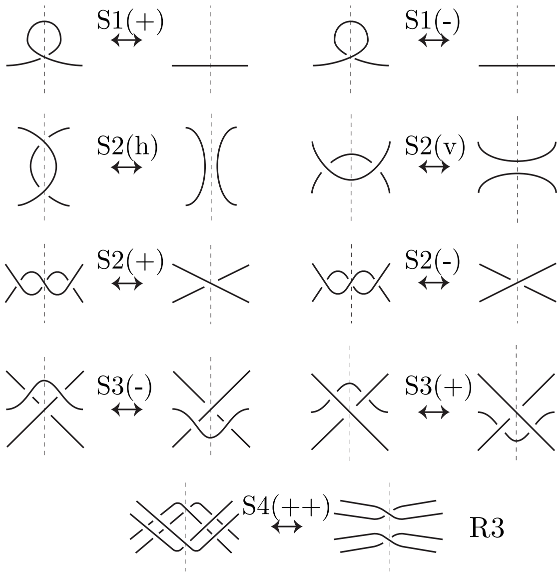


Figure 4: 軸上での symmetric Reidemeister 移動

定義 2 (symmetric equivalence[3])**.** *D, D' を symmetric union 図式とする. 有限回の symmetric Reidemeister 移動で移りあうとき, D, D' は* ***symmetrically equivalent*** *と定義する.*

定義 3 (Refined Kauffman bracket 多項式 [4])**.** *軸 $\{0\} \times \mathbb{R}$ を持つ平面 $\mathbb{R}^2$ と軸に横断的に交わる絡み目図式 D に対し, 2 変数多項式不変量 refined Kauffman bracket $D \to \mathbb{Z}(A, B)$, $D \mapsto \langle D \rangle$ を次のスケイン関係式で定義する.*

- 軸上にない交点のとき

$$\langle \times \rangle = A^{+1} \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle)(\rangle \tag{1}$$

- 軸上の交点のとき

$$\langle \times \rangle = B^{+1} \langle \asymp \rangle + B^{-1} \langle)(\rangle \tag{2}$$

$$\langle \times \rangle = B^{-1} \langle \asymp \rangle + B^{+1} \langle)(\rangle \tag{3}$$

- C : 軸との交差を $2m$ 持つ、成分数 n の自明な図式

$$\langle C\rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-m}(-B^2 - B^{-2})^{m-1} \tag{4}$$

補題 4. *[4] refined Kauffman bracket* 多項式 $\langle D\rangle \in \mathbb{Z}(A,B)$ は $R1$ と $S1$ の移動を除いて *symmetric Reidemeister* 移動で不変である.

向きづけられた図式 $\vec{D}$ に対し, 軸上以外または軸上での交点の符号和をそれぞれ A-writh $\alpha(D)$, B-writh $\beta(D)$ と定義する.

命題 5 (refined Jones 多項式 [4])**.** 写像 $W \to \mathbb{Z}(A,B)$ 次のように定義する.

$$W_D(A,B) := (-A^{-3})^{\alpha(D)}(-B^{-3})^{\beta(D)}\langle D\rangle \in \mathbb{Z}(A,B)$$

このとき $W_D(A,B)$ は *symmetric Reidemeister* 移動で不変である. ゆえに $W_D(s,t)$ は *symmetircally equivarent* での不変量である.

注意 6. $A^2 = t^{-1/2}$, $B^2 = s^{-1/2}$ とし $W_D(s,t)$ または $W(D)$ と表される.
特に $W_D(t,t) = V_D(t) =$ *Jones* 多項式となる.

命題 7. *[4]* n 成分の *symmetric union* 図式 D が対称軸上に交点を持たないとき次の式が成り立つ.

$$W(D) = \left(\frac{s^{1/2}+s^{-1/2}}{t^{1/2}+t^{-1/2}}\right)^{n-1} V(L) \tag{5}$$

$V(L)$ は D で表される絡み目 L の *Jonse* 多項式とする.
また,D が対称軸上に交点を持つとき次のようなスケイン関係のような漸化式が成り立つ.

$$W(\ ) = -s^{+1/2}W(\ ) - s^{+1}W(\ ) \tag{6}$$

$$W(\ ) = -s^{-1/2}W(\ ) - s^{-1}W(\ ) \tag{7}$$

2　主結果

この章では symmetrically equivalent ではないが refined Jones 多項式が一致する例を紹介する.

Figure 5 の図 $L(p,q,r)$ において,Figure 6 で表している通り 9_{27} は 3 つの表示を持つ, $L(p,q,r)$ のより詳細な分類を行うために本研究を行った. 以下, 研究で判明したことを記述する.

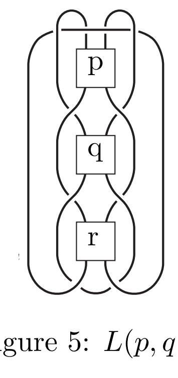


Figure 5: $L(p,q,r)$

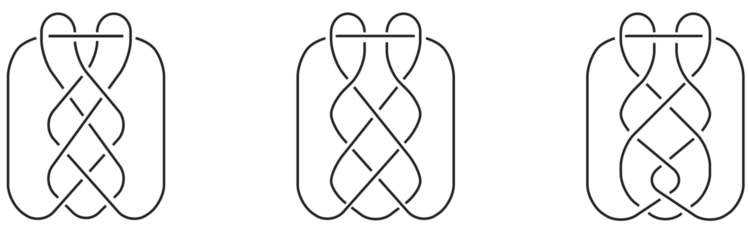


Figure 6: 9_{27}

定理 8. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次の 2 つの $L(p,q,r)$ $(p,q,r \in \mathbb{Z})$ の系列はそれぞれ同値な結び目の図式である.

$$L(-1,1,n-1) \cong L(n,1,-2) \tag{A_n}$$

$$L(0,-1,n+2) \cong L(n,1,-1) \tag{B_n}$$

証明 Figure 7, Figure 8 を参照. □

定理 9. (A_n), (B_n) はそれぞれ *symmetrically equivalent* ではない. ただし (B_{-1}) を除く.

命題 10. $L(p,q,r)$ $(p,q,r \in \mathbb{Z})$ に対し, *refined Jones* 多項式 W は

$$W(p,q,r) = 1 - (-s^{-1})^{p+r} \cdot f(t) - (-s^{-1})^{p+q+r} \cdot g_1(t) \tag{8}$$

ただし

$$f(t) = t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 4 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$$

$$g_1(t) = t^{-5} - 3t^{-4} + 6t^{-3} - 9t^{-2} + 11t^{-1} - 12 + 11t - 9t^2 + 6t^3 - 3t^4 + t^5$$

とする.

命題により (B_n) の組については,refined Jones 多項式が一致しないため symmetrically equivalent ではないことがわかる. しかし,(A_n) の組については, refined Jones 多項式が一致する.

次に (A_n) の組が実際に symmetrically equivalent ではないことを証明するために Collari と Lisca [5] により導入された原理とその原理から導かれる定理について紹介する.

symmetric union 図式 D, 整数 h に対し, 新しい symmetric union 図式 $D(h)$ を対称軸上のそれぞれの交点を $|h|$ 個の連続する交点に置き換えることで定める. また, 下図の通り h の符号により交点が決まる.

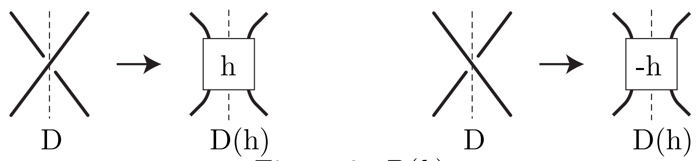


Figure 9: $D(h)$

新たに定義した symmetric union 図式 $D(h)$ において次の命題が成り立つ.

命題 11 (Collari, Lisca [5])**.** D, D' をそれぞれ *symmetric union* 図式とする. このとき D, D' が *symmetrically equivalent* であるとき, 任意の整数 h に対して $D(h), D'(h)$ は *symmetrically equivalent* である. 特に $D(h)$ と $D'(h)$ はアイソトピーである.

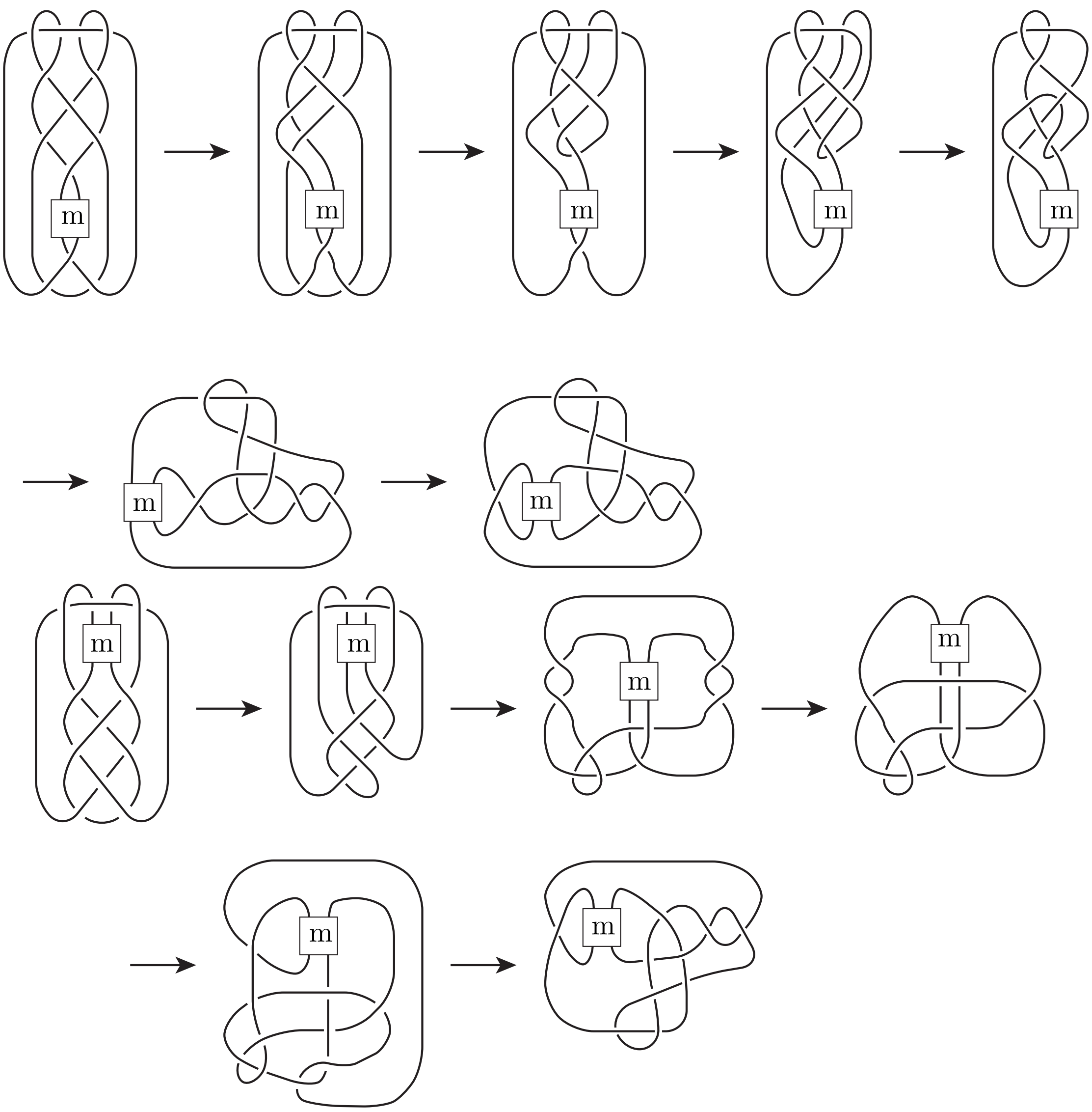


Figure 7: $L(0,-1,m+2) \cong L(m,1,-1)$

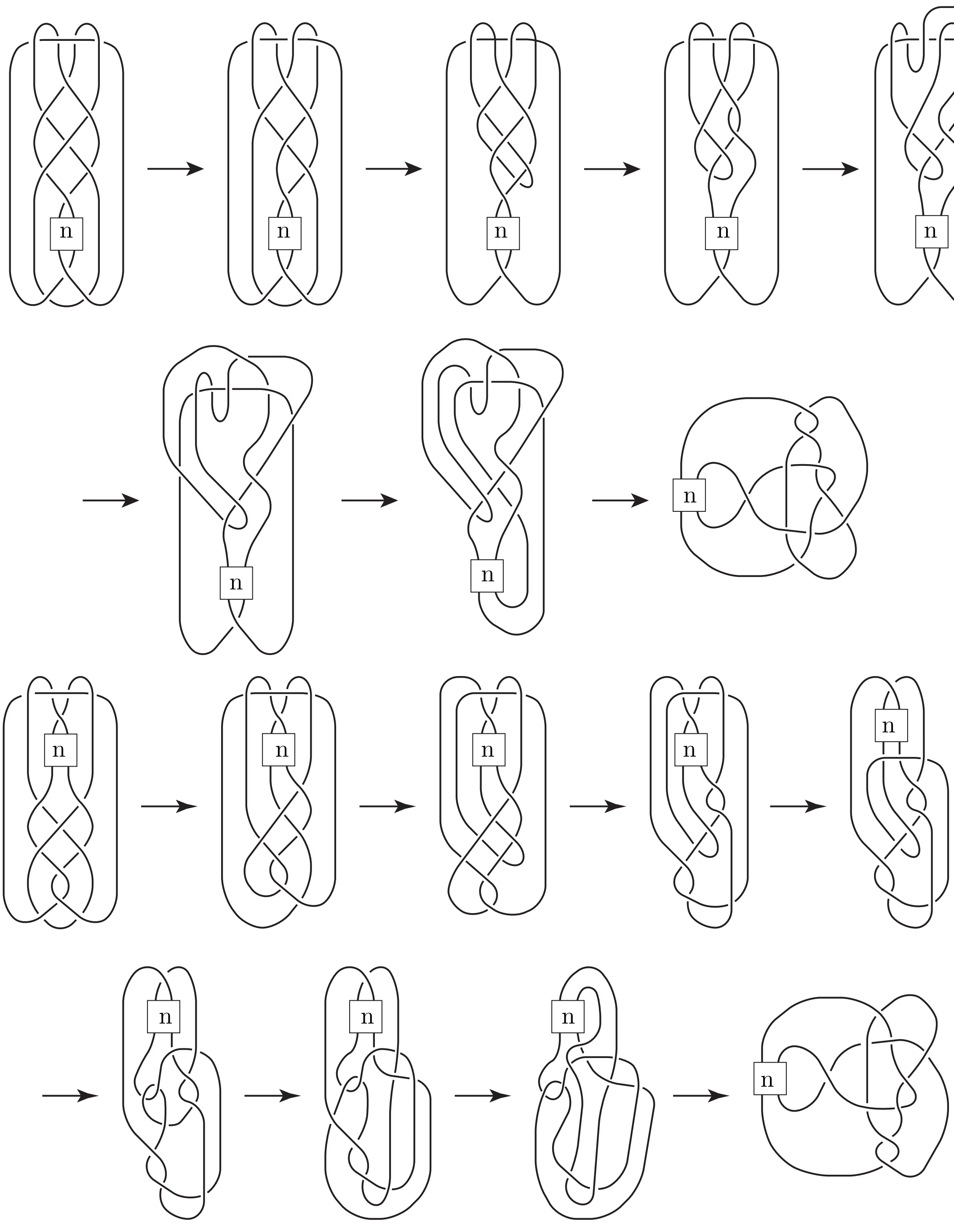


Figure 8: $L(-1,1,n-1) \cong L(n,1,-2)$

定義 12 (Λ 多項式 [6]). 絡み目の図式に対する Λ 多項式を以下のように定義する。

$$\Lambda(\bigcirc) = 1 \tag{9}$$

$$\Lambda(\;) = a\Lambda(\frown) \tag{10}$$

$$\Lambda(\;) = a^{-1}\Lambda(\frown) \tag{11}$$

$$\Lambda(\times) + \Lambda(\times) = x(\Lambda()\,() + \Lambda(\asymp)) \tag{12}$$

定義 13 (Kauffman 多項式 [6]). 絡み目 L に対してカウフマン多項式 $F(L;a,x)$ を、以下で定義する。

$$F(L;a,x) = a^{-wr(L)}\Lambda(L) \tag{13}$$

命題 14. [7] $n \in \mathbb{Z}$,n 個の連続する *half-twist* を持つ絡み目を $D(n)$ とする. このとき,

$$\Lambda(D(n)) = \sigma_n\Lambda(D(1)) - \sigma_{n-1}\Lambda(D()\,())) + \tau_n\Lambda(D(\asymp)) \tag{14}$$

ただし, $\sigma_{n-1} + \sigma_{n+1} = x\sigma_n$, $\tau_{n-1} + \tau_{n+1} = x\tau_n + a^{-n}x$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 = \tau_0 = \tau_1 = 0$ を満たす.

補題 15. $n(\in \mathbb{Z})$ に対し, $L(-2,2,2n-2)$ と $L(2n,2,-4)$ は *Kauffman* 多項式が異なる. ゆえにアイソトピーではない.

<u>証明</u> $L(p-2,2,q-4) = L'(p,q)$ と置くと
$L(-2,2,2n-2) = L'(0,2n)$, $L(2n,2,-4) = L'(2n,0)$ と表せる.
補題を用いることにより,

$$\Lambda(L'(0,2n)) - \Lambda(L'(2n,0)) = \sigma_{2n}(\Lambda(L'(0,1)) - \Lambda(L'(1,0)))$$

さらに

$$\Lambda(L'(0,1)) - \Lambda(L'(1,0) = x^{-1}(\Lambda(L'(0,2)) - \Lambda(L'(2,0))$$

となり, プログラム [9] で計算した結果 $\Lambda(L'(0,2)) \neq \Lambda(L'(2,0))$ である. よって $\Lambda(L'(0,2n)) \neq \Lambda(L'(2n,0))$ 定義より $F(L'(0,2n)) = a^{2n-2}\Lambda(L'(0,2n))$, $F(L'(2n,0)) = a^{2n-2}\Lambda(L'(2n,0))$ であるので

$$F(L'(0,2n)) \neq F(L'(2n,0))$$

$F(L(-2,2,-2)) = F(L'(2,0)) = a^2\Lambda(L'(0,2))$
$= (3a^{-6} + 6a^{-4} + 4a^{-2} + 3 + a^2) + x(-7a^{-7} - 10a^{-5} - a^{-3} + 3a^{-1} - a^3)$
$+ x^2(-16a^{-6} - 30a^{-4} - 21a^{-2} - 10 - 3a^2) + x^3(32a^{-7} + 43a^{-5} - 7a^{-3} - 19a^{-1} + a^3)$
$+ x^4(48a^{-6} + 63a^{-4} + 28a^{-2} + 16 + 3a^2) + x^5(-52a^{-7} - 59a^{-5} + 32a^{-3} + 40a^{-1} + a)$
$+ x^6(-68a^{-6} - 63a^{-4} - 4a^{-2} - 9) + x^7(35a^{-7} + 28a^{-5} - 40a^{-3} - 32a^{-1} + a)$
$+ x^8(42a^{-6} + 25a^{-4} - 14a^{-2} + 3) + x^9(-10a^{-7} - 4a^{-5} + 17a^{-3} + 11a^{-1})$
$+ x^{10}(-11a^{-6} - 3a^{-4} + 8a^{-2}) + x^{11}(a^{-7} - 2a^{-3} - a^{-1}) + x^{12}(a^{-6} - a^{-2})$

$$\begin{aligned}
&F(L(0,2,-4)) = F(L'(2,0)) = a^2\Lambda(L'(2,0)) \\
&= (3a^{-6}+6a^{-4}+4a^{-2}+3+a^2)+x(-8a^{-7}-13a^{-5}-3a^{-3}+5a^{-1}+3a) \\
&+x^2(-17a^{-6}-32a^{-4}-21a^{-2}-8-2a^2)+x^3(33a^{-7}+55a^{-5}+4a^{-3}-30a^{-1}-12a) \\
&+x^4(49a^{-6}+74a^{-4}+28a^{-2}+5+2a^2)+x^5(-52a^{-7}-74a^{-5}+17a^{-3}+55a^{-1}+16a) \\
&+x^6(-68a^{-6}-78a^{-4}-4a^{-2}+6)+x^7(35a^{-7}+35a^{-5}-33a^{-3}-39a^{-1}-6a) \\
&+x^8(42a^{-6}+32a^{-4}-14a^{-2}-4)+x^9(-10a^{-7}-5a^{-5}+16a^{-3}+12a^{-1}+a) \\
&+x^{10}(-11a^{-6}-4a^{-4}+8a^{-2}+1)+x^{11}(a^{-7}-2a^{-3}-a^{-1})+x^{12}(a^{-6}-a^{-2})
\end{aligned}$$

□

定理 16. (A_n) の組である $L(-1,1,n-1)$ と $L(n,1,-2)$ は *symmetric equivalent* ではない.

<u>**証明**</u> D を $L(-1,1,n-1)$, D' を $L(n,1,-2)$, $h=2$ として $D(h)$ と $D'(h)$ を比較する.
この時 $D(2)=L(-2,2,2n-2)$, $D'(2)=L(2n,2,-4)$ となる.
補題より $L(-2,2,2n-2)$ と $L(2n,2,-4)$ はアイソトピーでない.
命題より $L(-1,1,n-1)$ と $L(n,1,-2)$ は symmetrically equivalent ではない. □

引用文献

[1] Christoph Lamm, Symmetric unions and ribbon knots. *Osaka J. Math.*, 37 (2000), no. 3, 537–550. MR 1789436

[2] Christoph Lamm, The search for nonsymmetric ribbon knots. *Exp. Math.*, 30 (2021), no. 3, 349–363. MR 4309311

[3] Michael Eisermann and Christoph Lamm, Equivalence of symmetric union diagrams. *J. Knot Theory Ramifications*, 16(2007),no.7,879–898. MR 2354266

[4] Michael Eisermann and Christoph Lamm, A refined Jones polynomial for symmetric unions. *Osaka J. Math.*,48 (2011), no. 2, 333–370. MR 2831977

[5] Carlo Collari and Paolo Lisca, On symmetric equivalence of symmetric union diagrams. 2019

[6] Louis H. Kauffman, An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318 (1990), no. 2, 417–471. MR 958895

[7] Taizo Kanenobu, Examples on polynomial invariants of knots and links.II. *Osaka J. Math.*, 26 (1989),no. 3, 465–482. MR 1021426

[8] Charles Livingston and Allison H. Moore, Knotinfo: Table of knot invariants. URL: `knotinfo.math.indiana.edu`.

[9] Kouji Kodama, URL: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/kodama/knot.html`.

Chain-level MOY relations on Khovanov-Rozansky homology

吉田 純 *
(伊藤昇氏 †, 中兼啓太氏 ‡との共同研究)

1 イントロダクション

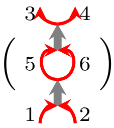
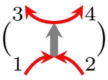
***Khovanov-Rozansky* ホモロジー**は、Khovanov と Rozansky の一連の論文 [6, 7] ([9] も参照) にて構成された絡み目ホモロジーであり、パラメータの選び方によって、その次数付きオイラー数は、量子 $\mathfrak{sl}_n$ 表現に付随する量子不変量 P_n 及び HOMFLY 多項式と定数倍の差を除いて一致する。このホモロジーは、村上-大槻-山田 [8] の考察した重み付き平面三価グラフの計算を圏化することで構成され、特に Reidemeister 変形での不変性は ***MOY* 関係式**の圏化された類似を用いて証明される。さて、Khovanov–Rozansky の原論文 [6, 7] 及び Rasmussen の構成 [9] では、この圏化は**マトリックスファクトリゼーション**と呼ばれるある代数構造のなす圏の導来圏 $D(\mathbf{MF})$ においてなされているが、一般に導来圏の構造は、もとの圏 $\mathbf{MF}$ の素直な構造を歪めてしまうこともあり、可能ならば各種の $D(\mathbf{MF})$ の同型は $\mathbf{MF}$ におけるホモトピー同値として実現されていることが望ましい。ところが、彼らの構成においては、この導来圏での議論は本質的であり、MOY 関係式に対応する同型は、必ずしもこれが可能ではない。このことは、この絡み目ホモロジーを考察するにあたって、いくつかの問題を引き起こす。例えば、上に述べたように Reidemeister 変形についての不変性は MOY 関係式に依存しているので、Reidemeister 変形に対応する複体の射を具体的に記述することが困難になっている。Khovanov ホモロジーの場合に、[5, 2] などで議論されている結び目コボルディズムとの関係や、[3, 4] で筆者らが考察した Vassiliev 微分の圏化において、Reidemeister 変形のなす図式の可換性が本質的であったことを鑑みれば、この困難を解消することは、Khovanov-Rozansky ホモロジーの高次構造を調べる上で非常に重要である。

本研究の目標は、この問題を解決し、MOY 関係式及び Reidemeister 変形に対する具体的な複体の射の記述を得ることである。多項式 $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ とグラフ G に対し、対応する KR ホモロジーの鎖複体を $C_p(G)$ と書く。方針としては、マトリックスファクトリゼーションのホモトピー論を圏 $\mathbf{MF}$ の上の Quillen モデル構造によって定式化し、関手的なリゾリューション $\widetilde{C}_p(G) \to C_p(G)$

*理化学研究所革新知能統合研究センター †茨城工業高等専門学校 ‡Uppsala University
本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 20K03604 から補助を受けています。また、本研究は令和３年度豊橋技術科学大学高専連携教育研究プロジェクトの補助を受けています。

を取ることにより、導来圏の射を $\widetilde{C}_p(G)$ の上に実現する。特に本稿では、MOY II 関係式に関して以下の結果を証明する:

主定理 (伊藤-中兼-Y.). 圏 **MF** において、以下のホモトピー同値写像が存在する*:*

$\varphi_{\mathrm{II}} : \widetilde{C}_p\Big($  $\Big) \rightleftarrows \widetilde{C}_p\Big($  $\Big)^{\oplus 2} : \overline{\varphi}_{\mathrm{II}} \quad ;$

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{II}}(q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{上}) & = \begin{bmatrix} \frac{q(X_1,X_2)-q(X_2,X_1)}{X_1-X_2} \\ \frac{X_1q(X_2,X_1)-X_2q(X_1,X_2)}{X_1-X_2} \end{bmatrix} \gamma_n v_I \ , \\ \varphi_{\mathrm{II}}(q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{下}) & = 0 \quad ; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_{\mathrm{II}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \gamma_n v_I\right) \\ &= (a+bX_5)\big(\gamma_n v_I^{\mathsf{tot}} \\ &\quad - \gamma_{n-1}((\partial_{s_1}\theta_1^{上} v_1^{下} - \partial_{s_2}\theta_2^{上} v_2^{下})(v_1^{\mathsf{tot}} + v_2^{\mathsf{tot}})v_I^{\mathsf{tot}} - \partial_{s_1}(\theta_2^{下} - \theta_2^{上})v_1^{下} v_2^{下} v_I^{\mathsf{tot}}) \\ &\qquad\qquad + \gamma_{n-2}((\partial_{s_1}\theta_1^{上}\partial_{s_2}\theta_2^{上} + \partial_{s_1}\theta_2^{上}\partial_{s_2}\theta_1^{上})v_1^{上} v_2^{下} v_1^{下} v_2^{下} v_I)\big) \quad . \end{aligned}$$

ここで、$v_i^{\mathsf{tot}} := v_i^{上} + v_i^{下}$ であり、また ∂_{s_i} は $s_1 = X_5 + X_6$ 及び $s_2 = X_5X_6$ での偏微分を表す。

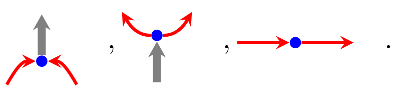
上の主定理の各記号については第 3 節及び第 5 節で定義される。

注意. 主定理では MOY II 関係式のみに言及しているが、MOY I については、原論文 [6, 7] にて既に鎖複体の同型として証明されている。また、上記のリゾリューションの一般論から、MOY III も (具体的な射の形はわからないものの) やはり $\widetilde{C}_p(-)$ についての鎖複体の射として実現できることは確認できる。

2 重み付き平面グラフと MOY 関係式

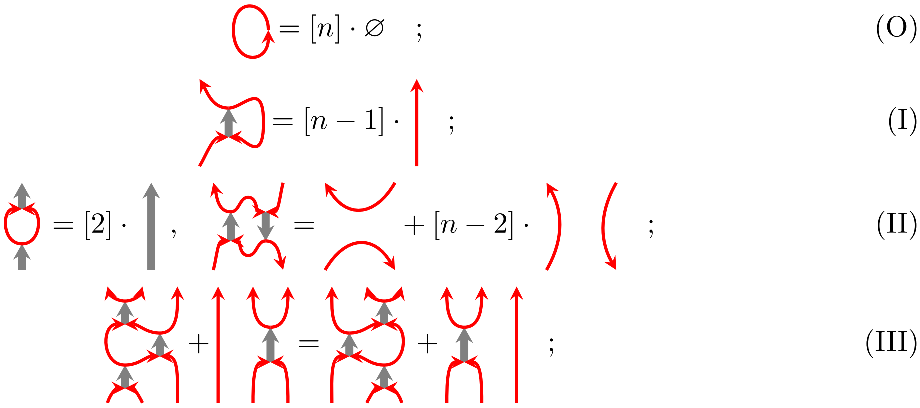
本稿では [6, 7] で対象となっている重み付き平面グラフの変種として、以下の形の重み付き平面グラフを対象とする。***KR* グラフ**とは、境界を持つ有向平面グラフ G であって、そのエッジ集合 $E(G)$ に部分集合 $E^w(G) \subset E(G)$ が指定されているもので、以下を満たすものとする:

- 全ての頂点 $v \in V(G)$ は二価または三価である;
- G の境界は $E^w(G)$ に属するエッジを含まない;
- $E^w(G)$ に属するエッジを太線で書いた時、各頂点の近傍は以下の絵のいずれかと同型である:

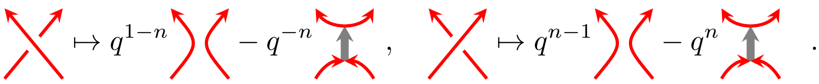


部分集合 $E^w(G) \subset E(G)$ に属するエッジを**ワイドエッジ**と呼ぶ。KR グラフは、二価頂点を無視することで村上-大槻-山田の考察した重み付き平面三価グラフのサブクラスであると見做すこと

ができ、通常のエッジは重さ 1, ワイドエッジは重さ 2 のエッジに対応している。そこで、整数 $n \geq 2$ を固定した時、MOY 関係式を KR グラフの局所変形に書き下すと以下のようになる:



ここで、$[i]$ は量子整数 $\frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}$ を表す。今、KR グラフの張る自由 $\mathbb{Z}[\![q]\!]$-加群を上の関係式で割ったものを $\mathcal{G}_n$ と書く。また、絡み目図式 D に対して、D の各交点を以下のように平滑化とワイドエッジの和として分解して得られる $\mathcal{G}_n$ の元を $\overline{D}$ と書く:



定理 2.1 (村上–大槻–山田 [8]). 対応 $D \mapsto \overline{D}$ は絡み目不変量を定める。さらに、$\mathbb{Z}[\![q]\!]$-準同型

$$\mathcal{G}_n \to \mathbb{Z}[\![q]\!]\ ; \quad G \mapsto \langle G \rangle$$

であって、各絡み目 L とその図式 D に対して、$\langle \overline{D} \rangle = P_n(L)$ となるものが存在する。ここで $P_n(L)$ は、量子 $\mathfrak{sl}_n$-表現に付随する絡み目多項式である。

3 Khovanov-Rozansky ホモロジー

Khovanov-Rozansky は論文 [6, 7] において、前節の MOY の計算を圏化することで絡み目ホモロジーを得た。本節ではその構成の概略を述べる。本節を通じて、$\mathbb{K}$ を固定された可換環とする。

定義. R を $\mathbb{K}$ 上の可換代数とする。R 上の**マトリックスファクトリゼーション**とは、次数付き R-加群 $M = \{M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と次数がそれぞれ ± 1 である次数付き写像 $d_\pm = \{d^n_\pm : M^n \to M^{n\pm 1}\}$ の対であって、以下を満たすものである:

(i) $d_-^2 = 0$, $d_+^2 = 0$;

(ii) ある元 $w \in R$ が存在し、各 n について $d_- d_+ + d_+ d_- : M^n \to M^n$ は恒等写像の w 倍に等しい。

マトリックスファクトリゼーション M と N について、マトリックスファクトリゼーションの射 $M \to N$ とは、次数付き R-加群の次数を保つ準同型であり、$d_\pm$ と可換なものである。R 上のマトリックスファクトリゼーションとその射のなす圏を $\mathbf{MF}(R)$ と書く。

上の定義で、条件 (ii) の元 $w \in R$ を M の**ポテンシャル**と呼ぶ。M の R-加群としての零化イデアルが自明であれば、ポテンシャルは一意に決まる。また、任意のマトリックスファクトリゼーションの射はポテンシャルを保つ。そこで、ポテンシャル w のマトリックスファクトリゼーションのなす充満部分圏を $\mathbf{MF}_w(R) \subset \mathbf{MF}(R)$ と書く。

例 (Koszul ファクトリゼーション)**.** V を有限階数の自由 R-加群とし、元 $v \in V$ 及び R-準同型 $f : V \to R$ を固定する。この時マトリックスファクトリゼーション $\{v, f\} = \{v, f\}_R$ を以下のように定める:

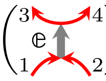
- 次数付き R-加群として、$\{v, f\}$ は $\{v, f\}^{-1} \coloneqq V$ で生成される外積代数である。すなわち、
$$\{v, f\}^n = \begin{cases} V^{\wedge(-n)} & n \le 0, \\ 0 & n > 0; \end{cases}$$
- $d_+ : \{v, f\}^n \to \{v, f\}^{n+1}$ は $f : V \to R$ が誘導する写像である;
- $d_- : \{v, f\}^n \to \{v, f\}^{n-1}$ は $d_-(\alpha) \coloneqq v \wedge \alpha$ で定義する。

Cartan の公式より、$\{v, f\}$ はポテンシャル $f(v)$ のマトリックスファクトリゼーションであることがわかる。この形のマトリックスファクトリゼーションを ***Koszul* ファクトリゼーション**と呼ぶ。特に V に基底 $v_1, \ldots, v_n$ を固定した時、元 $v \in V$ は元 $a_1, \ldots, a_n \in R$ によって一意に $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ と書ける。また $b_i \coloneqq f(v_i)$ とおくと、Koszul ファクトリゼーション $\{v, f\}$ は以下の $n \times 2$-行列によって特徴付けられる:
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} .$$
以下では、この行列によって Koszul ファクトリゼーションを表すことにする。

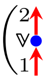
例 (テンソル積)**.** M, N を可換 $\mathbb{K}$-代数 R 上のマトリックスファクトリゼーションとする。テンソル積 $M \otimes_R N$ に通常の鎖複体と同様に微分 d_+ 及び d_- が定義できるが、これらによって $M \otimes_R N$ は再び R 上のマトリックスファクトリゼーションになる。さらに、M, N のポテンシャルをそれぞれ w_M, w_N とすれば、$M \otimes_R N$ はポテンシャル $w_M + w_N$ を持つことが直接計算によって確認できる。

KR グラフ G に対して、集合 $E(G) \setminus E^w(G)$ で生成される $\mathbb{K}$ 上の可換代数を $R(G)$ と書く。すなわち、ワイドエッジでないエッジ $e \in E(G)$ に対応する生成元を X_e と書くと、$R(G)$ は多項式環 $\mathbb{K}[X_e : e \in E(G) \setminus E^w(G)]$ と一致する。多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ を固定し、各ワイドエッジ $\mathbb{e}$ と二価頂点 $\mathbb{v}$ に対して、$R(G)$ 上の Koszul ファクトリゼーション $C_p(\mathbb{e})$ 及び $C_p(\mathbb{v})$ を以下で定

める:

$$C_p\Bigg($$ 

$$\Bigg) := \begin{pmatrix} \theta_1 & X_3+X_4-X_1-X_2 \\ \theta_2 & X_3X_4-X_1X_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$C_p\Bigg($$ 

$$\Bigg) := \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_2)-p(X_1)}{X_2-X_1} & X_2-X_1 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.1}$$

ここで、多項式 $u(S,T) \in \mathbb{K}[S,T]$ を $u(X+Y, XY) = p(X)+p(Y)$ を満たすように取った時、(3.1) の θ_1, θ_2 は以下のように書かれる:

$$\theta_1 := \frac{p(X_3)+p(X_4)-u(X_1+X_2, X_3X_4)}{X_3+X_4-X_1-X_2} \quad ,$$
$$\theta_2 := \frac{u(X_1+X_2, X_3X_4)-p(X_1)-p(X_2)}{X_3X_4-X_1X_2} \quad .$$

基本対称多項式の基本定理より、$u(S,T)$ は唯一つ存在することに注意する。

定義. 上の状況で、$R(G)$ 上のマトリックスファクトリゼーション $C_p(G)$ を以下で定義する:

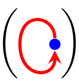
$$C_p(G) := \Big(\bigotimes_{\mathbb{e}:\text{ワイドエッジ}} C_p(\mathbb{e}) \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{\mathbb{v}:\text{二価頂点}} C_p(\mathbb{v}) \Big) \quad . \tag{3.2}$$

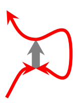
これを G のパラメータ p における ***KR* 複体**と呼ぶ。

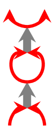
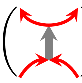
KR 複体に対して MOY 関係式を述べるために、次の概念を導入する。

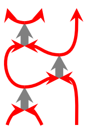
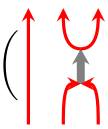
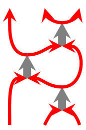
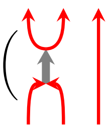
定義. R 上のマトリックスファクトリゼーションの射 $f: M \to N$ が**擬同型**であるとは、f が鎖複体の射 $(M, d_+) \to (N, d_+)$ として擬同型であることである。圏 $\mathbf{MF}(R)$, $\mathbf{MF}_w(R)$ に擬同型の逆射を添加して得られる圏をそれぞれ $D(\mathbf{MF}(R))$, $D(\mathbf{MF}_w(R))$ と書き、$\mathbf{MF}(R)$ 及び $\mathbf{MF}_w(R)$ の**導来圏**と呼ぶ。

定理 3.1 ([6, 7])**.** マトリックスファクトリゼーションの導来圏において、以下の同型が成立する:

$$C_p\Big($$  $$\Big) \cong \begin{pmatrix} p'(X) & 0 \end{pmatrix} \quad ; \tag{3.3}$$

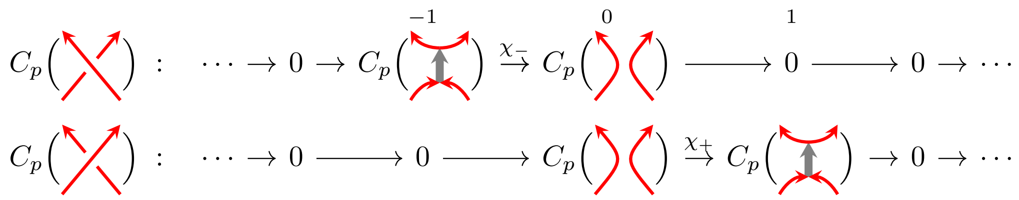
$$C_p\Big($$  $$\Big) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p'(X)-p'(Y)}{X-Y} & 0 \end{pmatrix} \otimes C_p\Big($$  $$\Big) \quad ; \tag{3.4}$$

$$C_p\Big($$  $$\Big) \equiv C_p\Big($$  $$\Big)^{\oplus 2} \quad ; \tag{3.5}$$

$$C_p\Big($$  $$\Big) \oplus C_p\Big($$  $$\Big) \cong \Big($$  $$\Big) \oplus C_p\Big($$  $$\Big) \quad . \tag{3.6}$$

今 D を組紐の閉包として表される絡み目図式とする。D の各交点に対して、以下の $D(\mathbf{MF})$ の

鎖複体を対応させ、全体のテンソル積を取ることで $C_p(D)$ を定義する[*1]:



. (3.7)

特に $p(X) = X^N$ の時、マトリックスファクトリゼーション (3.2) の各微分及び複体 (3.7) の微分はそれぞれ斉次であることに注意すると、$C_p(D)$ は二重次数付きの複体となることがわかる。そこで、定理 3.1 を用いて村上-大槻-山田の計算を圏化することで以下が得られる。

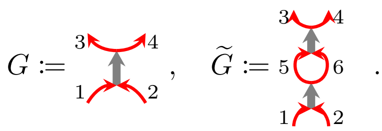
定理 3.2 ([6, 9])**.** N を 2 以上の整数とし、$p(X) = X^N \in \mathbb{K}[X]$ とおく。この時、組紐の閉包で表される絡み目図式 D について、以下が成立する:

$$\sum_{i,j} (-1)^j q^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(C_p^{*,j}(D)) \ = \ P_N(L) \quad .$$

ここで、$P_N(L)$ は D の表す絡み目 L の量子 $\mathfrak{sl}_N$-表現に付随する多項式である。

4 KR 複体の MOY II 関係式の証明

主定理の証明に入る前に、Khovanov-Rozansky [6] による MOY II 関係式 (3.5) の証明を復習する。G と G' を以下の KR グラフとする:



(4.1)

この時、以下の自然な同一視がある:

$$R(G) \cong \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3, X_4] \ , \quad R(\widetilde{G}) \cong R(G)[X_5, X_6] \quad .$$

この同一視のもとで、多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ に対して、$G, \widetilde{G}$ の KR 複体は以下の Koszul ファクトリゼーションとして表される:

$$C_p(G) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3)+p(X_4)-u(X_1+X_2, X_3X_4)}{X_3+X_4-X_1-X_2} & X_3+X_4-X_1-X_2 \\ \dfrac{u(X_1+X_2, X_3X_4)-p(X_1)-p(X_2)}{X_3X_4-X_1X_2} & X_3X_4-X_1X_2 \end{pmatrix}_{R(G)} , \qquad (4.2)$$

[*1] 射 $\chi_\pm$ の詳細については [6, 9] を参照されたい

$$C_p(\widetilde{G}) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3)+p(X_4)-u(X_5+X_6,X_3X_4)}{X_3+X_4-X_5-X_6} & X_3+X_4-X_5-X_6 \\ \dfrac{u(X_5+X_6,X_3X_4)-p(X_5)-p(X_6)}{X_3X_4-X_5X_6} & X_3X_4-X_5X_6 \\ \dfrac{p(X_5)+p(X_6)-u(X_1+X_2,X_5X_6)}{X_5+X_6-X_1-X_2} & X_5+X_6-X_1-X_2 \\ \dfrac{u(X_1+X_2,X_5X_6)-p(X_1)-p(X_2)}{X_5X_6-X_1X_2} & X_5X_6-X_1X_2 \end{pmatrix}_{R(\widetilde{G})} . \tag{4.3}$$

ここで、行列の添字は Koszul ファクトリゼーションの係数環を表している。MOY II 関係式は、Koszul ファクトリゼーションの以下の変形を用いて得られる。

補題 4.1. R を $\mathbb{K}$ 上の可換代数とし、M を多項式環 $R[X]$ 上の自由加群からなるマトリックスファクトリゼーションとする。多項式 $a(X) \in R[X]$ と $r \in R$ に対して、$R[X]$ 上の *Koszul* ファクトリゼーション $\begin{pmatrix} a(X) & X-r \end{pmatrix}$ の生成元を $v \in (a(X)\ X-r)^{-1}$ と書く。この時、以下は $R[X]$ 上のマトリックスファクトリゼーションの擬同型を定める*:*

$$\begin{pmatrix} a(X) & X-r \end{pmatrix} \otimes M \to \big(R[X]/(X-r)\big) \otimes M \ ; \quad \begin{cases} 1 \otimes \alpha & \mapsto 1 \otimes \alpha \ , \\ v \otimes \alpha & \mapsto 0 \ . \end{cases}$$

特に M が $R[X]$ 上の Koszul ファクトリゼーションである時、マトリックスファクトリゼーション $\big(R[X]/(X-r)\big) \otimes M$ は M の各パラメータの多項式に $X=r$ を代入して得られる R 上の Koszul ファクトリゼーションと自然に同一視できることに注意する。

補題 4.1 と上の考察を用いて MOY II 関係式 (3.5) を証明する。まず、$s^{(1)} \coloneqq X_5+X_6, s^{(2)} \coloneqq X_5X_6 \in R(\widetilde{G})$ とし、$S \coloneqq R(G)[s^{(1)}, s^{(2)}] \subset R(G)[X_5,X_6] = R(\widetilde{G})$ とおく。対称式の基本定理から、S は $s^{(1)}$ と $s^{(2)}$ を変数とする二変数多項式環と同型であり、$R(\widetilde{G})$ は階数 2 の自由 S-加群である。これによって、Koszul ファクトリゼーション (4.3) は以下のように変形できる:

$$C_p(\widetilde{G}) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3)+p(X_4)-u(s^{(1)},X_3X_4)}{X_3+X_4-s^{(1)}} & X_3+X_4-s^{(1)} \\ \dfrac{u(s^{(1)},X_3X_4)-u(s^{(1)},s^{(2)})}{X_3X_4-s^{(2)}} & X_3X_4-s^{(2)} \\ \dfrac{u(s^{(1)},s^{(2)})-u(X_1+X_2,s^{(2)})}{s^{(1)}-X_1-X_2} & s^{(1)}-X_1-X_2 \\ \dfrac{u(X_1+X_2,s^{(2)})-p(X_1)-p(X_2)}{s^{(2)}-X_1X_2} & s^{(2)}-X_1X_2 \end{pmatrix}_{S} \otimes_S S^{\oplus 2} . \tag{4.4}$$

こうして得られる S 上の Koszul ファクトリゼーション (4.4) に対して、補題 4.1 とその直後の考察を適用することで、求める擬同型 $C_p(\widetilde{G}) \to C_p(G)$ が得られる。特に、$\widetilde{G}$ の図 (4.1) の上下のワイドエッジに対応する Koszul ファクトリゼーション $C_p(\widetilde{G})$ の生成元をそれぞれ $v_1^{\text{上}}, v_2^{\text{下}}$ 及び $v_1^{\text{下}}, v_2^{\text{下}}$ とし、同様に $C_p(G)$ の生成元を v_1, v_2 とすると、$R(\widetilde{G}) \cong S \oplus S$ の分解の具体形から、この擬同型は R 上のマトリックスファクトリゼーションの射として、以下のように書くことがで

きる:

$$\begin{aligned} q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{上} &\longmapsto \begin{bmatrix} \frac{q(X_1,X_2)-q(X_2,X_1)}{X_1-X_2} \\ \frac{X_1 q(X_2,X_1)-X_2 q(X_1,X_2)}{X_1-X_2} \end{bmatrix} \gamma_n v_I \\ q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{下} &\longmapsto 0 \end{aligned} \quad . \tag{4.5}$$

ここで $I \subset \{1,2\}$ であり、v_I^* は v_i^* を $i \in I$ について昇順に外積をとったものである。

5 KR 複体のリゾリューションと主定理の証明

前節では、KR 複体の MOY II 関係式を与える擬同型を具体的に構成したが、実はこの射はホモトピー逆射が存在しない。その主な原因は、補題 4.1 の擬同型が、一般にはホモトピー同値ではないことである。そこで、これを改めてホモトピー同値として構成しなおすために、KR 複体 $C_p(G)$ のリゾリューションを取ることを考える。

このために、可換 $\mathbb{K}$-代数 R と元 $w \in R$ に対して、$\mathbb{K}$-上の dg 代数 $A_w(R)$ を以下のように定める:

$$A_w(R) \coloneqq R[\theta]/(\theta^2)\ , \quad \deg\theta = -1\ , \quad d\theta = w \quad .$$

ポテンシャル $w \in R$ のマトリックスファクトリゼーション M について、鎖複体 $\underline{M} = \{M, d_+\}$ を考える。この時、$\underline{M}$ への $A_w(R)$ の作用を $\theta x \coloneqq d_-(x)$ として定めると、$\underline{M}$ は自然に dg $A_w(R)$-加群となる。dg $A_w(R)$-加群と $A_w(R)$-準同型のなす圏を $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ と書く。上の対応について、定義から以下が容易にわかる。

命題 5.1. 次数付き R-加群 M に対して、M 上のポテンシャル w のマトリックスファクトリゼーションの構造と *dg* $A_w(R)$-加群の構造は一対一に対応する。さらに、これによって圏の同型 $\mathbf{MF}_w(R) \cong \mathbf{dgMod}(A_w(R))$ が誘導される。

マトリックスファクトリゼーションの擬同型は dg $A_w(R)$-加群の擬同型に他ならず、従って $\mathbf{MF}_w(R)$ の導来圏 $D(\mathbf{MF}_w(R))$ は dg 圏 $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の通常の意味での導来圏である。そこで、$\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の言葉で射影的リゾリューションを取ることを考える。今、dg R-代数 $\widetilde{A}_w(R)$ を次のように定義する。まず、次数付き R-代数として、$\widetilde{A}_w(R) \coloneqq A_w(R) \otimes A_w(R) \otimes \Gamma$ とおく。ここで、Γ は各 $n \in \mathbb{N}$ について一つの生成元 $\gamma_n \in \Gamma^{-2n}$ を持つ次数付き可換 R-代数で、以下の関係式を満たすものである:

$$\gamma_0 = 1\ , \quad \gamma_m\gamma_n = \frac{(m+n)!}{m!n!}\gamma_{m+n} \quad .$$

記号の濫用だが、$\widetilde{A}_w(R)$ の元に以下の表記を用いる:

$$\bar{\theta} \coloneqq \theta \otimes 1 \otimes 1\ , \quad \theta \coloneqq 1 \otimes \theta \otimes 1\ , \quad \gamma_n \coloneqq 1 \otimes 1 \otimes \gamma_n \quad .$$

これらを用いて、$\widetilde{A}_w(R)$ の微分を以下のように定める:

$$d(\theta) = d(\bar{\theta}) = w\ , \quad d(\gamma_n) = (\bar{\theta} - \theta)\gamma_{n-1} \quad .$$

ただし、負の整数 n については $\gamma_n = 0$ と約束する。

補題 5.2. 以下で定まる *dg* R-代数の準同型は、全射擬同型である*:*

$$\widetilde{A}_w(R) \to A_w(R) \ , \quad \begin{cases} \theta, \bar{\theta} & \mapsto \theta \ , \\ \gamma_0 = 1 & \mapsto 1 \ , \\ \gamma_n & \mapsto 0 \quad (n \geq 1) \ . \end{cases}$$

$\widetilde{A}_w(R)$ の定義より dg R-代数の自然な埋め込み $A_w(R) \otimes A_w(R) \to \widetilde{A}_w(R)$ があるが、これによって $\widetilde{A}_w(R)$ を $A_w(R)$-$A_w(R)$-両側加群とみなすことで、以下の関手が得られる:

$$\widetilde{P} : \mathbf{dgMod}(A_w(R)) \to \mathbf{dgMod}(A_w(R)) \ ; \quad M \mapsto \widetilde{A}_w(R) \otimes_{A_w(R)} M \quad . \tag{5.1}$$

補題 5.2 より、自然変換 $\widetilde{P}(M) \to M$ が存在する。圏 $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の射影的モデル構造のホモトピー論 (例えば [1] を見よ) により、以下がわかる。

命題 5.3. M を R 上のポテンシャル $w \in R$ のマトリックスファクトリゼーションで、有界かつ各 M^n は R-射影的であると仮定する。この時以下が成立する。

(1) 補題 *5.2* の擬同型で誘導される射 $\widetilde{P}(M) \to M$ は全射擬同型である。

(2) 任意の全射擬同型 $f : N' \to N \in \mathbf{dgMod}(A_w(R))$ と *dg* $A_w(R)$-準同型 $g : \widetilde{P}(M) \to N$ に対して、以下を可換にする *dg* $A_w(R)$-準同型 $g' : \widetilde{P}(M) \to N'$ が存在する*:*

$$\begin{tikzcd} & N' \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{P}(M) \arrow[ur, "g'"] \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd} \quad .$$

系 5.4. M, N を R 上のポテンシャル w の *Koszul* ファクトリゼーションとする。この時、任意の擬同型 $f : M \to N$ に対して、射 $\widetilde{P}(f) : \widetilde{P}(M) \to \widetilde{P}(N)$ はホモトピー同値である*;* つまり $\widetilde{P}(f)$ はホモトピー逆射を持つ。

今、KR グラフ G と多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ に対して、$\widetilde{C}_p(G) \coloneqq \widetilde{P}(C_p(G))$ とおく。命題 5.3 より $\widetilde{C}_p(G)$ は導来圏において $C_p(G)$ と同型であり、さらに系 5.4 より、各 MOY 関係式は抽象的には $\widetilde{P}(C_p(G))$ 上のホモトピー同値として実現できることが従う。

より具体的な記述のために、関手 $\widetilde{P}$ に関して補題 4.1 の以下の精密化を用いる。

命題 5.5. R を可換 $\mathbb{K}$-代数とし、$a(X) \in R[X]$*,* $b \in R$*,* $\vec{c}(X), \vec{d}(X) \in R[X]^{\times n}$ について以下が成立すると仮定する*:*

$$w \coloneqq a(X)(X-b) + \vec{c}(X) \cdot \vec{d}(X) \in R \quad .$$

この時、以下のマトリックスファクトリゼーションのホモトピー同値がある*:*

$$\widetilde{P}(\rho) : \widetilde{P} \begin{pmatrix} a(X) & X-b \\ \vec{c}(X) & \vec{d}(X) \end{pmatrix} \leftrightarrows \widetilde{P} \begin{pmatrix} \vec{c}(b) & \vec{d}(b) \end{pmatrix} : \widetilde{\iota}$$

ここで、ρ は補題 *4.1* で定義される擬同型であり、$\widetilde{\iota}$ は次式で定義される*:*

$$\widetilde{\iota}(\gamma_n v_I) = \gamma_n\big(v_I - \sum_{i\in I}\mathrm{sgn}(i, I\setminus i)\frac{d_i(X)-d_i(b)}{X-b}v_0 v_{I\setminus i}\big) - \gamma_{n-1}\big(\sum_i \frac{c_i(X)-c_i(b)}{X-b}v_0 v_i v_I\big) \quad .$$

ただし、$I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ について $v_I = v_{i_1}\ldots v_{i_k}$ である。

さて、第 4 節での MOY II 関係式の証明と同様の証明を $C_p(G)$ ではなく $\widetilde{C}_p(G)$ について行うことを考える。この際、補題 4.1 を適用した箇所において、かわりに命題 5.5 を用いることによって、マトリックスファクトリゼーションの間の具体的な射とそのホモトピー逆射を得られ、実際に計算してみると、主定理の式となることがわかる。以上より、主定理が証明できた。

主定理のように MOY 関係式 に対応するホモトピー同値射を具体的に求めることで、Reidemeister 変形に対応する KR 複体の射が書ける。これによって KR ホモロジーでムービー移動をはじめとした高次の関係式を調べることが可能となり、より精密な理解が進むと期待している。

参考文献

[1] T. Barthel, J. P. May, and E. Riehl. Six model structures for DG-modules over DGAs: model category theory in homological action. *New York Journal of Mathematics*, 20:1077–1159, 2014.

[2] D. Clark, S. Morrison, and K. Walker. Fixing the functoriality of Khovanov homology. *Geometry & Topology*, 13(3):1499–1582, 2009.

[3] N. Ito and J. Yoshida. Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 29(07):2050051, 2020. arXiv:1911.09308.

[4] N. Ito and J. Yoshida. A cobordism realizing crossing change on $\mathfrak{sl}_2$ tangle homology and a categorified vassiliev skein relation. *Topology and its Applications*, 296:107646, 2021.

[5] M. Jacobsson. An invariant of link cobordisms from Khovanov homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 4:1211–1251, 2004.

[6] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fundamenta Mathematicae*, 199(1):1–91, 2008.

[7] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geometry & Topology*, 12(3):1387–1425, 2008.

[8] H. Murakami, T. Ohtsuki, and S. Yamada. Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs. *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série*, 44(3-4):325–360, 1998.

[9] J. A. Rasmussen. Some differentials on Khovanov-Rozansky homology. *Geometry & Topology*, 19(6):3031–3104, 2015.

ルジャンドル結び目とラック彩色数

木村 直記 (早稲田大学基幹理工学部)

概要

Kulkarni-Prathamesh は，ラック彩色を用いてルジャンドル結び目の不変量を得るために，ルジャンドルラックという概念を導入した．Ceniceros-Elhamdadi-Nelson はこの概念を一般化した．本講演では，この概念を更に一般化した 2-ルジャンドルラックを定義する．2-ルジャンドルラック彩色数を用いることで，Thurston-Bennequin 数が同じ値をとる位相的に自明なルジャンドル結び目たちを全て区別できることを報告する．また，2-ルジャンドルラック彩色数では区別できないルジャンドル結び目の組についても紹介する．

1 ルジャンドル結び目

本節では，ルジャンドル結び目に関する基礎事項を紹介する．

定義 1. 3 次元多様体 M 上の平面場 ξ が M 上の接触構造であるとは，$\xi = \ker\alpha$ となる M 上の局所的な 1-形式 α に対して，$\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ となるときをいう．このとき，(M, ξ) を 3 次元接触多様体と呼ぶ.

例 1. $\mathbb{R}^3$ の座標を (x, y, z) としたとき，$\xi_{std} := ker(dz + xdy) = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$ で定義される $\mathbb{R}^3$ 上の平面場 ξ_{std} は $\mathbb{R}^3$ 上の接触構造である．ξ_{std} を $\mathbb{R}^3$ 上の標準接触構造という．

定義 2. 3 次元接触多様体 (M, ξ) 内の滑らかな結び目 K がルジャンドル結び目であるとは，K の各点 p における K の接線が接触平面 ξ_p に含まれるときをいう．

定義 3. 3 次元接触多様体 (M, ξ) 内の 2 つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 に対して，M のアイソトピー φ_t であって，$\varphi_0 = \mathrm{id}_M$, $\varphi_1(K_0) = K_1$, $\varphi_t(K_0)$ が任意の $t \in [0, 1]$ に対してルジャンドル結び目となるようなものがあるとき，K_0 は K_1 にルジャンドル同位であるという．

従って，ルジャンドル同位は全同位よりも厳しい同値関係である．実際に，図 1 の 2 つのルジャンドル結び目は全同位だがルジャンドル同位ではない．

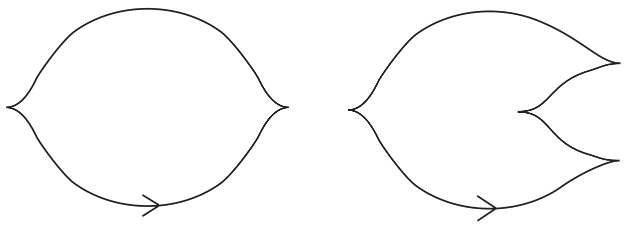


図 1　ルジャンドル同位でないルジャンドル結び目の組

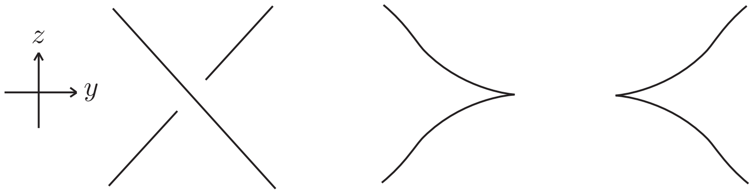


図 2　フロント図式に現れる交点とカスプ

以下，$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内のルジャンドル結び目のルジャンドル同位による分類について考える．

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

をフロント射影と呼ぶ．ルジャンドル結び目のフロント図式は以下のような 2 つの特徴がある．
(1) 接ベクトルの y 成分が 0 となる点は yz-平面上ではカスプと呼ばれる特異点になる．
(2) 各交点において，上交差の傾きは下交差の傾きより小さい．
フロント図式に関して次の定理が知られている．

定理 4. $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内の 2 つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 がルジャンドル同位であるための必要十分条件は，K_0 のフロント図式にルジャンドル・ライデマイスター変形と呼ばれる 3 種類の局所変形を有限回行って K_1 のフロント図式が得られることである．

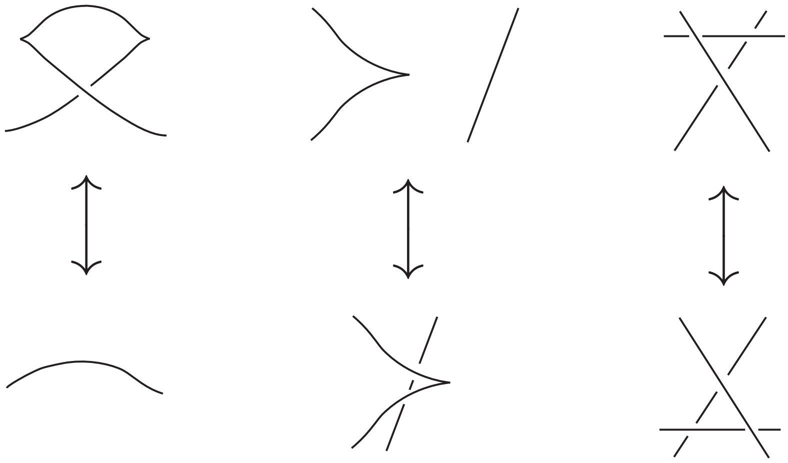


図 3　ルジャンドル・ライデマイスター変形

次に，ルジャンドル結び目の代表的な不変量について紹介する．ルジャンドル結び目 K の最も基本的な不変量は K の結び目型であるが，その次に基本的な不変量として，Thurston-Bennequin 数 $tb(K)$ と回転数 $rot(K)$ が知られている．この 2 つの不変量はルジャンドル結び目の古典的な不変量と呼ばれている．Thurston-Bennequin 数と回転数はともに整数値の不変量であり，Thurston-Bennequin 数が向き付けられていないルジャンドル結び目の不変量であるのに対して，回転数は向き付けられたルジャンドル結び目の不変量である．ルジャンドル結び目 K の Thurston-Bennequin

数と回転数は K のフロント図式 D から次のように計算できる．

$$tb(K) = w(D) - \frac{1}{2}c(D),$$
$$rot(K) = \frac{1}{2}(dc(D) - uc(D)).$$

ここで，$w(D)$ は D の writhe，$c(D)$ は D のカスプの個数，$dc(D)$ は D の下向きに通過するカスプの個数，$uc(D)$ は D の上向きに通過するカスプの個数である．
また，ルジャンドル結び目 K の向きを逆にした結び目を $-K$ と書くと，$rot(-K) = -rot(K)$ である．

図 1 の 2 つのルジャンドル結び目がルジャンドル同位でないことは古典的な不変量の値が異なることからわかる．実際，図 1 の左側のルジャンドル結び目は $tb = -1$, $rot = 0$ に対し，図 1 の右側のルジャンドル結び目は $tb = -2$, $rot = -1$ である．

古典的な不変量は比較的強力な不変量であることが知られている．例えば，位相的に自明なルジャンドル結び目は古典的な不変量によって完全に分類できることが示されている [3].

2　2-ルジャンドルラック

本節では，2-ルジャンドルラックを定義し，フロント図式の 2-ルジャンドルラック彩色数がルジャンドル結び目の不変量となることを述べる．

最初にラックとカンドルの定義を復習する．

定義 5. 集合 X 上の二項演算 $*$ が，任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$*x \text{ は} X \text{ 上の全単射},$$
$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

を満たすとき，$(X, *)$ をラックという．ラック $(X, *)$ が 任意の $x \in X$ に対して $x * x = x$ を満たすとき，$(X, *)$ をカンドルという．

定義 5 におけるカンドルの公理は結び目図式のライデマイスター変形に対応していることから，結び目図式のカンドル彩色数は，図式のとり方に依らず，結び目の不変量となる．

ルジャンドル結び目の不変量を同様の方法で得るために，ルジャンドル・ライデマイスター変形に対応するような公理を考えた．それが次の定義 6 である．

定義 6 (K)**.** ラック $(X, *)$ と X 上の写像 f, g が任意の $x, y \in X$ に対して以下の条件を満たすとき，$(X, *, f, g)$ を 2-ルジャンドルラックと呼ぶ.

$$f \circ g = g \circ f,$$
$$fg(x * x) = x,$$
$$f(x * y) = f(x) * y,$$
$$g(x * y) = g(x) * y,$$
$$x * f(y) = x * y,$$
$$x * g(y) = x * y.$$

注意 7. $(X,*,f,g)$ を 2-ルジャンドルラックとすると，$(X,*,f,g)$ が 2-ルジャンドルカンドルになる必要十分条件は f と g が互いに逆写像であることである．

2-ルジャンドルラックの簡単な例を紹介する．

例 2. $(G,*)$ を共役カンドルとする．G の中心の元 z を任意にとって，G 上の写像 f を $f(x) := zx$ $(x \in G)$ と定めると，$(G,*,f,f^{-1})$ は 2-ルジャンドルカンドルになる．

例 3. 集合 X 上の全単射 f と g を可換であるようにとる．X 上の二項演算 $*$ を

$$x * y := (f \circ g)^{-1}(x)$$

と定めると，$(X,*,f,g)$ は constant 2-ルジャンドルラックである．

2-ルジャンドルラックによるフロント図式の彩色を考える．交点とカスプにおける arc の color の間の関係式を図 4 のように設定する．

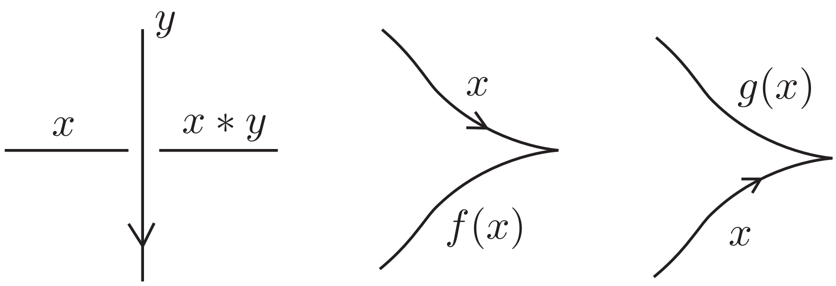


図 4　交点とカスプにおける関係式

交点とカスプにおける関係式をこのように定めると，定義 6 の 6 つの条件がルジャンドル・ライデマイスター変形に対応していることを確かめられる．即ち，次の命題が成立する．

命題 8 (K)**.** $(\mathbb{R}^3,\ \xi_{std})$ 内のルジャンドル結び目 K の フロント図式を D とする． $(X,*,f,g)$ を 2-ルジャンドルラックとする．このとき，D の $(X,*,f,g)$-彩色数はルジャンドル・ライデマイスター変形で不変である．従って，D の $(X,*,f,g)$-彩色数はルジャンドル結び目 K の不変量である．この不変量を $\#\mathrm{Col}(K,X)$ と書く．

3　2-ルジャンドルラック彩色数によるルジャンドル結び目の区別

2-ルジャンドルラック彩色数の不変量としての強さを古典的な不変量との比較を通して考える．まず，Thurston-Bennequin 数が一致するようなルジャンドル結び目の組を 2-ルジャンドルラック彩色数で区別できることがわかった．それが次の定理 9 である．

定理 9 (K)**.** 任意の非負整数 n に対して，ある 2-ルジャンドルラック $(X_n,*,f,g)$ が存在して，$tb(K) = -1-n$ であるような位相的に自明なルジャンドル結び目 K を $\#\mathrm{Col}(K,X_n)$ によって全て区別できる．

Bennequin の不等式と Eliashberg-Fraser の結果 [3] から，任意の位相的に自明なルジャンドル結び目は，ある非負整数 p, n $(0 \leq p \leq n)$ に対して，図 5 の $K_{p,n}$ とルジャンドル同位となることがわかる． また，$K_{p,n}$ の古典的な不変量の値は $tb(K_{p,n}) = -1 - n$, $rot(K_{p,n}) = 2p - n$ である．

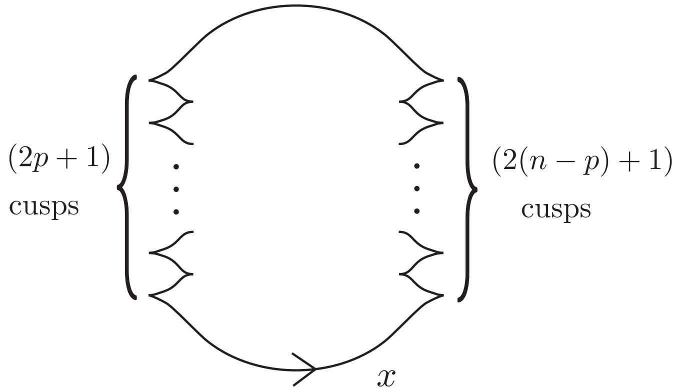


図 5　位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{p,n}$

従って，定理 9 の主張は，$(n+1)$ 個の位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{0,n}, K_{1,n}, \cdots, K_{n,n}$ を $(X_n, *, f, g)$-彩色数で区別できるということである．定理 9 の証明において，$(X_n, *, f, g)$ として constant 2-ルジャンドルラックを用いた．

注意 10. [1] で定義されたルジャンドルラック彩色数を用いても，位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{0,n}, K_{1,n}, \cdots, K_{n,n}$ を区別することはできない．

定理 9 において 2-ルジャンドルラック彩色数を用いて区別した $K_{0,n}, K_{1,n}, \cdots, K_{n,n}$ は Thurston-Bennequin 数は一致していたが，回転数は異なっていた．そこで次は，Thurston-Bennequin 数と回転数の両方が一致するようなルジャンドル結び目の組を 2-ルジャンドルラック彩色数で区別できるかどうか考えたい．

この問題に対する部分的な解答として，次の定理 11 と定理 12 を得た．

定理 11 (K)**.** $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内の 2 つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 の結び目型が同じで，$tb(K_0) = tb(K_1)$, $rot(K_0) = rot(K_1)$ とする．このとき，任意の 2-ルジャンドルカンドル $(X, *, f, g)$ に対して $\#\mathrm{Col}(K_0, X) = \#\mathrm{Col}(K_1, X)$ が成り立つ．

図 6 のルジャンドル結び目 K_2 と K_3 の結び目型は 5_2 であり，$tb(K_2) = tb(K_3) = 1$, $rot(K_2) = rot(K_3) = 0$ であるが，K_2 と K_3 はルジャンドル同位でないことが示されている [2]．K_2 と K_3 は Chekanov 結び目と呼ばれる．

定理 12 (K)**.** Chekanov 結び目 K_2 と K_3 について次が成り立つ．任意の有限 2-ルジャンドルラック $(X, *, f, g)$ に対して $\#\mathrm{Col}(K_2, X) = \#\mathrm{Col}(K_3, X)$.

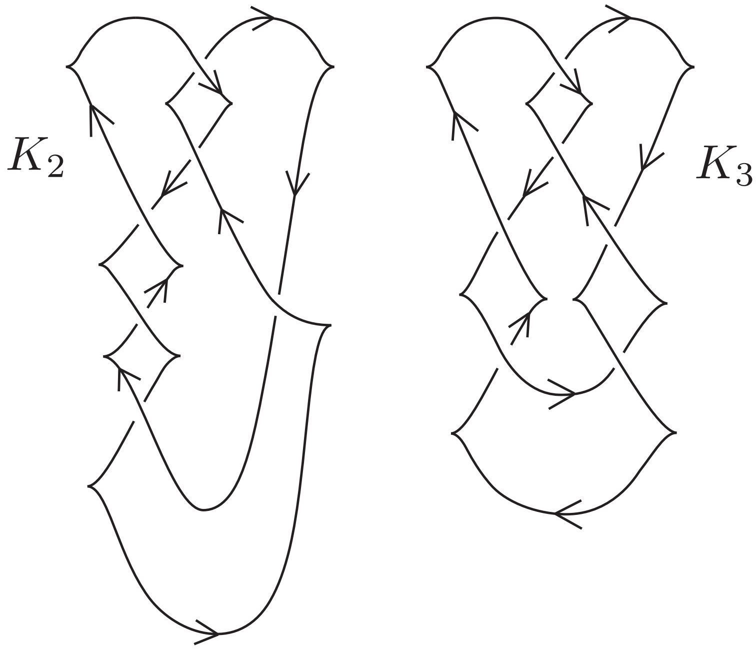


図 6　Chekanov 結び目

参考文献

[1] J. Ceniceros, M. Elhamdadi and S. Nelson, *Legendrian rack invariants of Legendrian knots*, Commun. Korean Math. Soc. 36 (2021), no. 3, 623-639.

[2] Y. Chekanov, *Differential algebra of Legendrian links*, Invent. Math. 150 (2002), no. 3, 441-483.

[3] Y. Eliashberg and M. Fraser, *Topologically trivial Legendrian knots*, J. Symplectic Geom. 7 (2009), no. 2, 77-127.

[4] D. Kulkarni and V. Prathamesh, *On rack invariants of Legendrian knots*, (2017), arXiv:1706.07626.

弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像の構造

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科数物科学専攻　修士 2 年

絹野 凜

概要

結び目の領域交差交換 ([3]) を用いた領域選択ゲームと領域凍結交差交換 ([1]) をゲームとして考えたものの，“領域” の代わりに “弧” を選択する弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームについて，それぞれクリアできるための必要十分条件と，クリアの仕方が何通りあるのかを示す．また，結び目の数理 IV にてご質問いただいた弧交差交換および弧凍結交差交換について改めて定義し，これらが結び目解消操作であることを示す．

1　準備

G を結び目射影図とする．つまり S^1 の平面へのはめこみとすると，G は各頂点の次数が 4 のグラフである．図 1 のように，両端点が同じ頂点である辺を**ループ**という．本稿では，ループのない射影図および図式のみを扱う．

$V(G)$ をグラフ G の頂点全体の集合，$E(G)$ をグラフ G の辺全体の集合とする．$A, B \in 2^{E(G)}$ または $A, B \in 2^{V(G)}$ に対して，A と B の和を対称差で定義する．つまり，

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$2^{E(G)}, 2^{V(G)}$ は，対称差を和とする $\mathbb{Z}_2$-線型空間とみなすことができる．本稿では，集合 X の濃度を $|X|$ または $\#X$ と表すことにする．

注意 1. $X = E(G)$ または $V(G)$，$|X| < \infty$ とする．$A_1, A_2 \in 2^X$ ならば

$$|A_1 + A_2| \equiv |A_1| + |A_2| \pmod 2.$$

G を結び目射影図とし，G の交点 v を 1 つ選ぶ．G に向きを与え，図 2 のように向きを保ったまま結び目射影図をつなぎかえて v をなくす操作のことを**スプライス**という．結び目射影図を 1 回スプライスすると，2 つの結び目射影図が重なったものになる．

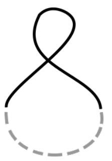


図 1　ループ

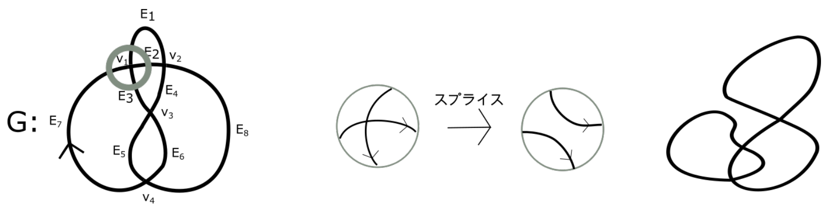


図 2　スプライス

G を結び目射影図とし，$E(G)=\{E_1,\dots,E_{2q}\}$，$V(G)=\{v_1,\dots,v_q\}$ とする．**接続行列** $A(G)$ を (i,j) 成分 m_{ij} が以下で定義される $2q\times q$ 行列とする．

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (v_j\in\partial E_i)\\ 0 & (v_j\notin\partial E_i).\end{cases}$$

ただし，∂E_i は E_i の 2 つの端点からなる集合を表す．

2　弧選択ゲームから導かれる準同型写像 φ の構造

2.1　弧選択ゲーム

領域選択ゲームの "領域" の代わりに "弧" を選択する**弧選択ゲーム** (図 3) のルールを次のように定義する ([4]).

- 結び目射影図の各頂点にオンとオフの切り替えられるランプを置く．
- 弧を選択すると，その弧の両端のランプのオンとオフが切り替わる．
- すべてのランプがオンになるとゲームクリアとなる．

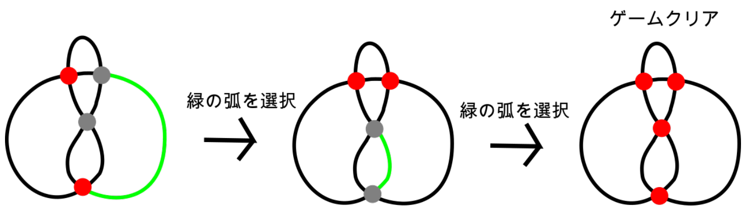


図 3　弧選択ゲームの例

2.2　弧選択ゲームから導かれる準同型写像 φ

G を結び目射影図とし，$V(G),E(G)$ をそれぞれ G の頂点の集合，辺の集合とする．それぞれの頂点 v において，$d_v:2^{E(G)}\to\mathbb{Z}$ を次のように定義する．$H\in 2^{E(G)}$ に対して，

$$d_v(H):=\#\{E_\alpha\in H\mid v\in\partial E_\alpha\}.$$

また，写像 $\varphi:2^{E(G)}\to 2^{V(G)}$ を以下のように定義する．$H(\in 2^{E(G)})$ に対して，

$$\varphi(H):=\{v\mid d_v(H)\equiv 1\pmod 2\}.$$

命題 2.1. ([5, 命題 2.1]) φ は準同型写像である．

命題 2.2. ([5, 命題 2.2]) 次の (1) と (2) は同値である．

(1) $v\in\varphi(H)$,
(2) 弧選択ゲームにおいて，H を選択することで v のランプのオン・オフが切り替わる．

2.3　準同型写像 φ の構造

G を結び目射影図とし，$E(G)=\{E_1,\dots,E_{2q}\},V(G)=\{v_1,\dots,v_q\}$ とする．

2.3.1 φ の置き換え

$I_{E(G)} : 2^{E(G)} \to \mathbb{Z}_2^{2q}$ を以下のように与えられる同型写像とする．

$$\begin{aligned} I_{E(G)}(\{E_1\}) = \boldsymbol{a_1} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{2q}, \\ I_{E(G)}(\{E_2\}) = \boldsymbol{a_2} = (0, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{2q}, \\ \vdots \\ I_{E(G)}(\{E_{2q}\}) = \boldsymbol{a_{2q}} = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_2^{2q}. \end{aligned}$$

$I_{V(G)} : 2^{V(G)} \to \mathbb{Z}_2^{q}$ を以下のように与えられる同型写像とする．

$$\begin{aligned} I_{V(G)}(\{v_1\}) = \boldsymbol{f_1} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{q}, \\ I_{V(G)}(\{v_2\}) = \boldsymbol{f_2} = (0, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{q}, \\ \vdots \\ I_{V(G)}(\{v_q\}) = \boldsymbol{f_q} = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_2^{q}. \end{aligned}$$

準同型写像 $I_{V(G)} \circ \varphi \circ (I_{E(G)})^{-1} : \mathbb{Z}_2^{2q} \to \mathbb{Z}_2^{q}$ を $\tilde{\varphi}$ で表す．基底 $\{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{2q}}\}$ と $\{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_q}\}$ に関して，$A(G)$ の定義から，$\tilde{\varphi}$ は $A(G)$ を表現行列にもつ $\mathbb{Z}_2$-線形写像であることがわかる．(すなわち $x \in \mathbb{Z}_2^{2q}$ に対して，$\tilde{\varphi}(x) = xA(G)$．) したがって準同型写像 φ は，$\varphi = (I_{V(G)})^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ I_{E(G)}$ と表される．

2.3.2 $\mathrm{Im}\varphi$

この節では，$\dim(\mathrm{Im}\varphi)$ を G の頂点の数 q を用いて表し，その基底を与える．

命題 2.3. ([5, 命題 3.1]) $\dim(\mathrm{Im}\varphi) < q$.

命題 2.4. ([5, 命題 3.2]) $i = 1, 2, \ldots, q-1$ に対して

$$\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{f_q} \in \mathrm{Im}\tilde{\varphi}.$$

命題 2.5. ([5, 命題 3.3]) $\boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_q}, \boldsymbol{f_2} + \boldsymbol{f_q}, \ldots, \boldsymbol{f_{q-1}} + \boldsymbol{f_q}$ は一次独立である．

命題 2.3，命題 2.4，命題 2.5 より次の定理が得られる．

定理 2.6. ([5, 定理 3.4]) $\dim(\mathrm{Im}\varphi) = q - 1$.

系 2.7. ([5, 系 3.5]) $\{\{v_1, v_q\}, \ldots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ は $\mathrm{Im}\varphi$ の基底である．

系 2.7 より，任意の $i, j (i \neq j)$ に対して $\{v_i, v_j\} \in \mathrm{Im}\varphi$ であることもいえる．さらに系 2.7 と注意 1 より次の系が成り立つ．

系 2.8. ([5, 系 3.6]) $V \in 2^{V(G)}$ に対して，次の (1) と (2) は同値である．

(1) $V \in \mathrm{Im}\varphi$,
(2) V は偶数個の頂点の集合．

つまり，弧選択ゲームがクリアできるための必要十分条件は，偶数個のランプがオフであることである．

2.3.3 $\mathrm{Ker}\varphi$

この節では，$\mathrm{Ker}\varphi$ について考える．まず，命題 2.2 より，以下が導かれる．

命題 2.9. ([5, 命題 3.7]) 次の (1) と (2) は同値である．

(1) $H \in \mathrm{Ker}\varphi$,

(2) 弧選択ゲームにおいて，H を選択したときにすべてのランプのオン・オフの状態が変わらない．

準同型定理より次の系がわかる．

系 2.10. ([5, 系 3.8]) $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = q + 1$.

結び目射影図 G から 1 つ弧を選び，選んだ弧を e_X とする．各 v_i に対して，v_i でスプライスし，e_X を含まない成分に対応する $E(G)$ の部分集合を B_i とする (図 4)．また，$E(G)$ を B_0 とする．

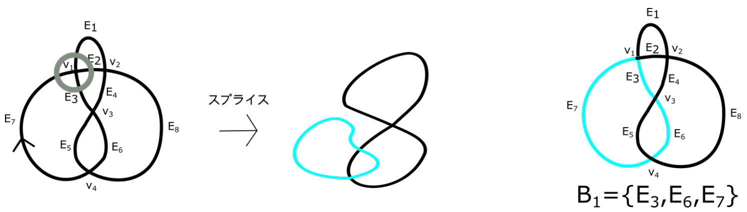


図 4　$e_X = E_1$ とし v_1 でスプライスをした様子と B_1

例 2.1. 8 の字結び目の B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 は図 5 のようになる．($e_X = E_1$ としている．)

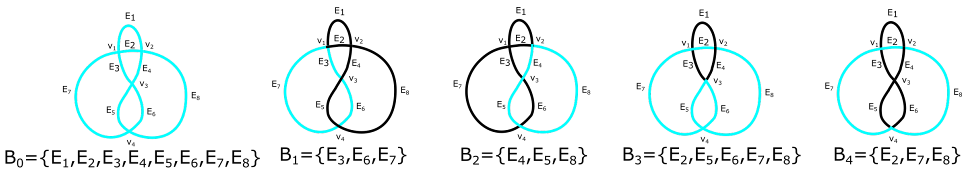


図 5　8 の字結び目の B_i

命題 2.11. ([5, 命題 3.9]) $\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ は $\mathrm{Ker}\varphi$ の基底である．

証明. $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = q + 1$ より，$\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ が一次独立であることを示せばよい．$\varepsilon_0 B_0 + \varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_2 B_2 + \cdots + \varepsilon_q B_q = \emptyset$ とする．$e_X \notin B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_q$ で，$e_X \in B_0$ であるので，$\varepsilon_0 = 0$.

次に，v_i の近傍に注目する．v_i に接続する 4 つの弧を時計回りに $e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, e_{i4}$ とする．図 6，7 より，$e_{i1} \in B_i \Leftrightarrow e_{i3} \notin B_i$ かつ各 $j(\neq i)$ に対して $e_{i1} \in B_j \Leftrightarrow e_{i3} \in B_j$ が成り立つ．よって $\varepsilon_i = 0$.

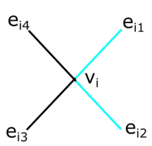


図 6　B_i の v_i の近傍

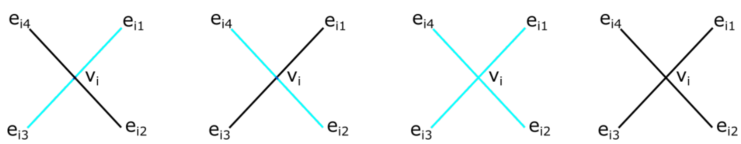


図 7　B_j の v_i の近傍

したがって $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_q = 0$ であるから，$\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ は一次独立である．よって，$\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ は $\mathrm{Ker}\varphi$ の基底である． □

系 2.12. ([5, 系 3.10]) クリアできる 1 つの解を H_X とし，固定する．すべての解は $H_X + \Sigma_{i=0}^{q} \varepsilon_i B_i (\varepsilon_i \in \{0, 1\})$ と表される．つまり，クリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある．

3　弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像 ψ の構造

3.1　弧凍結選択ゲーム

弧凍結選択ゲーム (図 8) のルールを次のように定義する．

- 結び目射影図の各頂点にオンとオフの切り替えられるランプを置く．
- 弧を選択すると，その弧の両端以外のすべてのランプのオンとオフが切り替わる．
- すべてのランプがオンになるとゲームクリアとなる．

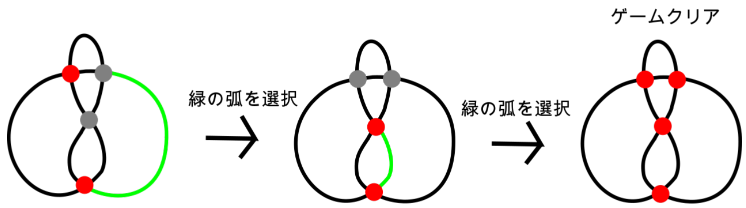


図 8　弧凍結選択ゲームの例

3.2　弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像 ψ

$G, E(G), V(G)$ および写像 $d_v : 2^{E(G)} \to \mathbb{Z}$ と $\varphi : 2^{E(G)} \to 2^{V(G)}$ を 2.2 節のように定義する．さらに，写像 $\psi : 2^{E(G)} \to 2^{V(G)}$ を以下のように定義する．$H(\in 2^{E(G)})$ に対して，

$$\psi(H) := \begin{cases} \{v \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod 2\} & (|H| \equiv 0 \pmod 2) \\ \{v \mid d_v(H) \equiv 0 \pmod 2\} & (|H| \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

φ と ψ の定義を比較することによって，以下がわかる．

命題 3.1. ([5, 命題 2.3]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して
・$|H| \equiv 0 \pmod 2$ のとき，$\psi(H) = \varphi(H)$,
・$|H| \equiv 1 \pmod 2$ のとき，$\psi(H) = V(G) \setminus \varphi(H) = V(G) + \varphi(H)$.

命題 3.2. ([5, 命題 2.4]) ψ は準同型写像である．

命題 3.3. ([5, 命題 2.5]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して，次が成り立つ．

- $|H| \equiv 0 \pmod 2$ ならば，弧凍結選択ゲームにおいて H を選択した結果は，弧選択ゲームにおいて H を選択した結果と一致する．
- $|H| \equiv 1 \pmod 2$ ならば，弧凍結選択ゲームにおいて H を選択した結果は，弧選択ゲームにおいて H を選択し，さらにすべてのランプのオン・オフを切り替えたものと一致する．

命題 2.2，命題 3.1，命題 3.3 より次の命題がわかる．

命題 3.4. ([5, 命題 2.6]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して，次の (1) と (2) は同値である．

(1) $v \in \psi(H)$,
(2) 弧凍結選択ゲームにおいて，H を選択することによって v のランプのオン・オフが切り替わる．

3.3 準同型写像 ψ の構造

G を結び目射影図とし，$E(G) = \{E_1, \ldots, E_{2q}\}, V(G) = \{v_1, \ldots, v_q\}$ とする．$\varphi : 2^{E(G)} \to 2^{V(G)}$ を 2.2 節のように定義する．また，$\psi : 2^{E(G)} \to 2^{V(G)}$ を 3.2 節のように定義する．

3.3.1 ψ の置き換え

$I_{V(G)}$，$I_{E(G)}$ を 2.3.1 節のように定義する．

命題 3.5. ([5, 命題 4.1]) $I_{E(G)}(H) = \sum_{i=1}^{2q} \varepsilon_i \boldsymbol{a}_i$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) とすると

$$|H| \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2q} \varepsilon_i \equiv 0 \pmod 2.$$

$\tilde{\psi} : \mathbb{Z}_2^{2q} \to \mathbb{Z}_2^q$ を $I_{V(G)} \circ \psi \circ (I_{E(G)})^{-1}$ で表される準同型写像とする．命題 3.1 より，次の命題がわかる．

命題 3.6. ([5, 命題 4.2]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して

- $|H| \equiv 0 \pmod 2$ のとき $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$.
- $|H| \equiv 1 \pmod 2$ のとき $\tilde{\psi}(X) = (1, 1, \ldots, 1) + \tilde{\varphi}(X)$.

3.3.2 $\mathrm{Im}\psi$

この節では，$\dim(\mathrm{Im}\psi)$ を G の頂点の数 q を用いて表し，その基底を与える．$\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ を 2.3.3 節で与えた $\mathrm{Ker}\varphi$ の基底とする．

補題 3.7. ([5, 補題 4.3]) $i = 1, 2, \ldots, q$ に対して $|B_i| \equiv 1 \pmod 2$.

証明. v_i でスプライスすると，G は 2 成分になる．e_X を含まない方の頂点の数を r とすると，弧の数は $2r$ である．これらに対応する G の弧の数は $2r + 1$ となるから，$|B_i| \equiv 1 \pmod 2$. □

補題 3.8. ([5, 補題 4.4]) $i = 1, 2, \ldots, q$ に対して $\psi(B_i) = V(G)$.

証明. 補題 3.7 と命題 3.1 および $B_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ より，$\psi(B_i) = V(G) + \varphi(B_i) = V(G)$. □

定理 3.9. ([5, 定理 4.5])

(1) $q \equiv 1 \pmod 2$ のとき $\dim(\mathrm{Im}\psi) = q$.
(2) $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき $\dim(\mathrm{Im}\psi) = q - 1$.

系 3.10. ([5, 系 4.6])

(1) $q \equiv 1 \pmod 2$ のとき，任意の初期状態において弧凍結選択ゲームをクリアすることができる．
(2) $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，次の (2-1) と (2-2) は同値である．
  (2-1) $V \in \mathrm{Im}\psi$,
  (2-2) V は偶数個の頂点の集合.

つまり，$q \equiv 1 \pmod 2$ のとき，弧凍結選択ゲームは任意の初期状態においてクリアすることができる．また，$q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，弧凍結選択ゲームがクリアできるための必要十分条件は，偶数個のランプがオフであることである．

3.3.3 Kerψ

定理 3.9 と準同型定理より次の補題が導かれる．

補題 3.11. ([5, 補題 4.7])

- $q \equiv 1 \pmod 2$ のとき，$\dim(\mathrm{Ker}\psi) = q$.
- $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，$\dim(\mathrm{Ker}\psi) = q+1$.

この節では，Kerψ の基底を求める．まず 3.2 節の命題 3.4 より以下が導かれる．

命題 3.12. ([5, 命題 4.8]) 次の (1) と (2) は同値である．

(1) $H \in \mathrm{Ker}\psi$,
(2) 弧凍結選択ゲームにおいて，H を選択したときにすべてのランプのオン・オフの状態が変わらない．

命題 3.1 より，次がわかる．
場合 1：$|H| \equiv 0 \pmod 2$.
$\psi(H) = \varphi(H)$ であるから，次の (1) と (2) は同値である．

(1) $|H| \equiv 0 \pmod 2$ かつ $H \in \mathrm{Ker}\varphi$,
(2) $|H| \equiv 0 \pmod 2$ かつ $H \in \mathrm{Ker}\psi$.

場合 2：$|H| \equiv 1 \pmod 2$.
$\psi(H) = V(G) + \varphi(H)$ であるから，次の (3) と (4) は同値である．

(3) $|H| \equiv 1 \pmod 2$ かつ $\varphi(H) = V(G)$,
(4) $|H| \equiv 1 \pmod 2$ かつ $H \in \mathrm{Ker}\psi$.

$\{B_0, B_1, \ldots, B_q\}$ を 2.3.3 節で与えた Kerφ の基底とし，$B_{1,i} \coloneqq B_1 + B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, q)$ とする．

補題 3.13. ([5, 補題 4.9]) $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}\}$ は一次独立である．

定理 3.14. ([5, 定理 4.10]) $q \equiv 1 \pmod 2$ のとき，$\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}\}$ は Kerψ の基底となる．

補題 3.15. ([5, 補題 4.11]) $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，$|H| \equiv 1 \pmod 2$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が存在する．

証明. $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき $(1, 1, 1, \ldots, 1, 1) \in \mathrm{Im}\tilde{\varphi}$ より，$\varphi(H') = V(G)$ となる H' が存在する．
$|H'| \equiv 1 \pmod 2$ ならば，$H = H'$ とすることで，$|H| \equiv 1 \pmod 2$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が得られる．
$|H'| \equiv 0 \pmod 2$ ならば，$H = H' + B_1$ とする．$|B_1| \equiv 1 \pmod 2$ と注意 1 より $|H| = |H' + B_1| \equiv |H'| + |B_1| \equiv 1 \pmod 2$．また, $B_1 \in \mathrm{Ker}\varphi$ より $\varphi(H) = \varphi(H' + B_1) = \varphi(H') + \varphi(B_1) = \varphi(H') = V(G)$.
したがって，$|H'| \equiv 0 \pmod 2$ のときも，$|H| \equiv 1 \pmod 2$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が必ず存在する． □

補題 3.15 を満たす H を B_X とする．

補題 3.16. ([5, 補題 4.12]) $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}$ は一次独立である．

定理 3.17. ([5, 定理 4.13]) $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，$\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}$ は Kerψ の基底となる．

定理 3.17 を示すために，$\mathrm{Ker}\psi = \{H \in \mathrm{Ker}\psi \mid |H| \equiv 0 \pmod 2\} \cup \{H \in \mathrm{Ker}\psi \mid |H| \equiv 1 \pmod 2\}$, $A_0 \coloneqq \{H \in \mathrm{Ker}\psi \mid |H| \equiv 0 \pmod 2\}$，$A_1 \coloneqq \{H \in \mathrm{Ker}\psi \mid |H| \equiv 1 \pmod 2\}$ とする．

補題 3.18. ([5, 補題 4.14])

$$S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}\}\rangle = A_0.$$

補題 3.19. ([5, 補題 4.15]) A_0 の任意の元 B' に対して，$B' + B_X \in A_1$.

証明. (定理 3.17) まず $\mathrm{Ker}\psi \supset S\langle\{B_0, B_{1,2}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$ を示す．$S \coloneqq S\langle\{B_0, B_{1,2}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$ とかく．$H_s \in S$ とすると，$H_s = \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \cdots + \alpha_q B_{1,q} + \alpha_{q+1} B_X$ をみたす $a_1, \ldots, \alpha_{q+1} \in \mathbb{Z}_2$ が存在する．

$\alpha_{q+1} = 0$ のとき，補題 3.18 より

$$H_s = \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \cdots + \alpha_q B_{1,q} \in S\langle\{B_0, B_{1,2}, \ldots, B_{1,q}\}\rangle = A_0 \subset \mathrm{Ker}\psi.$$

$\alpha_{q+1} = 1$ のとき，$H_s = B' + B_X$（ただし，$B' \coloneqq \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \cdots + \alpha_q B_{1,q}$）．補題 3.19 より $H_s \in A_1 \subset \mathrm{Ker}\psi$.

よって，$\mathrm{Ker}\psi \supset S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$.

補題 3.16 より $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}$ は一次独立で，補題 3.11 より $\dim(\mathrm{Ker}\psi) = q + 1$ であるから，$\mathrm{Ker}\psi = S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$．よって，$\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \ldots, B_{1,q}, B_X\}$ は $\mathrm{Ker}\psi$ の基底である． □

定理 3.14 と定理 3.17 より次がわかる．

系 3.20. ([5, 系 4.16]) クリアできる 1 つの解を H_X とし，固定する．

- $q \equiv 1 \pmod 2$ のとき，すべての解は $H_X + \varepsilon_0 B_0 + \sum_{i=2}^{q} \varepsilon_i B_{1,i} (\varepsilon_i \in \{0, 1\})$ と表されるので，クリアの仕方は全部で 2^q 通りある．
- $q \equiv 0 \pmod 2$ のとき，すべての解は $H_X + \varepsilon_0 B_0 + \varepsilon_1 B_X + \sum_{i=2}^{q} \varepsilon_i B_{1,i} (\varepsilon_i \in \{0, 1\})$ と表されるので，クリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある．

4 結び目図式における弧交差交換と弧凍結交差交換

結び目図式のある交差点の上下を入れ替える操作を**交差交換**という．結び目図式のある局所変形について，その局所変形を有限回行うことで任意の結び目図式を自明な結び目の図式に変形することができるとき，その局所変形を**結び目解消操作**という．結び目図式 D に対し，交差点を避けてある 1 点，すなわち**基点**をとる．D を基点から向きに沿って 1 周たどっていくとき，すべての交差点において常に先に上側を通るように基点をとることができるとき，D は**単調である**という．結び目図式を交差交換することで，単調な図式に変形することができるので，交差交換は結び目解消操作である．

結び目図式から交差点 (とその近傍) を除いたものの各連結成分を**弧**という．弧は結び目図式を 4 価グラフとみなしたときの辺にあたるもの，と言ってもよい．(この論文における弧は，通常結び目図式の弧と呼ばれるものと異なり，semi-arc 等と呼ばれるものである．) ある弧 e で**弧交差交換**をするとは，図 9 のようにその弧の両端の交差点において交差交換をすることである．また，ある弧 e で**弧凍結交差交換**をするとは，図 10 のようにその弧の両端以外のすべての交差点において交差交換することである．この章では結び目射影図の弧選択ゲームと弧凍結選択ゲームの応用として，弧交差交換と弧凍結交差交換が結び目解消操作であることを示す．

系 3.10 より，次の定理がわかる．

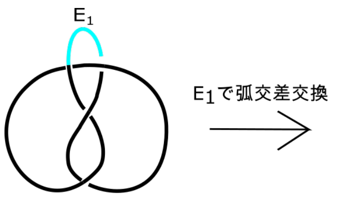


図 9　弧交差交換

図 10　弧凍結交差交換

定理 4.1. 結び目図式の交差点の数を q とする.

- $q \equiv 1 \pmod 2$ ならば，任意の交差点での交差交換が弧凍結交差交換によって実現できる．つまり，有限回の弧凍結交差交換を行うことによって，任意の交差点のみを交差交換することができる.
- $q \equiv 0 \pmod 2$ ならば，どの交差点での交差交換も弧凍結交差交換によって実現できない.

系 2.8 より，次の定理がわかる.

定理 4.2. どの交差点での交差交換も，弧交差交換によって実現できない.

命題 3.1 より，次の命題がわかる.

命題 4.3. 弧交差交換をする弧の集合を H とする.

- $|H| \equiv 0 \pmod 2$ のとき，弧交差交換をして得られる図式は弧凍結交差交換をして得られる図式と一致する.
- $|H| \equiv 1 \pmod 2$ のとき，弧交差交換をして得られる図式は弧凍結交差交換をして得られる図式の鏡像と一致する.

定理 4.1 と命題 4.3 より，$q \equiv 1 \pmod 2$ のときは弧交差交換および弧凍結交差交換が結び目解消操作であることがわかる．さらに次のように q の偶奇に依らず，弧交差交換が結び目解消操作であることを証明できる.

定理 4.4. 弧交差交換は結び目解消操作である．特に，ライデマイスター移動を用いずに単調な図式にすることができる.

証明. 交差点を 1 つ選び，v_0 とする．v_0 から向きに沿って結び目をたどり，道に $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_{2q}v_{2q}(v_{2q}=v_0)$ とラベルをつける．ただし，v_i は交差点，e_i は v_{i-1} と v_i を結ぶ弧とする．v_0 以外の交差点には 2 つずつラベルがつき，v_0 には v_0, v_{2q} ともう一つのラベルがついている．ここで，v_0 以外の交差点 v に対して $v=v_i=v_j(i<j)$ となっているとする．e_ie_{i+1} が e_je_{j+1} より下にある場合，つまり図 11 のいずれかの形になっているとき，$H_i=\{e_1,\ldots,e_i\}$ で弧交差交換を行う．この操作を $v_i=v_j(i<j)$ と図 11 を満たす v_0

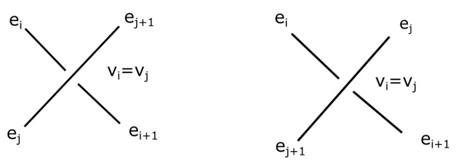


図 11　e_ie_{i+1} が e_je_{j+1} より下にある場合

以外のすべての交差点に対して行うと，単調な図式が得られる．したがって，弧交差交換は結び目解消操作である. □

補題 4.3 と定理 4.4 より次の定理が導かれる.

定理 4.5. 弧凍結交差交換は結び目解消操作である. 特に, ライデマイスター移動を用いずに単調な図式 (またはその鏡像) にすることができる.

注意 2. ライデマイスター移動も許せば, 図 13 のように弧交差交換によって図 12 の Δ **変形**が実現できる.

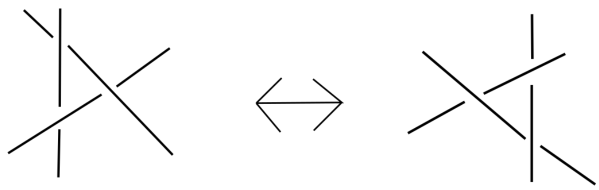


図 12　Δ 変形

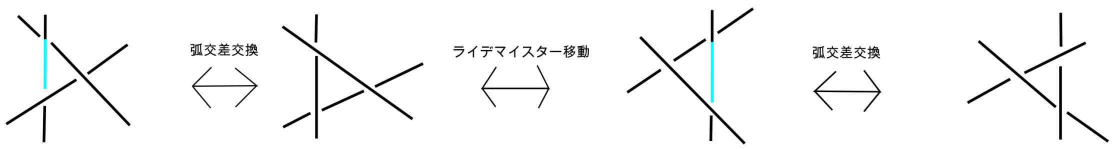


図 13　弧交差交換を用いた Δ 変形

注意 3. ライデマイスター移動も許せば, 図 14 のように弧凍結交差交換によって図 12 の Δ 変形が実現できる.

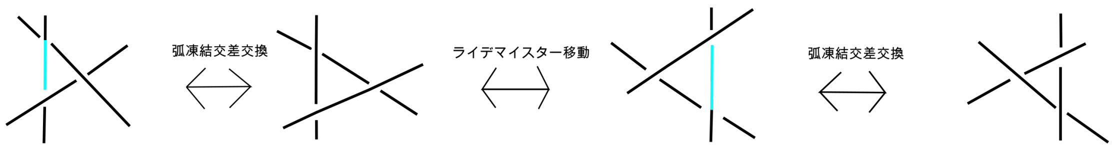


図 14　弧凍結交差交換を用いた Δ 変形

Δ 変形は結び目解消操作 [2] なので, 弧交差交換および弧凍結交差交換も結び目解消操作である.

参考文献

[1] A. Inoue and R. Shimizu: A subspecies of region crossing change, region freeze crossing change, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 14, 1650075, 9pp.

[2] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann. **284** (1989), no. 1, 75–89.

[3] A. Shimizu: Region crossing change is an unknotting operation, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no.3, 693–708.

[4] 松本知子: 結び目理論によるパズル解析, 2012 年山口大学理学部数理科学科卒業論文.

[5] 絹野凜: 弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像の構造とゲームの攻略法, 2022 年奈良女子大学修士論文.

仮想絡み目の JKSS 不変量について

加藤 広太 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

JKSS 不変量は, Jaeger, Kauffman, Saleur によって曲面上の絡み目図式に対して定義され, Sawollek により仮想絡み目の不変量として定式化された多項式型不変量である. この不変量は, 仮想絡み目図式のある部分集合の族から得られる分配関数と呼ばれる関数で定義される. 一方で, 仮想絡み目図式から得られる行列式によっても計算できることが知られているが, Sawollek の論文にはその証明が書かれていない. 今回は分配関数と行列式が一致することの証明を与える.

1 JKSS 不変量

グラフ $G=(V,E)$ が**オイラー向き付け**されているとは, それぞれの頂点 v の入次数と出次数が等しくなる向きが入っていることである. $f:E\to\{1,2\}$ が G の**ラベリング**であるとは, G の部分グラフ $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ が G から定まる向きでオイラー向き付けになっていることである. G のラベリングの集合を $\mathscr{L}(G)$ と書き, f でラベリングされた G を G_f と書く. G_f では, 1 でラベリングされた辺を実線, 2 でラベリングされた辺を点線で表す (図 1).

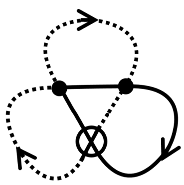


図 1 G_f の例

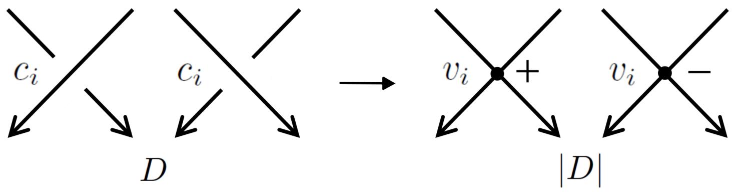
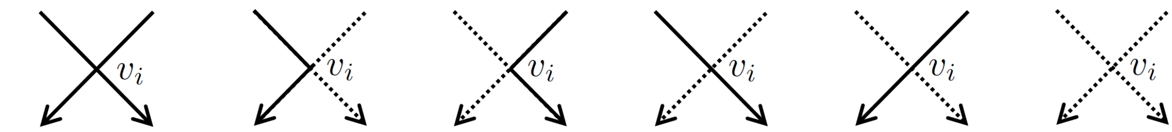


図 2

D を有向仮想絡み目図式とし, D の交点を $c_1,c_2,\ldots,c_n$ とする. $|D|$ を, D の古典的交叉を頂点化した図式とする. この図式は, $\mathbb{R}^2$ 上の有向仮想 4 価グラフである. 向きは D から自然に定める. D の交点 c_i に自然に対応する $|D|$ の頂点を v_i とし, v_i の符号 ε_i を, c_i が正の交点ならば $+$, 負の交点ならば $-$ とする (図 2).

$\Theta := \{\theta_{jk}(+),\ \theta_{jk}(-) \in \mathbb{Z}[x^{\pm1},y^{\pm1}] \mid j,k \in \{0,1\}\}$ とし, $|D|_f$ の頂点の重さ $\langle v_i|f\rangle \in \mathbb{Z}[x^{\pm1},y^{\pm1}]$ を図 3 で定める.

* e-mail : u288774i@ecs.osaka-u.ac.jp



$\theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i)$
$-\theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i)$ $\theta_{00}(\varepsilon_i)$ $\theta_{11}(\varepsilon_i)$ $\theta_{01}(\varepsilon_i)$ $\theta_{10}(\varepsilon_i)$ 1

図 3

$|D|_f$ の頂点のうち, 接続する 4 つの辺が全て 2 でラベリングしている頂点に対し, スムージング (図 4) を行う. これにより得られる $f^{-1}(2)$ によるザイフェルト円周の数を $s(|D|, f, 2)$ と書く.

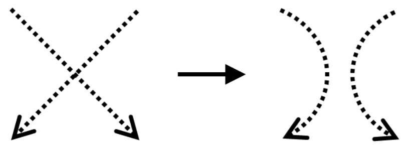


図 4

定義 1.1 ([1])**.** D の交点数を n とする. D の**分配関数 (partition function)** $Z(D) \in \mathbb{Z}[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ を, $Z(D) = \displaystyle\sum_{f\in\mathscr{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} \langle v_i|f\rangle$ で定義する.

定理 1.2 ([1])**.** Θ を, $\theta_{00}(+) = 1 + x,\ \theta_{01}(+) = y,\ \theta_{10}(+) = -xy^{-1},\ \theta_{11}(+) = 0,\ \theta_{00}(-) = 0,\ \theta_{01}(-) = -x^{-1}y,\ \theta_{10}(-) = y^{-1},\ \theta_{11}(-) = 1+x^{-1}$ で与える. このとき, $Z(D)$ は $(-1)^m x^l$ 倍 $(m,\ l \in \mathbb{Z})$ の違いを除いて曲面上の絡み目の不変量になる.

同様の主張が仮想絡み目についても成り立つ. ここでは, [1] に倣って曲面上の絡み目に対しての主張を記した.

定理 1.3 ([2])**.** $w(D)$ を D のひねり数とする. Θ を, $\theta_{00}(+) = 1 - x,\ \theta_{01}(+) = y,\ \theta_{10}(+) = xy^{-1},\ \theta_{11}(+) = 0,\ \theta_{00}(-) = 0,\ \theta_{01}(-) = x^{-1}y,\ \theta_{10}(-) = y^{-1},\ \theta_{11}(-) = 1 - x^{-1}$ で与える. このとき, $(-1)^{w(D)}Z(D)$ は x^m 倍 $(m \in \mathbb{Z})$ の違いを除いて仮想絡み目の不変量になる.

定理 1.3 の不変量を **JKSS 不変量** と呼ぶ.

次に, 分配関数 ならびに JKSS 不変量の, 行列式を用いた計算方法を紹介する. 以下では, 行番号, 列番号をそれぞれ $1_0, 1_1, 2_0, 2_1, \ldots, n_0, n_1$ と数える.

例 1.4. 下の行列では, 4 となっている成分を " 3_0 行 2_1 列成分 " と表す.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1_0 \\ 1_1 \\ 2_0 \\ 2_1 \\ 3_0 \\ 3_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

2×2 行列 M_i を, $M_i := \begin{pmatrix} \theta_{00}(\varepsilon_i) & -\theta_{01}(\varepsilon_i) \\ -\theta_{10}(\varepsilon_i) & \theta_{11}(\varepsilon_i) \end{pmatrix}$ で定義する. そして, $2n \times 2n$ 行列 M_D を, $M_D := \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_n)$ とする. さらに, $|D|$ の各頂点 v_i で, 開正則近傍 $N(v_i, |D|)$ をとる. すると, $N(v_i, |D|) - \{v_i\}$ は 4 つの**開弧 (open arc)** で構成される. この 4 つの開弧に, その位置に応じて i_0^-, i_1^-, i_0^+, i_1^+ のラベルを付ける (図 5).

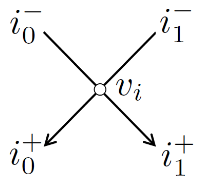


図 5　ラベルの付け方

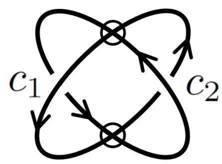


図 6

2 つの開弧 i_a^- と j_b^+ $(i, j \in \{1, \ldots, n\},\ a, b \in \{0, 1\})$ が $|D|$ 上で同じ辺であるとき $i_a \leftarrow j_b$ と書く. そして, $2n \times 2n$ 行列 $P_D = (p_{i_a j_b})$ を次で定義する.

$$
p_{i_a j_b} = \begin{cases} 1 & (i_a \leftarrow j_b), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}
$$

$U = (u_{i_a j_b}) := M_D - P_D$ とする.

定理 1.5 ([1]). $Z(D) = \det U$

例 1.6. 有向仮想絡み目図式 D (図 6) の 分配関数 $Z(D)$ と JKSS 不変量を, 2 つの方法で計算する.

まず, 定義 1.1 を使って計算する. $|D|$ のラベリングは図 7 の 6 種類である.

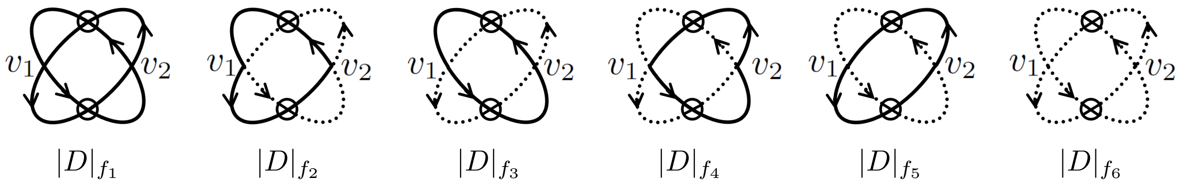


図 7

いま, $\varepsilon_1 = +$, $\varepsilon_2 = -$ なので,

$$\begin{aligned}
Z(D) =& (-1)^{s(|D|,\, f_1,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_1 \rangle + (-1)^{s(|D|,\, f_2,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_2 \rangle + (-1)^{s(|D|,\, f_3,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_3 \rangle \\
&+ (-1)^{s(|D|,\, f_4,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_4 \rangle + (-1)^{s(|D|,\, f_5,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_5 \rangle + (-1)^{s(|D|,\, f_6,\, 2)} \prod_{i=1}^{2} \langle v_i | f_6 \rangle \\
=& (\theta_{00}(+)\theta_{11}(+) - \theta_{01}(+)\theta_{10}(+))(\theta_{00}(-)\theta_{11}(-) - \theta_{01}(-)\theta_{10}(-)) \\
&- \theta_{00}(+)\theta_{11}(-) - \theta_{11}(+)\theta_{00}(-) - \theta_{01}(+)\theta_{01}(-) - \theta_{10}(+)\theta_{01}(-) + 1
\end{aligned}$$

と計算できる. ゆえに JKSS 不変量は, $(-1)^{w(D)} Z(D) = x^{-1} - y^{-2}$ である.

次に, 行列式を用いて計算する. $\varepsilon_1 = +$, $\varepsilon_2 = -$ であり, $1_0 \leftarrow 2_1$, $1_1 \leftarrow 2_0$, $2_0 \leftarrow 1_1$, $2_1 \leftarrow 1_0$ なので,

$$M_D = \begin{pmatrix} \theta_{00}(+) & -\theta_{01}(+) & 0 & 0 \\ -\theta_{10}(+) & \theta_{11}(+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{00}(-) & -\theta_{01}(-) \\ 0 & 0 & -\theta_{10}(-) & \theta_{11}(-) \end{pmatrix}, \quad P_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
Z(D) =& \det \begin{pmatrix} \theta_{00}(+) & -\theta_{01}(+) & 0 & -1 \\ -\theta_{10}(+) & \theta_{11}(+) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \theta_{00}(-) & -\theta_{01}(-) \\ -1 & 0 & -\theta_{10}(-) & \theta_{11}(-) \end{pmatrix} \\
=& (\theta_{00}(+)\theta_{11}(+) - \theta_{01}(+)\theta_{10}(+))(\theta_{00}(-)\theta_{11}(-) - \theta_{01}(-)\theta_{10}(-)) \\
&- \theta_{00}(+)\theta_{11}(-) - \theta_{11}(+)\theta_{00}(-) - \theta_{01}(+)\theta_{01}(-) - \theta_{10}(+)\theta_{01}(-) + 1
\end{aligned}$$

と計算できる. ゆえに JKSS 不変量は, $(-1)^{w(D)} Z(D) = x^{-1} - y^{-2}$ である.

[1] によって定理 1.5 の証明が与えられているが, 本稿ではその別証明を与える.

2 別証明

$\mathfrak{S}_{2n}$ を $1_0, 1_1, 2_0, 2_1 \ldots, n_0, n_1$ からなる $2n$ 次対称群とする. $\mathfrak{S}_{2n}$ の部分集合 $\mathfrak{S}_{2n}^D$ を $\mathfrak{S}_{2n}^D := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid {}^\forall i_a,\ \sigma(i_a) = i_0,\, i_1$ または $i_a \leftarrow \sigma(i_a)\}$ とする. また, $\mathfrak{S}_{2n}^D$ の部分集合 X を $X :=$

$\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid {}^{\exists}i,\ \text{s.t.}\ \sigma(i_0) = i_1$ かつ $\sigma(i_1) = i_0\}$ とする．ここで, $g_U : \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を,

$$g_U(\sigma, i) = \begin{cases} u_{i_0 i_0} u_{i_1 i_1} - u_{i_0 i_1} u_{i_1 i_0} & (\text{if } \sigma(i_a) = i_a\ (a = 0, 1)) \\ u_{i_0 \sigma(i_0)} u_{i_1 \sigma(i_1)} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義する．

補題 2.1. $\det U = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma, i)$ が成り立つ．

$|D|$ の辺集合の部分集合 E' を $E' := \{e \in E \mid e$ は $|D|$ のループ辺 $\}$ で定義する．ただし, ループ辺とは, 両端が同じ頂点に接続する辺のことである．$\mathscr{L}(|D|)$ の部分集合 $\mathscr{L}_1(|D|)$ を $\mathscr{L}_1(|D|) := \{f \in \mathscr{L}(|D|) \mid {}^{\forall}e \in E',\ f(e) = 1\}$ と定義する．特に $E' = \emptyset$ のとき $\mathscr{L}_1(|D|) = \mathscr{L}(|D|)$ である．また, v_i に接続するループ辺の集合を E'_i とする．任意の $f \in \mathscr{L}(|D|)$, $E''_i \subset E'_i$ に対し, $f_{E''_i} : E \to \{1, 2\}$ を,

$$f_{E''_i}(e) := \begin{cases} 2 & (\text{if } e \in E''_i), \\ f(e) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める．特に, $E''_i = \emptyset$ のとき $f_{E''_i} = f$ である．また, 一般に $f_{E''_i} \in \mathscr{L}(|D|)$ である．ここで, $h : \mathscr{L}_1(|D|) \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を,

$$h(f, i) := \sum_{E''_i \subset E'_i} (-1)^{s(|D|, f_{E''_i}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{E''_i} \rangle$$

で定義する．特に, $E'_i = \emptyset$ のとき $h(f, i) = \langle v_i | f \rangle$ である．

例 2.2. 図 8 の場合で $h(f, i)$ を計算する．

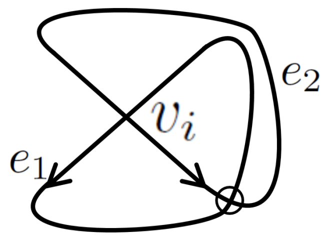


図 8

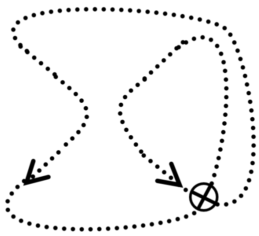


図 9

$E'_i = \{e_1, e_2\}$ とすると,

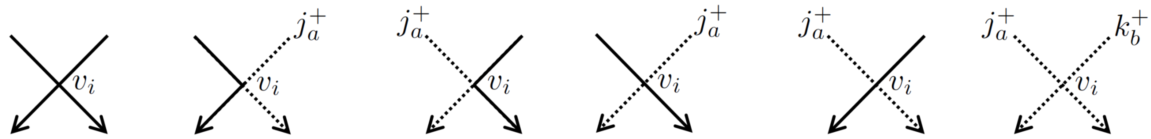
$$\begin{aligned} h(f, i) =& (-1)^{s(|D|, f_{\emptyset}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\emptyset} \rangle + (-1)^{s(|D|, f_{\{e_1\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_1\}} \rangle \\ &+ (-1)^{s(|D|, f_{\{e_2\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_2\}} \rangle + (-1)^{s(|D|, f_{\{e_1, e_2\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_1, e_2\}} \rangle \\ =& \langle v_i | f \rangle - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \\ =& (\theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i)) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \end{aligned}$$

となる. $|D|_{f_{\{e_1,e_2\}}}$ 上で, v_i がスムージングされて 図 9 の 1 つのザイフェルト円周ができることに注意である.

補題 2.3. $Z(D) = \displaystyle\sum_{f \in \mathscr{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|,f,2)} \prod_{i=1}^{n} h(i,f)$ が成り立つ.

補題 2.4. $\mathscr{L}_1(|D|)$ と $\mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X$ の間にある 1 対 1 対応があり, 次の条件 (∗) を満たす.
• 対応する $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X$ について, $h(f,i)$, $g_U(\sigma,i) \in \mathbb{Z}[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ が -1 倍の違いを除いて一致する.$\cdots(*)$

(補題 2.4 の証明)
条件 (∗) を満たす 一対一対応を構成する. まず, 各 $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$ に対し, $\sigma : \{1_0, \ldots n_1\} \to \{1_0, \ldots n_1\}$ を構成する. 各 i で $N(v_i, |D|_f) - \{v_i\}$ の 4 つの開弧のラベリングによって以下の 3 つの場合に分け, $\sigma(i_0)$ と $\sigma(i_1)$ を定める. $(i,j,k \in \{1,\ldots,n\},\ a,b,c \in \{0,1\})$
(1) 4 つの開弧が全て 2 でラベリングされているとき. j_a^+, k_b^+ を $i_0 \leftarrow j_a,\ i_1 \leftarrow k_b$ なる開弧とし, $\sigma(i_0) = j_a,\ \sigma(i_1) = k_b$ と定める.
(2) 2 つの開弧のみが 2 でラベリングされているとき. i_a^-, i_b^+ が 2 でラベリングされているとする. まず, j_c^+ を $i_a \leftarrow j_c$ なる開弧とし, $\sigma(i_a) = j_c$ とする. 次に, $a \neq b$ のとき $\sigma(i_b) = i_a$ とし, $a = b$ のとき $c \neq a$ なる c で $\sigma(i_c) = i_c$ と定める.
(3) 4 つの開弧が全て 1 でラベリングされているとき. $\sigma(i_0) = i_0,\ \sigma(i_1) = i_1$ と定める.
実際には, 図 10 のように $N(v_i, |D|_f)$ と σ が対応している. (図 10 では 2 でラベリングされた i_c^- が j_a^+ (または k_b^+) と同じ辺であるとき, i_c^- の上側に j_a^+ (または k_b^+) と書いている.)



$\sigma(i_0) = i_0,$	$\sigma(i_0) = i_0,$	$\sigma(i_0) = j_a,$	$\sigma(i_0) = i_1,$	$\sigma(i_0) = j_a,$	$\sigma(i_0) = j_a,$
$\sigma(i_1) = i_1.$	$\sigma(i_1) = j_a.$	$\sigma(i_1) = i_1.$	$\sigma(i_1) = j_a.$	$\sigma(i_1) = i_0.$	$\sigma(i_1) = k_b.$

図 10

Claim 2.5. 上で構成した, f に対応する σ について $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X$ が成り立つ.

逆の対応を構成する. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X$ に対し, 写像 $\mathfrak{f} : \{i_a^-, i_a^+ \mid i \in \{1,\ldots,n\},\ a \in \{0,1\}\} \to \{1,2\}$ を, 各 i で以下の 3 つの規則で定める.
規則 1. $\sigma(i_a) = i_b$ のとき, $\mathfrak{f}(i_a^-) = 1,\ \mathfrak{f}(i_b^+) = 1$ とする.
規則 2. $\sigma(i_a) = j_b\ (i \neq j)$ のとき, $\mathfrak{f}(i_a^-) = 2$ とする.
規則 3. $\mathfrak{f}(i_0^+), \mathfrak{f}(i_1^+)$ のうち, 規則 1,2 で値の定まらなかったものがあるとき, その値を 2 とする.

例 2.6. $\sigma(i_0) = i_1, \sigma(i_1) = j_a$ $(i \neq j)$ のとき, $\mathfrak{f}(i_0^-)$, $\mathfrak{f}(i_0^+)$, $\mathfrak{f}(i_1^-)$, $\mathfrak{f}(i_1^+)$ の値を定める. まず, 規則 1 より $\mathfrak{f}(i_0^-) = 1$, $\mathfrak{f}(i_1^+) = 1$ と定める (図 11 ①). 次に, 規則 2 より $\mathfrak{f}(i_1^+) = 2$ と定める (図 11 ②). そして, 規則 3 より $\mathfrak{f}(i_1^-) = 2$ と定める (図 11 ③) .

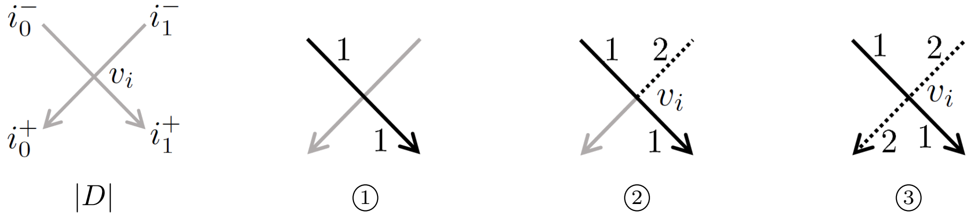


図 11

Claim 2.7. 任意の i_a, $i_a \leftarrow j_b$ なる j_b に対し, $\mathfrak{f}(i_a^-) = \mathfrak{f}(j_b^+)$ が成り立つ. よって, $\mathfrak{f}$ によって $|D|$ の辺集合 E から $\{1, 2\}$ への写像 f を定めることができ, この f について, $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$ が成り立つ.

また, この対応は上で構成した $\mathscr{L}_1(|D|)$ から $\mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X$ への対応の逆の対応になっている. 以下では, f, σ はこの対応で対応する組とする.
この一対一対応が, 条件 $(*)$ を満たすことを示す. 図 12 の 16 種類の頂点で, $h(f, i)$, $g_U(\sigma, i) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ が -1 倍を除いて一致することを示せば良い.

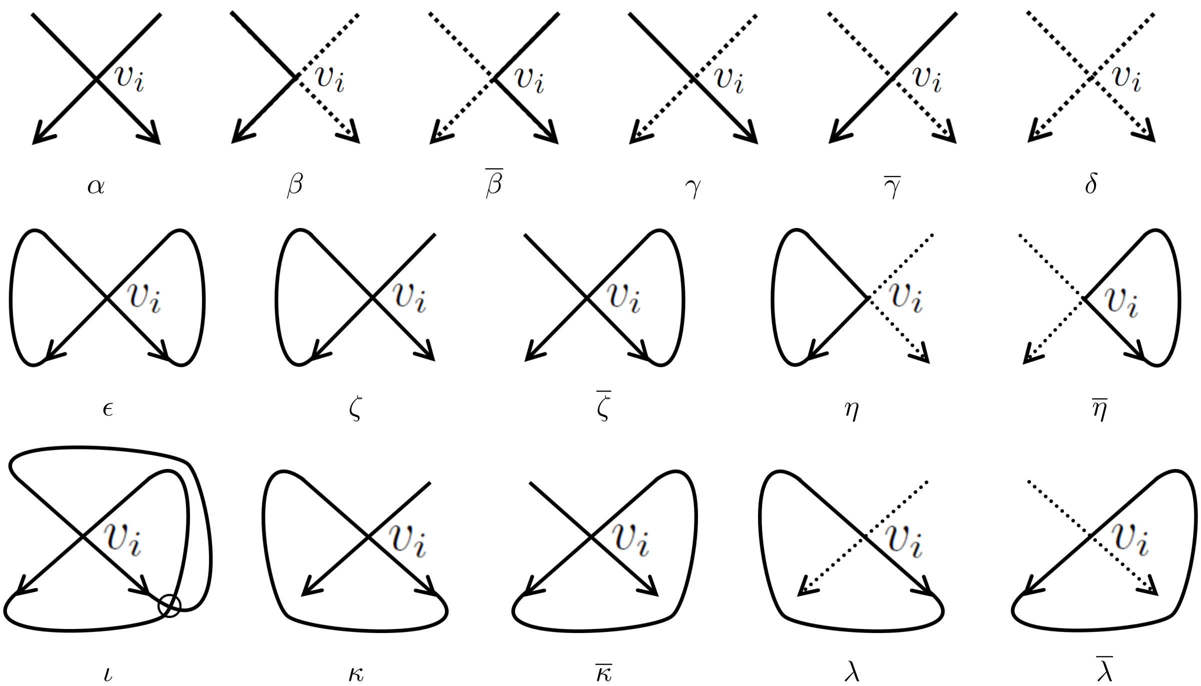


図 12　$\alpha \sim \delta$ はループ辺を持たない. $\zeta, \overline{\zeta}, \eta, \overline{\eta}, \kappa, \overline{\kappa}, \lambda, \overline{\lambda}$ は 1 つのみの, ϵ, ι は 2 つのループ辺を持つ.

ここでは, 図 12 の ι の場合について示す. まず, h の定義から $h(f,i) = \theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1$ となる. 一方, この f に対応する置換 σ について, $\sigma(i_0) = i_0$, $\sigma(i_1) = i_1$ である. よって, $g_U(\sigma,i) = u_{i_0i_0}u_{i_1i_1} - u_{i_0i_1}u_{i_1i_0}$ となる. いま, v_i の符号は ε_i であり, $i_0 \leftarrow i_1$, $i_1 \leftarrow i_0$ より,

$$\begin{aligned} g_U(\sigma,i) &= (\theta_{00}(\varepsilon_i) - p_{i_0i_0})(\theta_{11}(\varepsilon_i) - p_{i_1i_1}) - (-\theta_{01}(\varepsilon_i) - p_{i_0i_1})(-\theta_{10}(\varepsilon_i) - p_{i_1i_0}) \\ &= (\theta_{00}(\varepsilon_i) - 0)(\theta_{11}(\varepsilon_i) - 0) - (-\theta_{01}(\varepsilon_i) - 1)(-\theta_{10}(\varepsilon_i) - 1) \\ &= \theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \end{aligned}$$

となり, これは $h(\sigma,i)$ と $\mathbb{Z}[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ として一致している.
他の場合も同様にして計算すると,

$$h(f,i) = \begin{cases} g_U(\sigma,i) & (\text{if } \alpha,\gamma,\overline{\gamma},\delta,\epsilon,\zeta,\overline{\zeta},\iota,\kappa,\overline{\kappa},\lambda,\overline{\lambda}), \\ -g_U(\sigma,i) & (\text{if } \beta,\overline{\beta},\eta,\overline{\eta}), \end{cases}$$

となる. よって, 補題 2.4 が示された. (Claim 2.5 と Claim 2.7 の証明は省略する.) $\square$

ところで, 定理 1.5 を示すには, 補題 2.1 と補題 2.3 より,

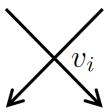
$$\sum_{f \in \mathscr{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|,f,2)} \prod_{i=1}^{n} h(i,f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^{D} \setminus X} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma,i)$$

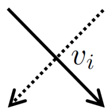
を示せば良い. さらに, 補題 2.4 より,

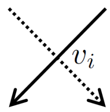
$$(-1)^{s(|D|,f,2)} \prod_{i=1}^{n} h(i,f) = \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma,i)$$

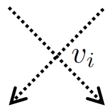
を示せば良い. ここでさらに, 補題 2.4 より, 頂点 v_i に接続するループ辺によらず,

$h(f,i) =$

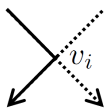
$g_U(\sigma,i)$ (if 

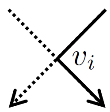
, 

, 

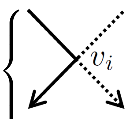
, 

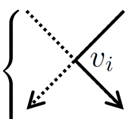
),

$-g_U(\sigma,i)$ (if 

, 

),

が成り立つ. そこで, $|D|_f$ において $\#\{$ 

$\} + \#\{$ 

$\} = M_f$ とする. このとき,

$(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} h(f,i) = (-1)^{M_f}(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma,i)$ が成り立つ. よって, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{M_f}(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)}$ を示せば定理 1.5 が示される.

$s = s(|D|, f, 2)$ とし, $|D|_f$ の $f^{-1}(2)$ によるザイフェルト円周をそれぞれ $C_1, \ldots, C_s$ とする. ザイフェルト円周 C_t $(t \in \{1, \ldots, s\})$ が通過する頂点のみで, 補題 2.4 で f から σ を構成したのと同様に写像 τ_t を構成する. ただし, スムージングを行った頂点では, C_t が通過する辺でのみ写像を構成する. すると, τ_t は巡回置換となる. また, σ, τ_t の定め方から $\sigma = \prod_{t=1}^{s} \tau_t$ となる.

例 2.8. 図 13 の $|D|_f$ を用いる.

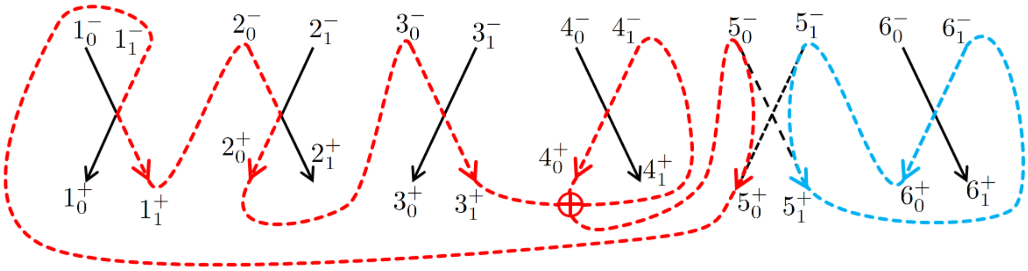


図 13　C_1 を赤の点線, C_2 を青の点線で表す.

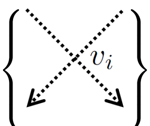
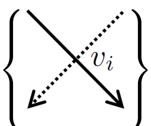
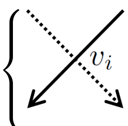
図 13 に対応する置換は,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 & 4_0 & 4_1 & 5_0 & 5_1 & 6_0 & 6_1 \\ 1_0 & 5_0 & 1_1 & 2_1 & 2_0 & 3_0 & 4_1 & 3_1 & 4_0 & 6_0 & 6_1 & 5_1 \end{pmatrix}$$

である. 一方,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 & 4_0 & 4_1 & 5_0 \\ 1_0 & 5_0 & 1_1 & 2_1 & 2_0 & 3_0 & 4_1 & 3_1 & 4_0 \end{pmatrix} = (\ 1_1\ 5_0\ 4_0\ 4_1\ 3_1\ 3_0\ 2_0\ )$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 5_1 & 6_0 & 6_1 \\ 6_0 & 6_1 & 5_1 \end{pmatrix} = (\ 5_1\ 6_0\ 6_1\ )$$

である. この $|D|_f$ で $\sigma = \tau_1\tau_2$ となっていることが確認できた.

$|D|_f$ で $\#\Big\{$  $\Big\} = K_f$, $\#\Big\{$  $\Big\} + \#\Big\{$  $\Big\} = L_f$　とする. このとき, 巡回置換 $\tau_1, \ldots, \tau_t$ の長さの和は, その構成方法から $2K_f + 2L_f + M_f$ となる. また, 巡回置換は (巡回置換の長さ) $- 1$ 個の互換の積で表される. よって, σ は $2K_f + 2L_f + M_f - s$ 個の互換の積で表される. ゆえに,

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\sigma) &= (-1)^{2K_f+2L_f+M_f-s} \\ &= (-1)^{2K_f}(-1)^{2L_f}(-1)^{M_f}(-1)^{-s} \\ &= (-1)^{M_f}(-1)^{s(|D|, f, 2)} \end{aligned}$$

となる. これで定理 1.5 の証明を終了する.

参考文献

[1] F. Jaeger, L. H. Kauffman, H. Saleur, *The Conway Polynomial in* $\mathbb{R}^3$ *and in Thickened Surfaces: A New Determinant Formulation*, Jornal of Combinatorial Theory, Seriess **B61**, 237−259 (1994).

[2] J. Sawollek, *On Alexander-Conway Polynomials for Virtual Knots and Links*, arXiv: math/9912173v2 (math. GT) (2001).

[3] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20**, 663−690 (1999).

Index polynomial invariants for twisted links

伊藤 大貴 (大阪大学大学院理学研究科)*

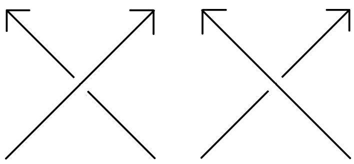
概要

twisted link は M. O. Bourgoin によって定義された virtual link の一般化である. 我々は向きと順序の付いた twisted link diagram に対して index polynomial を導入し, これが twisted link の不変量になることを示した. この不変量は L. H. Kauffman によって定義された virtual link の affine index polynomial の拡張になっている. 応用として, double covering が同じである異なる 2 つの twisted link の存在を示すことができる.

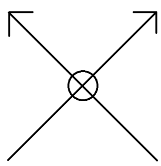
1 捩れ仮想絡み目

1.1 仮想絡み目

m 成分仮想絡み目図式 (**m-component virtual link diagram**) [5] とは, 向きと順序の付いた m 個の S^1 の $\mathbb{R}^2$ へのはめこみであり, 交点が 横断的に交わる 2 重点のみであるものをいう. 各 2 重点には, **実交叉** (**classical crossing**) と**仮想交叉** (**virtual crossing**) の情報が与えられている.

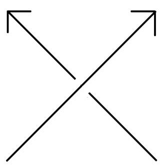


実交叉

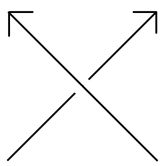


仮想交叉

さらに, 実交叉には弧の上下の情報から**符号** ± 1 が与えられる. 実交叉 τ の符号を $\mathrm{sign}(\tau)$ と表記する.



$+1$

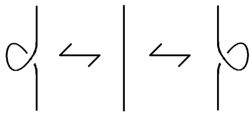


-1

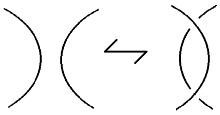
*e-mail:u063241a@ecs.osaka-u.ac.jp

下に図示した図式の実交叉と仮想交叉に関する局所変形 (R1〜R3, V1〜V4) を**一般ライデマイスター変形** (**generalized Reidemeister move**) という.

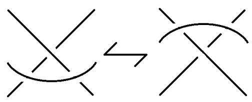
D と D' を m 成分仮想絡み目図式とする. D と D' が有限回の一般ライデマイスター変形で移りあうとき, D と D' は仮想絡み目として同値であるといい, $D \overset{v}{\sim} D'$ と表す. また, m 成分仮想絡み目図式の関係 $\overset{v}{\sim}$ による同値類を m **成分仮想絡み目** (**m-component virtual link**) [5] という.



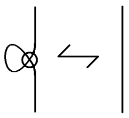
R1



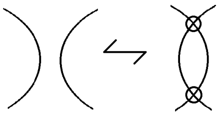
R2



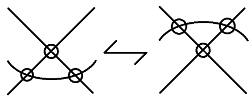
R3



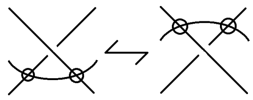
V1



V2



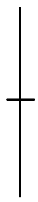
V3



V4

1.2 捩れ仮想絡み目

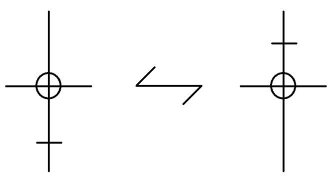
m **成分捩れ仮想絡み目図式** (**m-component twisted link diagram**) [1] とは, m **成分仮想絡み目図式**の弧上に**バー** (**bar**) の情報を付け加えたものである.



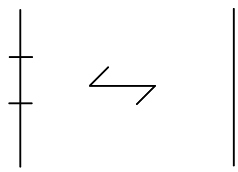
バー

下に図示した図式の実交叉, 仮想交叉, バーに関する局所変形 (T1〜T3) を合わせて**拡張ライデマイスター変形** (**extended Reidemeister move**) という.

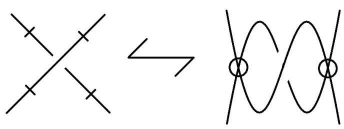
D と D' を m 成分捩れ仮想絡み目図式とする. D と D' が有限回の拡張ライデマイスター変形で移りあうとき, D と D' は捩れ仮想絡み目として同値であるといい, $D \overset{t}{\sim} D'$ と表す. また, m 成分捩れ仮想絡み目図式の関係 $\overset{t}{\sim}$ による同値類を m **成分捩れ仮想絡み目** (**m-component twisted link**) [1] という.



T-1



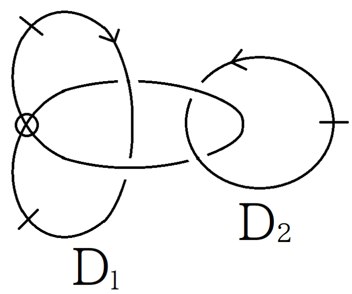
T-2



T-3

また, m 成分捩れ仮想絡み目図式 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ の各 D_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ は, 次にように 2 つの型に分けることができる. D_i の弧上のバーの個数が偶数個なら D_i は**偶数型** (**even type**), 奇数個なら D_i は**奇数型** (**odd type**) という. このとき, 各 D_i に対して, 偶数型, 奇数型は拡張ライデマイスター変形で不変である.

ここで, 一方が偶数型で, 他方が奇数型であるような 2 成分捩れ仮想絡み目図式の例を挙げる. $D = D_1 \cup D_2$ を下図の 2 成分捩れ仮想絡み目図式とすると, D_1 は偶数型で, D_2 は奇数型である.



$D = D_1 \cup D_2$

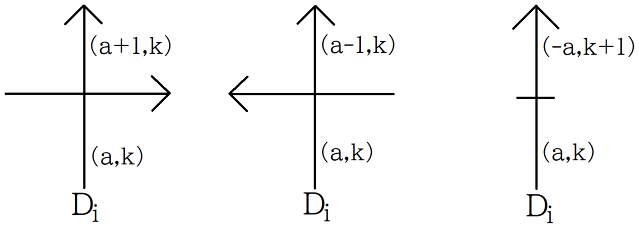
2 インデックス多項式

2.1 n-彩色

以後, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_m$ を m 成分捩れ仮想絡み目図式とし, $i \in \{1, \ldots, m\}$ を固定して, D_i は偶数型であると仮定する.

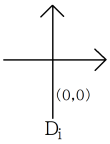
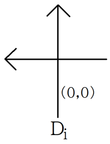
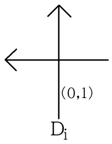
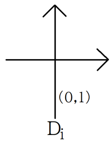
D_i の**準弧** (**semi arc**) とは D_i を D の実交叉とバーで区切って得られる弧とする. 但し, 仮想交叉では区切らない. また, $\mathcal{A}(D_i) := \{\ D_i$ の準弧 $\}$ とする.
m 成分捩れ仮想絡み目図式 $D = D_1 \cup \ldots \cup D_m$ に対して, 彩色を次のように定義する.

定義 2.1. n を非負の整数とする. そのとき, D_i の n-**彩色** (n-**coloring**) とは, 写像 $C_i : \mathcal{A}(D_i) \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ で下図の条件を満たすものをいう. 但し, 下図の 2 重点は実交叉である. (D が仮想絡み目図式のときは, 第 2 成分を無視すると $C_i : \mathcal{A}(D_i) \to \mathbb{Z}_n$ となり, [6] や [2] に登場する彩色と思える.)



ここで, m 成分捩れ仮想絡み目図式 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ に対して, D_i の n-彩色が存在するような n を与える.

D_i が偶数型より, D_i の 1-彩色は存在する. $\mathbb{1}_i : \mathcal{A}(D_i) :\to \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ を D_i の 1-彩色とする. そのとき,

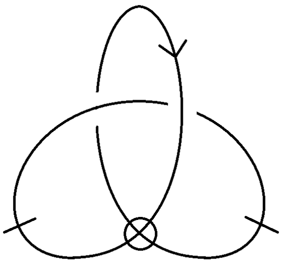
$d_i(D) := |\#\{$  $\} - \#\{$  $\} + \#\{$  $\} - \#\{$  $\}|$

と定める. 但し, 下図の 2 重点は実交叉である.

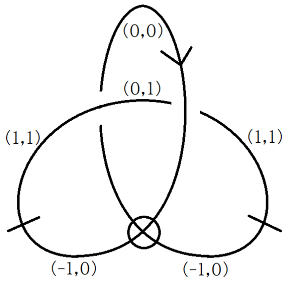
このとき, $d_i(D)$ は, D_i の 1-彩色 $\mathbb{1}_i$ に依らず一意的に定まる.

D_i の n-彩色の例を挙げる.

例 2.2. $D = D_1$ を左下図の 1 成分捩れ仮想絡み目図式とする. そのとき, $d_1(D) = 0$ である. また, $C_1 : \mathcal{A}(D_1) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ を右下図の彩色とすると, C_1 は D_1 の 0-彩色である.



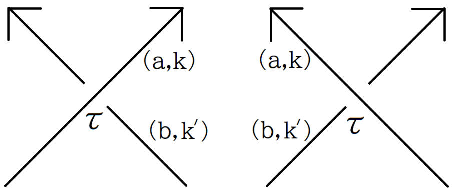
D



0-彩色

以後, C_i を D_i の $d_i(D)$-彩色とする. 次に, 定義 2.3 に従って, D_i の各自己交叉 τ に対して重み $W^{(C_i,D_i)}(\tau)$ を付ける.

定義 2.3. $W^{(C_i,D_i)}(\tau) := a - b \in \mathbb{Z}_{d_i(D)}$.
但し, a, b は 下図に描かれた準弧の値である.



2.2 インデックス多項式

m 成分捩れ仮想絡み目図式に対してインデックス多項式を定義するために, D_i の自己交叉を 3 つの集合 $T^{(C_i,D_i)}$, $T_0^{(C_i,D_i)}$, $T_1^{(C_i,D_i)}$ に, 以下のように分類する.

$$\begin{aligned} T^{(C_i,D_i)} &:= \{\tau\colon\ D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (\alpha) \text{ の条件を満たす}\}. \\ T_0^{(C_i,D_i)} &:= \{\tau\colon\ D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (0) \text{ の条件を満たす}\}. \\ T_1^{(C_i,D_i)} &:= \{\tau\colon\ D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (1) \text{ の条件を満たす}\}. \end{aligned}$$

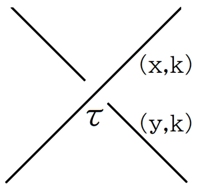


図 (α)

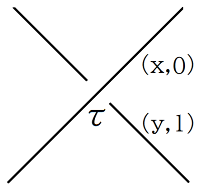


図 (0)

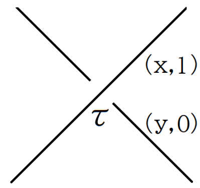


図 (1)

この $T^{(C_i,D_i)}$, $T_0^{(C_i,D_i)}$, $T_1^{(C_i,D_i)}$ を用いて, D_i のインデックス多項式を以下で定義する.

定義 2.4 (I.). D_i の**インデックス多項式** (**index polynomial**) $\phi^{(C_i,D_i)}(t), \psi_0^{(C_i,D_i)}(t)$, $\psi_1^{(C_i,D_i)}(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)}-1)$ を

$$\phi^{(C_i,D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T^{(C_i,D_i)}} \mathrm{sign}(\tau)(t^{W^{(C_i,D_i)}(\tau)}-1),$$

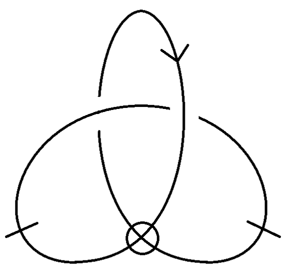
$$\psi_0^{(C_i,D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_0^{(C_i,D_i)}} \mathrm{sign}(\tau)t^{W^{(C_i,D_i)}(\tau)}, \quad \psi_1^{(C_i,D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_1^{(C_i,D_i)}} \mathrm{sign}(\tau)t^{W^{(C_i,D_i)}(\tau)}$$

と定義する. 但し, $W^{(C_i,D_i)}(\tau)$ は $W^{(C_i,D_i)}(\tau)$ の代表元を 1 つ選んで $\mathbb{Z}$ の元とみなす.

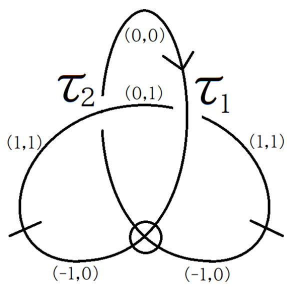
$\phi^{(C_i,D_i)}(t), \psi_0^{(C_i,D_i)}(t), \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)$ は, $W^{(C_i,D_i)}(\tau)$ の代表元の取り方に依らず, 一意的に定まる. 故に, $\phi^{(C_i,D_i)}(t), \psi_0^{(C_i,D_i)}(t), \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)$ は well-defined である.

ここで, D_i のインデックス多項式の例を挙げる.

例 2.5. $D = D_1$ を左下図の 1 成分捩れ仮想絡み目図式とすると, $d_1(D) = 0$ である. また, $C_1 : \mathcal{A}(D_1) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ を右下図の D_1 の 0-彩色 とすると, $W^{(C_1,D_1)}(\tau_1) = -1$, $\tau_1 \in T_0^{(C_1,D_1)}$, $W^{(C_1,D_1)}(\tau_2) = 1$, $\tau_2 \in T_1^{(C_1,D_1)}$ であるから, $\phi^{(C_1,D_1)}(t) = 0$, $\psi_0^{(C_1,D_1)}(t) = t^{-1}$, $\psi_1^{(C_1,D_1)}(t) = t$ である.



D



0-彩色

3 主結果

3.1 主定理

まず, $f, g \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^n - 1)$ の組 (f, g) に対して, p-合同を次のように定義する.

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^n - 1)$ に対して (f_1, f_2) と (g_1, g_2) が p-合同であるとは, ある整数 k が存在して, $(f_1, f_2) = (g_1 \cdot t^{pk},\ g_2 \cdot t^{-pk})$ または $(f_1, f_2) = (g_2 \cdot t^{pk},\ g_1 \cdot t^{-pk})$ が成り立つことであり, $(f_1, f_2) \overset{(p)}{\equiv} (g_1, g_2)$ と表す.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (I.). $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ と $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ を D_i が偶数型である m 成分捩れ仮想絡み目図式とする. このとき, $D \overset{t}{\sim} D'$ ならば, 次が成り立つ.
(1) $d_i(D) = d_i(D')$.
任意の D_i の $d_i(D)$-彩色 C_i と D'_i の $d_i(D')$-彩色 C'_i に対して,
(2) $\phi^{(C_i, D_i)}(t) = \phi^{(C'_i, D'_i)}(t)$.
(3) $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \overset{(2)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$.

故に, $\phi^{(C_i, D_i)}(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)} - 1)$ および $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i, D_i)}(t))$ の 2-合同類は捩れ仮想絡み目の不変量になる.

3.2 アファインインデックス多項式との関係

Kauffman は仮想結び目 (1 成分仮想絡み目) K に対して, アファインインデックス多項式不変量 (affine index polynomial invariant) $P_K(t)$ [6] を定義した. この多項式不変量は, 仮想結び目と同様の構成方法で, m 成分仮想絡み目に対しても定義できる.

m 成分仮想絡み目図式 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ に対して, D_i のアファインインデックス多項式不変量を $P_{D_i}(t)$ と表記する. $P_{D_i}(t)$ は $\mathbb{Z}[t^{\pm}1]/(t^{d_i(D)} - 1)$ に値をもつ.

このとき, 本稿のインデックス多項式不変量は, Kauffman のアファインインデックス多項式不変量の拡張になっていることを, 次の命題 3.2 が保証する.

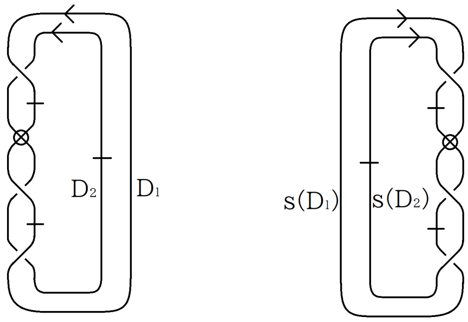
命題 3.2 (I.). $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ を m 成分仮想絡み目図式, $P_{D_j}(t)$ をアファインインデックス多項式とする. そのとき, 次が成り立つ.
任意の $j \in \{1, \ldots, m\}$ と D_j の C_j: $d_j(D)$-彩色に対して,
(1) $\phi^{(C_j, D_j)}(t) = P_{D_j}(t)$.
(2) $\psi_0^{(C_j, D_j)}(t) = \psi_1^{(C_j, D_j)}(t) = 0$.

3.3　二重被覆との関係

二重被覆 (double covering) [4] は, 順序の付いていない捩れ仮想絡み目から仮想絡み目を対応させる操作のことである. 応用として, 二重被覆を考えることで, 仮想絡み目の不変量から捩れ仮想絡み目の不変量が得られる. まず, 図式を用いた二重被覆の構成方法 [4] について説明する.

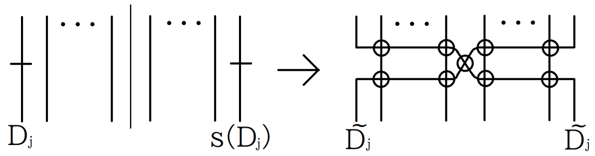
$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ を m 成分捩れ仮想絡み目図式とする. そのとき, D の二重被覆図式 $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{D}_m$ を次の手順で構成する.

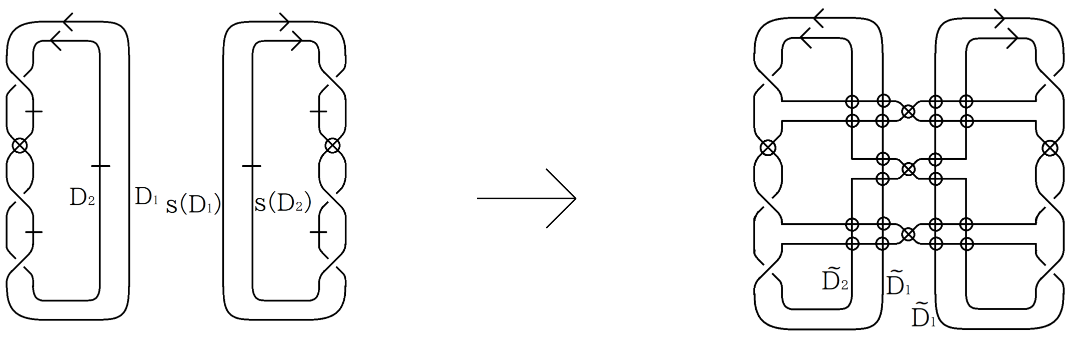
(1) D を $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ 内に入るように移動させる.
$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$ を y 軸に関する鏡映, $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を全ての実交叉の上下の情報を入れ替える写像とし, $s = c \circ r$ とする.
このとき, $D \cup s(D)$ を $\mathbb{R}^2$ 内に描く.



$D = D_1 \cup D_2$　　　$s(D) = s(D_1) \cup s(D_2)$

(2) 全ての D_j のバーと, それに対応する $s(D_j)$ のバーを下図のように切り開いて, D_j と $s(D_j)$ をつなげたものを $\widetilde{D}_j$ とする.





$D \cup s(D)$　　　　　　　　$\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2$

(1)(2) の手順で構成した仮想絡み目図式を D の**二重被覆図式 (double covering diagram)** $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{D}_m$ と定義する.

D_i が偶数型ならば, $\widetilde{D}_i$ は順序の付いていない 2 成分の仮想絡み目図式となり, D_i が奇数型ならば, $\widetilde{D}_i$ は 1 成分の仮想絡み目図式となる. $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{D}_m$ は, 一般には順序付き仮想絡み目図式とはならず, m 分割された仮想絡み目図式である.　すなわち, $\widetilde{D}$ の各成分には $1, 2, \ldots, m$ のラベルが与えられていて, i のラベルが付いた成分の和が $\widetilde{D}_i$ である.

m 成分捩れ仮想絡み目図式 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ と $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ に対して, $\widetilde{D}$ と $\widetilde{D}'$ が m 分割を保って有限回の一般ライデマイスター変形で移りあうとき. $\widetilde{D} \overset{v}{\sim} \widetilde{D}'$ と表す. そのとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3 (cf. N.Kamada, S.Kamada [4])**.** $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ と $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ を m 成分捩れ仮想絡み目図式とする. そのとき, $D \overset{t}{\sim} D'$ ならば $\widetilde{D} \overset{\tilde{v}}{\sim} \widetilde{D}'$ が成り立つ.

故に, m 成分捩れ仮想絡み目図式に対して二重被覆をとって得られる仮想絡み目図式は, 捩れ仮想絡み目の不変量になる.

また, インデックス多項式と二重被覆との関係について, 次の定理が成り立つ.

定理 3.4 (I.)**.** $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ と $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ を D_i が偶数型である m 成分捩れ仮想絡み目図式とする. そのとき, $\widetilde{D} \overset{v}{\sim} \widetilde{D}'$ ならば, 次が成り立つ.
(1) $d_i(D) = d_i(D')$.
任意の D_i の $d_i(D)$-彩色 C_i と D'_i の $d_i(D')$-彩色 C'_i に対して,
(2) $\phi^{(C_i,D_i)}(t) = \phi^{(C'_i,D'_i)}(t)$.
(3) $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)) \overset{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i,D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i,D'_i)}(t))$.

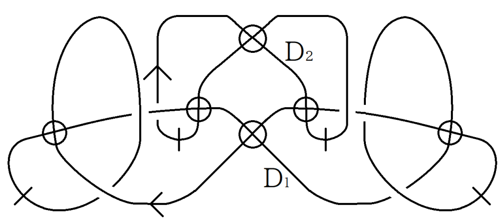
定理 3.4 (1) と (2) より, $d_i(D)$ と $\phi^{(C_i,D_i)}(t)$ は, 二重被覆図式より弱い不変量であることが言える.

しかし, $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)) \overset{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i,D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i,D'_i)}(t))$ ならば $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)) \overset{(2)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i,D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i,D'_i)}(t))$ は必ずしも成り立つとは限らないので, $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t))$ は, 二重被覆図式で得られない不変量の可能性がある. 実際, $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t))$ が二重被覆図式で得られない不変量であることを示したものが, 次の定理 3.5 である.

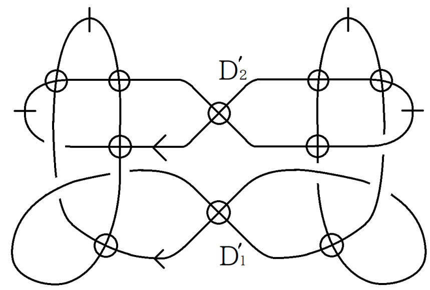
定理 3.5 (I.)**.** $\widetilde{D} \overset{v}{\sim} \widetilde{D}'$ であって $D \overset{t}{\nsim} D'$ であるような D と D' が存在する.

証明. $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)) \overset{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i,D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i,D'_i)}(t))$ かつ $(\psi_0^{(C_i,D_i)}(t),\ \psi_1^{(C_i,D_i)}(t)) \overset{(2)}{\not\equiv} (\psi_0^{(C'_i,D'_i)}(t),\ \psi_1^{(C'_i,D'_i)}(t))$ であるような捩れ仮想絡み目図式 D と D' が存在すればよい.

$D = D_1 \cup D_2$, $D' = D'_1 \cup D'_2$ を下図の 2 成分捩れ仮想絡み目図式とする. このとき, D_1, D'_1 は偶数型である.

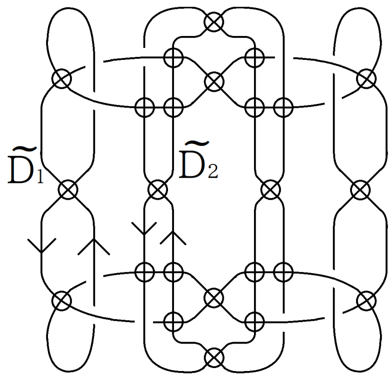


$D = D_1 \cup D_2$



$D' = D'_1 \cup D'_2$

D と D' の二重被覆図式は下図の仮想絡み目図式と同値である.



故に, $\widetilde{D} \overset{v}{\sim} \widetilde{D}'$ が成り立つ.
このとき, ある D_i の $d_i(D)$-彩色 C_i と D'_i の $d_i(D')$-彩色 C'_i を与えると
$d_1(D) = d_1(D') = 2$, $(\psi_0^{(C_1,D_1)}(t),\ \psi_1^{(C_1,D_1)}(t)) = (2t, 0)$, $(\psi_0^{(C'_1,D'_1)}(t),\ \psi_1^{(C'_1,D'_1)}(t)) = (2, 0)$
である.
故に, $(\psi_0^{(C_1,D_1)}(t),\ \psi_1^{(C_1,D_1)}(t)) \overset{(2)}{\not\equiv} (\psi_0^{(C'_1,D'_1)}(t),\ \psi_1^{(C'_1,D'_1)}(t))$ である.
従って, $D \overset{t}{\nsim} D'$ が成り立つ.

$\square$

参考文献

[1] M. O. Bourgoin, *Twisted link theory*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1249–1279.

[2] Z. Cheng, H. Gao, *A polynomial invariant of virtual links*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 22(12) (2013), 1341002 (33 pages).

[3] N. Kamada, *index polynomal invariants of twisted links*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 22 (2013), 1340005 (16 pages).

[4] N. Kamada, S. Kamada, *Double coverings of twisted links*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 25 (2016), 1641011 (22 pages).

[5] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999), 663–690.

[6] L. H. Kauffman, *An affine index polynomial invariant of virtual knots*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 22(4) (2012), 413-464.

[7] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, *Writhe polynomials and shell moves for virtual knots and links*, European J. Combin. 84 (2020), 103033 (24 pages).

[8] M. Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. 1 (4) (2010), 399–411.

[9] S. Satoh, K. Taniguchi, *The writhes of a virtual knot*, Fund. Math. 225 (1) (2014), 327–342.

A virtualized skein relation for a multivariable polynomial invariant

名古屋市立大学
開　萌実（Hiraki Moemi）*

結び目の数理 IV　報告書

概 要

Virtual link diagram の Jones 多項式に関しての virtual skein relation が N.Kamada, Nakabo, Satoh によって [4] で紹介された．また Dye, Kauffman, Miyazawa が導入した virtual link の invariant である multivariable polynomial は Jones polynomial の精密化である ([1],[6])．この multivariable polynomial の almost classical virtual link に対する virtualized skein relation について報告する．

1 A multivariable poylnomial invariant

1.1 Alexander numbering

以降, D を virtual link diagram とする．
ここで, D の **semi-arc** とは, 2 つの classical crossing の間にある D の component, または D の classical crossing を持たない loop のことである．また, D の **Alexander numbering** とは D の各 crossing を構成する semi-arc に対しては図 1 にあるように $\mathbb{Z}$ を割り当てることである．

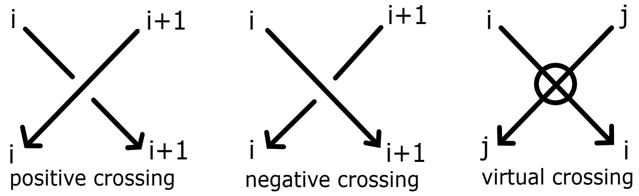


図 1: 各 crossing における numbering.

Alexander numbering をもつ例として以下の例 1.1 と例 1.2 がある．

例 1.1.

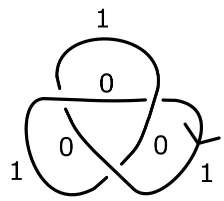


図 2: 三葉結び目における Alexander numbering.

例 1.2.

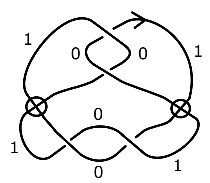


図 3: virtual link diagram の Alexander numbering.

*e-mail：m.hiraki@nsc.nagoya-cu.ac.jp

すべての classical link diagram は Alexander numbering を持つが, すべての virtual link diagram が Alexander numbering を持つとは限らない. 例 1.3 は Alexander numbering を持たない virtual link diagram である.

例 1.3.

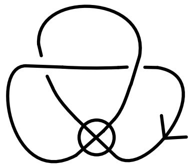


図 4: Alexander numbering を持たない virtual link diagram.

ここで, virtual link diagram D が Alexander numbering を持つとき, D を **almost classical** virtual link diagram という. また, virtual link L が almost classical virtual link diagram を持つとき, L を **almost classical** virtual link という.

1.2 cut system

An **oriented cut point** とは, 図 5 のように向きにそって Alexander numbering が 1 増えるような向きを持つ semi-arc 上の point である.

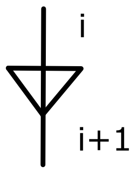


図 5: An oriented cut point.

C を virtual link diagram の oriented cut point の集合とする. C を伴う D が Alexander numbering を持つとき, C を D の **cut system** という.

Virtual link diagram と cut system の例を以下に示す.

例 1.4.

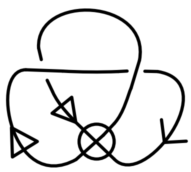


図 6: Alexander numbering of a virtual link diagram with cut system.

ここで注意として, almost classical virtual link diagram の cut system として空集合がとれる.

また, **oriented cut point move** とは図 7 のような local な変形である.

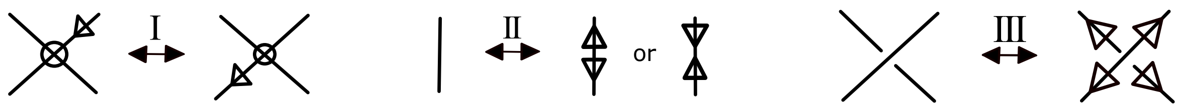


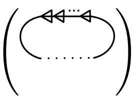
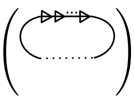
図 7: oriented cut point move

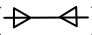
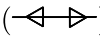
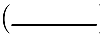
この oriented cut point move に関して以下のことが知られている.

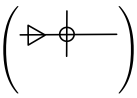
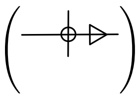
定理 1.5. *(N.Kamada [3])*
D を virtual link diagram とすると D の 2 つの cut system は有限回の oriented cut point move で移り合う.

1.3 A multivariable polynomial invariant

(D, C) を virtual link diagram D と D の cut system C のペアとする.
ここで, **cut point state diagram** of (D, C) とは, D の すべての classical crossing を splice して得られた, oriented cut point を持つ virtual link diagram のことである.
また ι を以下の条件を満たすような cut point state diagram の loop の集合から $\mathbb{Z}$ への写像とする.

(i) ι  $= \iota$  $=$ r , ここで, oriented cut point は同じ向きに 2r 個存在する.

(ii) ι () $= \iota$ () $= \iota$ ()

(iii) ι  $= \iota$ 

S をすべての (D, C) の cut point state diagrams の集合としたとき, $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ を以下のように定義する.

$$\langle\langle D, C\rangle\rangle \coloneqq \sum_{\sigma^c \in S} A^{\natural\sigma^c}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp\sigma^c - 1} d_1^{\tau_1(\sigma^c)} d_2^{\tau_2(\sigma^c)} \cdots \ \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2 \cdots]$$

ここで $\natural\sigma^c \coloneqq (\sigma^c \text{の A} - \text{splice の数}) - (\sigma^c \text{の B} - \text{splice の数})$
$\sharp\sigma^c \coloneqq (\sigma^c \text{の loop の数})$
$\tau_i(\sigma^c) \coloneqq (\iota(l) = i \text{ となる} \sigma^c \text{の loop } l \text{ の数})$
である.

この $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ に対して以下のことが知られている.

命題 1.6. *(N.Kamada [2])*
$\langle\langle D, C\rangle\rangle$ は C の選択に依らない.

命題 1.6 より, 以降 $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ を $\langle\langle D\rangle\rangle$ と書く.

このとき, D の multivariable polynomial X_D を以下のように定義する.

$$X_D \coloneqq (-A^3)^{-w(D)} \langle\langle D\rangle\rangle$$
$$w(D) = (D \text{ の positive crossing の数}) - (\text{D の negative crossing の数})$$

この multivariable polynomial X_D について以下のことがわかっている.

定理 1.7. *(N.Kamada [2])*
X_D は Dye, Kauffman, Miyazawa の定義された multivariable polynomial invariant と一致する.

命題 1.8. *(Nakamura, Nakanishi, Satoh [5], N.Kamada [2])*
D が almost classical virtual link diagram のとき, $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ となる.

2 主結果と応用

2.1 主結果

virtual skein triple (D_+, D_-, D_v) とは, D_+ の positive crossing p を交差交換したものを D_-, D_+ の p を virtual crossing に変えたものを D_v とした virtual link diagrams の三対のことである.

V_D を virtual link diagram D の Jones 多項式とする. N.Kamada, Nakabo, Satoh が [4] において Jones 多項式に対して次の関係を示した.

定理 2.1. *(N.Kamada, Nakabo, Satoh [4])*
(D_+, D_-, D_v) を virtual skein triple とする.
D_+, D_- が checkerboard colorable virtual link diagram のとき以下の式が成り立つ.

$$A^3 V_{D_+} + A^{-3} V_{D_-} = (A^3 + A^{-3}) V_{D_v}$$

以下の定理 2.2 が主結果である.

定理 2.2. (D_+, D_-, D_v) *を virtual skein triple とし,*
D_+, D_- が almost classical virtual link diagram のとき以下の式が成り立つ.

$$(A^6 - d_1) X_{D_+} + (-A^{-6} + d_1) X_{D_-} = (A^6 - A^{-6}) X_{D_v}$$

証明. D_+, D_- は almost classical virtual link diagram であるので, D_+, D_- の cut system として空集合をとる. このとき, D_v は図 8 のように 2 つの oriented cut point だけを持つような cut system を持ち, D_v はそのような cut system をとるとする.

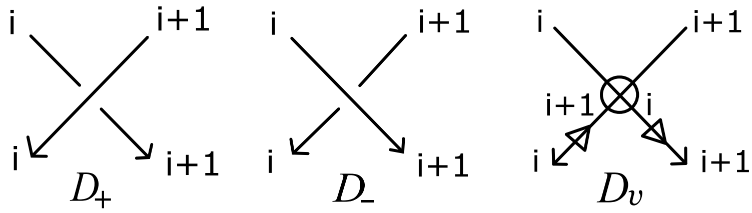


図 8: virtual skein triple における cut system

S_+, S_-, S_v を それぞれ D_+, D_-, D_v の 全ての state の集合とする.
ここで, D が almost classical virtual link diagram ならば, D は checkerboard colorable であるから, $S_\pm$ は図 9 にあるような arc のつながり方をしている cut point state の集合 $S'_\pm$ と $S''_\pm$ の非交和 $S_\pm = S'_\pm \sqcup S''_\pm$ である. よって, S_v は図 9 にあるような S_v の部分集合 S'_v と S''_v の非交和 $S_v = S'_v \sqcup S''_v$ である.

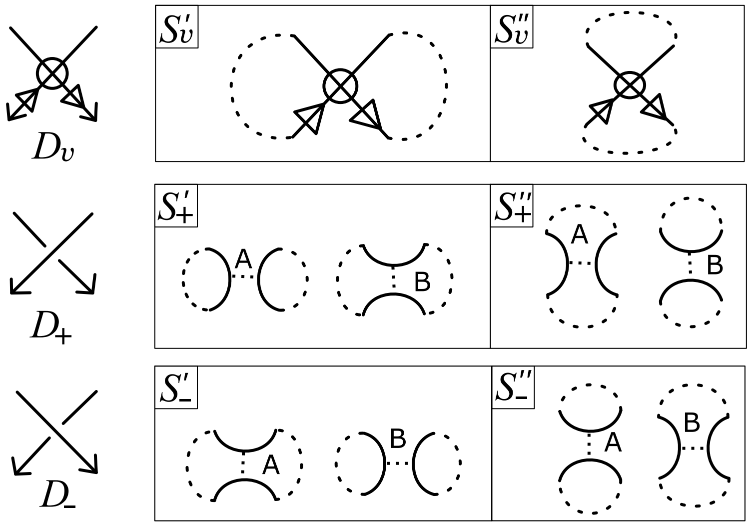


図 9:

ここで, state の部分集合 S' に関して,

$$\langle\langle D|S'\rangle\rangle := \sum_{\sigma^c\in S'} A^{\natural\sigma^c}(-A^2-A^{-2})^{\sharp\sigma^c-1}d_1^{\tau_1(\sigma^c)}d_2^{\tau_2(\sigma^c)}\cdots \in \mathbb{Z}[A^{\pm1},d_1,d_2\cdots]$$ とおく.

以下が成立する.

$$\begin{aligned}\langle\langle D_+|S'_+\rangle\rangle &= A(-A^2-A^{-2})\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle + A^{-1}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle\\ &= -A^3\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

同様に, $$\langle\langle D_-|S'_-\rangle\rangle = -A^{-3}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle. \qquad (2.2)$$

また,

$$\begin{aligned}d_1\langle\langle D_+|S''_+\rangle\rangle &= (A+A^{-1}(-A^2-A^{-2}))\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle\\ &= -A^{-3}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

同様に, $$d_1\langle\langle D_-|S''_-\rangle\rangle = -A^3\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle. \qquad (2.4)$$

式 (2.1), 式 (2.2), 式 (2.3), 式 (2.4) を用いると,

$$\begin{aligned}&(-A^3+A^{-3}d_1)\langle\langle D_+\rangle\rangle - (-A^{-3}+A^3d_1)\langle\langle D_-\rangle\rangle\\ &= (-A^3+A^{-3}d_1)(\langle\langle D_+|S'_+\rangle\rangle + \langle\langle D_+|S''_+\rangle\rangle) - (-A^{-3}+A^3d_1)(\langle\langle D_-|S'_-\rangle\rangle + \langle\langle D_-|S''_-\rangle\rangle)\\ &= (-A^3+A^{-3}d_1)(-A^3\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle - A^{-3}d_1^{-1}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle) - (-A^{-3}+A^3d_1)(-A^{-3}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle - A^3d_1^{-1}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle)\\ &= (A^6-A^{-6})(\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle + \langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle)\\ &= (A^6-A^{-6})\langle\langle D_v\rangle\rangle. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

ここで, $w(D_+) = w(D_v)+1$, $w(D_-) = w(D_v)-1$ であるので, 式 (2.5) より主結果である式 (2.6) が得られる.

$$(A^6-d_1)X_{D_+} + (-A^{-6}+d_1)X_{D_-} = (A^6-A^{-6})X_{D_v}. \qquad (2.6)$$

□

2.2 応用

ここでは先ほどの定理の応用を 2 つ挙げる.

系 **2.3.**
D_+, D_- が *almost classical virtual link diagram* のとき, $X_{D_v} \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1]$ となる.

ここで, $\mathrm{Exp}(X_D)$ を X_D の d_i を含まない項の A の指数の集合とし, $\mathrm{Exp}(X_D|d_i)$ を X_D の d_i を含む項の A の指数の集合とする. このとき以下のことがわかる.

系 **2.4.** *(Satoh, Tomiyama* [7]*)*
(D_+, D_-, D_v) を *virtual skein triple,*
D_+, D_- を n 成分の *almost classical virtual link diagram* としたとき以下が成り立つ.

$$\mathrm{Exp}(X_{D_v}) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & (n: odd) \\ 4\mathbb{Z}+2 & (n: even) \end{cases}$$
$$\mathrm{Exp}(X_{D_v}|d_1) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z}+2 & (n: odd) \\ 4\mathbb{Z} & (n: even) \end{cases}$$

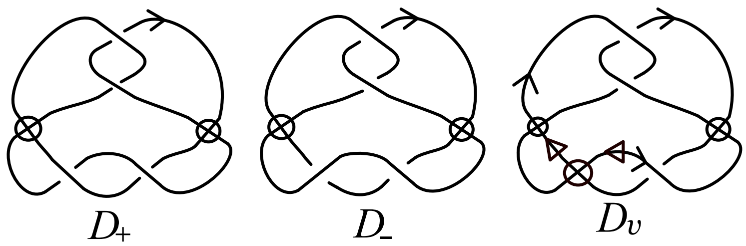


図 10:

具体例として図 10 を計算すると multivariable polynomial invariant はそれぞれ以下のようになる.

$$X_{D_+} = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$$
$$X_{D_-} = 1$$
$$X_{D_v} = A^8 - A^4 + 1 + (-A^2 + A^{-2})d_1$$

この計算結果は, 系 2.3 と 系 2.4 を満たしていることがわかる.

参考文献

[1] H. A. Dye and Louis H. Kauffman, *Virtual Crossing Number and the Arrow Polynomial* (2009), available at 0810.3858.

[2] N.Kamada, *A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems*, Topology and its Applications **301** (2021), 107518, DOI https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107518. Special issue for the proceedings of the Third PPICTA.

[3] N.Kamada, *Cyclic coverings of virtual link diagrams* (2019), available at 1903.03306.

[4] N.Kamada and Nakabo and Satoh, *A virtualized skein relation for Jones polynomials*, Illinois Journal of Mathematics - ILL J MATH **46** (2002), DOI 10.1215/ijm/1258136203.

[5] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **17** (2008), no. 11, 1311-1326, DOI 10.1142/S0218216508006658. cited By 34.

[6] Nakamura and Nakanishi and Satoh and Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **10** (2012), DOI 10.1142/S0218216512500952.

[7] Satoh and Tomiyama, *On the crossing numbers of a virtual knot*, Proceedings of the American Mathematical Society **140** (2012), DOI 10.1090/S0002-9939-2011-10917-1.

結び目のシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式

吉田 真治（京都大学数理解析研究所）

概要

結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式が Naruse 氏によって示された [4]．これを背景に Ishikawa 氏は結び目のカンドルコサイクル不変量のケーブル化公式を示した [1]．本稿ではその一般化であるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式について，二面体カンドルの場合に得られた結果について述べる．

1 準備

この節ではカンドルの定義やシャドーコサイクル不変量の定義を復習する．詳細は [2] 等を参照されたい．また定理の主張で扱うサテライト結び目を定義する．

1.1 カンドルとタングル図式の彩色

集合 X 上の二つの二項演算 $*, \overline{*}: X \times X \to X$ が

$(Q1)$ 任意の $x, y, z \in X$ に対し $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$
$(Q2)$ 任意の $x, y \in X$ に対し $(x * y) \mathbin{\overline{*}} y = (x \mathbin{\overline{*}} y) * y = x$
$(Q3)$ 任意の $x \in X$ に対し $x * x = x$

をみたすとき，$(X, *)$ を**カンドル**という．またこのとき $(X, \overline{*})$ を**双対カンドル**といい，$\overline{X}$ と表す．$x \in X$ に対し全単射 $S_x : X \to X$ を $S_x(y) = y * x$ で定める．このとき集合 $\{S_x | x \in X\}$ で生成される群をカンドル X の**内部自己同型群**といい $\mathrm{Inn}(X)$ と表す．$\mathrm{Inn}(X)$ が X に推移的に作用するとき，X を**連結**であるという．任意の有限カンドル X は $\mathrm{Inn}(X)$ による作用で軌道に分解することを繰り返すことで，連結カンドルの非交和で表すことができる．$x \in X$ に $S_x \in \mathrm{Inn}(X)$ を対応させる写像が単射のとき，X を**忠実**であるという．

例 1.1. n を正の整数とし，集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に二項演算 $*$ を $x * y = 2y - x$ で定めるとこれはカンドルとなる．これを**二面体カンドル**といい R_n と書く．n が奇数のとき R_n は連結かつ忠実である．

例 1.2. $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$ 上の加群 X に二項演算 $*$ を $x*y=Tx+(1-T)y$ で定めるとこれはカンドルとなる．これを Alexander **カンドル**という．特に $X=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[T,T^{-1}]/(T+1)$ のとき X は二面体カンドルである．

$(X,*)$ をカンドルとする．集合 M が X**-集合**であるとは，二つの演算 $\triangleleft,\overline{\triangleleft}: M\times X\to M$ が

$(Q1)'$　任意の $w\in M, x,y\in X$ に対し $(w\triangleleft x)\triangleleft y=(w\triangleleft y)\triangleleft(x*y)$
$(Q2)'$　任意の $w\in M, x\in X$ に対し $(w\triangleleft x)\,\overline{\triangleleft}\,x=(w\,\overline{\triangleleft}\,x)\triangleleft x=w$

をみたすときをいう．定義より任意のカンドル X は $\triangleleft=*$ により X-集合となる．

有限個の円周と線分の非交和 $\bigsqcup_n S^1\sqcup\bigsqcup_m[0,1]$ の $\mathbb{R}^2\times[0,1]$ への埋め込みで線分の端点の像が $\mathbb{R}^2\times\{0,1\}$ に含まれるものを**タングル**という．特に S^1 の $\mathbb{R}^2\times[0,1]$ への埋め込みを**結び目**という．またタングルの $\mathbb{R}\times[0,1]$ への射影をタングル図式という．

X をカンドルとし，D をタングル図式とする．D の弧の集合から X への写像 $\mathcal{C}$ で各交点において図 1 の左図のような関係をみたすものを D の X**-彩色**という．D の全ての X-彩色の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と表す．

図 1: カンドル彩色とシャドー彩色

M を X-集合とする．D の X-彩色 $\mathcal{C}$ が与えられているとき，D の補空間の各領域に M の元を対応させる写像 $\mathcal{C}^s$ が図 1 の右図の関係をみたすとき，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^s$ の組を D の M**-シャドー** X**-彩色**という．$\mathcal{C}^s$ は十分大きい $x>0$ に対する $(x,0)$ を含む非有界領域の色と $\mathcal{C}$ が与えられると，他の全ての領域の色が帰納的に定まる．

1.2　カンドルコサイクル

X をカンドルとし，A をアーベル群とする．写像 $\phi: X^2\to A$ に対し $d_2\phi: X^3\to A$ を

$$d_2\phi(x,y,z)=\phi(x,z)-\phi(x,y)-\phi(x*y,z)+\phi(x*z,y*z)$$

で定める．$d_2\phi$ を**ラック 3-コバンダリ**という．

X をカンドルとし，A をアーベル群とする．写像 $\theta: X^3\to A$ が次の条件

$(C1)$　任意の $w,x,y,z\in X$ に対し

$$\theta(w,y,z)-\theta(w,x,z)+\theta(w,x,y)=\theta(w*x,y,z)-\theta(w*y,x*y,z)+\theta(w*z,x*z,y*z)$$

$(C2)$　任意の $x,y\in X$ に対し $\theta(x,y,y)=0$

$(C3)$　任意の $x, y \in X$ に対し $\theta(x, x, y) = 0$

をみたすとき，θ を**カンドル 3-コサイクル**という．

X をカンドル，M を X-集合とし，A をアーベル群とする．写像 $\theta : M \times X^2 \to A$ が次の条件

$(C1)'$　任意の $w \in M, x, y, z \in X$ に対し

$$\theta(w,y,z)-\theta(w,x,z)+\theta(w,x,y) = \theta(w\triangleleft x, y, z)-\theta(w\triangleleft y, x*y, z)+\theta(w\triangleleft z, x*z, y*z)$$

$(C2)'$　任意の $w \in M, x \in X$ に対し $\theta(w, x, x) = 0$

をみたすとき，θ を**シャドーカンドル 2-コサイクル**という．

例 1.3 ([3])**.** p を奇素数とし，二面体カンドル R_p に対し写像 $\psi : R_p^3 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を

$$\psi(w,x,y) = (w-x)\frac{\overline{x}^p + (2\overline{y} - \overline{x})^p - 2\overline{y}^p}{p}$$

と定める．ただし $x \in R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ へのリフトを $\overline{x}$ と表す．ψ は x, y のリフトの取り方によらず定まり，カンドル 3-コサイクルの公理をみたす．ψ を**望月 3-コサイクル**という．

1.3　シャドーコサイクル不変量

X をカンドル，M を X-集合とし，$\theta : M \times X^2 \to A$ をシャドーカンドル 2-コサイクルとする．結び目 K の図式 D に対し，シャドー彩色 $(\mathcal{C}, r) \in \mathrm{Col}_X(D) \times M$ についての各交点でのウェイト W_θ を図 2 のように定める．

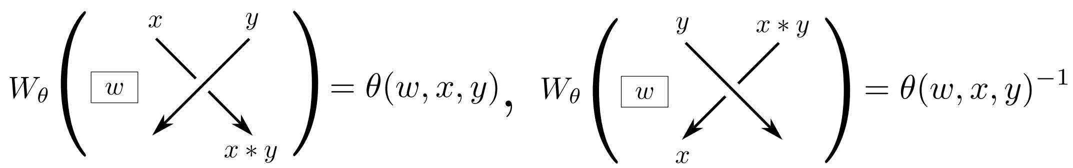


図 2: 各交点におけるウェイト

また

$$\Psi_\theta(D, \mathcal{C}; r) = \prod_{\alpha : D \text{ の交点}} W_\theta(\alpha, \mathcal{C}; r) \ \in A$$

とおく．ψ が R_p の望月 3-コサイクルのときは $\Psi_\psi(D, \mathcal{C}; r)$ は非有界領域の色 r によらないので ([5])，これを $\Psi_\psi(D, \mathcal{C})$ と表す．

そして

$$\Psi_\theta(K, r) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathrm{Col}_X(D)} \Psi_\theta(D, \mathcal{C}; r) \in \mathbb{Z}[A]$$

と定める．これを K の**シャドーコサイクル不変量**という．$\Psi_\theta(K,r)$ は K の図式の取り方によらない結び目の不変量である．また次が成り立つ．

補題 1.4 ([2] 参照)**.** X がカンドル，$\theta: M\times X^2\to A$ がシャドーカンドル 2-コサイクル，f がラック 3-コバンダリのとき $\Psi_\theta(K,r)=\Psi_{\theta+f}(K,r)$.

望月 3-コサイクル ψ については $\Psi_\psi(K,r)$ は非有界領域の色によらないので，単に $\Psi_\psi(K)$ と表す．

1.4 サテライト結び目

3-タングルであり端点における向きが順に下，上，下となっているものを $(+,-,+)$**-型**であるという．

定義 1.5. K を結び目とし，T を $(+,-,+)$-型のタングルとする．K を一点で切断して得られる 1-タングル図式を $\check{D}$ とし，$\check{D}$ を 0 枠に沿って三重化した図式を $\check{D}^{(3)}$ とする．また $\check{D}^{(3)}$ には $(+,-,+)$-型のタングルとなるよう向きを定める．このとき，$\check{D}^{(3)}$ と T を合成したタングルの閉包を $K^{(3)}(T)$ と表す．（図 3 参照）

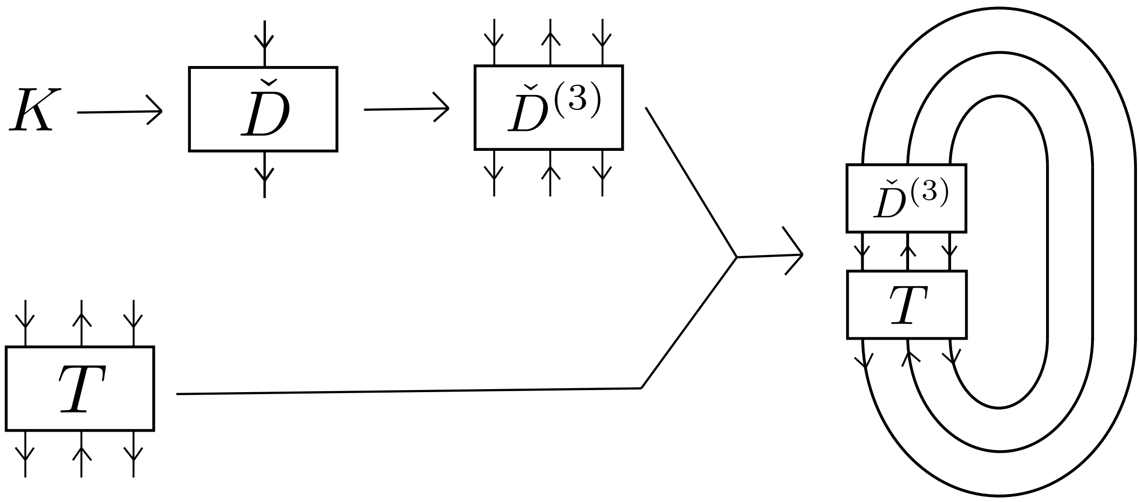


図 3: サテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ の構成

定義より $K^{(3)}(T)$ はサテライト結び目である．

2 主結果

この節では 1 節で定義したサテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ に対し，二面体カンドルの望月 3-コサイクルで定義されるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える．

定理 2.1. $\psi: R_p^3\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を望月 3-コサイクルとする．K を結び目とし，T を $(+,-,+)$-

型のタングルとする．このとき

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \Psi_\psi(K)\cdot\Psi_\psi(\overline{T})/p \ \in \mathbb{Z}[t]/(t^p-1)$$

が成り立つ．ここで $\mathbb{Z}[t]/(t^p-1)$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle t \mid t^p = 1\rangle$ の群環である．また $\overline{T}$ は T の S^3 における閉包である．

定理を使った計算例を紹介する．図 4 のタングル T と結び目 K に対しサテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量 $\Psi_\psi(K^{(3)}(T))$ を計算する．

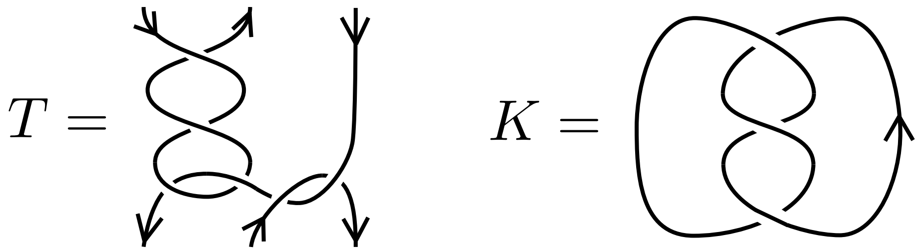


図 4: タングル T と結び目 K の例

T の閉包は figure-8 knot である．$\overline{T}$ の図式が非自明な R_p-彩色を持つのは $p=5$ のときに限る．そのことに注意してシャドーコサイクル不変量を計算すると

$$\Psi_\psi(\overline{T}) = \begin{cases} 5(1+2t^2+2t^3) & (p=5 \text{ のとき}) \\ p & (p\neq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．

K は trefoil knot の鏡像であり，K の図式が非自明な R_p-彩色を持つのは $p=3$ のときに限る．そのことに注意してシャドーコサイクル不変量を計算すると

$$\Psi_\psi(K) = \begin{cases} 3(1+2t) & (p=3 \text{ のとき}) \\ p & (p\neq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．

定理 2.1 より，$K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量は $\Psi_\psi(\overline{T})$ と $\Psi_\psi(K)$ の積を p で割った値に等しい．よって

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \begin{cases} 3(1+2t) & (p=3 \text{ のとき}) \\ 5(1+2t^2+2t^3) & (p=5 \text{ のとき}) \\ p & (p\neq 3,5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

3　定理の証明の概要

この節では定理の証明の概要を述べる．詳細は [6] を参照されたい．

サテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ の X-彩色 $\mathcal{C}$ が与えられたとする．まずは $\mathcal{C}$ を $\check{D}^{(3)}$ の X-彩色 $\mathcal{C}_{D^{(3)}}$ と T の X-彩色 $\mathcal{C}_T$ に分解する．このとき $\mathcal{C}_{D^{(3)}}$ は $\check{D}$ のあるカンドル W_i による彩色 $\mathcal{C}_D$ と同一視される．またこのとき X のシャドーカンドル 2-コサイクル ψ から W_i のシャドーカンドル 2-コサイクル ψ_i が得られ，

$$\Psi_\psi(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}_{D^{(3)}}; r) = \Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}_D; r)$$

が成り立つ．よって $\Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}_D; r)$ と $\Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T; r)$ によりサテライト結び目のシャドーコサイクル不変量が表示される．こうしてサテライト化公式が得られる．

3.1　カンドルの三重化

$\check{D}^{(3)}$ の X-彩色に対応する $\check{D}$ の X-彩色は次のようにして得られる．まずはカンドル X に対し次のようなカンドル $X^{(3)}$ を定義する．

定義 3.1. $X^{(3)} = X \times \overline{X} \times X$ とおく．$X^{(3)}$ の二項演算 $*' : X^{(3)} \times X^{(3)} \to X^{(3)}$ を

$$(x_1, x_2, x_3) *' (y_1, y_2, y_3) = (x_1^{\overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 y_1 \overline{y}_2 y_3}, x_2^{\overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 y_1 \overline{y}_2 y_3}, x_3^{\overline{x}_3 x_2 \overline{x}_1 y_1 \overline{y}_2 y_3})$$

で定める．ここで $x^y = x * y, x^{\overline{y}} = x \overline{*} y$ であり，$w^{\overline{x}yz} = ((w^{\overline{x}})^y)^z$ のように表す．このとき $X^{(3)}$ はカンドルの公理をみたす．

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ のとき，$\mathbf{x} * \mathbf{y}$ は図 5 の右のタングル図式の X-彩色において，上端の色が $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ となっているときの下端の色として現れる．

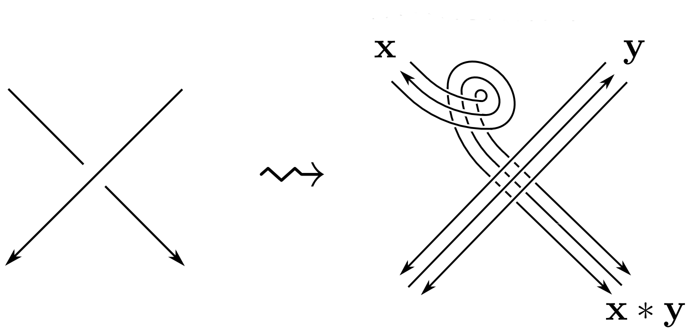


図 5: 交点の 0 枠に沿った三重化と X-彩色

$\mathcal{C}_{D^{(3)}} \in \mathrm{Col}_X(\check{D}^{(3)})$ とする．$\check{D}$ の弧 a を三重化して得られる $\check{D}^{(3)}$ の弧 a_1, a_2, a_3 について，$x_1 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_1), x_2 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_2), x_3 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_3)$ のとき $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in X^{(3)}$ とみなせる．このとき $X^{(3)}$ の定義より $\mathcal{C}_D \in \mathrm{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ を $\mathcal{C}_D(a) = \mathbf{x}$ で定めることができる．この対応を $\gamma : \mathrm{Col}_X(\check{D}^{(3)}) \to \mathrm{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ とおく．このとき γ は全単射である．

さらに $\mathrm{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ は $X^{(3)}$ の連結成分による彩色に帰着されるので，サテライト化公式を得るには $X^{(3)}$ の連結成分を求める必要がある．

例 3.2. X が有限かつ連結な Alexander カンドルのときに $X^{(3)}$ の連結成分を求める．

$W_{i,j} = \{x_{i,j} = (x+i, x+i+j, x+j) | x \in X\}$ とおくと集合として $X^{(3)} = \bigsqcup_{i,j\in X} W_{i,j}$ であり，$x_{i,j} \in W_{i,j}, y_{k,l} \in W_{k,l}$ に対し

$$x_{i,j} * y_{k,l} = (Tx + (1-T)y + i, Tx + (1-T)y + i + j, Tx + (1-T)y + j) \in W_{i,j}$$

であるので $W_{i,j}$ は $\mathrm{Inn}(X^{(3)})$ の作用に関する $X^{(3)}$ の軌道である．また上式より $x_{i,j} * y_{i,j} = (x * y)_{i,j}$ が成り立つので，自然な同型 $h_{i,j} : X \to W_{i,j}$ が $h_{i,j}(x) = x_{i,j}$ により定まる．ゆえに $X^{(3)}$ の連結成分は全て X と同型なカンドルである．

3.2 カンドルの三重化により得られるコサイクル

X のシャドーカンドル 2-コサイクルから $X^{(3)}$ のシャドーカンドル 2-コサイクルが次のように得られる．

定義 3.3. X 上のシャドーカンドル 2-コサイクル $\psi : M \times X^2 \to A$ に対し写像 $\psi^{(3)}_{twist} : M \times X^{(3)} \to A$，$\theta : M \times X^{(3)} \times X \to A$ および $\psi^{(3)}_{cross} : M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \to A$ を

$$\begin{aligned}
\psi^{(3)}_{twist}(w, \mathbf{x}) &= \psi(w^{x_1\overline{x}_2\overline{x}_1}, x_2^{\overline{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1\overline{x}_2\overline{x}_1}, x_3^{\overline{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1\overline{x}_2\overline{x}_1}, x_3^{\overline{x}_1}, x_2^{\overline{x}_1}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_1}, x_1, x_2^{\overline{x}_1}) - \psi(w, x_1^{\overline{x}_3x_2\overline{x}_1}, x_3^{x_2\overline{x}_1}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1\overline{x}_2x_3x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_2\overline{x}_1}, x_2^{\overline{x}_3x_2\overline{x}_1}, x_3^{x_2\overline{x}_1}) \\
\theta(w, \mathbf{x}, y) &= \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1\overline{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1\overline{x}_2}, x_3, y) \\
\psi^{(3)}_{cross}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1\overline{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1\overline{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1\overline{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1\overline{y}_2}, y_3)
\end{aligned}$$

で定める．さらに $\psi^{(3)} : M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \to A$ を以下で定める．

$$\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi^{(3)}_{twist}(w, \mathbf{x}) + \psi^{(3)}_{cross}(w, \mathbf{x}^{\overline{x}_3x_2\overline{x}_1}, \mathbf{y}).$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対し $\mathbf{x}^{y_1\overline{y}_2\cdots} = (x_1^{y_1\overline{y}_2\cdots}, x_2^{y_1\overline{y}_2\cdots}, x_3^{y_1\overline{y}_2\cdots})$ などと表記する．このとき $\psi^{(3)}$ はシャドーカンドル 2-コサイクルである．

定義より $\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ の値は図 6 のタングルの M-シャドー X-彩色について，図の全ての交点におけるウェイトの和をとったものに等しい．

γ による $\mathrm{Col}_X(\check{D}^{(3)})$ と $\mathrm{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ の対応において，$\psi^{(3)}$ の定義より次が成り立つ．

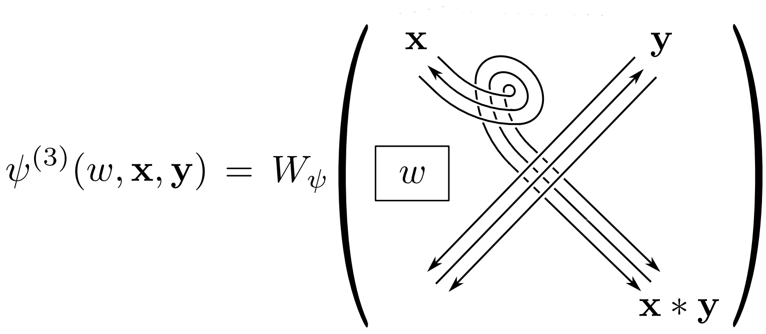


図 6: $\psi^{(3)}$ と図式のウェイトの関係

補題 3.4. 任意の $\mathcal{C}_{D^{(3)}} \in \mathrm{Col}_X(\check{D}^{(3)}), r \in M$ に対し

$$\Psi_\psi(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}_{D^{(3)}}; r) = \Psi_{\psi^{(3)}}(\check{D}, \gamma(\mathcal{C}_{D^{(3)}}); r)$$

が成り立つ.

$X^{(3)}$ の連結成分が $\{W_i\}_{i\in I}$ であるとき，ある W_i に対し $\gamma(\mathcal{C}_{D^{(3)}}) \in \mathrm{Col}_{W_i}(\check{D})$ であるので，補題の右辺は $\psi^{(3)}$ を W_i に制限したコサイクル ψ_i を使って計算される.

以上を踏まえると，$K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量は (X, ψ) より定まる $(W_i, \psi_i)_{i\in I}$ により

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i\in I} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in X_i} \sum_{\mathcal{C}_T\in \mathrm{Col}_X(T;\mathbf{y},\mathbf{x})} \sum_{\mathcal{C}\in \mathrm{Col}_{X_i}(\check{D};\mathbf{x},\mathbf{y})} \Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T; r) \cdot \Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}; r)$$

と表示される．ここで $\mathrm{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})$ は上端と下端の色がそれぞれ $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ である T の X-彩色の集合である.

3.3 二面体カンドルの場合

奇素数位数の二面体カンドル R_p の望月 3-コサイクル ψ に対し，サテライト化公式を具体的に決定する.

例 3.2 より，$(R_p)^{(3)}$ の連結成分は R_p と同型なカンドル $(R_p)_{i,j} (i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ からなる．望月 3-コサイクル ψ から得られる $\psi^{(3)}$ を $(R_p)_{i,j}$ に制限したコサイクル $\psi_{i,j}$ は ψ にコホモロガスである．それは以下の補題より従う.

補題 3.5. 任意の $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対し $\psi_{i,j} + \xi_{i,j}$ がカンドル 3-コサイクルとなるようなラック 3-コバンダリ $\xi_{i,j}$ が存在する.

補題 3.6. $K(2, p)$ を $(2, p)$-トーラス結び目とする．このとき任意の $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対し

$$\Psi_\psi(K(2, p)) = \Psi_{\psi_{i,j}}(K(2, p))$$

が成立する.

$(R_p)^{(3)}$ の連結成分 $\{(R_p)_{i,j}\}$ とその上のコサイクル $\{\psi_{i,j}\}$ が得られたことで，ψ で定義されるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を具体的に求めることができる．

R_p は忠実カンドルなので $\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};x,y) \neq \emptyset$ であるのは $x = y$ のときに限る．よって 3.2 節の最後の式より

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x\in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T\in\mathrm{Col}_{R_p}(T;x_{i,j},x_{i,j})} \sum_{\mathcal{C}\in\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};x,x)} \Psi_\psi(T,\mathcal{C}_T)\cdot\Psi_\psi(\check{D},\mathcal{C})$$

と表される．また R_p は連結なので各 x に対し $s(x) = 0 \in R_p$ となる $s \in \mathrm{Inn}(R_p)$ を選ぶと s は $\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};x,x)$ から $\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};0,0)$ への全単射 s_* を誘導し，この対応において

$$\Psi_\psi(\check{D},\mathcal{C}) = \Psi_\psi(\check{D},s_*(\mathcal{C}))$$

が成り立つ．またこれは $\Psi_\psi(K) = p\cdot\sum_{\mathcal{C}\in\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};0,0)}\Psi_\psi(\check{D},\mathcal{C})$ を導く．よって

$$\begin{aligned}\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x\in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T\in\mathrm{Col}_{R_p}(T;x_{i,j},x_{i,j})} \sum_{\mathcal{C}\in\mathrm{Col}_{R_p}(\check{D};0,0)} \Psi_\psi(T,\mathcal{C}_T)\cdot\Psi_\psi(\check{D},\mathcal{C}) \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x\in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T\in\mathrm{Col}_{R_p}(T;x_{i,j},x_{i,j})} \Psi_\psi(T,\mathcal{C}_T)\cdot\Psi_\psi(K)/p\end{aligned}$$

と変形できる．ここで集合として $\bigsqcup_{x,i,j\in R_p}\mathrm{Col}_{R_p}(T;x_{i,j},x_{i,j})$ は $\mathrm{Col}_{R_p}(\overline{T})$ と同一視される．よって

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \Psi_\psi(\overline{T})\cdot\Psi_\psi(K)/p$$

となり定理の主張が示される．

参考文献

[1] K.Ishikawa, *Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots*, Master thesis, Kyoto University, January, 2016.

[2] S.Kamada, *Surface-Knots in 4-Space : an Introduction*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017)

[3] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287-330.

[4] 成瀬透，"曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式"，修士論文，京都大学数理解析研究所，2015 年 1 月．`http://hdl.handle.net/2433/194277`

[5] S.Satoh. *A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007) No.7, 959-967.

[6] 吉田真治，"結び目のシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式"，修士論文，京都大学数理解析研究所，2022 年 1 月．

一葉双曲面上のカンドルと longitudinal map

九州大学大学院 数理学府 博士 2 年
米村 拳太郎 *

概要

一葉双曲面上に定義されたカンドルの構造と、それに関係した結び目の不変量 "longitudinal map" について述べる。この文献で省略した部分は、著者の preprint [14] を参照されたい。

1 カンドル

この節では、この文献を読む際に必要なカンドルに関する概念を述べる。詳細に関しては、野坂 [10] や鎌田 [8] を参照されたい。

まず、カンドルの定義を述べる。

定義 1.1（カンドル [7, 9]） カンドル (quandle) とは空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$ で次の Q1〜Q3 の条件を満たすものである：

Q1 （冪等性）任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。

Q2 （逆元）任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。

Q3 （自己分配性）任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

定義 1.1 における条件 Q1〜Q3 は、それぞれ Reidemister 移動 I〜III と呼ばれる、結び目の射影図に対する操作に対応していることが知られている。

いくつかカンドルの例を挙げておこう。

例 1.2（二面体カンドル [12]） $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とし、二項演算 $\triangleright$ を

$$x \triangleright y = 2y - x$$

と定めると、$(X, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルは二面体カンドルと呼ばれている。

例 1.3（共役カンドル） G を群とし、二項演算 $\triangleright$ を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

と定めると、$(G, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルは共役カンドルと呼ばれている。

以下、カンドル準同型について述べ、この節を終わる。

定義 1.4（カンドル準同型とカンドル同型） X, Y をカンドルとするとき、写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

* Email:3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

を満たすとき、カンドル準同型写像という。特に、カンドル準同型写像 f が全単射であるとき、カンドル同型写像という。

2　この文献で扱う一葉双曲面上に定義されたカンドル

この文献で主に扱うカンドルを構成する。

命題 2.1　$r > 0$ とする。$S_1^2(r)$ を

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

に関する $SL(2, \mathbb{R})$ の共役類とする。このとき、二項演算 $\triangleright : S_1^2(r) \times S_1^2(r) \to S_1^2(r)$ を

$$g \triangleright h = h^{-1} g h$$

として定めると $(S_1^2(r), \triangleright)$ はカンドルとなる。

この文献では、命題 2.1 で構成したカンドルも単に $S_1^2(r)$ と表すことにする。$S_1^2(r)$ は一葉双曲面と微分同相であることに注意されたい。

次の見方から $S_1^2(r)$ は既知のカンドルである。

- $S_1^2(r)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ に関する共役カンドルの部分カンドルである。
- 石川 [6] により 2 次元の smooth quandle (多様体としての構造を併せ持つカンドル) の分類が完了している。

3　幾何学的形状とカンドル構造

前節で構成したものとは異なる方法で一葉双曲面上にカンドルを構成し、それが前節で構成したカンドルと同型でないことを述べる。これにより、幾何学的な構造が同じでも、性質の全く異なるカンドル構造が入ることが分かる。

この節では双線形形式 $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ をある種の Minkowski 内積

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

とする。

定義 3.1　一葉双曲面 $S_1^2 = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \}$ 上に二項演算 $\triangleright : S_1^2(r) \times S_1^2(r) \to S_1^2(r)$ を

$$\boldsymbol{x} \triangleright \boldsymbol{y} = 2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$$

と定めると、$(S_1^2, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルを $S_{1\mathbb{R}}^2$ と表わすことにする。

次の命題により、$S_1^2(r)$ と $S_{1\mathbb{R}}^2$ は幾何的な構造は一致するが、カンドルとして同型ではない。証明は省略する。

命題 3.2　$S_{1\mathbb{R}}^2$ は対合性

$$^\forall x, y, \quad (x \triangleright y) \triangleright y = x$$

を満たすが、任意の $r > 0$ に対して $S_1^2(r)$ は対合性を満たさない。

注意 3.3 この節を設けたのは、Azcan-Fenn[1] の「球面カンドル」の構成と、Clark-Saito[3] の「球面カンドル」の構成が、同じ名前がついているにもかかわらず、全く異なっていたことに起因する。この場合には、偶然にも整合性が取れている。詳細は [13] を参照。

4 longitudinal map に関係するカンドルを用いた結び目の不変量

この文献の目的のひとつとして、longitudinal map の具体例を計算することがある。まず、longitudinal map の定義を述べよう。

定義 4.1（longitudinal map[3]） K を結び目、G を群とする。さらに、$\mathfrak{m}, \mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ をそれぞれ K のメリディアンとロンジチュードとする。$x \in G$ をひとつ決めたとき、写像

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) \ : \ f(\mathfrak{m}) = x\} \to G \quad f \mapsto f(\mathfrak{l})$$

を longitudinal map という。

この節では、定義 4.1 で述べた longitudinal map が生まれた経緯を述べる。

1999 年、Carter ら [2] により、カンドルコサイクル不変量が構成された。これは、極めて強力な結び目の不変量である。著名な応用として、井上-蒲谷 [5] による双曲結び目の複素体積のカンドルコサイクル不変量による実現が知られている。カンドルコサイクル不変量の難点は、

- 考えるカンドルの 2 コサイクルを具体的に分からなければならない
- 考えるカンドルによる彩色を全て記述する必要があり、そのために考えるカンドルの集合としての濃度が有限であることが望ましい

ことである。

2007 年、Eisermann[4] は colouring polynomial を構成した。この結び目の不変量の良いところは、考えているカンドルの 2 コサイクルを具体的に分かる必要がないことである。さらに、

- colouring polynomial はカンドルコサイクル不変量の真の拡張である。つまり、カンドルコサイクル不変量で見分けられる結び目は colouring polynomial で見分けられる。
- colouring polynomial は Yang-Baxter 不変量として実現できる。

ことが Eisermann 自身により証明されている。

2019 年、Clark-Saito[3] は、colouring polynomial を集合としての濃度が有限でないカンドルに対しても定義することが出来る不変量へ拡張するため、longitudinal map を構成した。

5 $(2, n)$ 型トーラス結び目の $S_1^2(r)$ による彩色

結び目 K とその射影図 D、そしてカンドル X が与えられたとき、写像

$$C : \{D \text{ の弧全体 }\} \to X$$

でカンドル準同型 $f : Q_K \to X$ を誘導するものを、X による D の彩色という。ここでの Q_K は、結び目カンドルと呼ばれる K に対して定まるカンドルである。X による D の彩色全体を $\mathrm{Col}_X(D)$ とかく。結び目の射影図 D によって $\mathrm{Col}_X(D)$ は異なるが、その濃度は一致することが知られている。

この節では、$S_1^2(r)$ による彩色を述べる。

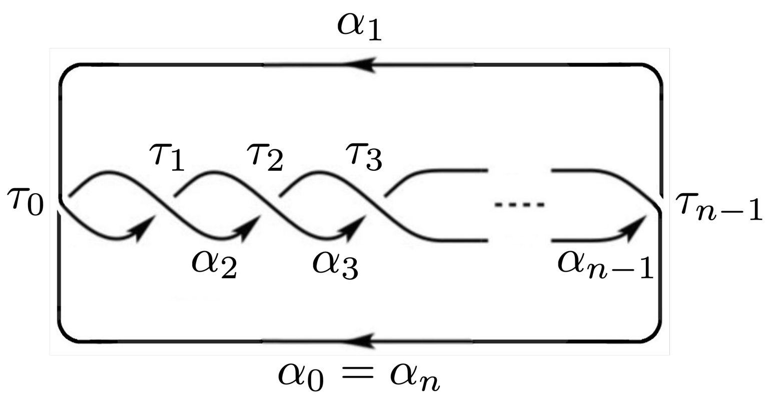


図 1　$(2, n)$ 型トーラス結び目の射影図

定理 5.1　図 1 のような射影図 D を持つ $(2, n)$ 型トーラス結び目の彩色は

$$\mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D) = \bigcup_{f \in \mathrm{Inn}\, SL(2,\mathbb{R})} \{f \circ C_0\} \cup \left\{ f \circ C_{j,b,c} \;:\; \begin{matrix} j = 1, 3, \cdots, n-2 \\ bc = -\frac{4 \sin^2 \theta_j (\sin^2 \theta_j + \sinh^2 r)}{\sinh^2 r} \end{matrix} \right\}$$

である。

記号の説明と証明は省略する。証明のポイントは、行列の対角化によって冪乗を具体的に求めることが出来ることである。彩色を計算するときに学部で習う線形代数が前面に出るのは、実は珍しいことである。

著者は「線形代数の恩恵を受け易いため、この文献で扱ってるような smooth quandle (多様体構造を併せ持つカンドル) について研究をしよう」という PR を行っている。この文献を読んで興味を持っていただけたら幸いである。

6　$S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の関係

$r > 0$, K を結び目とする。$SL(2, \mathbb{R})$ における

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

と共役な元を、この文献では双曲元ということにする。

定義 6.1（双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現）　$\mathfrak{m} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ とする。このとき、表現 $f : \pi_1(S^3 \setminus K) \to SL(2, \mathbb{R})$ に対して、$f(\mathfrak{m})$ が双曲元であるとき、双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現とこの文献ではいうことにする。

野坂 [11] の結果を用いることにより、$S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の間には、自然な 1 対 1 対応が得られる。

定理 6.2　K を結び目、D を K の射影図、そして $r > 0$ とする。このとき、1 対応 1 対応

$$\Psi_{K,r} : \mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D) \xrightarrow{\sim} \{ f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2, \mathbb{R})) \;:\; f \text{ は双曲表現} \}$$

を具体的に構成することが出来る。

さらに、系として、次の自然な対応が誘導される。

系 6.3　K を図のような射影図 D を持つ $(2,n)$ 型トーラス結び目とし、K のメリディアン $\mathfrak{m}$ を α_0 とする。このとき、$\Psi_{K,r}$ から次のような 1 対 1 対応が誘導される。

$$\{C \in \mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D)\ :\ C(\alpha_0) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\} \simeq \{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2,\mathbb{R}))\ :\ f(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\}$$

7　$(2,n)$ 型トーラス結び目の $SL(2,\mathbb{R})$-longitudinal map の計算例

定義 4.1 において、K を $(2,n)$ 型トーラス結び目、$G = SL(2,\mathbb{R})$、そして

$$x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

とした場合の計算例を述べる。ただし、$r > 0$ とする。

補題 7.1　定理 5.1 の記号を用いる。$u_0 = C_{j,b,c}(\alpha_0),\ u_1 = C_{j,b,c}(\alpha_1)$ とする。このとき、

$$(u_0u_1)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

定理 7.2　系 6.3 の対応を考えると、

$$\mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_{j,b,c})) = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

証明　$k \geq 1$ を用いて、$n = 2k+1$ とする。ここでは、結び目群は Wirtinger 表示という、図式の弧を生成元とするような、図式から得られる表示で表されているとする。$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を用いて、ロンジチュード $\mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-n}(\alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_{2k-1})(\alpha_0\alpha_2 \cdots \alpha_{2k})$$

と表せる。このとき、[3, Lemma 6.3] の証明と同様の議論を行うことで、

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-2n}(\alpha_0\alpha_1)^n$$

であることが従う。これを用いて、longitudinal map $\mathcal{L}_G^x(f)$ を計算する。
($f = \Psi_{K,r}(C_0)$ のとき)

$$C_0(\alpha_0) = C_0(\alpha_1) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} (\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。
($f = \Psi_{K,r}(C_{j,b,c})$ のとき) 補題 7.1 より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

である。

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136 の支援を受けたものである。

参考文献

[1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.

[2] J Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 355, No. 10, pp. 3947–3989, 2003.

[3] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for SU(2). *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.

[4] Michael Eisermann. Knot colouring polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 231, No. 2, pp. 305–336, 2007.

[5] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.

[6] Katsumi Ishikawa. On the classification of smooth quandles. *preprint*.

[7] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[8] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.

[9] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.

[10] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs;Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics.

[11] Takefumi Nosaka. Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles. *Topology Appl.*, Vol. 193, pp. 1–30, 2015.

[12] Mituhisa Takasaki. Abstraction of symmetric transformations. *Tôhoku Math. J.*, Vol. 49, pp. 145–207, 1943.

[13] Kentaro Yonemura. Note on spherical quandles. *arXiv preprint arXiv:2104.04921*, 2021.

[14] Kentaro Yonemura. Quandles over a hyperboloid of one sheet and the longitudinal mapping knot invariant for $SL(2,\mathbb{R})$. *preprint*, 2021.

Multiple conjugation quandle coloring quivers of handlebody-links

上田 涼太郎 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

古典絡み目の不変量である quandle coloring quiver が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された。我々は multiple conjugation quandle (MCQ) を用いた彩色を考えることで、Nelson-Cho の quandle coloring quiver の類似の概念として、quiver に値をもつハンドル体絡み目の不変量を構成した。この不変量の定義と性質について講演する。

1 ハンドル体絡み目

ハンドル体 (handlebody) とは, 3 次元球体 $\mathbb{B}^3$ にいくつかの 1-ハンドル $\mathbb{D}^2 \times I$ をつけて得られる向き付け可能な 3 次元多様体のことである. ハンドル体を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ像のことを, **ハンドル体結び目 (handlebody-knot)** という [1]. また, いくつかのハンドル体を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ像のことを, **ハンドル体絡み目 (handlebody-link)** という.

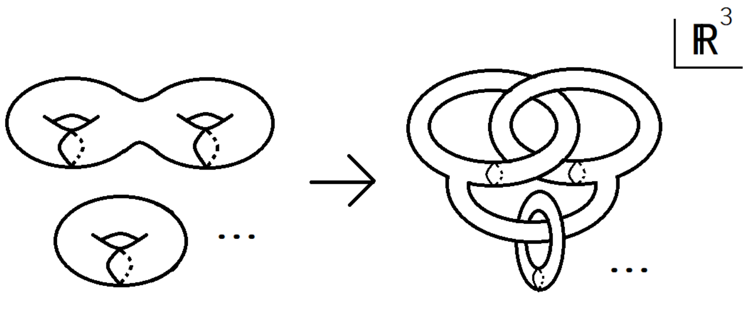


図 1 ハンドル体絡み目.

2 つのハンドル体絡み目 H, H' が**同値 (equivalent)** であるとは, $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ自己同相写像 f が存在して $f(H) = H'$ が成り立つことであり, このとき $H \sim H'$ と書く. **空間 3 価グラフ (spatial trivalent graph)** とは, $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた 3 価グラフのことである. 円周 S^1 は正確にはグラフではないが, 本論文では S^1 の埋め込みも空間 3 価グラフとみなす. そして, S^1 の埋め込みは空間 3 価グラフの 1 つの辺と考える. 空間 3 価グラフの **Y-向き付け (Y-orientation)** とはすべての頂点での入次数, 出次数が共に 1 以上になるように空間 3 価グラフの各辺に向きを入れることである (図 2). ただし, 有向空間 3 価グラフの頂点において, 入次数とはその頂点に入る向きを持った辺の数をいい, 出次数とはその頂点から出る向きを持った辺の数をい

* e-mail:u081574k@ecs.osaka-u.ac.jp

う．任意の空間 3 価グラフは 1 つ以上の Y-向き付けを持っている．

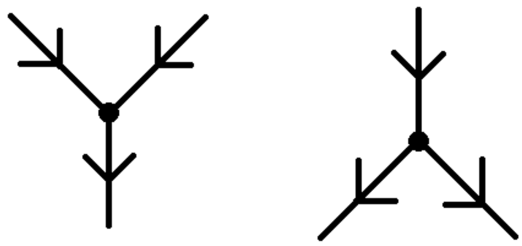
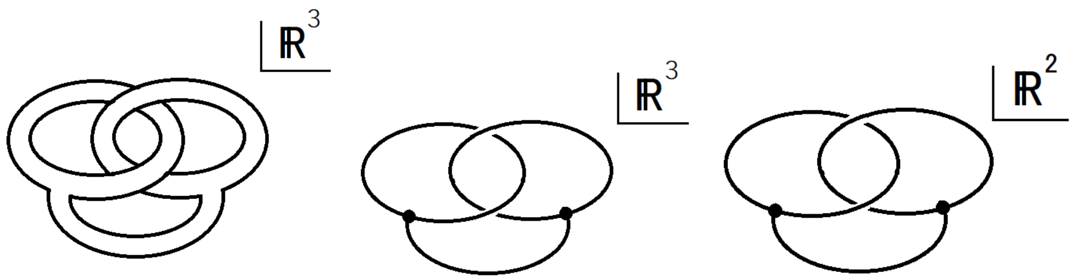


図 2　Y-向き付け．

空間 3 価グラフ K とハンドル体絡み目 H に対して, H が K の正則近傍となっているとき K は H を**表す (represent)** という．ハンドル体絡み目 H の**ダイアグラム (diagram)** を, H を表す空間 3 価グラフ K のダイアグラムとする．



ハンドル体結び目 H　　H を表す空間 3 価グラフ K　　H の ダイアグラム

このとき次の定理が成り立つ．

定理 1.1 ([1])**.** *D, D' をそれぞれハンドル体絡み目 H, H' のダイアグラムとする．このとき, H と H' が同値であることの必要十分条件は, D と D' が有限回の R1 – R6 変形 (図 3) で移り合うことである．*

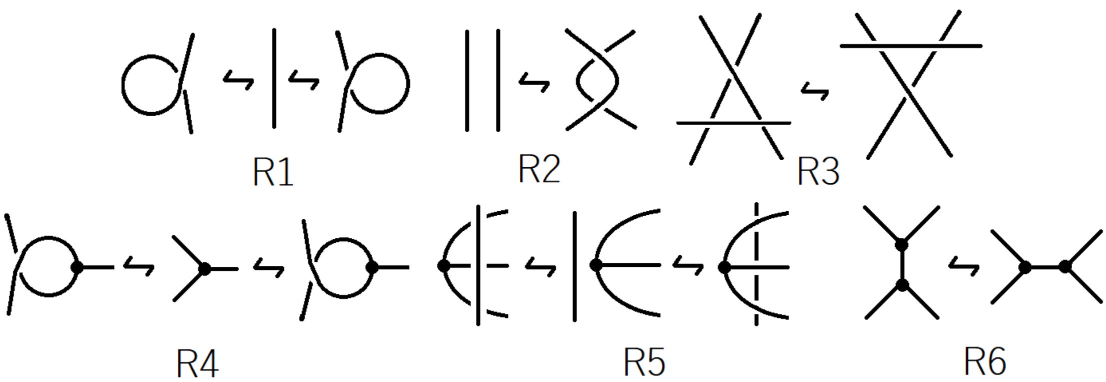


図 3　R1 – R6 変形．

2 多重共役カンドル

まず初めに, カンドルの定義を紹介する.

定義 2.1 ([5, 7]). 空でない集合 Q 上の 2 項演算 $*: Q \times Q \to Q\,; (x, y) \mapsto x * y$ が次の 3 つの条件を満たすとき, 組 $(Q, *)$ を**カンドル (quandle)** という. 以後, $(Q, *)$ を単に Q と書く.

1. 任意の $x \in Q$ に対して, $x * x = x$.
2. 任意の $x, y \in Q$ に対して, $z * y = x$ となる $z \in Q$ が唯一存在する.
3. 任意の $x, y, z \in Q$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルは結び目理論におけるライデマイスター変形を背景に導入された. 以後, カンドルは有限とする.

例 2.2. n を自然数, Q を巡回群 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする. このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * y = 2y - x$ と定めると Q はカンドルになる. このカンドルを位数 n の **2 面体カンドル (dihedral quandle)** と呼び, R_n と書く.

ここで, カンドル Q の**型 (type)** を

$$\mathrm{Type}(Q) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x *^n y = x \ ({}^{\forall} x, y \in Q)\}$$

とする. ただし, $x *^n y$ とは $(\cdots(x \overbrace{* \, y) * y \cdots) * y}^{n}$ のことである. 任意の有限カンドルは有限の型をもつ.

次に, 多重共役カンドルの定義を紹介する.

定義 2.3 ([2]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は空でない群 $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ の非交和であって, 2 項演算 $* : X \times X \to X; (x, y) \mapsto x * y$ が次の 4 つの条件を満たすとき, 組 $(X, *)$ を**多重共役カンドル (MCQ)** という. 以後, $(X, *)$ を単に X と書く.

1. 任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $a * b = b^{-1}ab$.
2. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * e_\lambda = x$ かつ $x * (ab) = (x * a) * b$. ここで, e_λ は G_λ の単位元である.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.
4. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $(ab) * x = (a * x)(b * x)$. ここで, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a * x, b * x \in G_\mu$ を満たす.

多重共役カンドルはハンドル体結び目理論における R1 – R6 変形を背景に導入された. 以後, 多重共役カンドルは有限とする.

$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, $f : X \to X$ を写像とする. 任意の $x, y \in X$ に対して, $f(x * y) = f(x) * f(y)$ が成り立ち, さらに任意の $\lambda \in \Lambda$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つとき, f を**多重共役カンドル自己準同型写像** という. また, X のカンドル自己準同型写像全体の集合を $\mathrm{End}(X)$ と書く.

Q をカンドルとする. このとき, $Q \times \mathbb{Z}_{\mathrm{Type(Q)}} = \bigsqcup_{x \in Q}(\{x\} \times \mathbb{Z}_{\mathrm{Type(Q)}})$ は次の演算で多重共役カンドルとなる.

$$(x,a)*(y,b) = (x *^b y, a)\ (x, y \in Q, a, b \in \mathbb{Z}_{\mathrm{Type}(Q)})$$

$$(x,a)(x,b) = (x, a+b)\ (x \in Q, a, b \in \mathbb{Z}_{\mathrm{Type}(Q)})$$

これを Q の**付随多重共役カンドル (associated MCQ)** という.

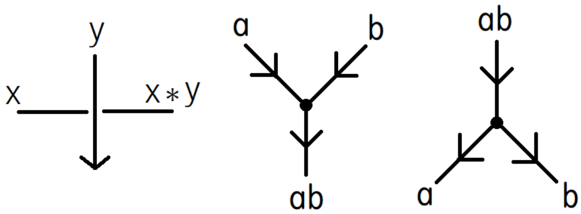
命題 2.4. p を任意の奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドル とする. このとき, 次が成立する.

$$\mathrm{End}(X_p) = \{f : X_p \to X_p,\ f(x,i) = (ax+b, i) \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\} \cup \{f : X_p \to X_p,\ f(x,i) = (c, 0) \mid c \in \mathbb{Z}_p\}.$$

3 多重共役カンドル彩色

ハンドル体絡み目のダイアグラムに対して, 多重共役カンドルによる彩色を紹介する. D をハンドル体絡み目 H のダイアグラムとする. このとき, D の**弧 (arc)** とは D の各連結成分を頂点でさらに区切ったものと定める. D のアーク全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く.

定義 3.1 ([2])**.** $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, D の各交点と各頂点で図 4 の条件を満たす写像 $c : \mathcal{A}(D) \to X$ を X による**彩色 (coloring)** または **X-彩色 (X-coloring)** という. また, D の X-彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.



$x, y \in X,\ a, b \in G_\lambda$

図 4 彩色条件.

このとき, 次の命題が成立する.

命題 3.2 ([2])**.** $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D と D' を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, 2 つのハンドル体絡み目ダイアグラム D と D' が同値なハンドル体絡み目を表すならば, $\mathrm{Col}_X(D)$ と $\mathrm{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, X が有限多重共役カンドルならば, $\mathrm{Col}_X(D)$ は有限であり, その位数 $|\mathrm{Col}_X(D)|$ はハンドル体絡み目の不変量である. この不変量を**多重共役カンドル彩色数 (MCQ coloring number)** という.

4 多重共役カンドル彩色クイバー

古典絡み目の不変量である**カンドル彩色クイバー (quandle coloring quiver)** が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された [6]. 我々は多重共役カンドル彩色を考えることで, カンドル彩色クイバーの類似の概念

として, クイバーに値をもつハンドル体絡み目の不変量である多重共役カンドル彩色クイバーを定義した. この不変量の定義を紹介する.

定義 4.1 (U)**.** $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, 任意の $S \subset \mathrm{End}(X)$ に対して, 次で定義される V と E をそれぞれ頂点集合と辺集合, s と t をそれぞれソース写像, ターゲット写像によって定められるクイバーを**多重共役カンドル彩色クイバー (MCQ coloring quiver)** といい, $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X,S}(D)$ と書く.

- $V = \mathrm{Col}_X(D)$.
- $E = \{(v, w, f) \in V \times V \times S \mid w = f \circ v\}$.
- $s : E \to V$; $s((v, w, f)) = v$.
- $t : E \to V$; $t((v, w, f)) = w$.

補題 4.2. $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, 任意の $c \in \mathrm{Col}_X(D)$ と任意の $f \in \mathrm{End}(X)$ に対して, $f \circ c \in \mathrm{Col}_X(D)$ である.

例 4.3. D を図 5 のような Y-向き付けされたハンドル体結び目のダイアグラム, $X_3 = R_3 \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x\in R_3}(\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 3 の 2 面体カンドル R_3 の付随多重共役カンドルとする. X_3 による D の多重共役カンドル彩色は以下の 18 通りである. ただし, a, b は R_3 の任意の元である.

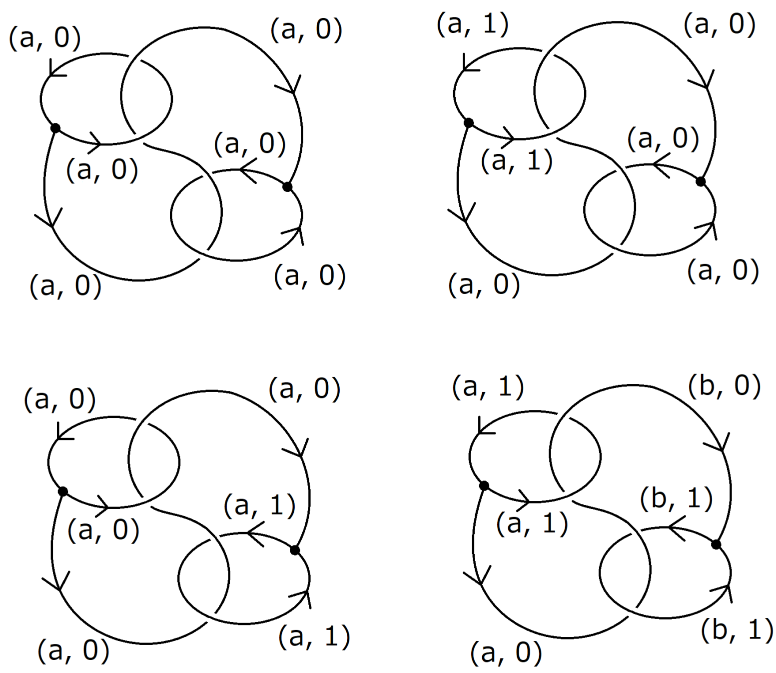


図 5　Y-向き付けされたハンドル体結び目のダイアグラムの X_3-彩色.

ここで, $f \in \mathrm{End}(X_3)$ を $f(x, i) = (0, i)$ で定める. このとき, D の各彩色に f を合成した関係を描いたのが次の図 6 である.

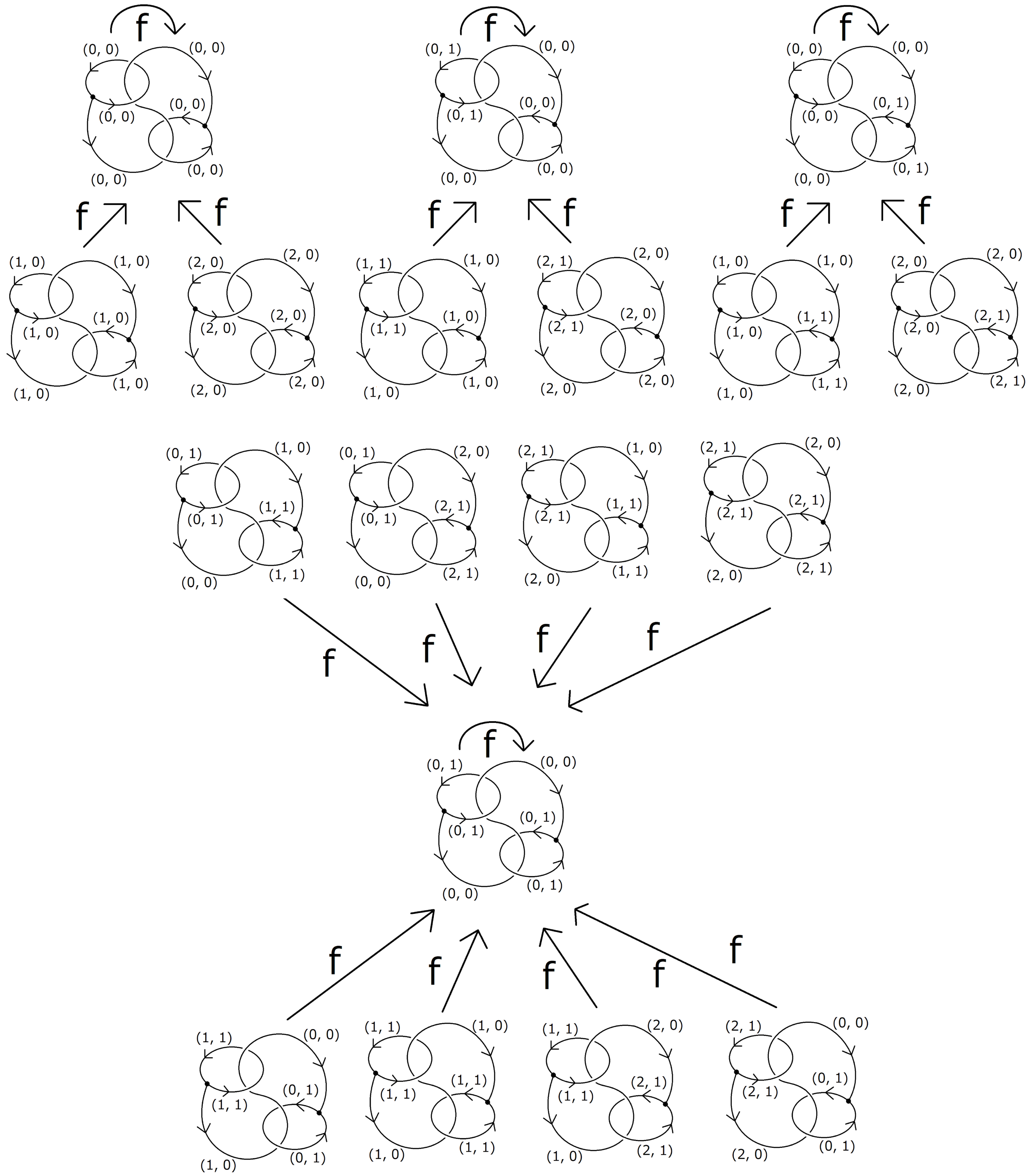


図 6　X_3-彩色に f を合成したもの.

つまり, $S=\{f\}$ としたときの多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D)$ は図 7 のクイバーである.

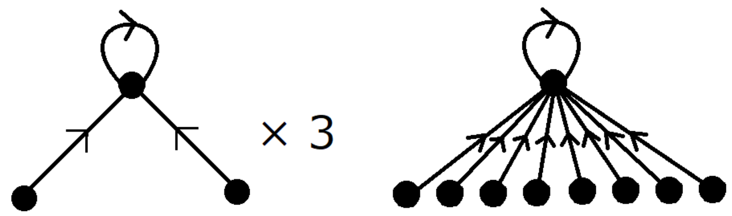


図 7　$Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D)$.

5　主定理

多重共役カンドル彩色クイバーの性質について紹介する.

定理 5.1 (U)**.** 2 つの Y-向き付けされたハンドル体絡み目ダイアグラム D と D' が同値なハンドル体絡み目を表すならば, 任意の多重共役カンドル X と, 任意の $S\subset\mathrm{End}(X)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X,S}(D')$ はクイバーとして同型である.

定理 5.1 より多重共役カンドル彩色クイバーはハンドル体絡み目の不変量であることが分かる.

定義から多重共役カンドル彩色クイバーは多重共役カンドル彩色数と同等もしくはより強力なハンドル体絡み目の不変量であるが, 実際に, より強力な場合の例を次で与える.

例 5.2. D と D' を図 8 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. $X_3=R_3\times\mathbb{Z}_2=\bigsqcup_{x\in R_3}(\{x\}\times\mathbb{Z}_2)$ を位数 3 の 2 面体カンドル R_3 の付随多重共役カンドルとする. X_3 による D と D' の多重共役カンドル彩色数は共に 60 である.

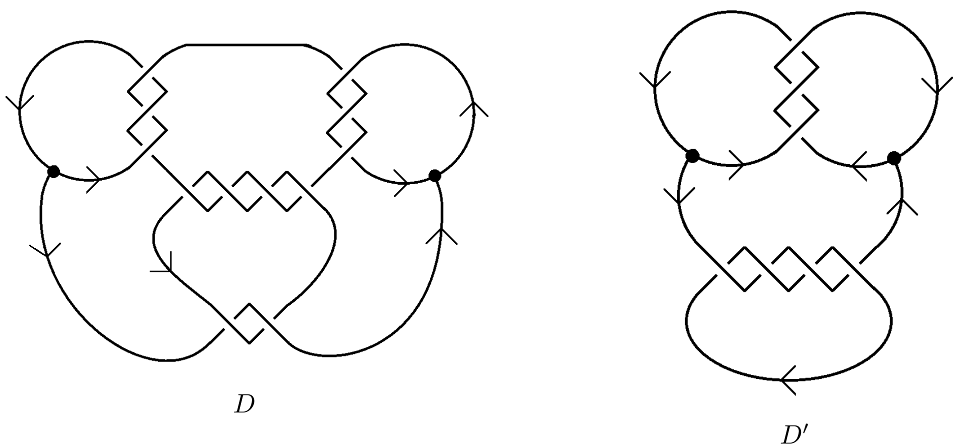
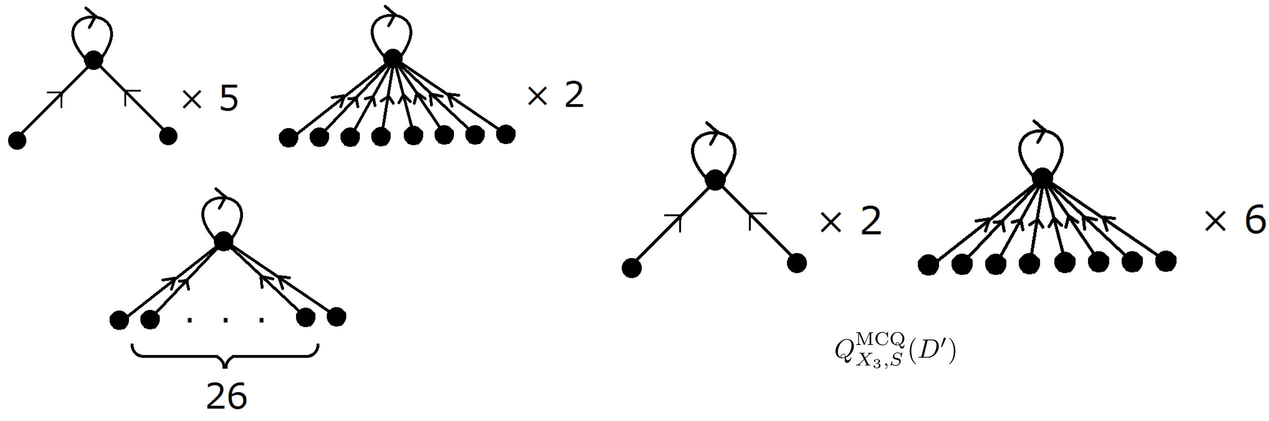


図 8　Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラム.

ここで, $f \in \mathrm{End}(X_3)$ を $f(x,i) = (0,i)$ で定める. $S = \{f\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである.



$Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D)$ $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D')$

図 9 $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S}(D')$ は同型でない.

図 9 より, D と D' は同値なハンドル体絡み目ではない.

また, $f' \in \mathrm{End}(X_3)$ を $f'(x,i) = (x+1,i)$ で定める. $S' = \{f'\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである.

$Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D)$ $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D')$

図 10 $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_3,S'}(D')$ は同型である.

つまり, $\mathrm{End}(X_3)$ の部分集合 S の選び方によって D と D' が同値でないか分からない場合もある.

上の例はハンドル体絡み目であるが, ハンドル体結び目や, 多重共役カンドルが 2 面体カンドルの付随多重共役カンドル以外の場合でもこのような例が存在する.

また, 多重共役カンドル彩色クイバーに対して次の性質が得られた.

定理 5.3 (U)**.** D と D' を成分数が等しく, 全種数が n である Y-向き付けされたハンドル体絡み目ダイアグラムとする. また, p を任意の $p \geq 2^n - 1$ を満たす奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p}(\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数

p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドルとする．このとき, $|\mathrm{Col}_{X_p}(D)| = |\mathrm{Col}_{X_p}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \mathrm{End}(X_p)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_p,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_p,S}(D')$ はクイバーとして同型である．

また定理 5.3 より, 次の系が導かれた．

系 5.4 (U)**.** D と D' を種数が 2 のハンドル体結び目ダイアグラムとする．また, p を任意の奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p}(\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドルとする．このとき, $|\mathrm{Col}_{X_p}(D)| = |\mathrm{Col}_{X_p}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \mathrm{End}(X_p)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_p,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_p,S}(D')$ はクイバーとして同型である．

定理 5.3 における $p \geq 2^n - 1$ の仮定は本質的である. 特に全種数が 3 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目の場合, $p = 5$ とすると, 定理 5.3 が成り立たない場合の例を次で与える．

例 5.5. D と D' を図 11 の種数が 3 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする．$X_5 = R_5 \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_5}(\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 5 の 2 面体カンドル R_5 の付随多重共役カンドルとする．X_5 による D と D' の多重共役カンドル彩色数は共に 200 である．

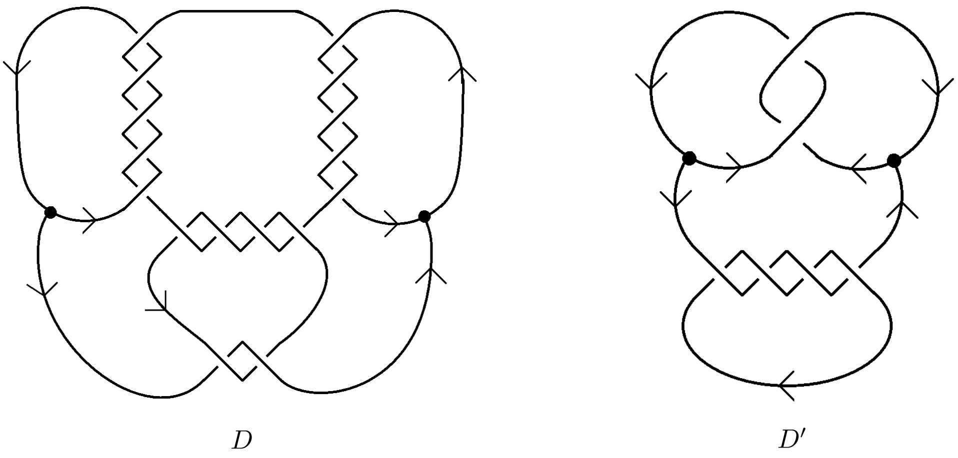


図 11　種数が 3 の Y-ori 付けされたハンドル体絡み目のダイアグラム．

ここで, $f \in \mathrm{End}(X_5)$ を $f(x, i) = (0, i)$ で定める．$S = \{f\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_5,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_5,S}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである．

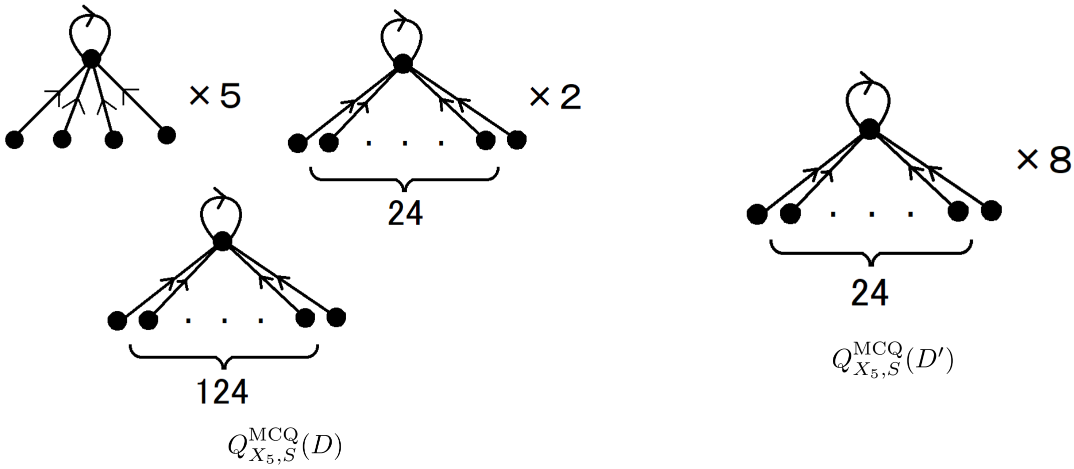


図 12　$Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_5,S}(D)$ と $Q^{\mathrm{MCQ}}_{X_5,S}(D')$ は同型でない.

例 5.5 より, 定理 5.3 における $p \geq 2^n - 1$ の仮定は本質的であることが分かる.

参考文献

[1] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1403−1418.

[2] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196** (2015), 492−500.

[3] A. Ishii, *The Markov theorems for spatial graphs and handlebody-knots with Y-orientations*, Internat. J. Math. **26** (2015), 1550116, 23 pp.

[4] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi and M. Suzuki, *A table of genus two handlebody-knots up to six crossings*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250035, 1−9.

[5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. **23** (1982), 37−65.

[6] K. Cho and S. Nelson. *Quandle coloring quivers.* J. Knot Theory Ramifications. **28** (2019), no. 1, 1950001, 12pp.

[7] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mt. Sb. (N. S.) **119** (**161**) (1982), 78−88.

[8] Y. Taniguchi, *Quandle coloring quivers of links using dihedral quandles.* J. Knot Theory Ramifications. **30** (2021), no. 2, 2150011.

Quandle twisted Alexander invariants and homology groups

谷口　雄大　(大阪大学大学院理学研究科)*

概　　要

Quandle twisted Alexander invariant は Ishii-Oshiro によって導入された quandle と quandle homomorphism の組に対する不変量であり, 結び目の twisted Alexander polynomial を復元することができる. 本講演では quandle twisted Alexander invariant と Andruskiewitsch-Graña により構成された quandle の homology group との関係について得られた結果について報告する.

1. Quandle と Alexander pair

空でない集合 X 上の 2 項演算 $*$ が次の条件を満たすとき組 $(X, *)$ を **Quandle** [9,13] と呼ぶ. 簡単のため $(X, *)$ は単に X と書くことにする.

- 任意の $x \in X$ に対して $x * x = x$ が成り立つ.
- ある 2 項演算 $\bar{*} : X^2 \to X$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して $(x * y)\bar{*}y = (x\bar{*}y) * y = x$ が成り立つ.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成り立つ.

これらの条件はそれぞれ結び目理論における Reidemeister 移動に対応している.

例 1. G を群とする. このとき G 上の 2 項演算 $*$ を $x * y := y^{-1}xy$ で定めると $(G, *)$ は quandle になる. この quandle を G の**共役 quandle** と呼び, $\mathrm{Conj}(G)$ と書く.

例 2. K を S^3 内の有向結び目とし, K の正則近傍を $N(K)$, K の外部を $E(K)$ と書く. また $E(K)$ の点 p を固定する. K のメリディアン円板 D と ∂D から p へ向かう $E(K)$ 内の道 α の組 (D, α) を考えそのホモトピー類を $[(D, \alpha)]$ と書くことにする. このホモトピー類全体の集合を $Q(K, p)$ と書き, $Q(K, p)$ 上の 2 項演算 $*$ を次で定める:

$$[(D_1, \alpha)] * [(D_2, \beta)] := [(D_1, \alpha \cdot \beta^{-1} \cdot \partial D_2 \cdot \beta)].$$

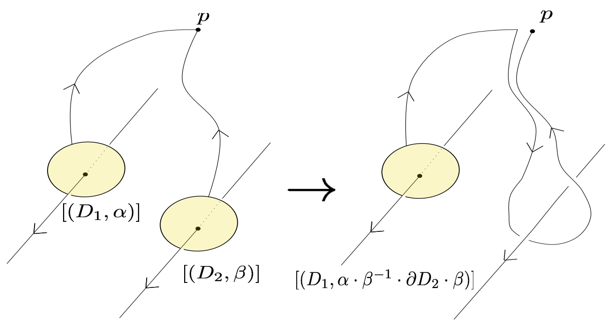


図 1: 結び目 quandle の演算

本研究は科研費 (課題番号:21J21482) の助成を受けたものである。
*e-mail: u660451k@ecs.osaka-u.ac.jp

このとき組 $(Q(K,p),*)$ は quandle になり, この quandle を K の**結び目 quandle** と呼ぶ. 結び目 quandle の quandle 同型類は p に依存しないので以降は単に $Q(K)$ と書く.

続いて Alexander pair について復習する. X を quandle, R を乗法的単位元 1 を持つ環とする. 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to R$ が次の条件を満たすとき組 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ を **Alexander pair** [8] と呼ぶ:

- 任意の $x \in X$ に対して $f_1(x,x) + f_2(x,x) = 1$ が成り立つ.
- 任意の $x, y \in X$ に対して $f_1(x,y)$ は R の可逆元である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して
$$\begin{aligned}&f_1(x*y,z)f_1(x,y) = f_1(x*z,y*z)f_1(x,z),\\&f_1(x*y,z)f_2(x,y) = f_2(x*z,y*z)f_1(y,z) \text{ かつ}\\&f_2(x*y,z) = f_1(x*z,y*z)f_2(x,z) + f_2(x*z,y*z)f_2(y,z).\end{aligned}$$
が成り立つ.

Andruskiewitch と Graña によって **quandle module** [1] という概念が導入されており, Alexander pair (f_1, f_2) は quandle module の (η, τ) に対応している. 本稿では [8] での記法を用いることにする.

例 3. X を quandleとし, 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を次で定める:

$$f_1(x,y) := t^{-1}, \quad f_2(x,y) := 1 - t^{-1}.$$

このとき組 (f_1, f_2) は Alexander pair である.

例 4. R を一意分解整域, G を k 次一般線形群 $GL(k;R)$, X を conjugation quandle $\mathrm{Conj}(G)$ とする. $R[t^{\pm 1}]$ を R 係数の 1 変数 Laurent 多項式環, $M(k,k;R[t^{\pm 1}])$ で各成分が $R[t^{\pm 1}]$ の元である k 次正方行列全体が成す環とし, 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to M(k,k;R[t^{\pm 1}])$ を次で定める:

$$f_1(x,y) := y^{-1}t^{-1}, \quad f_2(x,y) := y^{-1}x - y^{-1}t^{-1}.$$

このとき組 (f_1, f_2) は Alexander pair である.

2. Quandle twisted Alexander invariant

この節では quandle の twisted Alexander invariant の定義と性質 [7] について復習する. Quandle の表示については [4,10] を, $\boldsymbol{f}$-twisted Alexander matrix については [7,8] を参照されたい.

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を有限集合, $FQ(S)$ を S 上の自由 quandle とする. また $Q = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ を有限表示 quandle, X を quandle, R を一意分解整域, $\rho : Q \to X$ を quandle 準同型, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ を写像 $f_1, f_2 : X^2 \to M(k, k : R)$ の組からなる Alexander pair, c を X の元とする. $\mathrm{pr} : FQ(S) \to Q$ を自然な射影とし, 本稿では簡単のため $a \in FQ(S)$ に対して $\mathrm{pr}(a)$ は単に a と書くことにする.

$1 \leq j \leq n$ に対して x_j に関する $\boldsymbol{f} \circ \rho$**-derivative** [8] とは次の規則を満たす $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j} : FQ(S) \to M(k,k;R)$ のことである:

- 任意の $x, y \in FQ(S)$ に対して, $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x*y) = f_1(\rho(x),\rho(y))\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x)+f_2(\rho(x),\rho(y))\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(y)$.
- $1 \leq i \leq n$ に対して $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$, ここで δ_{ij} は Kronecker delta である.

また Q の関係子 $r = (r_1, r_2) \in FQ(S)^2$ に対して $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r) := \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r_1) - \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r_2)$ と定める.

このとき表示 $\langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ に関する $\boldsymbol{f}$**-twisted Alexander matrix** [8] とは次で定める各成分が $M(k,k;R)$ の元である $m \times n$ 行列 $A(Q,\rho;f_1,f_2)$ のことである:

$$A(Q,\rho;f_1,f_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_1}(r_1) & \cdots & \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_n}(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_1}(r_m) & \cdots & \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_n}(r_m) \end{pmatrix}.$$

続いて $\boldsymbol{f}$-twisted Alexander matrix $A(Q,\rho;f_1,f_2)$ の i 列目を取り除いた行列を $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ と書き, $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ を各成分が R の元である $km \times k(n-1)$ 行列とみなす. また $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)$ を行列 $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ の $k(n-1)$ 次の小行列式全体の最大公約数とする, ただし $m < n-1$ ならば $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i) = 0$ と定める. ここで $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)$ は R の単元倍を法として定まることに注意する.

補題 5 (Ishii-Oshiro [7])**.** 任意の $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\det f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c)\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i) \doteq \det f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_j)$$

が成り立つ, ここで $\doteq$ は R の単元倍を法として等しいことを表す.

ここで $\det(f_2(x_i)\bar{*}c, c) \neq 0$ を満たすある i が存在すると仮定する. すると補題 5 から R の商体の元 $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) := \dfrac{\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)}{f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)}$ は R の単元倍を法として i の取り方に依らない.

定理 6 (Ishii-Oshiro [7])**.** Q' を有限表示 quandle とする. もし quandle 同型 $\psi : Q' \to Q$ が存在するならば $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) \doteq \Delta(A(Q',\rho\circ\psi;f_1,f_2),c)$ が成り立つ.

つまり $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c)$ は quandle と quandle 準同型の組 (Q,ρ) の不変量になる.

命題 7 (Ishii-Oshiro [7])**.** K を S^3 内の有向結び目とし, $Q(K)$ を K の結び目 quandle とする.

(1) X を quandle とし, (f_1, f_2) を例 3 の Alexander pair とする. 任意の quandle 準同型 $\rho : Q(K) \to X$ と $c \in X$ に対して $\Delta(A(Q(K),\rho;f_1,f_2),c) \doteq \dfrac{\Delta_K(t)}{t-1}$ が成り立つ, ここで $\Delta_K(t)$ は K の **Alexander polynomial** である.

(2) R を一意分解整域, G を k 次一般線形群 $GL(k;R)$, X を conjugation quandle $\mathrm{Conj}(G)$ とする. このとき任意の quandle 準同型 $\rho : Q(K) \to X$ から結び目群の線形表現 $\rho_{\mathrm{grp}} : G(K) \to G$ が誘導される. (f_1, f_2) を例 4 の Alexander pair とすると, 任意の $c \in X$ に対して $\Delta(A(Q(K),\rho;f_1,f_2),c) \doteq \Delta_{K,\rho_{\mathrm{grp}}}(t)$ が成り立つ, ここで $\Delta_{K,\rho_{\mathrm{grp}}}(t)$ は ρ_{grp} に対する K の **twisted Alexander polynomial** [12, 14] である.

3. Homology groups

この節では Andruskiewitsch と Graña によって定義された Alexander pair を用いた homology group [1] の定義を復習する. 記法などは [2] に基づいている.

正の整数 n に対して $C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を Q^n の元を基底とする自由 $M(n,n;R)$ 加群とする. また 0 以下の整数 n に対しては

$$C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) := \begin{cases} M(n,n;R) \ (n=0 \text{ のとき}), \\ 0 \qquad\qquad\quad (n<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. 続いて正の整数 n に対して $\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を以下で定める:

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(q_1,\ldots,q_n) \\
&= \sum_{i=2}^{n}(-1)^i f_1(\rho([q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n]),\rho([q_i,\ldots,q_n]))(q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n) \\
&-\sum_{i=2}^{n}(-1)^i(q_1 * q_i,\ldots,q_{i-1}*q_i,q_{i+1},\ldots,q_n) \\
&+f_2(\rho([q_1,q_3,\ldots,q_n]),\rho([q_2,\ldots,q_n]))(q_2,\ldots,q_n),
\end{aligned}$$

ここで $[q_1,\ldots,q_n] := (\cdots(q_1 * q_2) * q_3 \cdots) * q_n$ である.

また $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(x) := f_2(\rho(x)\bar{*}c, c)$, 負の整数 n に対して $\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を零写像と定める. このとき $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) = (C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q), \partial_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ は chain complex であり, この chain complex の n 次の homology group を $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ と書くことにする.

また右 $M(k,k;R)$ 加群 V を用意して chain complex $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ を $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V) = (V \otimes C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q), \mathrm{Id}_V \otimes \partial_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ で定め, この n 次の homology group を $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ と書く.

例 8. X を quandle とする.
(1) 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}$ を以下で定める:

$$f_1(x,y) := 1, \quad f_2(x,y) := 0.$$

このとき $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ は Alexander pair であり, $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ は rack space [5, 6] の homology group と一致する.
(2) 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を以下で定める:

$$f_1(x,y) := t, \quad f_2(x,y) := 1-t.$$

このとき $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ は Alexander pair であり, $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ は twisted rack homology group $H_n^{\mathrm{TR}}(Q)$ [3] と一致する.

4. Main results

本節では主結果について述べる.

定理 9. 写像 $\partial'_2 : M(k,k;R)^m \to M(k,k;R)^n$ と $\partial'_1 : M(k,k;R)^n \to M(k,k;R)$ を次で定める:

$$\partial'_2(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{a}A(Q,\rho;f_1,f_2), \quad \partial'_1(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{a}\begin{pmatrix} f_2(\rho(x_1)\bar{*}c,c) \\ \vdots \\ f_2(\rho(x_n)\bar{*}c,c) \end{pmatrix}.$$

このとき $\partial'_1 \circ \partial'_2 = 0$ であり, $H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \cong \mathrm{Ker}(\partial'_1)/\mathrm{Im}(\partial'_2)$ かつ $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \cong M(k,k;R)/\mathrm{Im}(\partial'_1)$ が成り立つ.

証明の概略. $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset Q$ を基底とする自由 $M(k,k;R)$ 加群を $C_1(S)$ と書き, $C_1(S)$ を $C_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ の部分加群とみなす. 境界準同型の定義から $C_1(S) \cong M(k,k;R)^n$ という同一視の元で $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}|_{C_1(S)} = \partial'_1$ が得られる. また Q が有限表示を持つことから以下が示せる.

(1) $\mathrm{Im}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}) = \mathrm{Im}(\partial'_1)$.

(2) 合成写像 $\mathrm{Ker}(\partial'_1) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}) \twoheadrightarrow H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) = \mathrm{Ker}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho})/\mathrm{Im}(\partial_2^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ は全射.

(3) (2) の合成写像の核は $\mathrm{Im}(\partial'_2)$.

以上のことから主張が従う. □

つづいて R は単項イデアル整域であると仮定する. M を有限生成左 R 加群としたとき, 有限個の R の元 $e_1, \ldots, e_s$ が存在して $M \cong \oplus_{i=1}^s R/(e_i)$ が成り立つ, ここで (e_i) は e_i が生成する R のイデアルを表している. このとき積 $e_1 \cdots e_s$ を M の **order** と呼ぶ. M の order は R の単元倍を除いて一意に定まることに注意する.
$V = R^k$ を左 R 加群かつ右 $M(k,k;R)$ 加群とみなして $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ を考える. このとき $H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ と $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ は有限生成左 R 加群なので $\mathrm{order}(H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))$ と $\mathrm{order}(H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))$ が定義できる.

定理 10. $\det(f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在するならば $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ がねじれ元のみからなる[1]. さらに

$$\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) \doteq \frac{\mathrm{order}(H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))}{\mathrm{order}(H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))}$$

が成り立つ.

証明の概略. 任意の j に対して $\mathrm{Coker}(R^k \to R^k; \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c))$ から $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ への全射が存在する. ここで $\det(f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在するならば $\mathrm{Coker}(R^k \to R^k; \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c))$ はねじれ元のみからなることから定理の前半は従う. 後半は [11] の定理 4.1 と同じ流れで示すことが出来る. □

注意 11. [7] では **column relation map** と呼ばれる概念を用いて quandle の twisted Alexander invariant $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ を定義している. 本稿で扱っている $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c)$ は $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ の特別な場合である.

3 節の homology group を column relation map を用いて拡張することによって [7] で定義された quandle の twisted Alexander invariant $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ に対しても定理 10 が成り立つことが示せる.

---

[1] 講演では「$H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ がねじれ元のみからなるならば $\det(f(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在する」と述べましたが, 上の主張が正しいです。間違ったことを述べてしまい, 誠に申し訳ありませんでした.

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった世話人の先生方にお礼申し上げます．また講演を聞いていただいた全ての方に改めて感謝を申し上げます．

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Advances in Mathematics **178** (2003), no. 2, 177–243.

[2] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña, and M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), no. 3, 499–541. MR2166720

[3] J. S. Carter, M. Elhamdadi, and M. Saito, *Twisted quandle homology theory and cocycle knot invariants*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 95–135. MR1885217

[4] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 04, 343–406.

[5] R. Fenn, C. Rourke, and B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 4, 321–356. MR1364012

[6] ———, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 2, 701–740. MR2255194

[7] A. Ishii and K. Oshiro, *Quandle twisted Alexander invariants.* preprint.

[8] ———, *Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles.* preprint.

[9] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.

[10] S. Kamada, *Surface-knots in 4-space. An introduction*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017.

[11] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson–Gordon invariants*, Topology **38** (1999), no. 3, 635–661.

[12] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), no. 3, 361–380.

[13] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. **161** (1982), no. 1, 78–88.

[14] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241–256.

The Long-Moody construction and twisted Alexander invariants

高野暁弘（東京大学大学院数理科学研究科）*

概要

Long-Moody 構成とは，組み紐群と自由群の半直積の表現から組み紐群の新しい表現を作る方法である．その構成によって出来た表現を行列表示すると，ねじれ Alexander 不変量の定義に使われる表現でねじった Alexander 行列が現れることが分かる．本講演では，組み紐を固定したとき “良い” 表現を選ぶと，その組み紐の閉包のねじれ Alexander 不変量が Long-Moody 構成を用いて記述できることを示す．

謝辞

本稿は研究集会「結び目の数理 IV」の報告書の一部になります．本研究集会での講演の機会を頂き，谷山公規氏，安原晃氏，村尾智氏，丹下稜斗氏，木村直記氏に心よりお礼申し上げます．指導教員の逆井卓也氏には非常に丁寧にご指導いただきました．この場をお借りして深く感謝申し上げます．最後に，講演を聞いてくださった全ての方に改めて感謝を申し上げます．

1　ねじれ Alexander 不変量

3 次元球面 S^3 内の結び目（または絡み目）K を考える．また，K の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を $G(K)$ と表す．$G(K)$ は不足数が 1 であるような，つまり以下のような群表示をもつのでこれを固定する:

$$G(K) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{n-1} \rangle . \tag{1}$$

ただし，Wirtinger 表示であることは仮定しない．

ねじれ Alexander 不変量の定義のためにいくつか写像を準備する．まず $\alpha\colon G(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ を各メリディアンを t に写すような全射準同型とする．特に，K が結び目であれば α は単にアーベル化写像である．また，R を一意分解整域とし，$\rho\colon G(K) \longrightarrow GL_k(R)$ を $G(K)$ の k 次元表現とする．さらに，F_n を $x_1, \ldots, x_n$ で生成されるランク n の自由群とし，$\phi\colon F_n \longrightarrow G(K)$ をそれぞれの群表示から誘導される自然な全射準同型とする．これらを自然に群環上の写像

$$\widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}], \quad \widetilde{\rho}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[GL_k(R)] \subset M_k(R), \quad \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

に拡張し，また $\widetilde{\rho}$ と $\widetilde{\alpha}$ のテンソル積表現 $\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$ を，

$$(\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha})(g) \coloneqq \rho(g)\alpha(g) \qquad (g \in G(K))$$

と定義する．これと $\widetilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi \coloneqq (\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}) \circ \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$$

と書く．最後に Fox の自由微分 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ を考える．Fox の自由微分とは $\mathbb{Z}$ 上線型写像であって

* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

- 任意の i,j に対して，$\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$．ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ
- 任意の $g,g'\in F_n$ に対して，$\dfrac{\partial(gg')}{\partial x_j}=\dfrac{\partial g}{\partial x_j}+g\dfrac{\partial g'}{\partial x_j}$

を満たすものである．

以上の準備のもと，$(n-1)\times n$ 行列 M を各 (i,j) 成分が $k\times k$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\in M_k(R[t^{\pm1}])$$

となるような行列と定義し，これを表現 ρ に付随する $G(K)$ の表示 (1) の**ねじれ Alexander 行列**という．さらに，行列 M の j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列を M_j とし，これを各成分が $R[t^{\pm1}]$ の $(n-1)k$ 次正方行列とみなすことで，通常の行列式を考えることが出来る．このとき，ある j が存在して $\Phi(x_j-1)\neq 0$ となり，さらにそのような i,j に対して

$$\det M_i \det\Phi(x_j-1)=\pm\det M_j\det\Phi(x_i-1) \tag{2}$$

が成り立つことが確かめられる．

定義 1.1. $\Phi(x_j-1)\neq 0$ となるような j に対して

$$\Delta_{K,\rho}(t)\coloneqq\frac{\det M_j}{\det\Phi(x_j-1)}$$

と定義し，$\Delta_{K,\rho}(t)$ を結び目（または絡み目）K の表現 ρ に付随する**ねじれ Alexander 不変量**という．

補足 1.2. ねじれ Alexander 不変量は，εt^l 倍 $(\varepsilon\in R^\times, l\in\mathbb{Z})$ の違いを除いて定義され，さらに式 (2) より $\Phi(x_j-1)\neq 0$ となる j によらずに定まることが分かる[*1]．

2 Long-Moody 構成

2.1 組み紐群の自由群への作用

Long-Moody 構成の定義を述べるために，まず組み紐群の自由群への作用を復習する．B_n を n 次の組み紐群とする．組み紐群は，アルティン表示と呼ばれる次の群表示をもつ:

$$\left\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i & (|i-j|\geq 2) \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i=1,\ldots,n-2) \end{array} \right\rangle.$$

各生成元 σ_i は，図 1 のような n 本の組み紐に対応する．

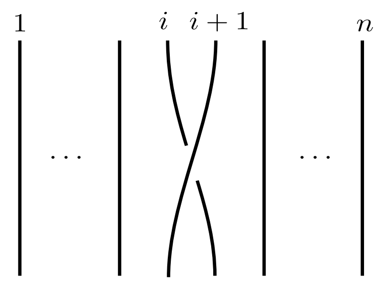


図 1: 生成元 σ_i

*1 ねじれ Alexander 不変量について，より詳しくは例えば和田 [2] や北野-合田-森藤 [3] を参照のこと．

D^2 を $\mathbb{C}$ 内の単位円板とし，$z_1, \ldots, z_n$ を D^2 の内部の点であって，各点 z_i は実軸上にあり $z_1 < \cdots < z_n$ を満たすようにとる．また，D_n を n 点穴あき円板 $D^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ とし，D^2 の境界上に基点 z をとる．このとき，基本群 $\pi_1(D_n, z)$ は自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ と同型であり，各生成元 x_i は z を基点として z_i の周りを時計回りに 1 回周る単純閉曲線として実現される．組み紐群 B_n は D_n の写像類群 $\mathcal{M}(D_n)$ と同型なので，B_n の各元は $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の自己同型写像を誘導し，これにより B_n の F_n への右作用を得る（図 2）．これを Artin 表現という:

$$x_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & (j = i) \\ x_i & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

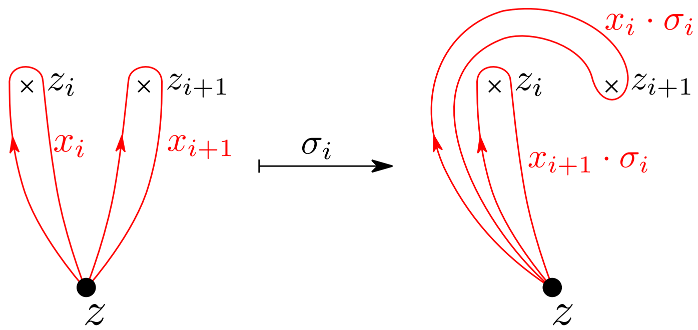


図 2: σ_i の $\pi_1(D_n, z)$ への作用

組み紐 $b \in B_n$ に対して，b の**閉包** $\hat{b}$ とは図 3 のようにして得られる S^3 内の結び目（または絡み目）である．このとき，$G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b})$ は次のような群表示をもつことが知られている:

$$G(\hat{b}) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = x_1 \cdot b, \ldots, x_n = x_n \cdot b \rangle . \tag{3}$$

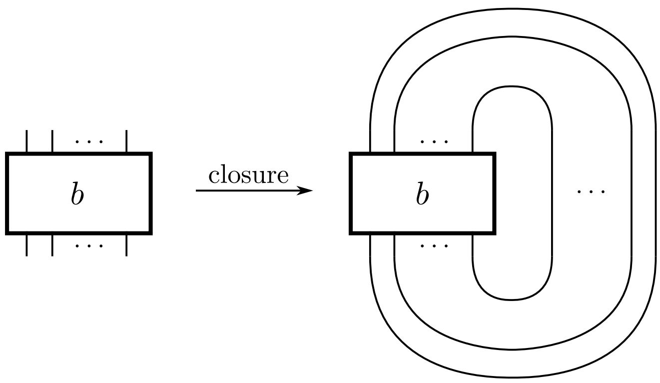


図 3: 組み紐の閉包

2.2　Long-Moody 構成

$\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ を，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の k 次元表現とする．ここで，B_n の F_n への作用は上で与えられたものとする．また，$v \in R^{\oplus k}$ は行ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_k)$ のように書き，表現 ρ は右からかけられているとする．$\mathcal{I}_{F_n}$ を $R[F_n]$ の添加イデアル，つまり添加写像 $R[F_n] \longrightarrow R; \sum_{x \in F_n} a_x x \longmapsto \sum_{x \in F_n} a_x \ (a_x \in R)$ の核とする．$\mathcal{I}_{F_n}$ は自然に左 $R[F_n]$ 加群になり，また $R^{\oplus k}$ も表現 ρ により右 $R[F_n]$ 加群とみなすことが出来るので，テンソル積 $R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}$ を考えることが出来る．

定義 2.1. ([1, Theorem 2.1]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\mathcal{LM}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_n}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で定義されるものである．

補足 2.2. 半直積 $B_n \ltimes F_n$ は，$\sigma_i \longmapsto \sigma_{i+1}$，$x_i \longmapsto \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1$ という対応により B_{n+1} に埋め込まれることが知られており，この埋め込みを用いて B_{n+1} の表現から B_n の表現を構成するという Long-Moody 構成も定義できる ([1, Theorem 2.4])．

添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であるので，$R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n} \cong R^{\oplus nk}$ となり，Long-Moody 構成は B_n の nk 次元表現とみなすことが出来る．また，その基底として例えば $x_1 - 1, \ldots, x_n - 1$ がとれる．よって，この基底に関する Long-Moody 構成の行列表示を考えることが出来る．

定理 2.3. 任意の組み紐 $b \in B_n$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

が成り立つ．

証明. Fox の自由微分の基本公式より，任意の $w \in \mathbb{Z}[F_n]$ に対して

$$w - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_j - 1)$$

が成り立つ．よって，任意の $b \in B_n, v \in R^{\oplus k}$ および $1 \le i \le n$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes (x_i - 1)) &= v(\rho(b)) \otimes (x_i - 1) \cdot b \\
&= v(\rho(b)) \otimes \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)(x_j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v\left(\rho(b)\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right) \otimes (x_j - 1)
\end{aligned}$$

となり求める行列を得る． □

補足 2.4. Long-Moody 構成には，1 変数増やして考えることがよくある．$t^l \in R[t^{\pm 1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$ に対して，$t^l\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(R[t^{\pm 1}]) = R[t^{\pm 1}]^{\times}$ を $B_n \ltimes F_n$ の 1 次元表現であって, 各生成元 σ_i, x_i を t^l 倍にうつすものとして定義する．また, 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ とのテンソル積表現 $t^l \otimes \rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R[t^{\pm 1}])$ を $t^l\rho$ と表す．このとき，表現 ρ の **1 変数増やした Long-Moody 構成**とは，表現

$$t^{-1}\mathcal{LM}(t\rho) = t^{-1} \otimes \mathcal{LM}(t\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{R[t^{\pm 1}]}(R[t^{\pm 1}]^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}) \cong GL_{nk}(R[t^{\pm 1}])$$

のことである．

例 2.5. 1 次元自明表現 $\mathcal{T} := t^0\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を考える．このとき, 1 変数増やした Long-Moody 構成 $t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})\colon B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ による σ_k の像は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})(\sigma_k) &= t^{-1}(\sigma_k)\mathrm{Diag}\left(t\mathcal{T}(\sigma_k), \ldots, t\mathcal{T}(\sigma_k)\right) \cdot \left(t\mathcal{T}\left(\frac{\partial(x_i \cdot \sigma_k)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n} \\
&= I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1}.
\end{aligned}$$

これは unreduced Burau 表現と同値である．

3 主結果

3.1 Reduced Long-Moody 構成

主結果を述べるために，reduced Long-Moody 構成の定義を説明する．そのために，F_n の別の生成元を用意する．$g_i := x_1 \cdots x_i$ とすると，$g_1, \ldots, g_n$ もまた $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の生成元となり，B_n の作用は次で与えられる（図 4）：

$$g_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} g_j & (j \neq i) \\ g_{i+1} g_i^{-1} g_{i-1} & (j = i \neq 1) \\ g_2 g_1^{-1} & (j = i = 1) \end{cases}.$$

特に，g_n は D^2 の境界とホモトピックなので B_n の作用は自明であることが分かる．以後，F_n は $g_1, \ldots, g_n$ で生成されているとみなし，その部分群 F_{n-1} は $g_1, \ldots, g_{n-1}$ で生成されているとする．

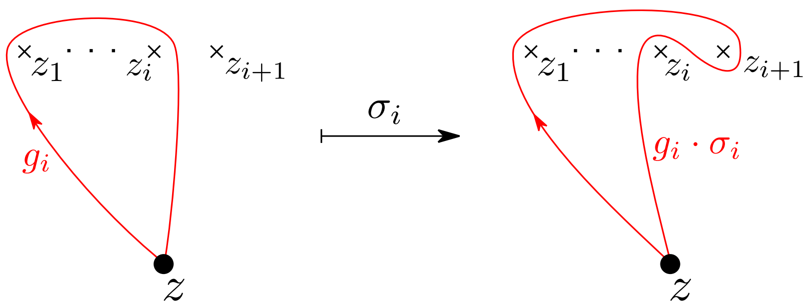


図 4: 生成元 g_i と σ_i の作用

$\mathcal{I}_{F_n}$ の基底を $g_1 - 1, \ldots, g_n - 1$ にとり直し，この基底に関する $\mathcal{LM}(\rho)$ の行列表示を求めると

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(\rho\left(\dfrac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} & V \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

となる．ここで，V はある $(n-1)k \times k$ 行列である．

定義 3.1. ([1, Theorem 2.11])[*2]表現 $\rho \colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **reduced Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho) \colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_{n-1}]} \mathcal{I}_{F_{n-1}})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_{n-1}}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．

このとき，基底 $g_1 - 1, \ldots, g_{n-1} - 1$ に関する $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)$ の行列表示は次のようになる:

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

補足 3.2. 1 変数増やした reduced Long-Moody 構成も同様に定義される．また，その行列表示は

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= t^{-1}(b)\mathrm{Diag}\left(t\rho(b), \ldots, t\rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \\ &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \end{aligned}$$

となる．

[*2] Long の論文での主張は，本稿での言葉を使うと「Long-Moody 構成は，reduced Long-Moody 構成とインプットの表現 $\rho|_{B_n}$ に split する」というものだが，上の行列表示の通り組み紐群の表現として必ずしも split するわけではない．

3.2 主結果

前節より，Long-Moody 構成の行列表示は Fox の自由微分で記述できることが分かった．さらに，最初にとる表現 ρ にある条件を課すことでねじれ Alexander 不変量との関係が分かる．

定理 3.3. 組み紐 $b \in B_n$ を固定する．表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ に対して，表現 $G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ が存在して次の図式が可換であると仮定する:

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "\rho|_{F_n}"] \arrow[d, "\phi"'] & GL_k(R) \\ G(\hat{b}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

このとき，

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t)\det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) = \pm\varepsilon t^l \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z}$ である．また，表現 $G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ は $\rho|_{F_n}$ から誘導されるので，同じ記号 ρ で表している．

証明. 組み紐 b を用いた $G(\hat{b})$ の表示 (3) において，生成元を $x_1,\ldots,x_n$ から $g_1,\ldots,g_n$ に取り替えることにより不足数 1 の表示を得る:

$$G(\hat{b}) \cong \langle g_1,\ldots,g_n \mid g_1 = g_1\cdot b,\ldots,g_{n-1} = g_{n-1}\cdot b\rangle\,.$$

このとき，全射準同型 $\alpha\colon G(\hat{b}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t\rangle$ は $g_i \longmapsto t^i\ (i = 1,\ldots,n)$ で与えられる．この表示によるねじれ Alexander 行列を計算すると

$$M = \left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - \delta_{ij}I_k\right)_{1\le i\le n-1, 1\le j\le n}$$

となるので，n 列目を消去すると，表現 ρ に付随するねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{\det M_n}{\det\Phi(g_n - 1)} = \frac{\det\left(\Phi\left(\dfrac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right)}{\det\Phi(g_n-1)}$$

となる．一方，定義より $\Phi = (\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha})\circ\widetilde{\phi}$ であり，また $t|_{F_n} = \alpha\circ\phi$, $\rho|_{F_n} = \rho\circ\phi$ なので

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\cdot\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \\ &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\right) =& \det\mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\det\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \\ =& (\det\rho(b))^{n-1}\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) &= \det(t\rho(g_n) - I_k) \\ &= \det\Phi(g_n-1) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\det\rho(b) \in R^\times$ なので，求める等式を得る． □

4　例

最後に，定理 3.3 の例をいくつか述べることにする．ただし，定理 3.3 の仮定では，$B_n \rtimes F_n$ の表現が結び目（または絡み目）群の表現を誘導するという条件件を課していたが，以下の例では逆に，最初に結び目（または絡み目）群の表現をとってきて，それが $B_n \rtimes F_n$ の表現に拡張されるかどうかを考えることにする．

例 4.1. ([2, Section 4]) $b := \sigma_1^3 \in B_2$ とする．この閉包は三葉結び目 3_1 である（図 5）．このとき，補空間の

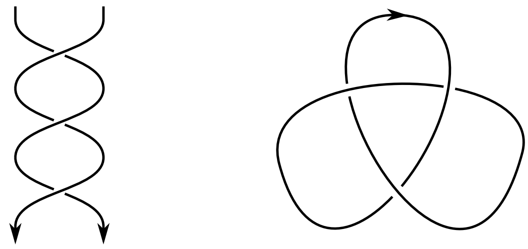


図 5: 組み紐 σ_1^3 と三葉結び目 3_1

基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2 \rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 = g_1 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

と書ける．また，表現 $\rho := \widetilde{\mathscr{B}}\colon G(\hat{b})(\cong B_3) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}[s^{\pm 1}])$ を reduced Burau 表現とする．この表現は

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}$$

で与えられる．これは自然にランク 2 の自由群 F_2 の表現に拡張される．また，半直積 $B_2 \ltimes F_2$ は

$$B_2 \ltimes F_2 \cong \left\langle x_1, x_2, \sigma_1 \,\middle|\, x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1 \right\rangle$$

という表示をもつので，表現 ρ が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張されるためには，上の関係式を満たすように σ_1 の像を定める必要があるが，これは

$$\rho(\sigma_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい．ここで，$g_1 \cdot b = g_2^2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ なので

$$\frac{\partial(g_1 \cdot b)}{\partial g_1} = -g_2^2 g_1^{-1}$$

であり，よって

$$t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) = -\rho(b)\rho(g_2^2 g_1^{-1})t^3 = \begin{pmatrix} st^3 & -st^3 + s^2t^3 \\ st^3 & -st^3 \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \rho(b)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + st^3 & -st^3 + s^2t^3 \\ st^3 & 1 - st^3 \end{pmatrix} = 1 - s^3t^6$$

と

$$\det\left(\rho(x_1x_2)t^2 - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} -1 & -st^2 \\ st^2 & -st^2 - 1 \end{pmatrix} = 1 + st^2 + s^2t^4$$

を得る．以上より，ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{1 - s^3t^6}{1 + st^2 + s^2t^4} = 1 - st^2$$

となる．

例 4.2. $b := \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ とすると，その閉包は 8 の字結び目 4_1 である（図 6）．このとき，補空間の

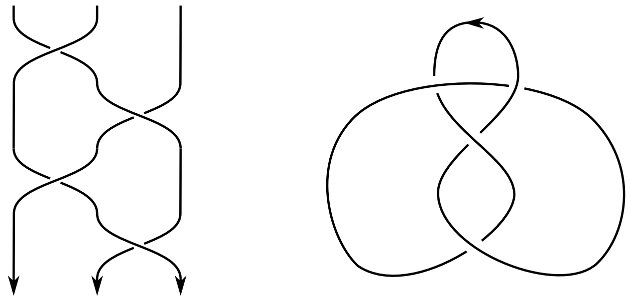


図 6: 組み紐 $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ と 8 の字結び目 4_1

基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b, x_3 = x_3 \cdot b \rangle \\ &\cong \left\langle x_2, x_3 \;\middle|\; x_2[x_3^{-1}, x_2] = [x_3^{-1}, x_2]x_3 \right\rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 = g_1 \cdot b, g_2 = g_2 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

である．ここで，$[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ である．また，表現 $\rho\colon G(\hat{b}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ を次で定義する:

$$\rho(x_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3s \\ -2s^2 & s-1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2 + s + 1 = 0$ を満たすとする．半直積 $B_3 \ltimes F_3$ は

$$B_3 \ltimes F_3 \cong \left\langle x_1, x_2, x_3, \sigma_1, \sigma_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1, x_3\sigma_1 = \sigma_1 x_3, \\ x_1\sigma_2 = \sigma_2 x_1, x_2\sigma_2 = \sigma_2 x_2 x_3 x_2^{-1}, x_3\sigma_2 = \sigma_2 x_2, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\rangle$$

という表示をもつので，σ_1 と σ_2 の像を

$$\rho(\sigma_1) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s+2 \\ -\dfrac{2(s+2)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ \dfrac{2(2s+1)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}$$

と定めれば，表現 ρ は $B_3 \ltimes F_3$ に拡張される．すると

$$\begin{aligned} &\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \begin{pmatrix} \rho(b) & 0 \\ 0 & \rho(b) \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \frac{(t^3+2t^2+1)(s-1)}{3t} & -\frac{t^3-t^2s+1}{t} & \frac{2t^2s+t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{ts+s+1}{t} \\ \frac{2(-t^2s^2+t^3+1)}{3t} & -\frac{(t^3+2t^2+1)(s+2)}{3t} & \frac{2(ts+t+s)}{3t} & -\frac{2t^2s+t^2-3s^2+ts+2t}{3t^2} \\ \frac{3t^2s-3t+s-1}{3t} & -\frac{1}{t} & \frac{3t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{s+1}{t} \\ \frac{2}{3t} & \frac{3t^2s^2-3t-s-2}{3t} & \frac{2s}{3t} & \frac{3t^2+3s^2-ts-2t}{3t^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1+t)^4(1-t+t^2)^2}{t^4} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\det\left(\rho(x_1x_2x_3)t^3 - I_2\right) &= \det\begin{pmatrix} -(1+t)(1-t+t^2) & 0 \\ 0 & -(1+t)(1-t+t^2) \end{pmatrix} \\ &= (1+t)^2(1-t+t^2)^2\end{aligned}$$

となるので，ねじれ Alexnader 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = (1+t)^2$$

となる．

5　今後の課題＆現在取り組んでいること

問題 5.1. 組み紐 $b \in B_n$ を固定したとき，$B_n \ltimes F_n$ に拡張するような表現 $\rho\colon G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ を見つけよ．

上の例以外では，組み紐 σ_1^q，つまり $(2,q)$ トーラス結び目（ただし q は奇数）に対してある非可換な $SL_2(\mathbb{C})$ 表現が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張できることを確かめている．また，結び目 $4_1, 5_2, 6_1$ に対してはホロノミー表現は半直積に拡張されないことが分かっている．

問題 5.2. インプットの表現 $\rho\colon B_n \longrightarrow GL_k(R)$ として，既にある絡み目の不変量 f を構成できているようなものをとってきたとき

- $\mathcal{LM}(\rho)$ から絡み目の不変量 F を構成せよ．
- 2 つの不変量 f と F の関係を見つけよ．

参考文献

[1] D. D. Long. Constructing representations of braid groups. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2):217–238, 1994.

[2] Masaaki Wada. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33(2):241–256, 1994.

[3] 北野晃朗・合田洋・森藤孝之. ねじれ *Alexander* 不変量. 数学メモアール, 5. 日本数学会, 2006.

重み付きグラフの変形と結び目理論への応用について

長坂 篤英 (東京大学大学院数理科学研究科)

概要

結び目を分類する上で不変量は重要な道具である．その中でも twisted Alexander 多項式は強力な不変量であり，近年重み付きグラフのゼータとの関連が示されたという進展がある．以下では，重み付きグラフの変形操作を定義し，結び目の変形との関係を述べ，ある条件を満たすより一般の群から重み付きグラフの定義をする方法と群の変形に伴うグラフの変形について述べる．

1 導入

二つの結び目を区別せよ, という問に対し不変量は非常に重要な役割を果たす．J. W. Alexander[5] により 1927 年に Alexander 多項式が導入されて以降，Jones 多項式，colored Jones 多項式や HOMFLY-PT 多項式などの多項式不変量や Jones 多項式の categorification によって得られる Khovanov homology など，人類は様々な不変量を得てきた．和田 [7]，Lin[10] により独立に定義された twisted Alexander 多項式は，Alexander 多項式に結び目群の表現の情報を付与することによって精密化したものであり, 従来の Alexander 多項式では区別できない unknot と Kinoshita-Terasaka knot (KT knot) を区別でき，さらに HOMFLY-PT 多項式等で区別できない KT knot と Conway knot を区別できるという点で twisted Alexander 多項式は非常に強力であることがわかる．

一方，石井，大城は twisted Alexander 多項式を含み，さらに quandle という代数系から得られる quandle 2-cocycle invariant と呼ばれる不変量とも関連する f-twisted Alexander 不変量という概念を定義した [2].

さらに，近年合田は matrix-weighted graph のゼータ関数から twisted Alexander 多項式の “分子” を復元できることを示した [4]．証明には隣接行列と自由微分から得られる Alexander 行列を関連づけるという手法を用いている．これは両者の関係が示唆された非常に興味深い結果であるが，図式を Reidemeister move で変形した際に対応する weighted graph がどう変化するか等には議論がされていないため，与えられた量が結び目の不変量を与えているか否かは和田の一般論に委ねているという点から，ゼータ関数の世界の中で閉じた枠組みを構築したとは言い難い．

以下では，まず matrix-weighted graph の基本変形というゼータ関数の値を保存する変形を操作する．その後，ある条件を満たす有限表示群に対してグラフを構成できることを述べ，変形操作を定義する．結び目の変形と言える Reidemeister move，それに伴う結び目群の表示の変形と言える strong Tietze 変換が全て weighted graph の変形という文脈で捉えられることを示す．

2 Matrix-weighted graph についての諸事項

本節では matrix-weighted graph についての定義をし，その変形について述べる．

有限有向グラフの各 edge に対して行列の重みを付与したもである．具体的に述べよう．vertex の集合を $V_G = \{v_1, \cdots, v_n\}$ とし，各 v_i に対して $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が与えられているとする．そして，v_i から v_j への edge が存在するとき，その edge の weight として可換環 R 成分の $a_i \times a_j$ の行列を対応させる．edge e の weight を $w(e)$ と表す．以下では，matrix-weighted graph をグラフの G と weight の w を合わせて (G, w) で表す．

edge e の始点，終点を $o(e), t(e)$ と表し，列 $(e_1, \cdots, e_k)$ であり，$i = 1, \cdots k-1$ に対し $t(e_i) = o(e_{i+1})$ なるものを $(o(e_1), t(e_k))$-path という．とくに，$o(e_1) = t(e_k)$ の場合，cycle と呼ぶ．

2 つの cycle $(e_1, \cdots, e_k), (f_1, \cdots, f_k)$ が同値であるとは，ある j が存在して $e_{i+j} = f_i$ が成り立つことをいう．さらに，cycle $(e_1, \cdots, e_k)$ がある cycle を用いて $(f_1, \cdots, f_m)^l$ とかける時，$(e_1, \cdots, e_k)$ は $(f_1, \cdots, f_m)$ の power であると言い，$l \geq 2$ となるような l が存在しない時 prime という．

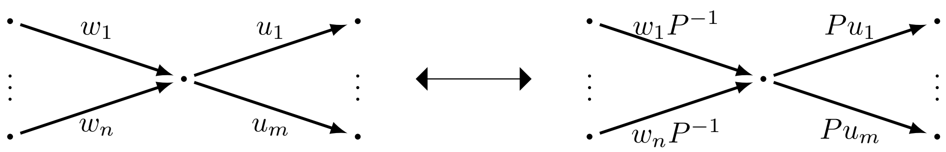
matrix-weighted graph (G, w) の matrix-weighted zeta function $\zeta_G(w)$ は

$$\zeta_G(w) = \prod_{[C]} \det(I - w(C))^{-1}$$

で定義される．ここに，$[C]$ は prime cycle の同値類を走り，$C = (e_1, \cdots, e_k)$ としたとき，$w(C) = w(e_1) \cdots w(e_k)$ とする．

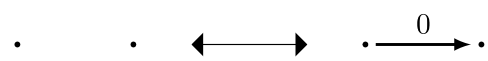
Definition 2.1. weighted oriented graph に対し，次の様な他の部分は不変にして一部の vertex, edge 及びその weight を変化させるような変形，及び図における edge の向きを逆にしたものを matrix-weighted graph の基本変形と呼ぶ．以下の図で，矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする．

(1) (change of basis)

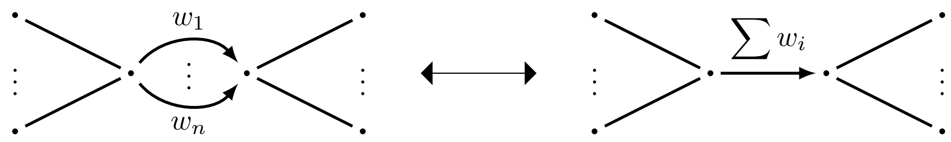


ここに，中央に現れる vertex はループを持ちうる．

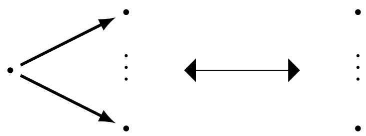
(2) (null edge)



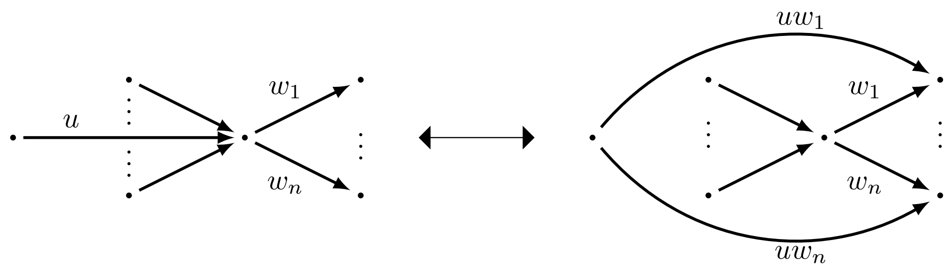
(3) (weight summation)



(4) (source/sink elimination)



(5) (hub vertex resolution)



ここに，左図において，weight が u の edge はループではないとする．

matrix-weighted graphs $(G,w),(G',w')$ が基本変形を有限回繰り返して他方が他方に移るとき，$(G,w)\sim(G',w')$ と書く． □

Theorem 2.2. (N.) *matrix-weighted graph* の基本変形でゼータ関数は不変である．すなわち，

$$(G,w)\sim(G',w')\Longrightarrow\zeta_G(w)=\zeta_{G'}(w')$$

が成り立つ． □

3 有限表示群と重み付きグラフ

本節では，ある条件を満たす有限表示群から自由微分を用いることで重み付きグラフを構成し，その変形操作について述べる．そして，この変形操作が群の変形と関連していることを述べる．

まずは自由微分を定義する．$F_s=\langle x_1,\cdots,x_s\rangle$ を自由群とする． 自由微分とは，$\mathbb{Z}$ 線型写像

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:\mathbb{Z}F_s\to\mathbb{Z}F_s$$

であって，次の条件を満たすものである．

- 全ての $p,q\in F_s$ に対して
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(pq)=\frac{\partial}{\partial x_i}(p)+p\frac{\partial}{\partial x_i}(q)$$
- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_j)=\delta_{ij}$

Definition 3.1. $\langle X \,|\, R\rangle = \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m\rangle$ を群 G の表示とする．関係式 r において，alphabet x_i を一つ選び，同じ生成元 x_i が r の中に複数現れる場合は，どの x_i かも指定する．これを r の基点と呼ぶ． □

以下では次の仮定をする．

Assumption 3.2. 各 r_i は基点をもち，かつ alphabet は X の中で異なる．さらに，$\mathrm{pr} : F_s \twoheadrightarrow G$ としたとき，

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \neq 0 \in \mathbb{Z}G$$

である． □

各 $r \in R$ に対し基点を定めたとき，これを (X, R, B) の三つ組で表す．以下では，(X, R, B) と書いた場合は断りなく上の条件を満たすように各 $r \in R$ に基点が定まっているものとする．有限表示が与えられた時に関係式の基点の取り方は様々であるが，一つを固定して議論をする時は関係式のラベルを付け替えて

$$r_i = x_i f_i(x_1, \cdots, x_n)^{-1}$$

と書く．これを以下では簡単のため

$$r_i : x_i = f_i$$

と書く．条件により，

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) \neq 1 \in \mathbb{Z}G$$

である．f_i の中に x_i がある場合にも，r_i の先頭にどの x_i を指定するかの不定性があるが，まずは一つ固定して議論をする．

Remark 3.3. 以上の仮定は次のように述べることができる．すなわち，単射 $f : R \to X$ が存在し，$r \in R$ に対して $f(r)$ は r の alphabet でありどの alphabet かも指定している．さらに，

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial r}{\partial f(r)}\right) \neq 0 \in \mathbb{Z}G$$

が満たされている． □

Definition 3.4. 上の仮定を満たす有限表示群 $\langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m\rangle$ に対し，$r_i : x_i = f_i$ の両辺を微分した

$$dx_i = df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

を考える．graph の vertex の集合 $v_1, \cdots, v_n$ に対し，関係式 r_i ごとに，v_i から v_j へ edge を伸ばし，weight を

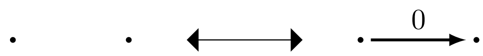
$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{Z}G$$

と定める．ここに，$\mathrm{pr} : \langle x_1, \cdots, x_n\rangle \twoheadrightarrow \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m\rangle$ である．これを group-weighted graph と言い，$\Gamma(X, R, B)$ と表す． □

Group-weighted graph の基本変形を次の様に定義する．

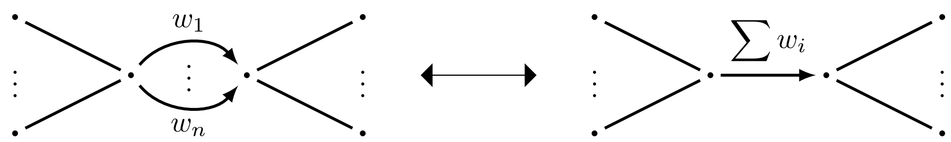
Definition 3.5. 次の様な局所的変形，すなわち他の部分は不変にして一部の vertex, edge, weight を変化させるような変形を group-weighted graph の基本変形と呼ぶ[*1]．以下の図で，矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする．

(G1) (null edge)

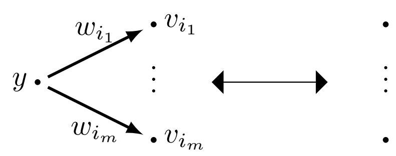


ここに，weight が 0 の edge が出発する点は sink ではないとする．

(G2) (weight summation)



(G3) (source/sink elimination)

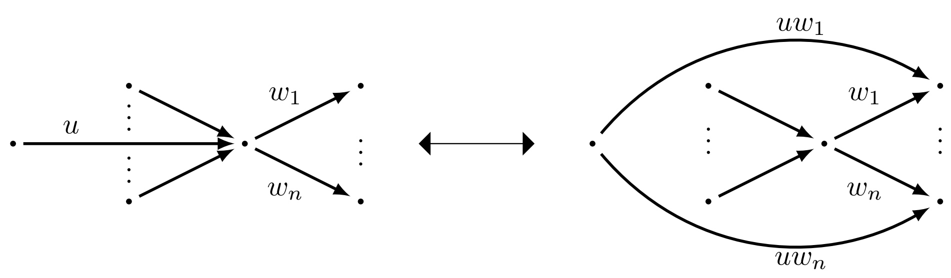


ここに，上の $w_{i_1}, \cdots, w_{i_m}$ において，

$$df = \sum_j w_{i_j} dx_{i_j}$$

なる y を含まない word f が存在するとする．

(G4) (hub vertex resolution)



ここに，左図において，weight が u の edge はループではないとする． □

G の表現 $\rho : G \to GL_k(K)$ を用いて各 edge の weight $g \in \mathbb{Z}G$ を $\rho(g)$ に置き換えることで matrix-weighted graph が得られる．この様にして得られた matrix-weighted graph を $\Gamma_\rho(X, R, B)$

[*1] この定義では「矢印を逆にする」という定義はしない．これは，定義 3.4 で v_i「から」出発する，としているからである．v_i「に」入力する，と定義した場合は矢印の向きが逆になる．

とかく．定義から次がわかる．

Proposition 3.6. $\Gamma(X,R,B)$ と $\Gamma(X',R',B')$ が *group-weighted graph* の基本変形で移り合うならば，$\Gamma_\rho(X,R,B)$ と $\Gamma_\rho(X',R',B')$ は *matrix-weighted graph* の基本変形で移り合う． □

また，どのように表現をとるかということについては次のことがわかる．

Proposition 3.7. $\Gamma_\rho(X,R,B)$ のゼータ関数を $\zeta_\rho(X,R,B)$ と書いたとき，次が成り立つ．

(1) $\rho \sim \rho' \Longrightarrow \zeta_\rho(X,R,B) = \zeta_{\rho'}(X,R,B)$
(2) $\rho \sim \rho_1 \oplus \rho_2 \Longrightarrow \zeta_\rho(X,R,B) = \zeta_{\rho_1}(X,R,B)\zeta_{\rho_2}(X,R,B)$ □

以上に述べた通りこの matrix-weighted graph 構成では，r_i の label の付け替えや，r_i の左辺に現れる x_i の取り方などの不定性が一般には生じるが，次のことが言える．

Proposition 3.8. ゼータ関数は r_i の *label* の選択や，r_i の中のどの x_i を先頭に選ぶかの選択を変えても K の単数倍を除いて一致する． □

すなわち，$f : R \to X$ が定まっている時，$r \in R$ に対し $f(r)$ を r の具体的にどの alphabet にするか，という不定性は考えている環の単数倍を違いを無視すればゼータ関数の値が一致する．一方，基点を変化させた時は一般にはゼータ関数の値は異なる．ただし，基点の集合が不変である限りはゼータ関数の値は不変となる．

Proposition 3.9. 群 G の表示 $\langle X \mid R\rangle$ を考える．写像 $f, g : R \to X$ は単射であって，$r \in R$ に対し $f(r), g(r)$ がそれぞれ r の *alphabet* であるとする．このとき，$f(R) = g(R)$ であれば単数倍を除いてそのゼータ関数が一致する． □

さて，以上の様に構成した group-weighted graph の変形と，グラフの構成に用いた有限表示群の変形とを関連付けよう．よく知られている様に，次の群の変形操作は群の同型を誘導する．

Definition 3.10. 2 つの有限表示群 $\langle X \mid R\rangle, \langle X' \mid R'\rangle$ が，次の有限回の (1) ∼ (4) の操作およびその逆で移り合う時，この二つは strongly Tietze equivalent という．

(1) r_i を r_i^{-1} に変える．
(2) r_i を r_ir_j $(i \neq j)$ に変える．
(3) $w \in F(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて r_i を wr_iw^{-1} にする．
(4) G の表示を $\left\langle x_1, \cdots, x_n, y \,\middle|\, r_1, \cdots, r_m, yw^{-1}\right\rangle$ $(w \in F(x_1, \cdots, x_n))$ にする． □

Definition 3.11. Strong Tietze 変換において，

- (1) ∼ (3) では基点を不変．
- (4) では yw^{-1} の基点を y とする．

というように基点を設定する時，これを基点を保った strong Tietze 変換と呼ぶ． □

このとき次が成り立つ．

Theorem 3.12. (N.) $(X,R,B),(X',R',B')$ を群 G の 2 つの有限表示群とする．二つの表示が基点を保った *strongly Tietze equivalent* であるとき $\Gamma(X,R,B)\sim\Gamma(X',R',B')$ である． □

逆が成り立つか？という問題を考えよう．

Theorem 3.13. (N.) 有限表示群 (X,R,B) に対し，*group-weighted graph* $\Gamma(X,R,B)$ をつくる．Γ を $\Gamma(X,R,B)$ に *group-weighted graph* の基本変形を行って得られたグラフとする．このとき，次を満たす有限表示群 (X',R',B') が存在する．

- $\Gamma=\Gamma(X',R',B')$.
- (X,R) と (X',R') は *strongly Tietze equivalent.* □

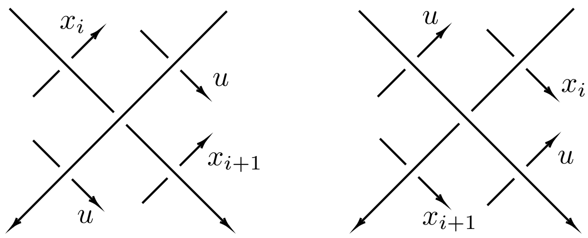
4 結び目理論への応用

本章は，結び目理論への応用を述べる．細かい言葉の定義などは [14] などを参照されたい．まずは，和田氏 [7] によって定義された結び目の twisted Alexander 多項式を定義し，合田氏 [4] の定理を概説するとともに，結び目の変形と先に述べたグラフの変形を結びつける．そして，最後には結び目図式から不変量を得るにはグラフ上でどのような条件を満たすべきかについて議論をする．以下では K と書いたら結び目とし，$\pi_K:=\pi_1(S^3\setminus K)$ とする．

π_K の Wirtinger 表示

$$\langle x_1,\cdots,x_n\,|\,r_1,\cdots,r_{n-1}\rangle$$

を一つ固定する．ここに，Wirtinger 表示とは，結び目図式が与えられるたびに交叉点ごとに次の様に π_K の生成元を書いて得られる π_K の表示であった:



関係式： $x_{i+1}u^{-1}x_1^{-1}u$ $x_{i+1}ux_1^{-1}u^{-1}$

Twisted Alexander 多項式とは，結び目群の表現から得られるものである．写像をいくつか用意しよう．まず，α は Hurewicz 写像から誘導される写像とする:

$$\alpha:\pi_K\to\pi_K/[\pi_K,\pi_K]\cong\mathbb{Z}\cong\langle t\rangle\,;x_i\mapsto t$$

α を $\mathbb{Z}\pi_K\to\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$ に延長したものを $\widetilde{\alpha}$ とし，$F_n=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ から π_K への自然な射影を ϕ, $\rho:\pi_K\to GL_m(\mathbb{C})$ を表現とする．これらを延長した写像も $\widetilde{\phi},\widetilde{\rho}$ とかく．以上の写像を用いて次の合成を考える．

$$\Phi:\mathbb{Z}F_n\xrightarrow{\widetilde{\phi}}\mathbb{Z}\pi_K\xrightarrow{\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha}}M_m(\mathbb{C}[t^{\pm1}])$$

(i,j) 成分が

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M_m(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

であるブロック行列を M とし，M の k 列目を取り除いて得られるブロック行列として $(m-1)\times(m-1)$ のサイズの行列を M_k とする．

Lemma 4.1 ([7])**.** すべての j に対し $\det\Phi(1-x_j)\neq 0$ である． □

Lemma 4.2 ([7])**.** $1\leq i<j\leq n$ に対して

$$(\det M_j)\,(\det\Phi(1-x_i)) = \pm\,(\det M_i)\,(\det\Phi(1-x_j))$$

が成り立つ． □

これにより，結び目 K の Wirtinger 表示を一つ固定した時についての不変量を得られた．

Definition 4.3 ([7])**.** Wirtinger 表示から得られる有理式

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det M_j}{\det(1-\Phi(x_j))}$$

を表現 ρ に対応した結び目 K の twisted Alexander 多項式という． □

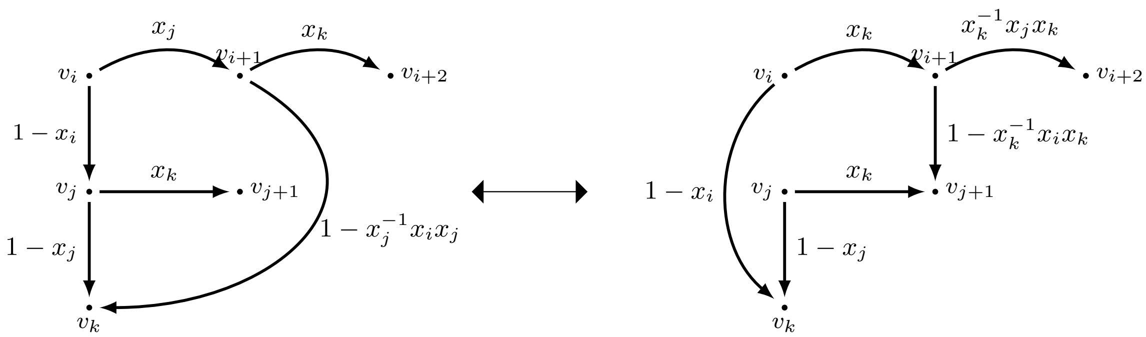
これによって，結び目図式を一つ固定するたびに，すなわち結び目群の表示を一つ固定するたびに値を割り当てることができた．合田氏 [4] は，結び目群の関係式を

$$r_i : x_i = u^{\mp 1}x_{i+1}u^{\pm 1}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

としたとき，M_1 はある matrix-weighted graph のゼータ関数から得られることを示した．合田氏は結び目図式から knot graph と呼ばれるグラフを構成し，そこに weight を付与することで matrix-weighted graph を構成した．一般には Wirtinger 表示の取り方はいろいろあるから，Wirtinger 表示のとり方を変えた時についての考察をしよう．

Theorem 4.4 ([7])**.** $\Delta_{K,\rho}$ は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単数倍の違いを除いて定まる．

Proof. ここでは，グラフを用いた証明をする．Wirtinger 表示において関係式をどのように $n-1$ 個選ぶかの不定性は strong Tietze 変換であることが知られており，これによる行列式の変化は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単元倍の違いのみである．Wirtinger 表示における関係式を $x_i = u^{\mp 1}x_{i+1}u^{\pm 1}$ と読み，グラフを作る．例えば Reidemeister move 3 の前後のグラフの変化は次の様になっている．



この二つは group-weighted graph の基本変形で移り合うことがわかるから，表現を用いて matrix-weighted graph を構成した際，これらも基本変形で移り合う．すなわちゼータ関数は一致する． ■

Remark 4.5. 上の証明で，基本変形の列を作るとそれが strong Tietze 変換の列になっていることがわかる．これは，同じく [7] によって示された「π_K の任意の Wirtinger 表示は strongly Tietze equivalent である」ということの証明も同時に与える． □

Remark 4.6. 和田氏は，表現が unimodular であるとき，すなわち，$\rho : \pi_K \to SL_m(R)$ であるときに $\Delta_{K,\rho}$ はある $e \in \mathbb{Z}$ を用いて，m が奇数のとき $\pm t^e$ 倍の，m が偶数のとき t^e 倍の違いを除いて定まる，ということを示している．このことは Theorem 4.4 において，Wirtinger 表示の関係式を固定した場合ゼータの値は一致するため，strong Tietze 変換の (1), (2) での行列の行が定数倍されることから従う． □

Theorem 4.4 におけるグラフの変化を再考しよう．$w(v_i \to v_j)$ で v_i から v_j への path の weight の和とする．このとき，両側のグラフともに次が成り立っている．

- $w(v_i \to v_{i+2}) = x_j x_k$
- $w(v_i \to v_{j+1}) = x_k - x_i x_k$
- $w(v_i \to v_k) = 1 - x_i$
- $w(v_j \to v_{j+1}) = x_k$
- $w(v_j \to v_j) = 1 - x_j$

この考え方を押し進めると，Reidemeister move の前後に対応するグラフの path の weight が等しければ結び目図式に対して不変量を与えることが期待される．そこで，自由微分から得られるとは限らない行列の weight を付与させてグラフを構成し，Reidemeister move の前後に対応するグラフの path の weight が等しい条件を考えよう．このとき，石井氏，大城氏 [2] によって定義された Alexander pair により weight が統制されることがわかる．

Definition 4.7. Q を quandle, R を単位的環とする．写像 $f_1, f_2 : Q \times Q \to R$ が次の条件を満たすとき，組 $f = (f_1, f_2)$ を Alexander pair と呼ぶ．

(1) 全ての $a \in Q$ に対し $f_1(a,a) + f_2(a,a) = 1$

(2) 全ての $a, b \in Q$ に対し $f_1(a,b)$ は可逆元

(3) 全ての $a, b, c \in Q$ に対し次が成り立つ:

　(ア) $f_1(a*b, c) f_1(a,b) = f_1(a*c, b*c) f_1(a,c)$

　(イ) $f_1(a*b, c) f_2(a,b) = f_2(a*c, b*c) f_1(b,c)$

　(ウ) $f_2(a*b, c) = f_1(a*c, b*c) f_2(a,c) + f_2(a*c, b*c) f_2(b,c)$ □

Quandle の定義などについては [6] などを参照されたい．Alexander pair の条件式は次の様な設定を考えた時に自然に出てくる条件である．

Proposition 4.8. [8] $f = (f_1, f_2)$ が *Alexander pair* であるとする．このとき，$Q \times R$ に次で

quandle の構造 $(Q \times R, \star)$ が入る:

$$(a, x) \star (b, y) = (a * b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

□

Alexander pair $f = (f_1, f_2)$ が Propositoin 4.8 が満たすことと weight の path を保存することの関連は，被覆空間と基本群の関係のアナロジーから理解できる．先に現れた以外の結び目の不変量として，quandle 2-cocycle invariant との関連なども以上の文脈から捉えることができ，[11] の別証明を与えるなど，グラフの path の weight を保つという条件が非常に重要な条件であることが示唆される．

参考文献

[1] A. Terras, Zeta functions of graphs: a stroll through the garden, Cambridge University Press, 2010, vol. 128.

[2] A. Ishii and K. Oshiro, "Twisted Derivatives with Alexander pairs for quandles., preprint.

[3] D. Joyce, "A classifying invariant of knots, the knot quandle," Journal of Pure and Applied Algebra 23.1 (1982): 37-65.

[4] H. Goda, "Twisted alexander polynomial and matrix-weighted zeta function," Kyushu Journal of Mathematics 74.1 (2020): 211-221.

[5] J. W. Alexander, "Topological invariants of knots and links," Transactions of the American Mathematical Society 30.2 (1928): 275-306.

[6] M. Elhamdadi and S. Nelson, Quandles, American Mathematical Soc., 2015.

[7] M. Wada, "Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups," Topology 33.2 (1994): 241-256.

[8] N. Andruskiewitsch, and M. Graña, "From racks to pointed Hopf algebras," Advances in Mathematics 178.2 (2003): 177-243.

[9] T. Ohtsuki, Quantum invariants: A study of knots, 3-manifolds, and their sets, World Scientific, 2002.

[10] X. S. Lin, "Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials," Acta Mathematica Sinica 17.3 (2001): 361-380.

[11] Y. Taniguchi, "An f-twisted Alexander matrix of link quandles," arXiv preprint arXiv:2107.06561 (2021).

[12] 大槻 知忠, 結び目の不変量, 共立講座, 数学の輝き 4, 共立出版，2015.

[13] 北野 晃朗, 合田 洋, 森藤 孝之, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール, 5, 日本数学会, 2006.

[14] 村上 斉, 結び目理論入門 (上) (岩波数学叢書), 岩波書店, 2019.

Celtic diagrams of various grid types

福田 大能　(埼玉大学・M2)*

概　要

Celtic diagram とはケルト人の装飾に使われていたデザイン（ケルトの結び目）を数学的に定義し構成した diagram である．Celtic diagram については G.L.Gross - T.W.Tucker[1] や橋爪氏 [2]，船越氏 [3] などによる先行研究が存在する [4]．これらの先行研究では Celtic diagram の定義がグリッドの違いにより異なっていた．この論文で新たにグリッド領域という概念を定義し Celtic diagram の定義を再構成することにより，任意のグリッドにおいて Celtic diagram の構成が可能となった．また，三角グリッド領域及び六角グリッド領域における Celtic diagram に対し，限定的なクラスではあるが，Alexander-Conway 多項式の帰納的な計算方法を得た．

1. Definition

この章では，議論に必要な概念の定義を行う．

Definition 1.1 (グリッド，グリッド領域)**.** 平面の多角形による分割を**グリッド**という．

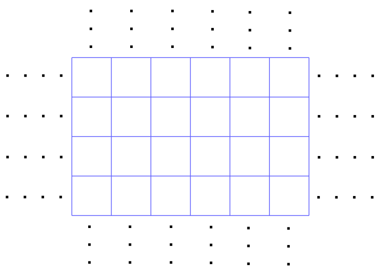


図 1: 正方グリッド

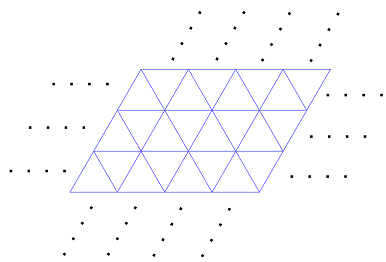


図 2: 三角グリッド

グリッド内のいくつかの多角形からなる連結な有限領域を**グリッド領域**という．

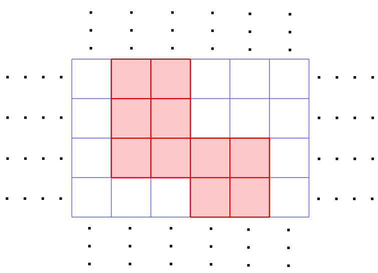


図 3: 正方グリッド領域

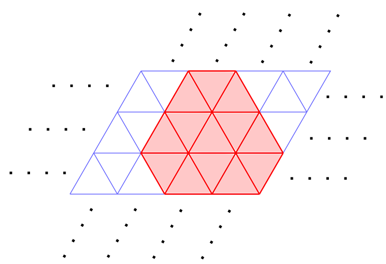


図 4: 三角グリッド領域

平面が正方形 (正三角形，正六角形) で分割されている時，正方グリッド領域（三角グリッド領域，六角グリッド領域）という．

* 〒 338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255 埼玉大学大学院理工学研究科
e-mail: h.fukuda.157@ms.saitama-u.ac.jp

Definition 1.2 (Celtic diagram)**.** 図6のような操作でできた link diagram を **Celtic diagram** という.

- グリッド領域の内部の辺に対し，図5のように交点を置く.
- 交点を多角形の辺に平行な線で結ぶ.

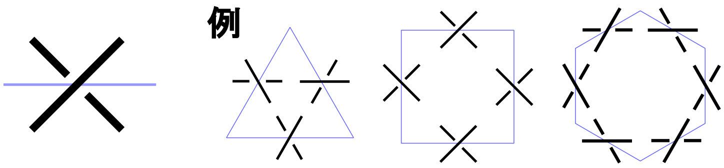


図 5: 交点の置き方

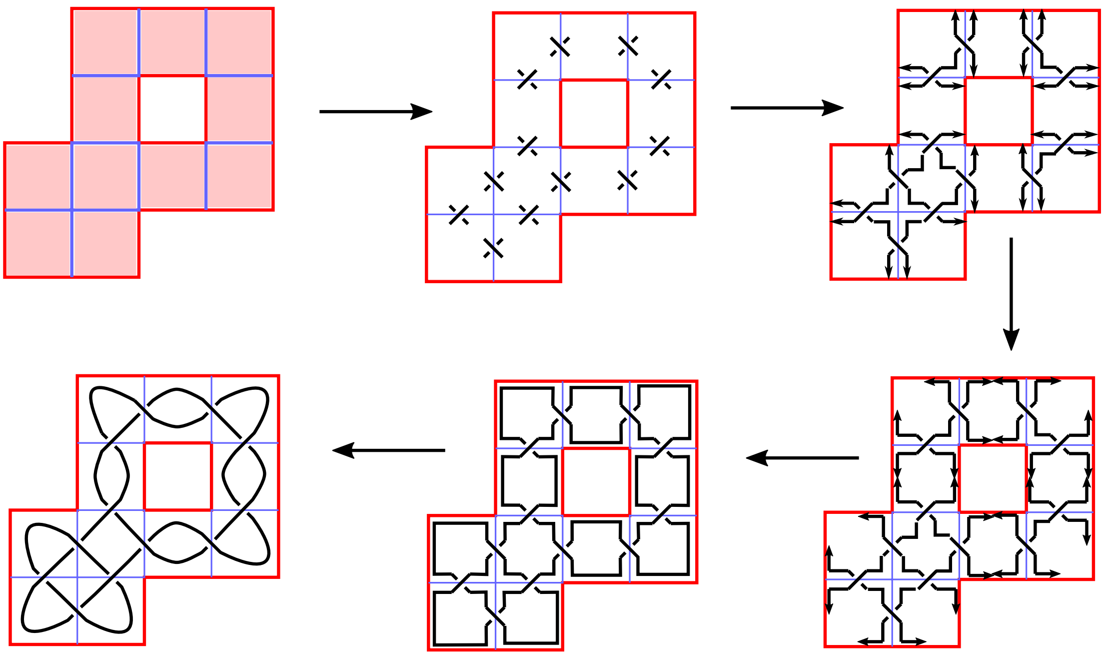


図 6: Celtic diagram の構成

Celtic diagram の交点をスムージングし新たな diagram を作ることができる.

Definition 1.3 (バリア)**.** スムージングの種類を表す補助線を **バリア (barrier)** という. 図7のように交点を置いた辺と同方向のバリアを horizontal barrier，垂直方向のバリアを vertical barrier という.

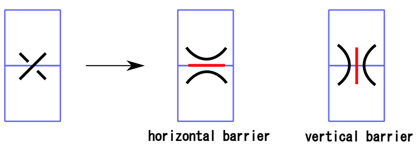


図 7: バリアとスムージングの関係

Remark 1.4. バリアをつけた diagram も Celtic diagram という.

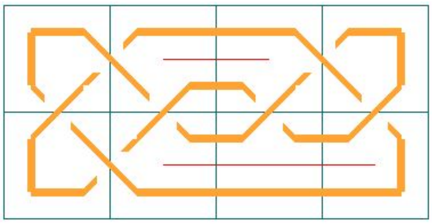


図 8: バリアのある Celtic diagram の例 (KnotPlot [5])

Definition 1.5 (CH^n_m, CT^n_m)**.** 図 9 のようにグリッド領域の内部の頂点が $m \times n$ 個ある六角 (三角) グリッド領域のバリアのない Celtic diagram を $CH^n_m(CT^n_m)$ と表す.

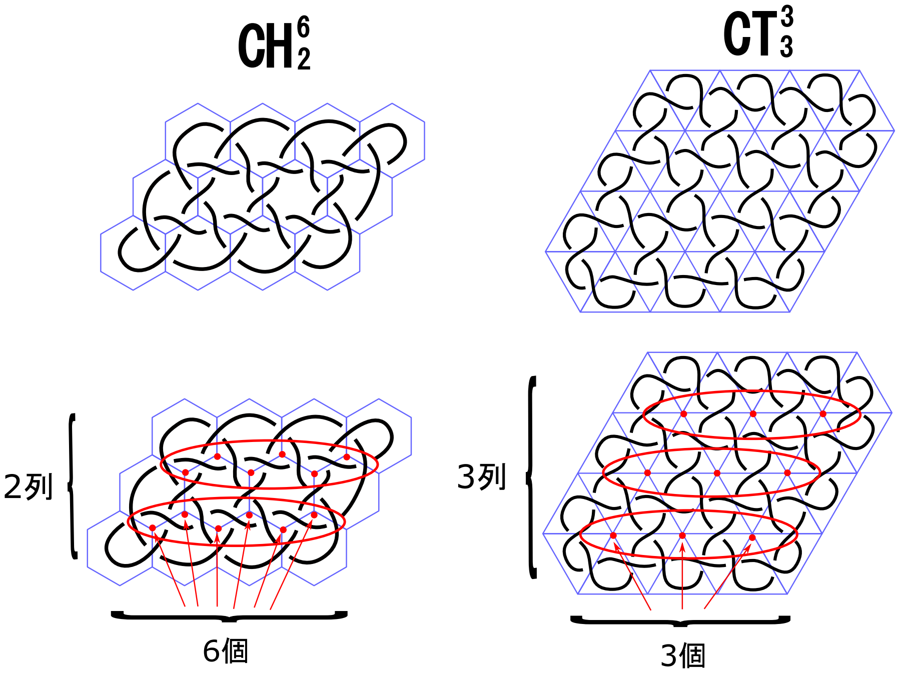


図 9: $CH^n_m(CT^n_m)$ の例

2. 三角（六角）グリッド領域の Celtic diagram の構成

これまでの研究で，次のことが知られている.

Theorem 2.1 (G.L.Gross - T.W.Tucker [1])**.** 全ての alternating link diagram は，正方グリッド領域の Celtic diagram として表すことができる.

今回の研究では次の定理を示す.

Theorem 2.2. 全ての alternating link diagram は，三角グリッド領域，六角グリッド領域の Celtic diagram として表すことができる.

証明には inverse medial graph を用いる.

Definition 2.3 (Inverse medial graph (IMG))**.** alternating link L に対し，その diagram を D_L とする．図 10 のように同色が隣り合わないよう D_L を 2 色で塗分け，各面に対応する頂点を置く．交点に辺を対応させ，同色の面にある頂点どうしを繋ぎグラフをつく

る．この時できたグラフのうち，辺と D_L の交点が図 11 のような関係にあるものを D_L の **inverse medial graph(IMG)** という．

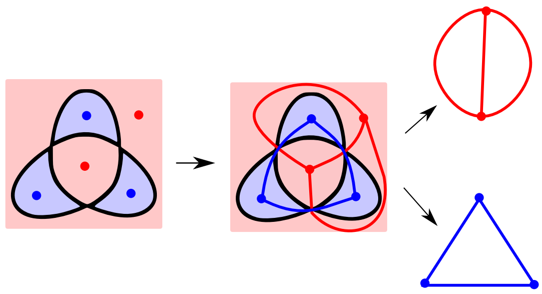


図 10: IMG の構成

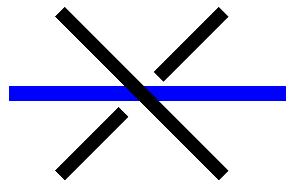


図 11: 辺と交点の関係

Definition 2.4 (引裂き，分割)**.** alternating link diagram D_L とする．D_L の IMG G_L に対し，以下の操作を定める．

- 図 12 のようにグラフの頂点を引裂き，新たに辺と頂点を一つ加える操作を**引裂き**という．
- 図 13 のようにグラフ内の多角形の頂点の間に，その多角形を分割する辺を一つ加える操作を**分割**という．

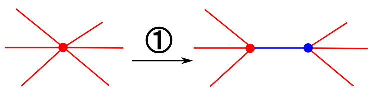


図 12: 引裂き

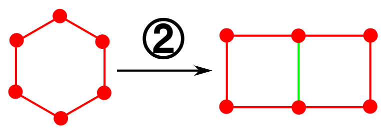


図 13: 分割

Definition 2.5 (dual graph)**.** グリッド領域 R の双対グラフ G^* に対し，図 14 のように外部に対応する頂点と境界に対応する辺を除いた G^* の部分グラフを R の dual graph R^* という．

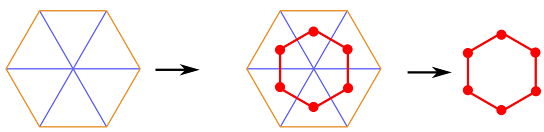


図 14: グリッド領域の dual graph

Proposition 2.6. グリッドを一つ固定し，alternating link diagram の IMG に引裂き，分割を行うと，あるグリッド領域の dual graph にすることが出来る．

この命題を使うことで，Thorem 2.2. が示される．

・Proposition 2.6. の証明の概略

任意の alternating link diagram D_L を六角グリッド領域の Celtic diagram として表す．D_L の IMG G_L に引裂きを行い最大次数が 6 のグラフを作る．作ったグラフの面のうち外部との境界となる辺を持つ面を一つ選び，引裂き，分割を行い，その面を正三角形で充填する．選んだ面と辺を共有している面に対し，引裂き，分割を行い，その面を正三角形で充填する．これを繰り返したグラフがある六角グリッド領域の dual graph になる．

図 15 は alternating link diagram の IMG から六角グリッド領域の dual graph への構成の例を表している．この dual graph となる六角グリッド領域に対し，もとの IMG の辺（黒線）に対応する六角グリッド領域の辺に交点，引裂きで加えた辺（青線）に対応する六角グリッド領域の辺に vertical barrier，分割によって加えた辺（緑線）に対応する六角グリッド領域の辺に horizontal barrier を対応させ Celtic diagram を構成するともとの alternating link diagram を表す Celtic diagram になる．

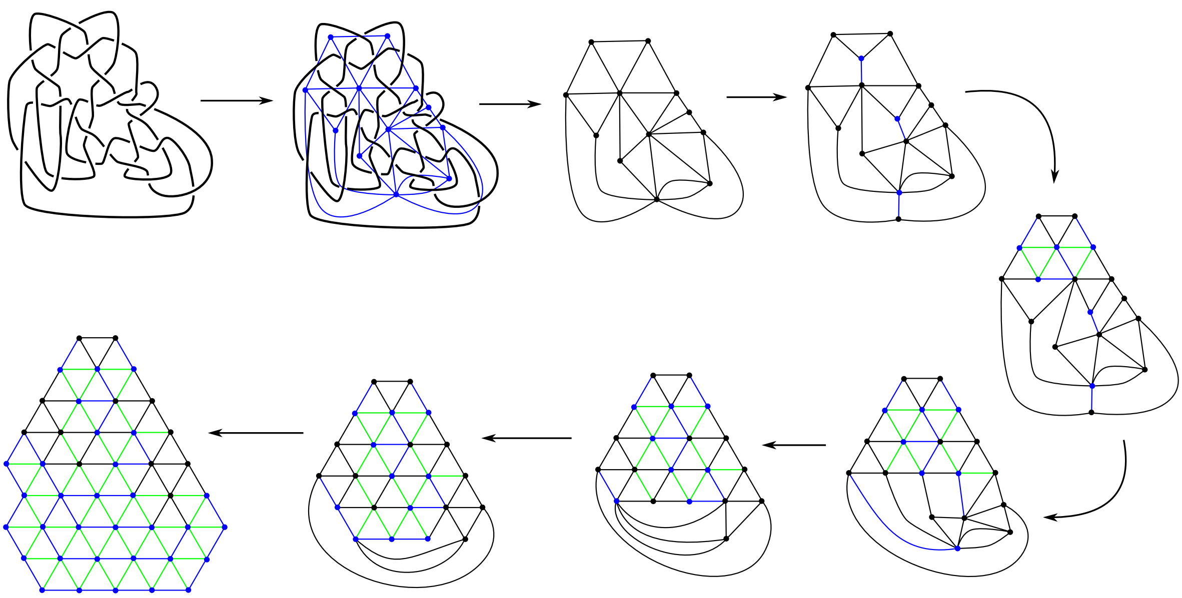


図 15: dual graph の構成例

Theorem 2.2. より alternating link diagram は三角グリッド領域，六角グリッド領域の Celtic diagram としても表すことができることがわかった．これにより，正方グリッド領域の Celtic diagram を他のグリッド領域の Celtic diagram として表すことができることがわかる．次の定理では，あるグリッド領域の Celtic diagram を異なるグリッド領域の Celtic diagram で表す場合，どのような diagram が存在するかを示している．

Theorem 2.7. $i, j \in \{3, 4, 6\}$，$i \neq j$ とする．alternating link L に対し，L を表す i 角グリッド領域上の Celtic diagram を D_i とする．D_i を描いている i 角グリッド領域を R_i とし，R_i の多角形の数を P_i，内部の頂点の数を V_i とすると，

1. $i < j$ のとき，$P_i \geq P_j$ となる L を表す j 角グリッド領域上の Celtic diagram D_j が存在する．

2. $i > j$ のとき，$V_i \geq V_j$ となる L を表す j 角グリッド領域上の Celtic diagram D_j が存在する．

Theorem 2.7. は以下を示すことにより証明できる.

- あるグリッド領域上の Celtic diagram をより大きい多角形のグリッド領域上の Celtic diagram として描くとき，IMG に対して行う操作は分割だけで十分である.
- あるグリッド領域上の Celtic diagram をより小さい多角形のグリッド領域上の Celtic diagram として描くとき，IMG に対して行う操作は引裂きだけで十分である.
- IMG に対する分割の前後でグリッド領域の多角形の数は変わらない.
- IMG に対する引裂きの前後でグリッド領域の内部の頂点の数は変わらない.

3. Celtic diagram の Alexander–Conway 多項式

また，CH_1^n, CT_1^n の Alexander–Conway 多項式 $\nabla\left(CH_1^n\right)$，$\nabla\left(CT_1^n\right)$ の帰納的算出方法を得た.

Theorem 3.1. $\nabla\left(CT_1^0\right)=1$, $\nabla\left(CT_1^1\right)=1-z+z^2$
$\nabla\left(CT_1^n\right)=\nabla\left(CT_1^{n-2}\right)-3z\nabla\left(CT_1^{n-1}\right)\ (n\geq 1)$

ただし，diagram の向きを図 16 のように定める.

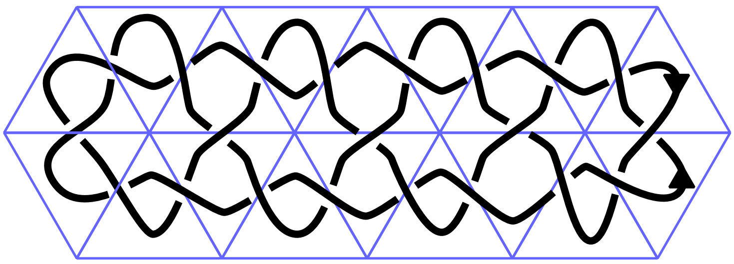


図 16: CT_1^n の向き

Theorem 3.2. $\nabla\left(CT_1^0\right)=1$, $\nabla\left(CT_1^1\right)=1+z^2$ $\nabla\left(CT_1^2\right)=-z^3$, $\nabla\left(\overline{CT_1^2}\right)=-2z+z^2$,
$\nabla\left(CT_1^3\right)=1-z^2+z^4$

$\mathbb{Z}\ni k\geq 0$ とする.

1. $n=6k$ のとき
$$\nabla\left(CH_1^{6k}\right)=z\nabla\left(CH_1^{6k-4}\right)+(1-z^2)\nabla\left(CH_1^{6k-3}\right)-z\nabla\left(CH_1^{6k-1}\right)$$
2. $n=6k+1$ のとき
$$\nabla\left(CH_1^{6k+1}\right)=(1+z^2)\nabla\left(CH_1^{6k-2}\right)-z^3\nabla\left(\overline{CH_1^{6k-1}}\right)$$
3. $n=6k+2$ のとき
$$\nabla\left(CH_1^{6k+2}\right)=(1+z^2)\nabla\left(CH_1^{6k-1}\right)-z^3\nabla\left(CH_1^{6k}\right)$$
$$\nabla\left(\overline{CH_1^{6k+2}}\right)=z\nabla\left(CH_1^{6k-2}\right)+(1-z^2)\nabla\left(\overline{CH_1^{6k-1}}\right)-z\nabla\left(CH_1^{6k+1}\right)$$

4. $n = 6k+3$ のとき

$$\nabla\left(CH_1^{6k+3}\right) = z\nabla\left(CH_1^{6k-1}\right) + (1-z^2)\nabla\left(CH_1^{6k}\right) - z\nabla\left(CH_1^{6k+2}\right)$$

5. $n = 6k+4$ のとき

$$\nabla\left(CH_1^{6k+4}\right) = (1+z^2)\nabla\left(CH_1^{6k+1}\right) - z^3\nabla\left(\overline{CH_1}^{6k+2}\right)$$

6. $n = 6k+5$ のとき

$$\nabla\left(CH_1^{6k+5}\right) = (1+z^2)\nabla\left(CH_1^{6k+2}\right) - z^3\nabla\left(CH_1^{6k+3}\right)$$

$$\nabla\left(\overline{CH_1}^{6k+5}\right) = z\nabla\left(CH_1^{6k+1}\right) + (1-z^2)\nabla\left(\overline{CH_1}^{6k+2}\right) - z\nabla\left(CH_1^{6k+4}\right)$$

ただし，diagram の向きを図 25 のように定める．

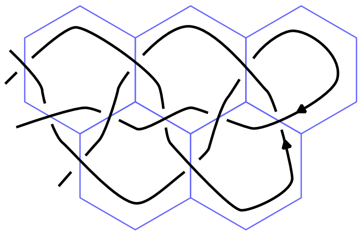


図 17: CH_1^{6k}

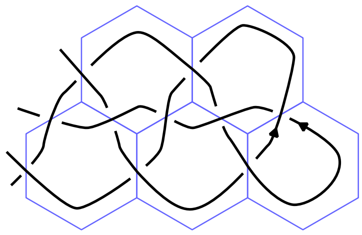


図 18: CH_1^{6k+1}

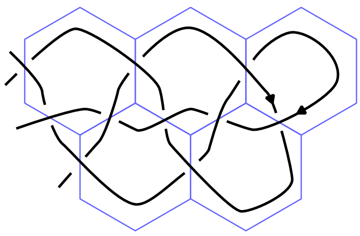


図 19: CH_1^{6k+2}

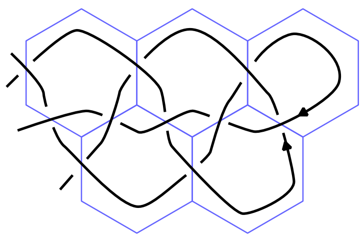


図 20: $\overline{CH_1}^{6k+2}$

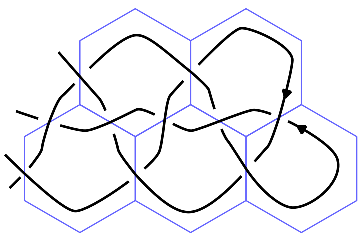


図 21: CH_1^{6k+3}

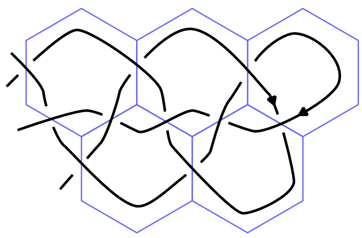


図 22: CH_1^{6k+4}

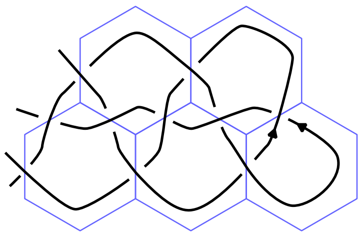


図 23: CH_1^{6k+5}

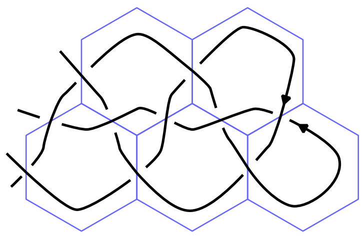


図 24: $\overline{CH_1^{6k+5}}$

図 25: CH_1^n の向き

4. Future works

本研究では条件を制限したCeltic diagramについて扱った．そのため今後の課題としては，より一般的なCeltic diagramについて考えていきたい．

- 任意のタイリングによるグリッドでも全てのalternating link diagramsはそのグリッド領域でできるCeltic diagramで表すことができるか．
- CT_m^n，CH_m^n $(m \geq 1)$ の Alexander–Conway 多項式の算出方法
- バリアのある Celtic diagram の Alexander–Conway 多項式の算出方法

参考文献

[1] G. L. Gross and T. W. Tucker, A Celtic Framework for Knots and Links, Discrete Comput Geom, **46** (2011), 86–99.

[2] M. Hashizume and Y. Funakoshi, 正方形グリッドから得られるケルト結び目模様,「結び目の数学 II」報告集, (2019), 237-239.

[3] Y. Funakoshi and M. Hashizume, 正六角形グリッドから得られるケルト結び目模様,「結び目の数学 II」報告集, (2019), 240-243.

[4] P. R. Cromwell, Celtic Knotwork: Mathematical Art, Mathematical Intelligencer, **15-1** (1993), 36-47.

[5] R. G. Scharein, Interactive Topological Drawing, Ph,D. thesis, The University of British Columbia, (1998), 58-82

有向絡み目の dual graph diagram

新井克典 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

dual graph diagram は, D. Needell 氏と S. Nelson 氏によって導入された有向絡み目の表示方法である. しかし, 与えられた dual graph diagram が有向絡み目図式を表さない場合がある. 本講演では連結な dual graph diagram が, 有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与える.

1　双対グラフとチェッカーボードグラフ

1.1　双対グラフ

本稿では, グラフは常に有限で多重辺やループを許すものとする.

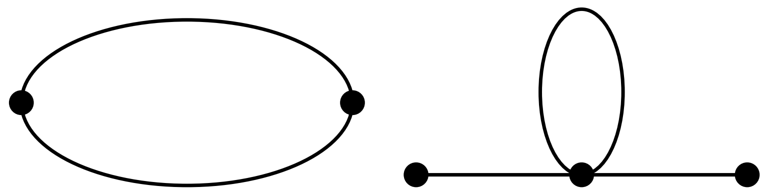


図 1: 多重辺 (左) とループ (右)

球面 S^2 に埋め込まれたグラフを単に S^2 **上のグラフ**と呼ぶ. 球面 S^2 上のグラフ G を単に S^2 の部分集合とみたとき, $|G|$ で表す.

S^2 上のグラフ G_1, G_2 は, 向きを保つ自己同相写像 $h : S^2 \to S^2$ で $h(|G_1|) = |G_2|$ かつ $h|_{|G_1|} : |G_1| \to |G_2|$ がグラフの同型を誘導するようなものが存在するとき同値であるといい, $G_1 = G_2$ とかく.

S^2 上のグラフ G の**領域**とは, $S^2 - |G|$ の連結成分をいう. G の領域全体の集合を $\mathrm{Region}(G)$ と表す.

定義 1.1.1 S^2 上のグラフ G の**双対グラフ** G^d とは, 次の方法で構成される S^2 上のグラフである:

1. G の各領域から 1 点を取り, G^d の頂点とする.
2. G の任意の辺 e に対して, e の両側にある G の領域に対応する G^d の頂点を e の端点以外と横断的に 1 点で交わるように結ぶ曲線を G^d の辺とする.

* e-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

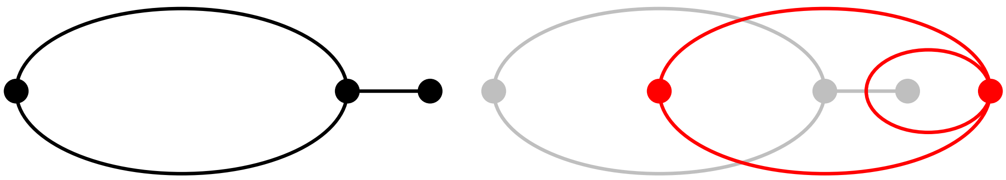
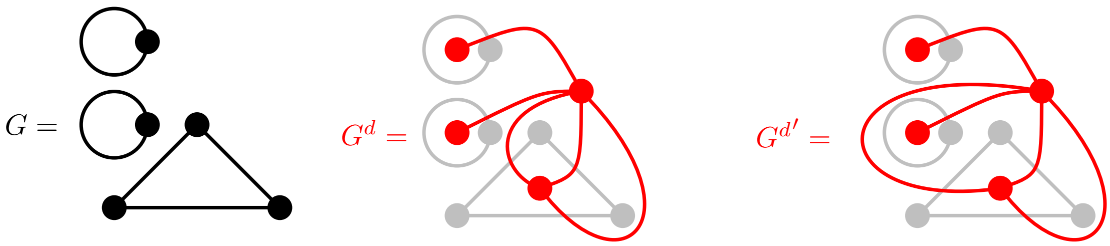


図 2: S^2 上のグラフ G (左) と G の双対グラフ G^d (右)

<u>**注意 1.1.2**</u> 双対グラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では G^d と $G^{d'}$ はどちらも G の双対グラフであるが, 同値ではない.



1.2　チェッカーボードグラフ

絡み目図式から交差の情報を除いたものを **link universe** と呼ぶことにする.

U を S^2 上の link universe とする. $S^2 - U$ の連結成分を U の**領域**と呼び, Region(U) を U の領域全体の集合とする.

<u>**定義 1.2.1**</u> S^2 上の link universe U の**チェッカーボード彩色**とは, 写像 c : Region(U) $\to$ $\{\text{black, white}\}$ で, 隣接領域を異なる色で塗るものである.

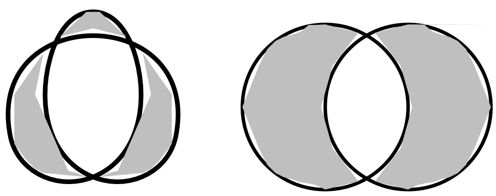


図 3: trefoil universe のチェッカーボード彩色 (左) と Hopf link universe のチェッカーボード彩色 (右)

S^2 上の任意の link universe はチェッカーボード彩色可能である.

<u>**定義 1.2.2**</u> $(U,\ c)$ をチェッカーボード彩色された S^2 上の link universe とする.

G_b (resp. G_w) が $(U,\ c)$ の**チェッカーボードグラフ**であるとは, G_b (resp. G_w) が次の方法により構成される S^2 上のグラフであることをいう:

1. 各黒色 (resp. 白色) 領域から 1 点をとり, G_b (resp. G_w) の頂点とする.
2. U の各交差において, 向かい合う黒色 (resp. 白色) 領域を結び, G_b (resp. G_w) の辺とする.

本稿では, $\{G_b,\ G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアと呼ぶことにする.

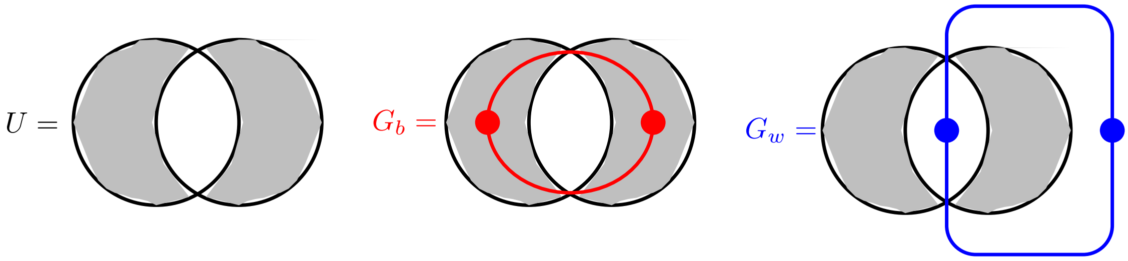
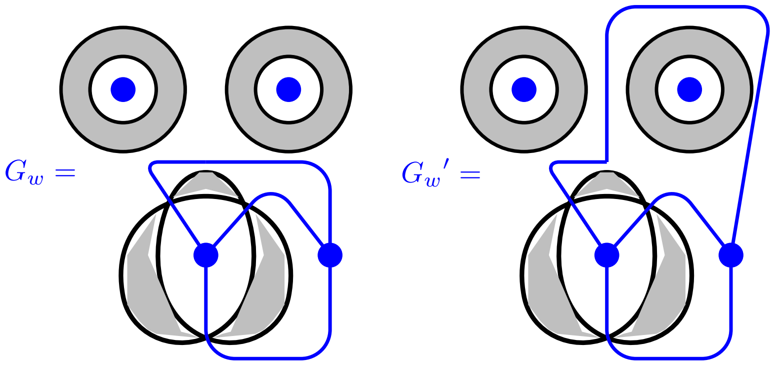


図 4: Hopf link universe のチェッカーボードグラフ

注意 1.2.3 一般にチェッカーボードグラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では, 白色領域に対応するチェッカーボードグラフ G_w と ${G_w}'$ は同値ではない.



一般に G_b と G_w は互いに双対なグラフではない. チェッカーボードグラフが互いに双対なグラフになる十分条件として次が成り立つ.

命題 1.2.4 $(U,\ c)$ をチェッカーボード彩色された link universe とし, $\{G_b,\ G_w\}$ をそのチェッカーボードグラフペアとする. このとき, U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

この命題は既に知られている事実かもしれないが, これに関する文献が見つからなかった. 命題 1.2.5 と命題 1.2.7 も同様である.

次に S^2 上のグラフ G とその双対グラフ G^d の組 $\left\{G,\ G^d\right\}$ がある link universe のチェッカーボードグラフペアになるための十分条件を述べる. まずそのために必要な準備を行う.

G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. G の辺は G^d のただ 1 つの辺と 1 点で交わる. この点を**辺交差**と呼ぶことにする.

$G \cup G^d$ から得られるグラフとは, $G \cup G^d$ の辺交差も頂点とする S^2 上のグラフをいう.

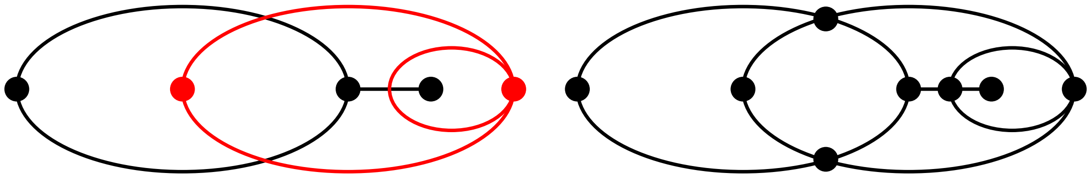


図 5: $G \cup G^d$ (左) と $G \cup G^d$ から得られるグラフ (右)

$G \cup G^d$ の領域を $G \cup G^d$ から得られるグラフの領域として定める.

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域とは, 領域の周りに 4 つの辺があるような領域のことをいう. $G \cup G^d$ の 4 辺形領域は次の場合に限られる:

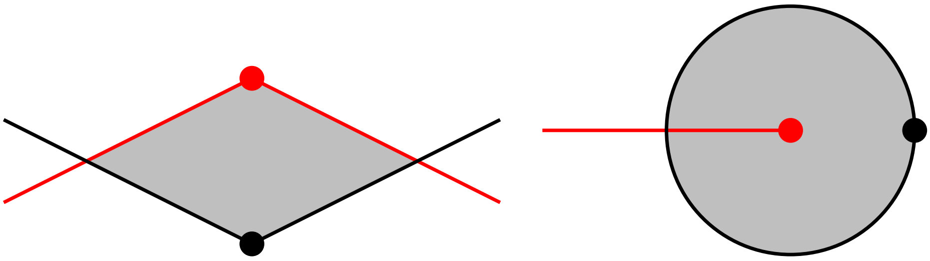


図 6: $G \cup G^d$ の 4 辺形領域

命題 1.2.5 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結で孤立頂点を持たないならば $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域である.

証明の概略 G, $G \cup G^d$ から得られるグラフ $\widetilde{G}$ についてのオイラー公式と $\widetilde{G}$ の定め方から $2\,|E(G)| - \left|\mathrm{Region}(\widetilde{G})\right| = 0$ が成り立つ.

$G \cup G^d$ の各領域は一般に $4n$ 辺形となる. $G \cup G^d$ の $4n$ 辺形の個数を R_n とおき, $N \in \mathbb{N}$ を $R_N \neq 0$, $k > N$ ならば $R_k = 0$ を満たす正整数とする. このとき, $|E(G)| = \frac{1}{2}\Sigma_{n=1}^{N} nR_n$, $\left|\mathrm{Region}(\widetilde{G})\right| = \Sigma_{n=1}^{N} R_n$ が成り立つ. よって, $\Sigma_{n=1}^{N}(n-1)R_n = 0$ となる. この式から, $N = 1$ でなければならない. 従って $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域である. □

注意 1.2.6 命題 1.2.5 は逆も成り立つ. すなわち, S^2 上のグラフ G とその双対グラフ G^d に対して, $G \cup G^d$ の各領域が 4 辺形領域ならば G は連結で孤立頂点を持たない.

命題 1.2.7 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結で孤立頂点を持たないならばある link universe U がただ 1 つ存在して, $\left\{G,\ G^d\right\}$ は U のチェッカーボードグラフペアになる.

2 Dual graph diagram

2.1 Dual graph diagram

定義 2.1.1 (Needell-Nelson [1]). D を S^2 上の有向絡み目図式, $\{G_b,\ G_w\}$ を D のチェッカーボードグラフペア, そして $\mathcal{O}(E(G_b)), \mathcal{O}(E(G_w))$ を G_b, G_w の辺の向きの集合とする. $(G_b \cup G_w,\ f)$ が D の **dual graph diagram** であるとは, G_b と G_w の和 $G_b \cup G_w$ と次を満たす写像 $f: E(G_b) \cup E(G_w) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G_b)) \cup \mathcal{O}(E(G_w))$ の組をいう:
f は D の各交差において

を満たす. すなわち, D の正の交差に対しては平滑化したときにその交差の近傍で連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に, 上方弧を左手に見ながら進みその交差を通ると上方弧が右手に見えるような向きを与える. また平滑化したときにその交差の近傍で非連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に $+$ の符号を与える.

D の負の交差に対しては平滑化したときにその交差の近傍で連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に, 上方弧を右手に見ながら進みその交差を通ると上方弧が左手に見えるような向きを与える. また平滑化したときにその交差の近傍で非連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に $-$ の符号を与える.

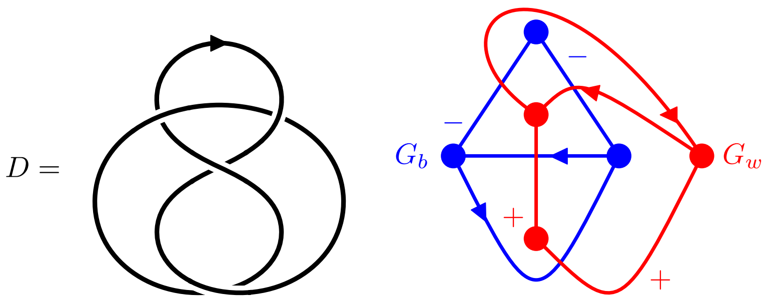


図 7: 八の字結び目の図式 D の dual graph diagram $(G_b \cup G_w,\ f)$

注意 2.1.2 有向絡み目図式の dual graph diagram は, 有向絡み目図式のみからは定まらない. 実際, チェッカーボードグラフが一意的に定まらないような有向絡み目図式からは, 複数通りの dual graph diagram を考えることができる.

2.2 (一般化された) connected dual graph diagram

<u>**定義 2.2.1**</u> G を S^2 上の連結かつ孤立頂点を持たないグラフとし, G^d をその双対グラフとする. $\left(G \cup G^d,\ f\right)$ が (**一般化された**) **connected dual graph diagram** であるとは, G と G^d の和 $G \cup G^d$ と次を満たす写像 $f : E(G) \cup E(G^d) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G)) \cup \mathcal{O}(E(G^d))$ の組をいう:

$$e \in E(G),\ e' \in E(G^d),\ e \cap e' \neq \varnothing \Rightarrow (f(e),\ f(e')) \in \{\pm\} \times \mathcal{O}(E(G^d)) \cup \mathcal{O}(E(G)) \times \{\pm\}$$

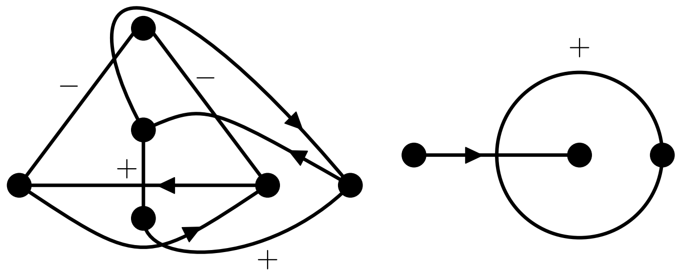
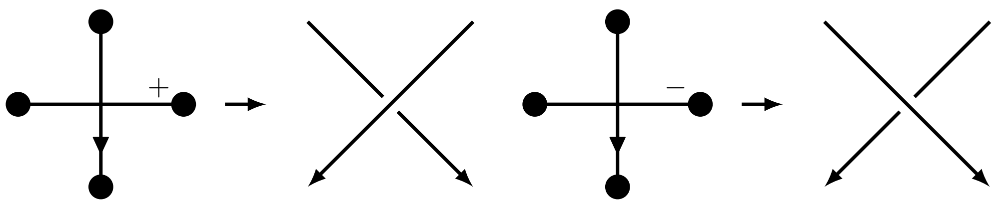


図 8: (一般化された) connected dual graph diagram の例

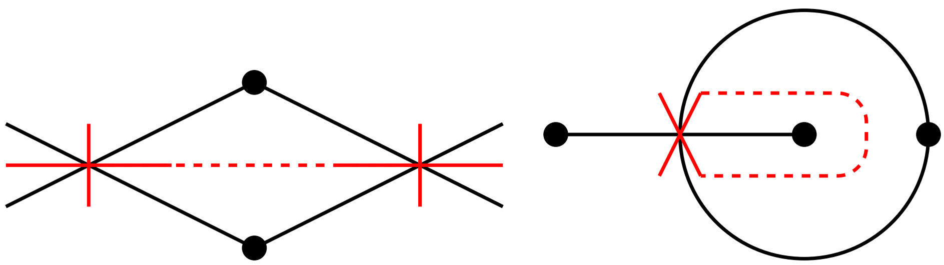
(一般化された) connected dual graph diagram から **node 付き有向絡み目図式**を対応させる方法を述べる. 但し, node 付き有向絡み目図式とは次の 2 価頂点を許した有向絡み目図式をいう:

<u>**命題 2.2.2 (cf. Needell-Nelson [1]).**</u> (一般化された) connected dual graph diagram $\left(G \cup G^d,\ f\right)$ は次の方法により, node 付き有向絡み目図式を表す.

(Step1) $\left(G \cup G^d,\ f\right)$ の各辺交差ごとに, 局所的に交差を対応させる.



(Step2) 各領域内にある交差の端点を結ぶ.



G が連結かつ孤立頂点を持たないことから, 命題 1.2.5 より $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域となる. よって Step2 が実行できる. [1] ではこのような G の仮定が与えられておらず, 4 辺形領域になるケースとして考察されている.

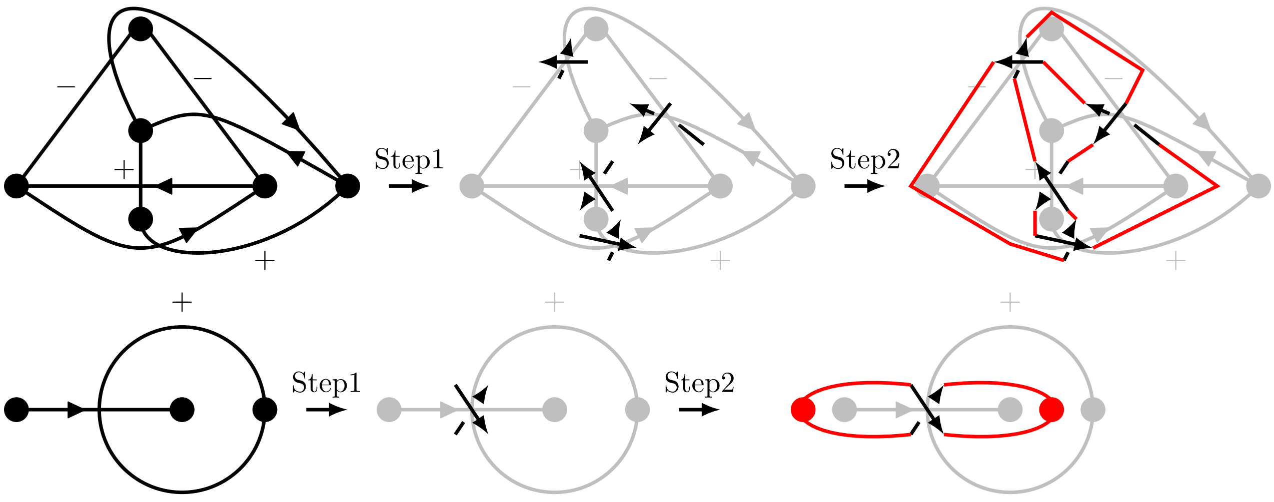


図 9: 命題 2.2.2 の例

3 主結果

3.1 主結果

定理 3.1.1 (一般化された) connected dual graph diagram $(G \cup G^d,\ f)$ が命題 2.2.2 の対応で有向絡み目図式を表すための必要十分条件は, 各 4 辺形領域において, 境界に現れる G の頂点と G^d の頂点の入次数の和がそれらの出次数の和に等しくなることである.

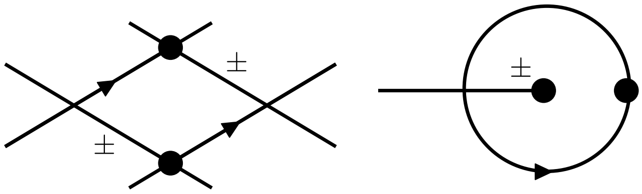


図 10: G の頂点と G^d の頂点の入次数の和とそれらの出次数の和が等しくなる例

定理 3.1.1 から次の結果が得られる.

定理 3.1.2 次の 2 つの集合 $A,\ B$ は命題 2.2.2 の対応から定まる写像 $\varphi : A \to B$ によって 1 対 1 に対応する.

A 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram 全体の集合

B 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式全体の集合

3.2 定理 3.1.2 の証明の概略

補題 3.2.1 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram $(G \cup G^d,\ f)$ が表す有向絡み目図式 D はただ 1 つ存在する. また D は連結で交差を 1 つ以上持つ.

証明の概略 命題 1.2.7 より, D はただ 1 つ存在することが言える.
また, $|E(G)| \geq 1$ から $c(D) \geq 1$ が成り立つ.
D が連結でないと仮定して矛盾を導く. D は連結でないのである単純閉曲線 c が存在して分離される. 命題 1.2.7 から D のチェッカーボードグラフペアは $\left\{G,\ G^d\right\}$ であるので G の連結性からある $u,\ v \in V(G)$ が存在して $\{u,\ v\} \in E(G)$ が c と交わる. チェッカーボードグラフが c と交わっているので, D も c と交わる. これは D が c で分離されることに矛盾する. 以上より D は連結である. □

補題 3.2.2 連結で交差を 1 つ以上持つ任意の有向絡み目図式 D に対し, 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram で D を表すものが存在する.

証明の概略 D の dual graph diagram を $(G_b \cup G_w,\ f)$ とおく.
$c(D) \geq 1$ から $|E(G_b)| \geq 1$ かつ $|E(G_w)| \geq 1$ が成り立つ.
また, 命題 1.2.4 から G_b と G_w は互いに双対なグラフである. 双対グラフは常に連結なので $(G_b \cup G_w,\ f)$ は定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram である. 命題 2.2.2 の対応により, $(G_b \cup G_w,\ f)$ は D を表す. □

定理 **3.1.2** の証明 補題 3.2.1 より, 写像 $\varphi : A \to B$ が定まり単射である. また, 補題 3.2.2 から全射性も成り立つ.
よって $\varphi : A \to B$ は全単射なので集合 $A,\ B$ は 1 対 1 に対応する.

□

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を与えて下さった世話人である谷山公規先生, 安原晃先生, 村尾智先生, 丹下稜斗先生, 木村直記先生にお礼申し上げます. また講演後に質問, 助言してくださった先生方にもお礼申し上げます.

参考文献

[1] D. Needell, S. Nelson, *Biquasiles and dual graph diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1750048.

完全グラフの book presentation の分類

炭本 貴裕 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

book presentation とはグラフの $\mathbb{R}^3$ への特殊な埋め込みのことである. 6 頂点完全グラフの book presentation は $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合うものを同値として D. Rowland によって分類されている. 私は, 頂点数が 7 および 8 の完全グラフの book presentation で sheet の数が最小のものを, $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合うものを同値とみなして分類した.

1 準備

いくつかの用語と記号の準備をしておく. まず, グラフと言えば抽象的な有限グラフのこととし, 向きは考えない. 特に n 個の頂点からなるグラフで, 任意の異なる 2 頂点がちょうど 1 本の辺で結ばれているものを n 頂点**完全グラフ**と言い, K_n と表す. また, $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの部分空間が $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合う時, 2 つの部分空間は**同型**であると言うことにする.

2 Book presentation

定義 2.1 $\mathbb{R}^3$ において, L を直線, $S_1, \ldots, S_n$ を L を境界に持つ n 個の互いに異なる半平面とし, $B_n = L \cup \bigcup S_i$ とおく. この時, グラフ G の B_n への埋め込みの像で次の 2 つの条件を満たすものを G の n-**book presentation** と言う.

条件 1. G の全ての頂点は L に埋め込まれている.
条件 2. G の各辺はただ 1 つの S_i に proper に埋め込まれている.

ここで L を **binder**, 各 S_i を **sheet**, B_n を n-**book** と呼ぶ.

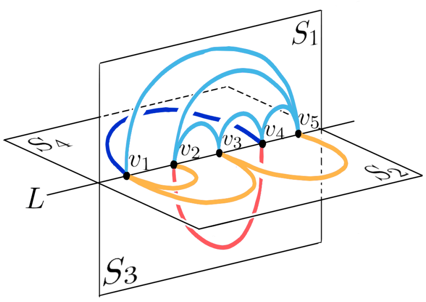


図 1 K_5 の 4-book presentation

* e-mail:u153413e@ecs.osaka-u.ac.jp

book presentation の図式を導入する. 境界 $\mathcal{B}$ を共有し内部では交わりを持たない位相的な円盤たち $\mathcal{S}_1$, $\ldots$, $\mathcal{S}_n$ からなる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $\mathcal{D}_n$ とし, G の n-book presentation を $\widetilde{G}$ とする. $\mathbb{R}^3$ の全同位により, 頂点が $\mathcal{B}$ 上にあり, 各辺がある $\mathcal{S}_i$ の弦になるように $\widetilde{G}$ を $\mathcal{D}_n$ 内に変形できる. この時, $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ と $\mathcal{B}$ はそれぞれ n-book の sheet と binder とみなせる. このように変形した $\widetilde{G}$ を平面に射影し, $\mathcal{B}$ が円 C に, 各辺が C の弦になるようにし, 辺の交差は横断的な 2 重点のみになるようにする. 更に辺の交差に適切に上下の情報を加えたものを, $\widetilde{G}$ の **circular diagram** と言う. また circular diagram を sheet ごとに分離して, “上方に” あるものから順に左から並べた図式も使う.

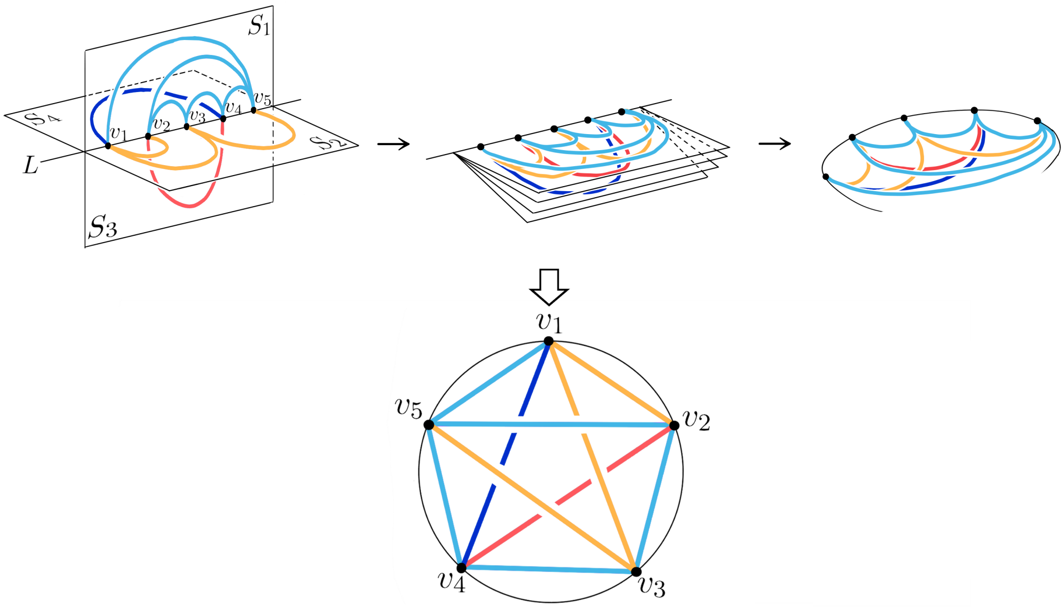


図 2　図 1 の book presentation の circular diagram への変形

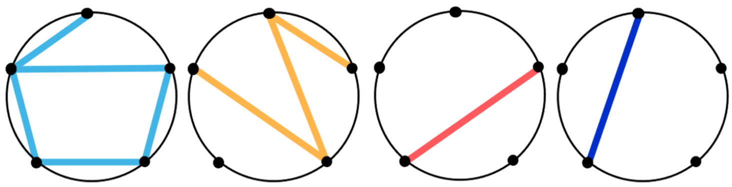


図 3　circular diagram を sheet ごとに分離して順に並べた図式

以下 circular diagram において, 頂点を時計回りに v_1, v_2, $\ldots$ とし, sheet を上方から順に S_1, S_2, $\ldots$ とする. また辺 e の端点が円周上で m 頂点分離れている時, e は m-**edge** であると言う.

定理 2.2 ([1]) 次の circular diagram の 6 つの変形は K_n の book presentation の同型を保つ. 但し頂点, sheet のラベルとは, それぞれ頂点 v_i, sheet S_j の添え字の部分 i, j のことである.

変形 1. 全ての頂点のラベルを mod n で等しく増やす.
変形 2. sheet の枚数を s とする. この時全ての sheet のラベルを mod s で等しく増やす.

変形 3. S_i, S_j を隣り合う sheet とする. S_i 内の辺 e が S_j 内の任意の辺と交差を持たない時, e を S_j に移す.

変形 4. 円周上で連続した 2 頂点 v_i, v_j について, v_i に接続する各辺が v_j に接続する任意の辺より上方にあるとする. この時 i, j 以外の各 k について 2 辺 v_iv_k, v_jv_k の位置を入れ替える.

変形 5. 辺を含まない sheet を追加又は削除する.

変形 6. sheet の枚数を s とする. この時各 sheet のラベルを i から $s-i+1$ に変える. 更に各頂点のラベルを j から $n-j+1$ に変える.

特に変形 6 は前半と後半で 1 回ずつ鏡像をとっている. 変形 6 の前半, 後半の操作をそれぞれ変形 6a, 6b とする. また 1-edge は他のどの辺とも交差を持たないため, 他の全ての辺を固定したまま変形 3 により任意の sheet に移動できる. 従って以下 1-edge は無視する.

グラフ G の **sheet-number** $S(G)$ を $S(G)$ =min$\{\, n \,|\, G$ の n-book presentation が存在する $\}$ と定める. この時 G の $S(G)$-book presentation を G の **minimal book presentation** と言う.

定理 2.3 ([3, 4]) $n \geq 4$ の時, $S(K_n) = \begin{cases} n/2 & (n\text{: 偶数}), \\ (n+1)/2 & (n\text{: 奇数}). \end{cases}$

3 Canonical book presentation

性質がよく知られた K_n の minimal book presentation がある.

定義 3.1 ([6]) $n \geq 4$ の時, n の偶奇それぞれで下図のような形の K_n の minimal book presentation を K_n の **right canonical book presentation** と言う. 但し $*$ の部分にはどのように辺が含まれていても良いとし, 空と書いた部分には辺が含まれていないとする.

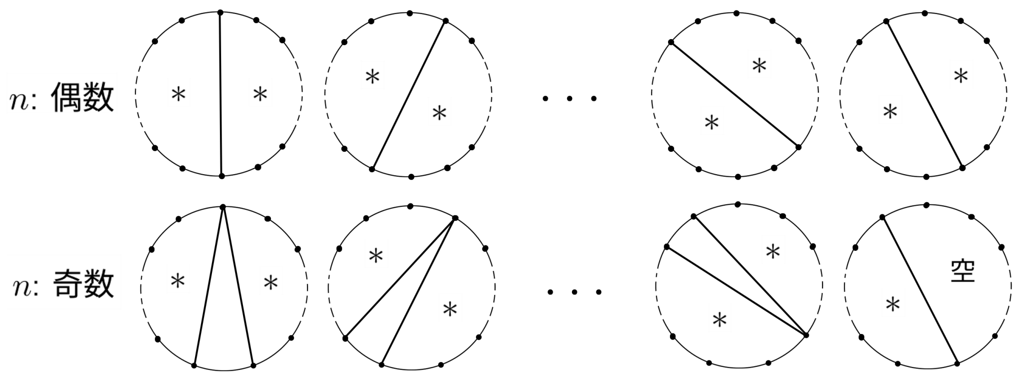


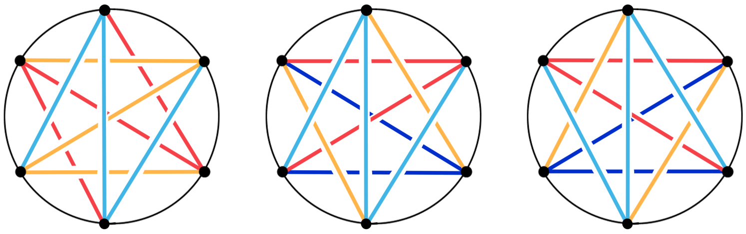
図 4 K_n の right canonical book presentation

定理 3.2 ([6]) K_n の right canonical book presentation は同型の差を除いて一意的に定まる.

定理 3.3 ([6]) $n \geq 5$ の時, K_n の right canonical book presentation に含まれる K_{n-1} の book presentation は全て K_{n-1} の right canonical book presentation と同型である.

4　主結果

K_6 の全ての book presentation の同型類が D. Rowland により分類されている ([1]). その一部を下図に示し, それぞれ $(6,A)$, $(6,B)$, $(6,\overline{B})$ と名前を付けた. $(6,A)$ は K_6 の right canonical book presentation であり, 自身の鏡像と同型である. K_6 の minimal book presentation は $(6,A)$ しかない. また $(6,B)$ は K_6 の 4-book presentation で, 自身の鏡像 $(6,\overline{B})$ と非同型である.



$(6,A)$　　$(6,B)$　　$(6,\overline{B})$

図 5　K_6 の book presentation の同型類の一部

この結果を用いて次の結果を得た.

主結果 4.1 $n=7,8$ の時, K_n の minimal book presentation の同型類を分類した. またそれらに含まれる K_{n-1} の book presentation のリストを与えた.

主結果 4.1 の過程を述べる. 以下 book presentation と言えばその circular diagram を考えているとする.

まず K_7 の場合を考える. 定理 2.3 より $S(K_7)=4$ なので, K_7 の 4-book presentation を考えれば良い.

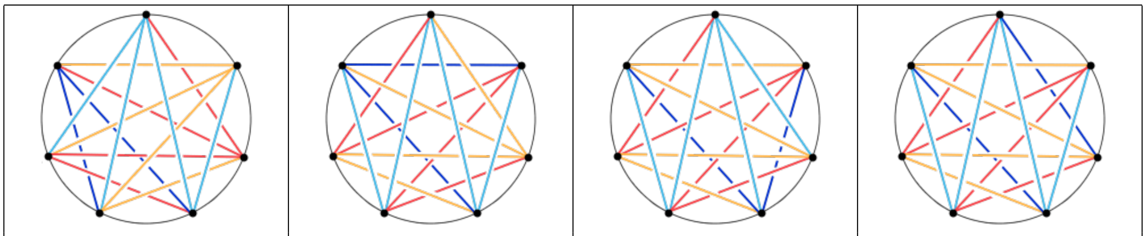
<u>*Step* 1.</u> 3-edge の埋め込み方を考える. K_7 の book presentation には 3-edge が 7 本ある. これらはどの 3 本を選んでも交差を持つので 1 枚の sheet に埋め込めるのは 2 本までである. 従って 3-edge の本数の分配は $(2,2,2,1)$ となる. 変形 1, 2 により, $v_1v_4, v_1v_5 \subset S_1$ かつ S_4 は 3-edge を 1 本しか含まないとして良い. また v_2v_5, v_3v_6, v_4v_7 はどの 2 辺も交差を持つので, S_2, S_3, S_4 に分けて埋め込む必要がある. $v_3v_6 \subset S_4$ とすると, $v_2v_5, v_2v_6 \subset S_2$, $v_3v_7, v_4v_7 \subset S_3$ 又は $v_3v_7, v_4v_7 \subset S_2$, $v_2v_5, v_2v_6 \subset S_3$ の 2 通りが考えられるが, 変形 1, 2, 6 によりそれぞれ $v_2v_5 \subset S_4$, $v_4v_7 \subset S_4$ とした場合に帰着できる. 従って $v_2v_5 \subset S_4$ 又は $v_4v_7 \subset S_4$ として良い. 更に変形 1, 6b により, 鏡像の差を除けば $v_4v_7 \subset S_4$ として良い. よって $E_1 = v_1v_4 \cup v_1v_5$, $E_2 = v_2v_5 \cup v_2v_6$, $E_3 = v_3v_6 \cup v_3v_7$, $E_4 = v_4v_7$ とおくと 3-edge の埋め込み方は, $E_1 \subset S_1$, $E_4 \subset S_4$ として, $E_2 \subset S_2$, $E_3 \subset S_3$ 又は $E_3 \subset S_2$, $E_2 \subset S_3$ の 2 通りのみを考えれば良い.

<u>*Step* 2.</u> 2-edge の埋め込み方を考える. 下表で $\times$ が付いている部分は, その列の 2-edge とその行の 3-edge たちが交差を持つ, 即ち同じ sheet には埋め込めないことを表している. また 2-edge 同士が交差を持つのは表で隣り合っている時のみである (v_1v_3 と v_2v_7 も隣り合っているとみなす). これらを踏まえれば, v_4v_6 が E_3 と同じ sheet に埋め込まれるとすると v_3v_5 が E_2 と同じ sheet に埋め込まれることが決まる. 更にこの時, v_2v_4 が E_1 又は E_4 と同じ sheet に埋め込まれることも分かる. このように表の順に 2-edge の埋め込み方を決めていき, 全ての場合を挙げる. v_4v_6 が E_4 と同じ sheet に埋め込まれるとした場合は 表を先の逆順に辿って全ての場合を挙げていく. すると全部で 33 通りの 2-edge の埋め込み方が得られる. Step1 で得た 2 通りの 3-edge の埋め込み方と合わせて, 全部で 66 通りの book presentation が得られる.

	v_1v_3	v_2v_4	v_3v_5	v_4v_6	v_5v_7	v_1v_6	v_2v_7
E_1			$\times$	$\times$			$\times$
E_2	$\times$			$\times$	$\times$		
E_3		$\times$			$\times$	$\times$	
E_4			$\times$			$\times$	

Step 3. Step2 で得た 66 通りの book presentation は, 変形 1, ..., 6, 6a, 6b で移り合うものを除けば 4 通りになる.

Step 4. Step3 で得た 4 通りの book presentation を下表に図示し, それぞれ $(7, A)$, ..., $(7, D)$ とした. またそれぞれに含まれる K_6 の book presentation も調べ表の下段に記した. ここで $(7, A)$ は K_7 の right canonical book presentation であるから, 定理 3.3 より $(6, A)$ を 7 個含むことが直ちに分かることに注意する. これら 4 個の book presentation およびその鏡像たちが互いに同型かどうかを見ていく. まず, 含まれる K_6 の book presentation の集合は同型に関する不変量であるから, $(7, A)$, ..., $(7, D)$ は鏡像の差も込めて全て互いに非同型であることが分かる. 後はそれぞれが自身の鏡像と同型かどうか分かれば良いが, K_7 の任意の空間埋め込みは自身の鏡像と非同型であることが知られている ([2]). 従って $(7, A)$, ..., $(7, D)$ はそれぞれ自身の鏡像と非同型である. よって K_7 の 4-book presentation の同型類は, $(7, A)$, ..., $(7, D)$ およびそれぞれの鏡像 $(7, \overline{A})$, ..., $(7, \overline{D})$ の 8 個である.



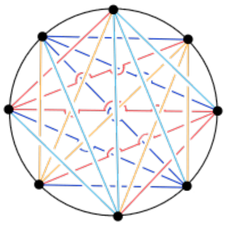
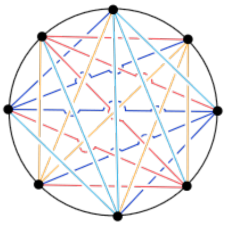
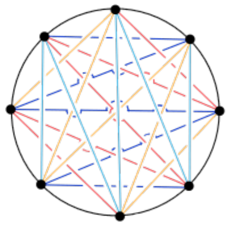
$(7, A)$	$(7, B)$	$(7, C)$	$(7, D)$
$(6, A) \times 7$	$(6, A) \times 6$ $(6, B) \times 1$	$(6, A) \times 5$ $(6, B) \times 2$	$(6, A) \times 4$ $(6, B) \times 2$ $(6, \overline{B}) \times 1$

次に K_8 の場合を考える. 定理 2.3 より $S(K_8) = 4$ なので, K_8 の 4-book presentation を考えれば良い.

Step 1. 4 本の 4-edge v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8 はどの 2 本も交差を持つので各 sheet に 1 本ずつ含まれる. 変形 2 により S_1 が v_1v_5 を含むとして良い. この時, 次の 4 通りの場合それぞれで, 同じ sheet に含まれる辺の組み合わせが一意的に決まり, またこの 4 通り以外の辺の組み合わせ方は存在しない; $v_1v_3, v_1v_4 \subset S_1$, $v_1v_4, v_2v_4 \subset S_1$, $v_2v_5, v_2v_4 \subset S_1$, $v_2v_5, v_3v_5 \subset S_1$([6]). よって, この 4 つのパターンから 1 つ決め更に v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8 の埋め込み先を決めれば K_8 の 4-book presentation が一意的に定まる. そしてそれらのみを考えれば十分である. このようにして得られる book presentation は 24 通りある.

Step 2. Step1 で得た 24 通りの book presentation は, 変形 1, 2, 6a, 6b により移り合うものを除けば 3 通りになる.

Step 3. Step2 で得た 3 通りの book presentation を下表に図示し, それぞれ $(8, A)$, $(8, B)$, $(8, C)$ とした. またそれぞれに含まれる K_7 の book presentation も調べ表の下段に記した. ここで $(8, A)$ は K_8 の right canonical book presentation であるから, 定理 3.3 より $(7,A)$ を 8 個含むことが直ちに分かることに注意する. これら 4 個の book presentation およびその鏡像たちが互いに同型かどうか見ていく. まず, 含まれる K_7 の book presentation の集合は同型に関する不変量であるから, $(8,A)$, $(8,B)$, $(8,C)$ は鏡像の差も込めて全て互いに非同型であり, $(8,A)$ は自身の鏡像と非同型であることが分かる. 後は $(8,B)$, $(8,C)$ が自身の鏡像と同型かどうか分かれば良いが, これらは変形 1, 6a により自身の鏡像と移り合う, 即ち自身の鏡像と同型である. よって K_8 の 4-book presentation の同型類は, $(8,A)$, $(8,B)$, $(8,C)$ および $(8,A)$ の鏡像 $(8,\overline{A})$ の 4 個である.

 $(8,A)$	 $(8,B)$	 $(8,C)$
$(7,A)\times 8$	$(7,A)\times 4$ $(7,\overline{A})\times 4$	$(7,C)\times 2$ $(7,\overline{C})\times 2$ $(7,D)\times 2$ $(7,\overline{D})\times 2$

補足として, [5] では FIGURE 1 として K_8 の比較的単純な空間埋め込みの例が与えられている. この空間埋め込みを $\widetilde{K_8}$ とすると, $\widetilde{K_8}$ は実際 K_8 のある book presentation と同型であるが, それは 4-book presentation ではない, 即ち $(8,A)$, $(8,B)$, $(8,C)$ のいずれとも非同型である. このことは次のようにして確かめられる. まず, $\widetilde{K_8}$ に含まれる絡み目 $[147]\cup[25863]$ は $(2,4)$ トーラス絡み目であるが, $(8,A)$, $(8,B)$ には長さが 3 と 5 のサイクルで実現される $(2,4)$ トーラス絡み目は含まれない. よって $\widetilde{K_8}$ は $(8,A)$, $(8,B)$ と非同型である. また, $\widetilde{K_8}$ からラベル 8 の頂点を取り除いて得られる K_7 の空間埋め込みは $(7,A)$ と同型であるが, $(8,C)$ には $(7,A)$ と同型な K_7 の空間埋め込みは含まれない. よって $\widetilde{K_8}$ は $(8,C)$ と非同型である.

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心よりお礼申し上げます. また, 講演後に質問および助言をくださった先生方にも深く感謝申し上げます. 研究の励みになりました. 本当にありがとうございました.

参考文献

[1] D. Rowland, *Classification of Book Representations of K_6*, J. Knot Theory Ramifications, **26**(**12**) (2017), 1–26.

[2] E. Flapan and N. Weaver, *Intrinsic chirality of complete graphs*, Proc. Am. Math. Soc, **115** (1992), 233–236.

[3] F. Bernhart and P. C. Kainen, *The book thickness of a graph*, J. Combin. Theory Ser, **B27** (1979), 320−331.

[4] K. Kobayashi, *Standard spatial graph*, Hokkaido Math, **J.21** (1992), 117−140.

[5] P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, *Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs*, New York J. Math, **13** (2007), 11−16.

[6] T. Otsuki, *Knots and links in certain spatial complete graphs*, J. Combin. Theory Ser, **B68** (1996), 23−35.

THE ONE-ROW COLORED $\mathfrak{sl}_3$ JONES POLYNOMIAL FOR PRETZEL LINKS

川添　浩太郎（明治大学大学院先端数理科学研究科）*

概 要

色付き Jones 多項式とは, 向き付きの絡み目の不変量である. 一般に $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式を計算することは難しく, 具体的な絡み目に対しては, 一部のトーラス絡み目と二橋絡み目のみ知られている. 本講演では $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式に制限を加えることにより Kuperberg によって導入された A_2 ブラケットを用いて得られてたプレッツェル絡み目に対する結果を紹介する.

1　背景

結び目, 絡み目に対して, 量子不変量は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその既約表現 V の組み合わせの数だけ存在する. 特に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ で $V = \mathbb{C}^2$ である量子不変量は, Jones 多項式 [Jon85] と呼ばれている. 1987 年に Kauffman[Kau87] は, この Jones 多項式を Kauffman ブラケットと絡み目の図式を用いて図形的に計算できる形で再定義した. 更に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ でその $(N+1)$-次元既約表現に対応する量子不変量を色付き Jones 多項式という. 色付き Jones 多項式に関しても, Kauffman ブラケットと Jones-Wenzel 冪等元 [Wen87] を用いることで図形的手法で計算する事ができると知られている. この図形的手法で計算された色付き Jones 多項式の計算結果は多く存在しており, それらの結果は, 体積予想, Jones スロープ予想等を考える時に役に立つ. 一方で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ でその (n_1, n_2)-既約表現についても色付き Jones 多項式を考えることができる. $\mathfrak{sl}_2$ の時と同様に, Jones-Wenzel 冪等元に相当する A_2 クラスプと Kauffman ブラケットに相当する Kuperberg によって導入された A_2 ブラケット [Kup96] を用いる事で絡み目の図式を変形して計算することができる. しかし, その計算は $\mathfrak{sl}_2$ の場合と比べて複雑であり, 自明でない結び目, 絡み目に対して計算された例は少ない. まず, Lawrence によって三葉結び目に対して $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式が与えられた. その後に, Garaoufalidis, Morton, Voung らによって表現論の手法を用いて $(2, 2m+1)$ 型トーラス結び目 [Law03][GMV13][GV17] に対して一般の $\mathfrak{sl}_3$Jones が求められいる. また, 湯浅氏によって $\mathfrak{sl}_3$ の既約表現を $(n, 0)$-既約表現と制限して図形的手法を用いて one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式として, 二橋結び目 [Yua17], $(2, 2m)$ 型トーラス絡み目 [Yua17][Yua18a][Yua21a] に対して結果が与えらている. 本研究において, 湯浅氏と同様に図形的手法を用いて one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式として計算を行っている.

本研究では, A_2 ブラケットに関する既存と計算公式と 2 つの新しい計算公式を導入することで得られたプレッツェル絡み目 $P(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma)$ に対する one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式に関する結果

*〒 164-8525 東京都中野区中野４丁目２１－１ 明治大学大学院先端数理科学研究科先端メディアサイエンス専攻
E-mail adress:k_kotaro@meiji.ac.jp

を得られた. また, 4, 5-パラメータのプレッツェル絡み目である $8_{10}, 8_{15}, 8_{20}, 8_{21}$ に関しても one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式も得ることができた.

2 準備

まず, Kupreberg[Kup96] によって導入された A_2 ブラケットと A_2 クラスプを紹介する. 今回, 量子整数の記号として次を用いる.

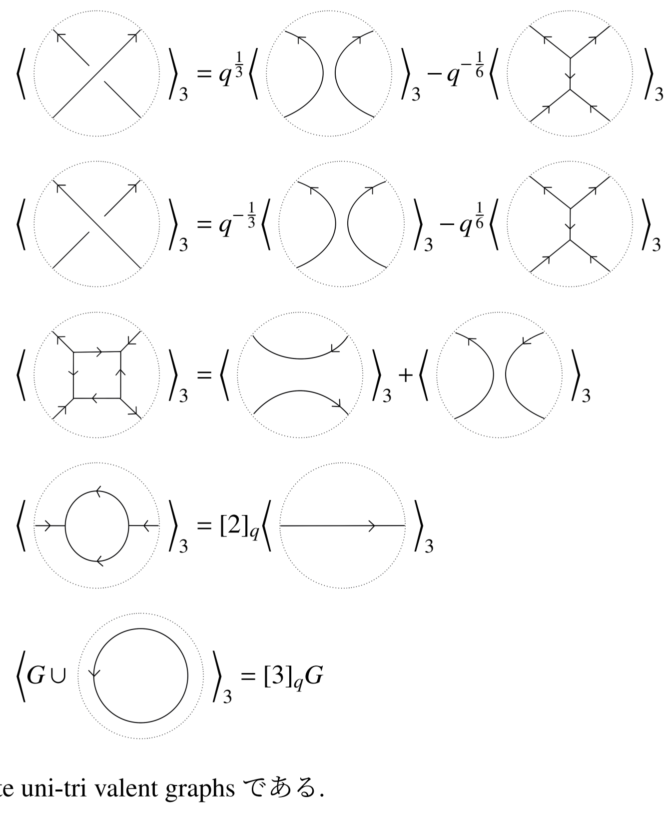
$$\{n\}_q = \{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}\}_q, \quad \{n\}_q! = \{n\}_q\{n-1\}_q \cdots \{1\}_q, \quad [n]_q = \frac{\{n\}}{\{1\}}, \quad [n]_q! = [n]_q[n]_q \cdots [1]_q$$

ここで, n は非負整数である. また, q-Pochhammer symbol を次で定義する.

$$(q)_k = \prod_{i=1}^{k}(1-q^i).$$

向付きの絡み目の図式に対して, A_2 ブラケットは次のように定められている.

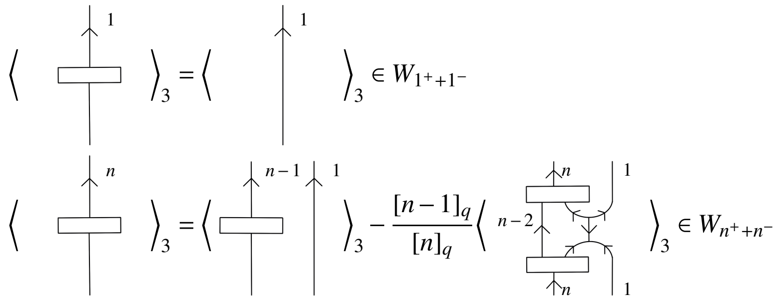
Definition 2.1 (A_2 ブラケット [Kup96])**.**



ここで G は bipartite uni-tri valent graphs である.

次の $(n,0)$ 型の A_2 クラスプは, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式において色付き $\mathfrak{sl}_2$Jones 多項式を図形的に求める際に使う Jones-Wenzel 冪等元と同様の役割を果たすものである.

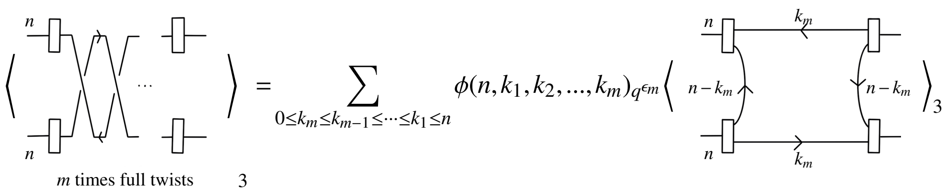
Definition 2.2 (($n,0$) 型の A_2 クラスプ [Kup96])**.** n を自然数とする.



3 A_2 ブラケットに関する公式

本節では, プレッツェル絡み目の one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式を求める際に主に必要となる 4 つの計算公式について紹介する. このうち向きが同調していない m 回のフルツイスト, A_2 バブルスケインの公式に関しては [Yua17] において与えられたものである.

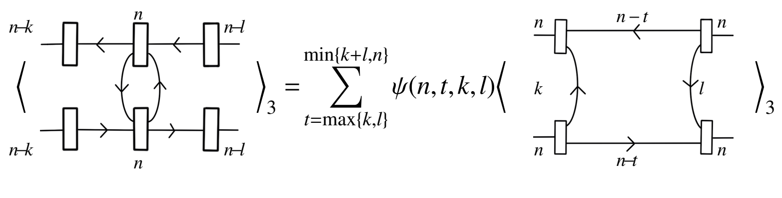
Theorem 3.1 ([Yua17])**.**



ここで

$$\phi(n,k_1,k_2,\dots,k_m)_{q^{\epsilon m}} = \frac{(q^{\epsilon m})^{-\frac{2m}{3}(n^2+3n)}(q^{\epsilon m})^{n-k_m}(q^{\epsilon m})^{\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+2k_i)}(q^{\epsilon m})_n^2}{(q^{\epsilon m})_{n-k_1}(q^{\epsilon m})_{k_1-k_2}\cdots(q^{\epsilon m})_{k_{m-1}-k_m}(q^{\epsilon m})_{k_m}^2}$$

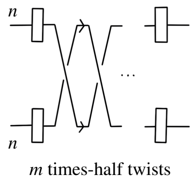
Theorem 3.2 ([Yua17])**.**

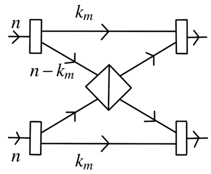


ここで

$$\psi(n,t,k,l) = \frac{q^{(t+1)(t-k-l)+kl}(q)_k(q)_l(q)_{n-k}^2(q)_{n-l}^2(q)_{2n-t+2}}{(q)_n^2(q)_{n-t}^2(q)_{t-k}(q)_{t-l}(q)_{2n-k-l+2}(q)_{-t+k+l}}$$

Proposition 3.3 (Kawasoe)**.**

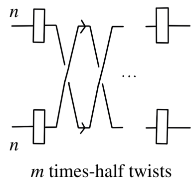
$\Bigg\langle$ 

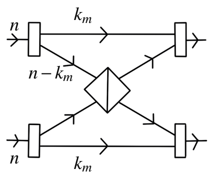
$\Bigg\rangle_3 = \displaystyle\sum_{0\le k_m \le k_{m-1}\le \cdots \le k_1 \le n} \chi_+(n,k_1,k_2,\ldots,k_m)\Bigg\langle$ 

$\Bigg\rangle_3$ (3.1)

ここで

$$\chi_+(n,k_1,k_2,\ldots,k_m) = (-1)^{nm}\frac{q^{-\frac{1}{6}(n^2+3n)m}q^{\frac{1}{2}(n-k_m)}(-1)^{\sum_{i=1}^m k_i}q^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(k_i^2+k_i)}(q)_n}{\prod_{i=1}^m (q)_{k_{i-1}-k_i}(q)_{k_m}}$$

$\Bigg\langle$ 

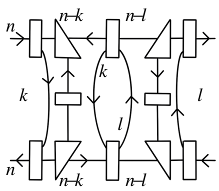
$\Bigg\rangle_3 = \displaystyle\sum_{0\le k_m \le k_{m-1}\le \cdots \le k_1 \le n} \chi_-(n,k_1,k_2,\ldots,k_m)\Bigg\langle$ 

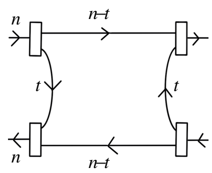
$\Bigg\rangle_3$ (3.2)

ここで

$$\chi_-(n,k_1,k_2,\ldots,k_m) = (-1)^{nm}\frac{q^{\frac{1}{6}(n^2+3n)m}q^{-\frac{1}{2}(n-k_m)}(-1)^{\sum_{i=1}^m k_i}q^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(k_i^2-k_i)}q^{\sum_{i=1}^m k_{i-1}k_i}(q)_n}{\prod_{i=1}^m (q)_{k_{i-1}-k_i}(q)_{k_m}}$$

Proposition 3.4 (Kawasoe)**.**

$\Bigg\langle$ 

$\Bigg\rangle_3 = \displaystyle\sum_{t=\max\{k,l\}}^{\min\{k+l,n\}}\sum_{a=t}^{n}\Omega(n,t,k,l)\Bigg\langle$ 

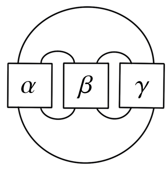
$\Bigg\rangle_3$

where

$$\Omega(n,k,l,t) = \frac{q^{-\frac{k+l}{2}+t}q^{(t+1)(t-k-l)+kl}(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+1-l})(q)_k(q)_l(q)_{n-k}^2(q)_{n-l}^2(q)_{2n-t+2}}{(1-q^{n+1-t})^2(q)_n^2(q)_{n-t}^2(q)_{t-k}(q)_{t-l}(q)_{2n-k-l+2}(q)_{-t+k+l}}$$

4 プレッツェル絡み目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式

主に 3-パラメータのプレッツェル絡み目を扱う.

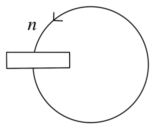
$P(\alpha,\beta,\gamma) =$ 

L を $(L_1, L_2, ..., L_r)$ の成分で構成される向き付き絡み目とする. この時, L に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式は次で定義される.

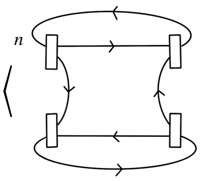
$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(L;q) = (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-w(L)}\langle L(n,0)\rangle_3/\Delta(n,0)$$

ここで $w(L)$ は L のねじれ数である. また,

$$\Delta(n,0) = \left\langle \quad \right\rangle_3$$



Lemma 4.1 ([Yua17])**.**



$$\left\langle \quad \right\rangle_3 = q^{-(n-k)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})}\Delta(n,0)$$

Theorem 4.2 (Kawasoe)**.** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ とする. プレッツェル絡み目 $P(\alpha,\beta,\gamma)$ に対して, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式は次で与えられる.

(1) プレッツェル絡み目 $P(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ は自明な結び目を成分として持つ 3 成分の絡み目である. また, プレッツェル絡み目のパラメータは巡回的に入れ替えるが可能である. そのうえで, 向きの付け方を考えると $P(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ について, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式を次の二つの式で全て与える事が出来ている.

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha \uparrow, \downarrow 2\beta \uparrow, \downarrow 2\gamma \uparrow); q)$$
$$= \sum_{0\le k_{|\alpha|}\le k_{|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{|\beta|}\le l_{|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{|\alpha|}, l_{|\beta|}\}}^{\min\{k_{|\alpha|}+l_{|\beta|}, n\}}\ \sum_{t=\max\{s, m_{|\gamma|}\}}^{\min\{s+m_{|\gamma|}, n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta+2\gamma)}$$
$$\phi(n, k_1, k_2, ..., k_{|\alpha|})_{q^{\epsilon_\alpha}}\phi(n, l_1, l_2, ..., l_{|\beta|})_{q^{\epsilon_\beta}}\phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\psi(n, s, k_{|\alpha|}, l_{|\beta|})\psi(n, t, s, m_{|\gamma|})q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})} \tag{4.1}$$

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha \downarrow, \uparrow 2\beta \uparrow, \downarrow 2\gamma \uparrow); q)$$
$$= \sum_{0\le k_{2|\alpha|}\le k_{2|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|}, l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{2|\beta|}, n\}}\ \sum_{a=0}^{n-s}\ \sum_{t=\max\{a, m_{|\gamma|}\}}^{\min\{a+t+m_{|\gamma|}, n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{2\alpha+2\beta-2\gamma}$$
$$\chi_{sign(2\alpha)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|\alpha|})\chi_{sign(2\beta)}(n, l_1, l_2, ..., l_{2|\beta|})\phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\Omega(n, s, k_{2|\alpha|}, l_{2|\beta|})\psi(n, t, a, m_{|\gamma|})$$
$$q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})} \tag{4.2}$$

(2) $P(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma)$ の向きのつけ方は結び目なので一意である.

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta+1\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)$$

$$= \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|}, l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|}, n\}} \sum_{a=s}^{n} \sum_{t=\max\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}}$$

$$(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|}) \chi_{sing(2\beta+1)}(n, l_1, l_2, ..., l_{|2\beta+1|}) \phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}$$

$$\Omega(n, s, k_{|2\alpha+1|}, l_{|2\beta+1|}) \psi(n, a, m_{|\gamma|}, t) q^{-(n-t)} \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})} \tag{4.3}$$

(3) $P(2\alpha+1, 2\beta, 2\gamma)$ は 2 成分の絡み目であり, 向きのつけ方まで考えると 2 パターン考えればよい.

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)$$

$$= \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|}, l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{2|\beta|}\}} \sum_{a=0}^{n-s} \sum_{t=\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(-2\alpha-2\beta+2\gamma-1)}$$

$$\chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|}) \chi_{sign(2\beta)}(n, l_1, l_2, ..., l_{2|\beta|}) \phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_{|\gamma|}}} \Omega(n, k_{|2\alpha+1|}, l_{2|\beta|}, t)$$

$$\psi(n, t, a, m_{|\gamma|}) q^{-(n-t)} \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})} \tag{4.4}$$

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta\downarrow, \uparrow 2\gamma\uparrow); q)$$

$$= \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|\beta|}\le l_{|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|}, l_{|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{|\beta|}\}} \sum_{a=0}^{n-s} \sum_{t=\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(-2\alpha-2\beta+2\gamma-1)}$$

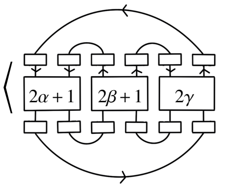
$$\chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|}) \phi(n, l_1, l_2, ..., l_{|\beta|})_{q^{\epsilon_\beta}} \chi_{sing(2\gamma)}(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_{|\gamma|}}} \Omega(n, k_{2|\alpha|}, l_{|\beta|}, t)$$

$$\psi(n, t, a, m_{|\gamma|}) q^{-(n-t)} \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})} \tag{4.5}$$

Proof. (4.2) について証明する.

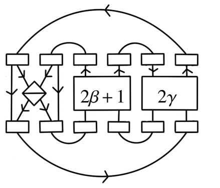
$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta+1\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)$$

$$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \Big\langle$$



$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

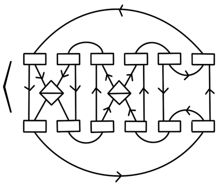
$$\underset{\text{(Proposition3.3)}}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\Big\langle$$



$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$\underset{\text{(Proposition3.3,Theorem3.1)}}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}\Big\langle$$

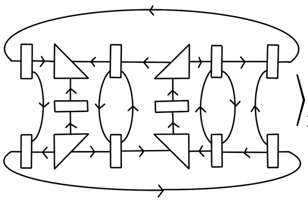


$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}$$

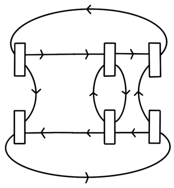
$$\times\Big\langle$$



$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$\underset{\text{(Propositon3.4)}}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}} \sum_{a=s}^{n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}\Big\langle$$

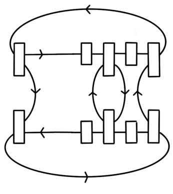


$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}} \sum_{a=s}^{n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}$$

$$\times\Omega(n,s,k_{|2\alpha+1},l_{|2\beta+1|})\Big\langle$$

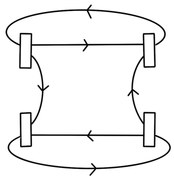


$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$\underset{(\text{Theorem3.2})}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}}$$

$$\sum_{a=s}^{n}\ \sum_{t=\max\{s,m_\gamma\}}^{\min\{s+m_\gamma,n\}} \chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon_\gamma}}$$

$$\times\Omega(n,s,k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|})\psi(n,a,m_\gamma,t)\Big\langle$$



$$\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$$

$$\underset{(\text{Lemma4.1})}{=} \sum_{0\le k_{2|\alpha|}\le k_{2|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{2|\beta|},n\}}\ \sum_{a=0}^{n-s}\ \sum_{t=\max\{a,m_{|\gamma|}\}}^{\min\{a+t+m_{|\gamma|},n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{2\alpha+2\beta-2\gamma}$$
$$\times\chi_{sign(2\alpha)}(n,k_1,k_2,...,k_{|\alpha|})\chi_{sign(2\beta)}(n,l_1,l_2,...,l_{2|\beta|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\Omega(n,s,k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|})\psi(n,t,a,m_{|\gamma|})$$
$$\times q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}$$

(4.1), (4.3), (4.5) についても (4.2) と似た方法で証明することができる . □

Remark 4.3. $P(2\alpha+1,2\beta+1,2\gamma)$ に対して, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式の係数を見ることができる. 例えば, $J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,3,2);q)$ の q の最低次数を用いて正規化した $J^{\hat{\mathfrak{sl}_3}}_{(n,0)}(P(3,3,2);q)$ について Mathematica によって $n=1\sim 7$ まで計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
n=1: &\quad 1-q+q^2-2q^4+q^5-2q^6+q^7+q^8+q^{10}\\
n=2: &\quad 1-q+0q^2+q^3-2q^4+2q^6-2q^7-2q^8+4q^9+q^{10}+\cdots\\
n=3: &\quad 1-q+0q^2+0q^3+q^4+q^5+q^7-4q^8-q^9+8q^{10}+\cdots\\
n=4: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+2q^5+q^6-2q^8-4q^9+4q^{10}\cdots\\
n=5: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+2q^6+q^7-3q^8-4q^q+q^{10}+\cdots\\
n=6: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+q^6+2q^7-2q^8-2q^9+3q^{10}+\cdots\\
n=7: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+q^6+q^7-q^8-q^9+2q^{10}+\cdots
\end{aligned}$$

(4.3) を用いると本講演では講演を行っていないが $P(2\alpha+1,2\beta+1,2\gamma)$ に対して, 上記のように one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式の係数が安定していることを証明することができる.

第 2 節で紹介した 4 つの A_2 ブラケットの公式を用いることで, 全てのパラメータが奇数であるものを除く全ての n 個のパラメータであらわされるプレツェル絡み目に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式を計算することができる. ここでは, 4,5-パラメータのプレッツェル絡み目である $8_{10}, 8_{15}, 8_{20}, 8_{21}$ に関して結果を紹介する.

Theorem 4.4 (Kawasoe)**.**

(1) $P(-3,-2,3,-1)=8_{10}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(-3,-2,3,-1);q)$$
$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p_3\le p_2\le p_1\le n}\ \sum_{m=0}^{n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_2\}}^{\min\{k_3+l_2,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p_3,m\}}^{\min\{p_3+m,n\}}\sum_{b=s}^{n}\ \sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{a+b,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^3$$
$$\chi_-(n,k_0,k_1,k_2)\chi_-(n,l_0,l_1)_{q^{-1}}\chi_+(n,p_1,p_2,p_3)\chi_-(n,m)\Omega(n,t,k_3,l_2)\Omega(n,s,p_3,m)\psi(n,u,a,b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

(2) $P(3,-1,-2,-1,3)=8_{15}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,-1,-2,-1,3);q)$$
$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l\le n}\ \sum_{0\le m_2\le m_1}\sum_{0\le p\le n}\ \sum_{0\le r_3\le r_2\le r_1\le n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l\}}^{\min\{k_3+l,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p,r_3\}}^{\min\{p+r_3,n\}}\ \sum_{b=s}^{n}$$
$$\sum_{u=\max\{a,m_1\}}^{\min\{a+m_2,n\}}\ \sum_{v=\max\{b,m_2\}}^{\min\{b+m_2,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-2}\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_-(n,l)\phi(n,m_1,m_2)\chi_-(n,p)\chi_+(n,r_1,r_2,r_3)\Omega(n,t,k_3,l)$$
$$\Omega(n,s,p,r_3)\psi(n,u,a,m_2)\psi(n,v,u,b)q^{-(n-v)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})}$$

(3) $P(3,-2,-3,1)=8_{20}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,-2,-3,1);q)$$
$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p_3\le p_2\le p_1\le n}\ \sum_{m=0}^{n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_2\}}^{\min\{k_3+l_2,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p_3,m\}}^{\min\{p_3+m,n\}}\ \sum_{b=s}^{n}\sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{a+b,n\}}q^{\frac{n^2+3n}{3}}$$
$$\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_-(n,l_1,l_2)_{q^{-1}}\chi_-(n,p_1,p_2,p_3)\chi_+(n,m)\Omega(n,t,n-k_3,l_2)\Omega(n,s,n-p_2,n-m)$$
$$\psi(n,u,t+a,s+b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

(4) $P(3,3,-1,-2)=8_{21}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,3,-1,-2);q)$$
$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_3\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p\le n}\ \sum_{0\le m_2\le m_1\le n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_3\}}^{\min\{k_3+l_3,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p,m\}}^{\min\{p+m,n\}}\sum_{b=s}^{n}\ \sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{t+s,n\}}$$
$$(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-3}\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_+(n,l_1,l_2,l_3)\chi_-(n,p)\chi_-(n,m_1,m_2)$$
$$\Omega(n,t,k_3,l_3)\Omega(n,s,p,m_2)\psi(n,u,a,b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

Remark 4.5. Theorem4.2, Theorem4.4 と既存の結果を合わせることで $8_{16}, 8_{17}, 8_{18}$ を除く全ての 8 交点以下の結び目に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式が決定される.

参考文献

[GMV13] S. Garoufalidis, H. Morton, and T. Vuong, The SL_3 colored Jones polynomial of the trefoil, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 6, 2209–2220. MR 3034446

[GV17] S. Garoufalidis and T. Vuong, A stability conjecture for the colored Jones polynomial, Topology Proc. 49 (2017), 211–249. MR 3570390

[Law03] R. Lawrence, The PSU(3) invariant of the Poincarê homology sphere, Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop "Invariants of Three-Manifolds" (Calgary, AB, 1999), vol. 127, 2003, pp. 153–168. MR 1953324

[Jon85] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no. 1, 103–111. MR 766964

[Kau87] L. H. Kauffman, State models, and the Jones polynomial, Topology 26 (1987), no. 3, 395–407. MR 899057

[Kup96] G. Kuperberg, Spiders for rank 2 Lie algebras, Comm. Math. Phys. 180 (1996), no. 1, 109–151. MR 1403861

[Wen87] H. Wenzl, On sequences of projections, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 9 (1987), no. 1, 5–9. MR 873400

[Yua17] W. Yuasa, The $\mathfrak{sl}_3$ colored Jones polynomials for 2–bridge links, J. Knot Theory Ramifications 26(2017), no.7, 1750038, 37.MR 3660093

[Yua18a] ________, A q-series identity via the $\mathfrak{sl}_3$ colored Jones polynomials for the $(2, 2m)$-torus link, Proc.Amer. Math. Soc. 146 (2018), no. 7, 3153–3166. MR 3787374

[Yua21a] ________, Twist formulas for one-row colored A_2 webs and $\mathfrak{sl}_3$ tails of $(2, 2m)$-torus links. Acta Math. Vietnam. 46 (2021), no. 2, 369^^e2^^80^^93387. MR4264242

$\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial for 3-manifolds

Yuanyuan Bao (University of Tokyo)
Noboru Ito (National Institute of Technology, Ibaraki College)

Abstract

As an extension of Reshetikhin and Turaev's invariant, Costantino, Geer and Patureau-Mirand constructed 3-manifold invariants in the setting of relative G-modular categories, which include both semisimple and non-semisimple ribbon tensor categories as examples. In this paper, we follow their method to construct a 3-manifold invariant from Viro's $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial. We take lens spaces $L(7,1)$ and $L(7,2)$ as examples to show that this invariant can distinguish homotopy equivalent manifolds.

1 Introduction

Given a framed link L in S^3, the integral surgery along L produces an oriented closed 3-manifold. The link L is called a surgery presentation of the resulting manifold. Kirby calculus [3] says that any oriented closed 3-manifold can be obtained in this way. In addition, surgery presentations of the same 3-manifold are related to each other by Kirby moves.

A linear sum of quantum invariants of framed links defines a topological invariant for 3-manifolds, if it is invariant under Kirby moves. Reshetikhin and Turaev [4] gave the first rigorous construction of 3-manifold invariant along this line. Their invariant was defined for a modular category, which is semisimple and all simple objects are required to have non-zero quantum dimensions.

Costantino, Geer and Patureau-Mirand [1] extended Reshetikhin and Turaev's construction to categories which may not be semisimple or may contain objects with zero quantum dimensions. They proposed the concept: relative G-modular category and proved that the quantum invariant of framed links constructed from a relative G-modular category can be used to define a 3-manifold invariant. Let $\mathscr{C}$ be a relative G-modular category. For an oriented closed 3-manifold M, a $\mathscr{C}$-ribbon graph T and a cohomology class $\omega : H_1(M\backslash T, \mathbb{Z}) \to G$ which satisfy some compatible conditions, [1] showed that the quantum invariant of $L \cup T$ after normalization is a topological invariant of (M, T, ω), where L is a surgery presentation of M with color induced from ω.

In this paper, we follow the method in [1] to construct a 3-manifold invariant. The quantum invariant we use is Viro's $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial defined in [5]. Consider a 1-palette defined by (B, G) where B is a field of characteristic 0 and $G \subset B$ is an abelian group. There is a category $\mathcal{M}_B$ of finite dimensional modules over a subalgebra U^1 of $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$, the quantum group of the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(1|1)$. The category $\mathcal{M}_B$ is not semisimple and the objects of which have zero quantum dimensions. Viro defined a functor from the category of trivalent graphs to $\mathcal{M}_B$. For a colored graph Λ, the Alexander polynomial $\Delta(\Lambda)$ is defined using this functor.

Now consider a triple (M, Γ, ω), where M is a 3-manifold, Γ is a trivalent graph colored by objects of $\mathcal{M}_B$ and $\omega : H_1(M\backslash\Gamma, \mathbb{Z}) \to G$ is a cohomology class. We assume that (M, Γ, ω) satisfies certain compatible conditions. Here is our main result. The definitions of computable surgery presentation and Kirby color will be given in Section 3.3.

Theorem 1.1. *For the* 1*-palette* (B, G) *where* G *contains* $\mathbb{Z}$ *but no* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *as a subgroup, let* (M, Γ, ω) *be a compatible triple. Let* L *be a computable surgery presentation of* (M, Γ, ω)*. Then*

$$\Delta(M, \Gamma, \omega) := \frac{\Delta(L \cup \Gamma)}{2^{r(L)}(-1)^{\sigma_+(L)}}$$

is a topological invariant of (M, Γ, ω)*, where* $r(L)$ *is the component number of* L *and* $\sigma_+(L)$ *is the number of positive eigenvalues of the linking matrix of* L*. Here each component* K *of* L *has Kirby color* $\Omega(\omega([m_K]), 1)$*, where* m_K *is the meridian of* K*.*

Our strategy is as follows. Instead of proving that $\mathcal{M}_B$ has a relative G-modular category structure, we show directly that the value $\Delta(M, \Gamma, \omega)$ is invariant under Kirby moves. So the flavor of this paper is quite combinatorial without involving many algebras. However we believe the existence of a relative G-modular category structure on $\mathcal{M}_B$ so that the corresponding invariant is the one given in Theorem 1.1. We hope to discuss this topic in our future work. In the definitions of compatible triple, Kirby color and the proof of Theorem 1.1, we imitate many ideas from [1].

The authors of [1] discussed in detail how to define the 3-manifold invariant in the context of quantum $\mathfrak{sl}(2)$. For any finite-dimensional simple complex Lie algebra $\mathfrak{g}$, they also showed the existence of relative G-modular category associated with certain version of quantum $\mathfrak{g}$. The representation theory for Lie superalgebras is much more complicated than that of Lie algebras. Based on the concept relative G-modular category, NP Ha [2] constructed 3-manifold invariant from quantum group associated with Lie superalgebra $\mathfrak{sl}(2|1)$. It is not clear to us yet whether $\Delta(M, \Gamma, \omega)$ coincides with any known invariant or not.

Acknowledgements The authors would like to thank Prof. Jun Murakami and Dr. Atsuhiko Mizusawa for their helpful discussions. They also would like to thank Prof. Tetsuya Ito for suggesting us compute our invariant for $L(7, 1)$ and $L(7, 2)$. The first author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20K14304. The second author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 20K03604 and Toyohashi Tech Project of Collaboration with KOSEN.

2 Viro's $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial

Viro [5] defined a functor from the category of colored framed oriented trivalent graphs to the category of finite dimensional modules over a subalgebra U^1 of the q-deformed universal enveloping superalgebra $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$. Using this functor, in Section 6 of [5], he defined the $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial for a trivalent graph. We recall how this polynomial is calculated. For the algebraic structures of U^1 and $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$, please read [5, §11: Appendix].

2.1 Colored framed graphs

A 1-*palette* (see [5, 2.8]) is a quadruple

$$(B, G, W, G \times W \to G),$$

where B is a commutative ring with unit, G is a subgroup of the multiplicative group of B, W is a subgroup of the additive group of B which contains the unit of B, and $G \times W \to G : (t, w) \mapsto t^w$ is a bilinear map satisfying $t^1 = t$ for each $t \in G$. For each $t \in G$ satisfying $t^4 \neq 1$ and $N \in W$, there exist two modules $U(t, N)_+$ and $U(t, N)_-$ of U^1. For the definition of $U(t, N)_+$ and $U(t, N)_-$, see [5, §11: Appendix].

In this paper, we consider the case that B is a field of characteristic 0. Let G is a subgroup of the multiplicative group of B, which is abelian, and let $W = \mathbb{Z}$ and $G \times \mathbb{Z} \to G : (t, n) \mapsto t^n$. Obviously $(B, G, W, G \times W \to G)$ becomes a 1-palette. Since W and $G \times \mathbb{Z} \to G$ have specific definitions, we suppress them and use (B, G) to denote the 1-palette. When we say a 1-palette, we mean a 1-palette defined in this way.

Let T be an oriented trivalent graph, and let E be the set of edges of T. Consider a map which we call a coloring

$$\begin{array}{rcl} c = (\mathrm{mul}, \mathrm{wt}) : E & \to & G \backslash \{g \in G \mid g^4 = 1\} \times \mathbb{Z} \\ e & \mapsto & (t, N). \end{array}$$

The first number $t = \mathrm{mul}(e)$ is called the *multiplicity* and the second number $N = \mathrm{wt}(e)$ is called the *weight*.

Around a vertex, suppose the three edges adjacent to it are colored by (t_1, N_1), (t_2, N_2) and (t_3, N_3). Let $\epsilon_i = -1$ if the i-th edge points toward the vertex and $\epsilon_i = 1$ otherwise. The coloring c needs to satisfy the following conditions, which are called *admissibility conditions* in [5]:

$$\prod_{i=1}^{3} t_i^{\epsilon_i} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_i N_i = -\prod_{i=1}^{3} \epsilon_i. \tag{2}$$

A vertex is called *source* (resp. *sink*) if all the adjacent edges have $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$).

Now consider a proper embedding of T into a 3-manifold M. We still use T to represent the embedded graph. A *framing* of T is an orientable compact surface F embedded in M in which T is sitting as a deformation retract. More precisely, in F each vertex of T is replaced by a disk where the vertex is the center, and each edge of T is replaced by a strip $[0,1]\times[0,1]$ where $[0,1]\times\{0,1\}$ is attached to the boundaries of its adjacent vertex disks and $\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]$ is the given edge of T.

A *framed graph* is a graph with a framing. By an *isotopy* of a framed graph we mean an isotopy of the graph in M which extends to an isotopy of the framing.

For a framed graph, at each source or sink, we can assign an orientation to the boundary of the associated disk, which is regarded as part of the coloring of T. Now we are ready to give the following definition.

Definition 2.1. A *colored framed oriented trivalent graph* Γ in a 3-manifold M is an oriented trivalent graph T embedded in M with the following three structures:

- a framing;
- a coloring on the set of edges which satisfies the admissibility conditions;
- an orientation of the boundary of the associated disk on each source or sink vertex.

In the following sections, a framed graph means a framed oriented trivalent graph, while a colored framed graph means a colored framed oriented trivalent graph.

When Γ is a graph in S^3, we can use a graph diagram to represent Γ, the blackboard framing of which coincides with the framing of Γ. Around a source or sink vertex, the counter-clockwise orientation is chosen unless otherwise stated.

2.2 $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial

Let (B,G) be a 1-palette. Suppose Γ is a colored framed graph embedded in S^3 whose coloring is given by the map c. We review the definition of the $\mathfrak{gl}(1|1)$-Alexander polynomial of Γ, which is denoted by $\Delta(\Gamma)$ or $\Delta(\Gamma;c)$.

Note that the pair $(t,N)\in G\backslash\{g\in G\mid g^4=1\}\times\mathbb{Z}$ corresponds to two irreducible U^1-modules of dimension $(1|1)$, which are denoted by $U(t,N)_+$ and $U(t,N)_-$. These two modules are dual to each other. The module $U(t,N)_+$ (resp. $U(t,N)_-$) is generated by two elements e_0 (boson) and e_1 (fermion). For details of their definitions please see Appendix 1 of [5].

Choose a graph diagram of Γ in $\mathbb{R}^2$. The diagram divides $\mathbb{R}^2$ into several regions, one of which is unbounded. Choose an edge of Γ on the boundary of the unbounded region and cut the edge at a generic point. Suppose the color of the edge is (t,N). Deform the graph diagram under isotopies of $\mathbb{R}^2$ to make it in a Morse position under a given orthogonal coordinate system of $\mathbb{R}^2$ so that the two endpoints created by cutting have heights zero and one and the critical points, the crossings, and the vertices of the diagram have different heights between zero and one. Namely after deformation the diagram can be divided into several

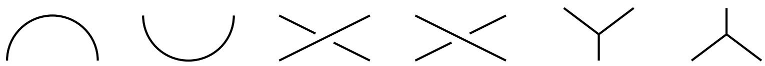


Figure 1: Critical points, crossings, and vertices.

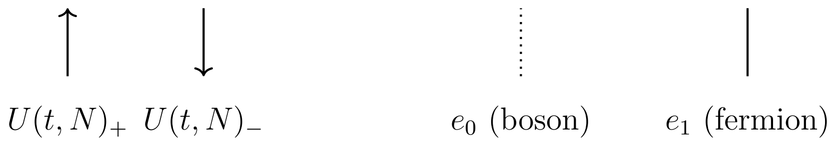


Figure 2: Under the coloring c, each edge corresponds to an irreducible U^1-module. In a state, if an edge is assigned with e_0 (resp. e_1), we represent it by a dotted (resp. solid) arc.

slices by horizontal lines so that each slice is a disjoint union of trivial vertical segments and one of the six elements in Fig. 1. Each slice connects a sequence of endpoints on its bottom to a sequence of endpoints on its top. In Example 2.2, we show how the Hopf link is divided into such slices.

Under Viro's functor, each sequence of endpoints corresponds to the tensor product of irreducible U^1-modules of dimension $(1|1)$. Suppose the sequence of endpoints is $(p_1, \cdots, p_k)$ for $k \geq 1$, where the subindices represent the x-coordinates of the endpoints. Then $(p_1, \cdots, p_k)$ corresponds to the tensor product

$$U(t_1, N_1)_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes U(t_k, N_k)_{\epsilon_k},$$

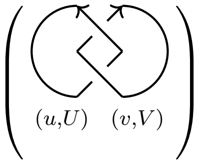
where (t_i, N_i) is the color of the edge containing p_i and $\epsilon_i = +$ when the edge points upward and $\epsilon_i = -$ otherwise for $1 \leq i \leq k$. See Fig 2.

Each slice connects two sequences of endpoints. Under Viro's functor, each slice, read from bottom to top, is mapped to a morphism between the corresponding tensor products of irreducible U^1-modules.

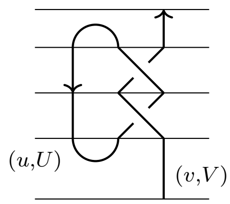
The morphism is defined in the language of Boltzmann weights. Simply speaking, each module $U(t,N)_+$ or $U(t,N)_-$ has two generators e_0 (boson) and e_1 (fermion), and therefore $U(t_1, N_1)_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes U(t_k, N_k)_{\epsilon_k}$ is generated by $e_{\delta_1} \otimes e_{\delta_2} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_k}$ for $\delta_i = 0$ or 1. The morphism is represented by a matrix under the above choice of generators, and the Boltzmann weights are the entries of the matrix. For the full table of Boltzmann weights, see Tables 3 and 4 of [5].

The composition of two slices (attaching them by identifying the top of the first slice with the bottom of the second slice) corresponds to the composition of their morphisms for U^1-modules. As a consequence, the graph diagram in Morse position with two endpoints of heights zero and one is mapped to a morphism from $U(t,N)_+$ to $U(t,N)_+$ (or $U(t,N)_-$ to $U(t,N)_-$ depending the orientation of Γ at the endpoints), which is a scalar of identity ([5, 6.2.A]). Recall that (t,N) is the color of the edge which was cut. Then multiplying the scalar by the inverse of $t^2 - t^{-2}$ we get $\Delta(\Gamma)$. In the following paragraphs, we use (Γ) to represent the Alexander polynomial of Γ when Γ is a colored framed graph.

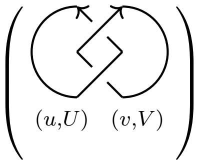
Example 2.2. *For $u, v \in G \backslash \{g \in G | g^4 = 1\}$, we have*



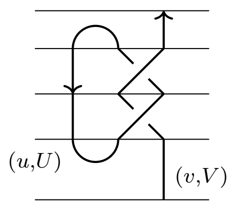
$$= \frac{1}{v^2 - v^{-2}} \Big\langle$$



$$\Big\rangle = \frac{-u^{2V} v^{2U} (v^2 - v^{-2})}{v^2 - v^{-2}} = -u^{2V} v^{2U}.$$



$$= \frac{1}{v^2 - v^{-2}} \Big\langle$$



$$\Big\rangle = \frac{u^{-2V} v^{-2U} (v^2 - v^{-2})}{v^2 - v^{-2}} = u^{-2V} v^{-2U}.$$

Here $\langle D \rangle$ denotes the scalar defined the by the tangle D.

3 On the Proof of Main Result

3.1 Cohomology classes

We review a characterization of cohomology classes given in [1, Sect. 2.3]. Let M be a closed 3-manifold, let T be a framed graph in M. Suppose L is an oriented framed link in S^3 which is a surgery presentation for M. Since T is disjoint from L, we also view T as a graph in S^3 before the surgery.

Now we consider diagrams of L and T, which are still denoted by L and T. Let $e_1, e_2, \cdots, e_r$ be the components of L, and $e_{r+1}, e_{r+2}, \cdots, e_{r+s}$ be the oriented edges of T. For two different components e_i and e_j in L ($1 \leq i, j \leq r$), let $lk_{ij} = lk(e_i, e_j)$ denote the linking number of e_i and e_j. Namely, it is half of the sum of signs of all the crossings between e_i and e_j. Let $lk_{ii} = lk(e_i, e_i)$ ($1 \leq i \leq r$) be the framing of e_i. Namely it is the sum of signs of self-crossings of e_i (since we use blackboard framing). It is well-known that lk_{ij} does not depend on the diagram we choose. The matrix $(lk_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$ is called the *linking matrix* of L.

For a component e_i of L and an edge e_j of T, we define the linking number $lk_{ij} = lk(e_i, e_j)$ to be the number of all the crossings of type e_j  e_i minus the number of crossings of type e_i  e_j between e_i and e_j. Note that this number depends on the diagrams of L and T.

Let $M \backslash T$ be the complement of T in M. The first homology group $H_1(M \backslash T, \mathbb{Z})$ has a presentation

$$H_1(M \backslash T, \mathbb{Z}) = \left\langle \ \{[m_i]\}_{1 \leq i \leq r+s} \ \middle| \begin{array}{l} \forall 1 \leq i \leq r, \sum_{j=1}^{r+s} lk_{ij}[m_j] = 0; \\ \forall v : \text{vertex of } T, r_v = 0; \\ \forall 1 \leq i, j \leq r+s, [m_i] + [m_j] = [m_j] + [m_i] \end{array} \right\rangle,$$

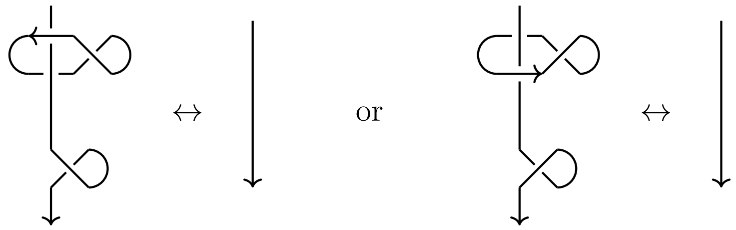


Figure 3: Blow up/down moves

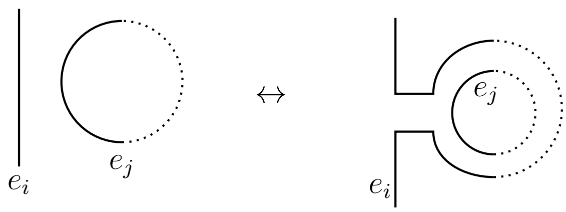


Figure 4: Handle-slide e_i along e_j.

where m_i is the oriented meridian of e_i, and for a vertex v of T, r_v is the sum of meridians of the edges entering v minus the sum of meridians of the edges outgoing from v. Note that for each $1 \leq i \leq r$, $\sum_{j=r+1}^{r+s} lk_{ij}[m_j]$ does not depend on the choice of diagram of L and T and is a well-defined value.

Let G be an abelian group. Then the cohomology class

$$\omega \in H^1(M \backslash T, G) \cong \mathrm{Hom}(H_1(M \backslash T, \mathbb{Z}), G)$$

is uniquely determined by the images of $[m_i]'s$ under ω.

3.2 Kirby calculus

We review basic facts about Kirby calculus, which can be found, for instance in [1, 5.1]. Kirby [3] showed that any compact connected oriented closed 3-manifold can be obtained by doing surgeries along a framed link in S^3. Such a link is called the surgery presentation of the given 3-manifold. There are two types of moves connecting surgery presentations, which are called blow up/down moves and handle-slide move. See Fig 3 and Fig 4.

Theorem 3.1 (Theorem 5.2 in [1]). *Let M_1 and M_2 be compact connected oriented closed 3-manifolds and $T_1 \subset M_1$ and $T_2 \subset M_2$ be embedded framed graphs. Let $f : M_1 \to M_2$ be an orientation preserving diffeomorphism such that $f(T_1) = T_2$. Let $L_i \subset S^3$ be a surgery presentation of M_i which is disjoint from T_i for $i = 1, 2$. Then f is isotopic to the diffeomorphisms induced by a finite sequence of moves:*

$$L_1 = L^0 \xrightarrow{k_1} L^2 \xrightarrow{k_2} \cdots \xrightarrow{k_r} = L_2,$$

where each k_i $(1 \leq i \leq r)$ is one of the following moves.

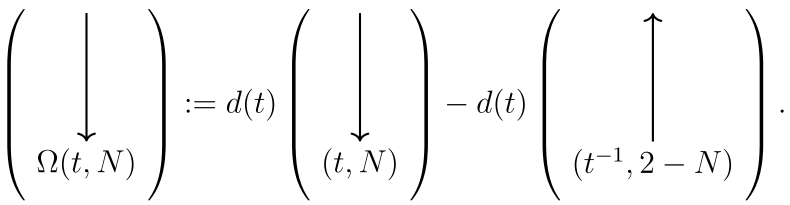
i. handle-slide move of a component/edge of $L^{i-1} \cup T_1$ along a component of L^{i-1};

ii. blow up/down move along a component/edge of $L^{i-1} \cup T_1$, where the circle component which appears or disappears during this move must be a component of the surgery presentation.

3.3 Sketch of proof of Theorem 1.1

The proof of Theorem 1.1 is essentially the same as the proof of Theorem 4.7 in [1]. In the following two lemmas, we discuss how the Alexander polynomial changes under Kirby moves.

Definition 3.2. For $(t, N) \in G \backslash \{g \in G \mid g^4 = 1\} \times \mathbb{Z}$, if one component of a link has *Kirby color* $\Omega(t, N)$, the Alexander polynomial is calculated as follows:



For a strand with Kirby color $\Omega(t, N)$, its *multiplicity* is defined to be t.

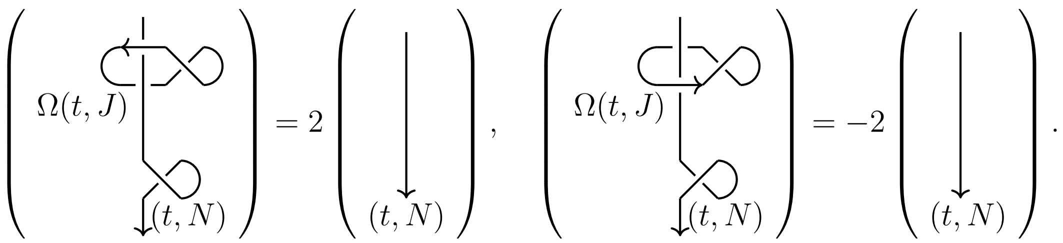
It is easy to see that if a knot $K \subset S^3$ has Kirby color $\Omega(t, N)$, we have

$$\Delta(K; \Omega(t, N)) = \Delta(-K; \Omega(t^{-1}, 2 - N)),$$

where $-K$ is the same knot K with opposite orientation.

Now, we discuss how the Alexander polynomial changes under blow-up/down moves when the circle component has a Kirby color.

Lemma 3.3.



For a colored framed graph $\Lambda \subset S^3$ and a knot component $K \subset \Lambda$, we define *the colored linking number* of K with Λ as

$$clk(K, \Lambda) := \prod_{e\colon \text{ edge of } \Lambda} t_e^{lk(K,e)},$$

where $lk(K, e)$ is the linking number as defined in Section 3.1, and t_e is the multiplicity of e. Due to the admissibility condition (1) of multiplicities, $clk(K, \Lambda)$ is well-defined.

Next, we study how the Alexander polynomial changes under a handle-slide move. We have the following lemma.

Lemma 3.4. *Suppose Λ is a colored framed graph, and K is a knot component of Λ with Kirby color $\Omega(s, S)$. Let e be an oriented edge of $\Lambda\backslash K$ with color (t, N). Let Λ' be a graph obtained from Λ by a handle-slide move of e along K, and K has the new Kirby color $\Lambda(ts, N+S-1)$. If $clk(K, \Lambda) = 1$ and $(ts)^4 \neq 1$, we have $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$.*

Now we consider a 1-palette for which G is finitely generated abelian group containing at least one $\mathbb{Z}$ summand and satisfies $t^4 = 1 \iff t = 1$. Namely G contains $\mathbb{Z}$ but no $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ as a subgroup, as required by Theorem 1.1. It is not hard to find such 1-palettes as we can see in the following examples.

Example 3.5. *The 1-palettes defined by the following data meet our requirements.*

i. Let $B = \mathbb{Q}(t)$, the field of rational functions of t, and let $G = \mathbb{Z}\langle t\rangle$, the cyclic group generated by t.

ii. Let ξ_l be the l-th primitive root of unity for a prime number $l \geq 3$. Let $B = \mathbb{Q}(\pi, \xi_l)$, the extension field of $\mathbb{Q}$ generated by π and ξ_l. Let $G = \mathbb{Z}\langle \pi, \xi_l\rangle$, the abelian group generated by π and ξ_l.

Let M be a 3-manifold, let Γ be a colored framed graph in M colored by a 1-palette (B, G) where G contains $\mathbb{Z}$ but no $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ as a subgroup. Consider a cohomology class $\omega : H_1(M\backslash\Gamma, \mathbb{Z}) \to G$. We say that (M, Γ, ω) is a *compatible triple* if for each edge e of Γ, the multiplicity of e is equal to $\omega([m])$, where m is the meridian of e. Let L be a surgery presentation of M. We say that L is *computable* for a compatible triple (M, Γ, ω) if $L \cup \Gamma \neq \emptyset$ and $\omega([m]) \neq 1 \in G$ for any meridian m of L. We can show the existence of a computable surgery presentation of (M, Γ, ω) if ω is non-trivial.

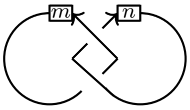
Sketch of proof of Theorem 1.1. Let L and L' be two computable surgery presentations of (M, Γ, ω). By Theorem 3.1, there is a sequence of handle-slide moves, blow-up/down moves connecting $L \cup \Gamma$ and $L' \cup \Gamma$ and the induced diffeomorphism $f : M \to M$ satisfies $f(\Gamma) = \Gamma$ and $f^*(\omega) = \omega$. We want to show that $\frac{\Delta(L\cup\Gamma)}{2^{r(L)}(-1)^{\sigma_+(L)}} = \frac{\Delta(L'\cup\Gamma)}{2^{r(L')}(-1)^{\sigma_+(L')}}$.

If all the intermediate presentations between L and L' are all computable, the equality follows from Lemmas 3.3 and 3.4. Now for the case that some surgery presentations between L_k and L_{k+l} are not computable, we construct a new graph $\tilde{\Gamma}$ and therefore a new $\tilde{\omega}$ so that $L \cup \tilde{\Gamma}$ and $L' \cup \tilde{\Gamma}$ can be connected by computable surgery presentations. By comparing $\Delta(M, \Gamma, \omega)$ and $\Delta(M, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega})$ we can finish the proof. During the construction of $\tilde{\Gamma}$, we need the condition on G.

□

4 Examples and calculations

4.1 A general formula for a class of lens spaces

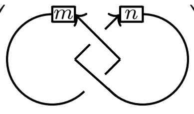
In this section, we compute $\Delta(L(mn-1,n),\omega) := \Delta(L(mn-1,n),\emptyset,\omega)$ for the lens space $L(mn-1,n)$ and $\Gamma=\emptyset$. We use the surgery presentation $L=$ 

for $L(mn-1,n)$, where $m>0$ or $n>0$ inside a square represents the number of positive full twists. For a cohomology class

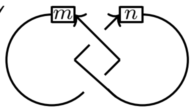
$$\omega : H_1(M,\mathbb{Z}) = \left\langle [m_1],[m_2] \middle| \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [m_1] \\ [m_2] \end{pmatrix} = 0 \right\rangle \to G, \tag{3}$$

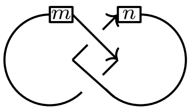
where m_1 (resp. m_2) is the meridian of the left-hand (resp. right-hand) slide component of L. Let $u=\omega([m_1])$ and $v=\omega([m_2])$. In the following calculations, a diagram inside round brackets represents the Alexander polynomial of the diagram. We have

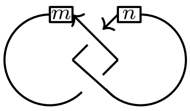
$$\Delta(L(mn-1,n),\omega) = \frac{\Delta(L)}{2^r(-1)^{\sigma_+(L)}}$$

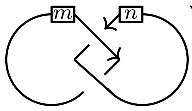
$$= \frac{1}{2^2(-1)^{\sigma_+(L)}} \Bigg($$ 

$$\Bigg)$$

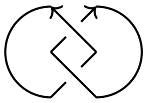
$$= \frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}} \Bigg($$ 

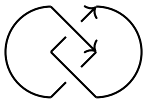
$-$ 

$-$ 

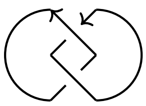
$+$ 

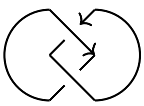
$$\Bigg)$$

$$= \frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}} \Big[u^{-2m}v^{-2n} \Bigg($$ 

$$\Bigg) - u^{2m}v^{-2n} \Bigg($$ 

$$\Bigg)$$

$$- u^{-2m}v^{2n} \Bigg($$ 

$$\Bigg) + u^{2m}v^{2n} \Bigg($$ 

$$\Bigg) \Big]$$

$$= -\frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}} \left(u^{2-2m}v^{2-2n} + u^{2+2m}v^{-2-2n} + u^{-2-2m}v^{2+2n} + u^{-2+2m}v^{-2+2n} \right)$$

$$= -\frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}} (u^2v^{-2n} + u^{-2}v^{2n})(u^{2m}v^{-2} + u^{-2m}v^2),$$

where the third equality follows from the definition of Kirby color, the forth one is because a positive full-twist contribute t^{-2N} if the strand has color (t,N), and the fifth one follows from Example 2.2.

Here note that (3) implies $u^m v^{-1} = 1$, $u^{-1} v^n = 1$. Thus

$$\begin{aligned}\Delta(L(mn-1,n),\omega) &= -\frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}}(u^2v^{-2n}+u^{-2}v^{2n})(u^{2m}v^{-2}+u^{-2m}v^2)\\ &= -\frac{d(u)d(v)}{4(-1)^{\sigma_+(L)}}((uv^{-n})^2+(u^{-1}v^n)^2)((u^m v^{-1})^2+(u^{-m}v)^2)\\ &= (-1)^{\sigma_+(L)+1}d(u)d(v).\end{aligned}$$

Then we have

Proposition 4.1.

$$\Delta(L(mn-1,n),\omega) = (-1)^{\sigma_+(L)+1}d(u)d(v).$$

4.2 $L(7,1)$ and $L(7,2)$

It is known that lens spaces $L(7,1)$ and $L(7,2)$ are homotopy equivalent but not homeomorphic. We show that our invariant can distinguish them.

Let $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{7})$, $B = \mathbb{Q}(\pi,\xi)$ the field extension of $\mathbb{Q}$ generated by π and ξ, and $G = \mathbb{Z}\langle\pi,\xi\rangle$ the abelian group generated by π and ξ. We consider $\Delta(L(7,1),\omega)$ and $\Delta(L(7,1),\omega)$ for this 1-palette (B,G).

Proposition 4.2. *The invariant $\Delta(M,\omega)$ corresponding to the 1-palette (B,G) where $B = \mathbb{Q}(\pi,\xi)$ and $G = \mathbb{Z}\langle\pi,\xi\rangle$ distinguishes $L(7,1)$ and $L(7,2)$. More concretely, there exists a cohomology class ω_0 for $L(7,1)$ such that for any cohomology class ω for $L(7,2)$, we have*

$$\Delta(L(7,1),\omega_0) \neq \Delta(L(7,2),\omega).$$

Proof. Note that $L(7,1) = L(mn-1,n)$ for $m = 8, n = 1$, and $L(7,2) = L(mn-1,n)$ for $m = 4, n = 2$. So we can apply the discussion we did in Section 5.1.1. A cohomology class

$$\omega : H_1(L(7,2),\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\langle\pi,\xi\rangle$$

is determined by $\omega([m_1])$ and $\omega([m_1])$, which satisfy

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega[m_1] \\ \omega[m_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

So we have totally six non-trivial cohomology classes which are given by

$$\omega_1 : \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi \end{pmatrix}, \omega_2 : \begin{pmatrix} \xi^4 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \omega_3 : \begin{pmatrix} \xi^6 \\ \xi^3 \end{pmatrix}, \omega_4 : \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^4 \end{pmatrix}, \omega_5 : \begin{pmatrix} \xi^3 \\ \xi^5 \end{pmatrix}, \omega_6 : \begin{pmatrix} \xi^5 \\ \xi^6 \end{pmatrix}.$$

Let $u_i = \omega_i([m_1])$ and $v_i = \omega_i([m_2])$. By Prop. 4.1 we have

$$\Delta(L(7,2),\omega_i) = -d(u_i)d(v_i).$$

Similarly we can consider the non-trivial cohomology classes for $L(7,1)$. We see that $\omega_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$ is one of them. The corresponding invariant is

$$\Delta(L(7,1), \omega_0) = -d(\xi)d(\xi).$$

We claim that $\Delta(L(7,2), \omega_i) \neq \Delta(L(7,1), \omega_0)$ for $1 \leq i \leq 6$, which can be confirmed by directly calculations. For instance $\Delta(L(7,2), \omega_1) = \Delta(L(7,1), \omega_0) \iff d(\xi^2) = d(\xi) \iff \xi^4 - \xi^{-4} = \xi^2 - \xi^{-2} \iff \xi^2 + \xi^{-2} = 1$, which is impossible since the minimal polynomial of ξ is $\sum_{k=0}^{6} \xi^k = 0$. □

References

[1] F. Costantino, N. Geer, and B. Patureau-Mirand, *Quantum invariants of 3-manifolds via link surgery presentations and non-semi-simple categories*, J. Topol., 7 (2014), pp. 1005–1053.

[2] N. P. Ha, *Topological invariants from quantum group $\mathcal{U}_\xi\mathfrak{sl}(2|1)$ at roots of unity*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 88 (2018), pp. 163–188.

[3] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3*, Invent. Math., 45 (1978), pp. 35–56.

[4] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math., 103 (1991), pp. 547–597.

[5] O. Y. Viro, *Quantum relatives of the Alexander polynomial*, Algebra i Analiz, 18 (2006), pp. 63–157.

Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を復元する q 級数について

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森　祥仁 (Akihito MORI)

概要

Gukov-Pei-Putrov-Vafa は homological block と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを予想した．今回の研究では H グラフで表される 3 次元ホモロジー球面に対して彼らの予想が正しいことを証明した．その結果としてそのような多様体の WRT 不変量が深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であることがわかる．この発表は村上友哉氏（東北大学）との共同研究 [MM21] に基づく．

研究集会を開き講演の機会を下さった世話人の谷山公規氏, 安原晃氏, 村尾智氏, 丹下稜斗氏, 木村直記氏に感謝申し上げます。ありがとうございました。

1　序

1.1　WRT 不変量の先行研究

量子トポロジーは量子不変量を研究する分野である．特に Witten-Reshetikhin-Turaev (WRT) 不変量は注目に値する．WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体（すなわち Dehn 手術で得られる多様体）の位相不変量である．Witten [Wit89] は場の理論を用いて 3 次元多様体の位相不変量を構成した．しかし彼の構成は経路積分を用いるため, 数学者にとって扱いに困るものであった．Reshetikhin-Turaev [RT91] は Witten の仕事から着想を得て位相不変量を構成した．我々はこれを WRT 不変量と呼ぶ．Witten 及び Reshetikhin-Turaev の仕事が量子トポロジー誕生のきっかけになったのである．

WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体の不変量であるが, そのような多様体は Dehn 手術で得られることが知られている．

定義 1.1. $L = \{L_i\}_{i=1}^n$ を S^3 内の絡み目とする．L の管状近傍 $N(L)$ と書き $S^3 \setminus N(L)$ を $E(L)$ と書く．$V = \{V_i\}_{i=1}^n$ をソリッドトーラスの集合とする．このとき, 同相写像 $f\colon \partial V \to \partial E(L)$ による V と $E(L)$ の貼り合わせを Dehn 手術という．貼り合わせ写像は有理数で表されることが知られている．絡み目図式と有理数を合わせて手術図式という．

* 本研究は JSPS 科研費 JP 21J10271, JP 20J20308 の助成を受けたものである．
† akihito.mori.s5@dc.tohoku.ac.jp

各 L_i が自明な結び目の場合は各 L_i を頂点とし, L_i, L_j が絡まっていれば対応する頂点の間に辺を伸ばすことで手術図式をグラフで読み替えることができる.

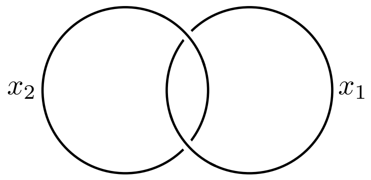


図 1: 手術図式の例 ($x_i \in \mathbb{Q}$)

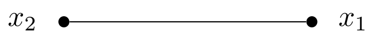


図 2: 手術図式に対応するグラフ

定義 1.2. 木 $G = (V, E)$ と重み $w\colon V \to \mathbb{Z}$ の組を plumbed グラフという. $w(v)$ を w_v と書く. 手術図式が plumbed グラフで与えられるような多様体を plumbed 多様体という.

plumbed 多様体の例として Brieskorn 多様体や Seifert 多様体が挙げられる. Brieskorn 多様体は三叉のグラフで表され, Seifert 多様体は中心から足が幾つか生えているグラフで表される.

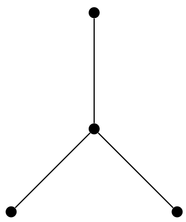


図 3: Brieskorn 多様体

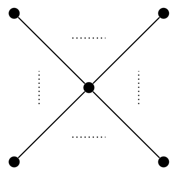


図 4: 手術図式に対応するグラフ

その重要性から, 現在に至るまで多くの研究者が WRT 不変量を研究対象に選んだ. 中でも本研究と目標を同じくする主だったものを以下に列挙する. Lawrence-Zagier [LZ99] は Poincaé ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ に対する WRT 不変量がある false theta 関数の radial limit で書けることを証明した. 樋上 [Hik06] は Seifert ホモロジー球面に対する WRT 不変量が Eichler 積分とその微分の極限値の和として書けることを証明している.

これらの事実から WRT 不変量を復元する整数係数 q 級数の存在が示唆される. Gukov-Pei-Putrov-Vafa は plumbed 多様体に対して homological block と呼ばれる q 級数を定義し, その radial limit の線形和が WRT 不変量と一致することを予想した [GPPV20]. 藤-岩木-村上-寺嶋 [FIMT20] は Seifert ホモロジー球面に対して Seifert 関数と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを証明した. Andersen-Mistegård [AM20] は Seifert 関数が Seifert 多様体に対する homological block と同等であることを証明し, 藤-岩木-村上-寺嶋とは別の方法で Seifert 多様体に対する homological block の radial limit から Seifert 多様体 WRT 不変量を復元できることを証明した. 以下に homological block と radial limit の定義を述べる.

定義 1.3 ([GPPV20, Subsection 3.4]). $G = (V, E, w)$ を plumbed グラフとする. $\delta = (\delta_v)_{v \in V}$ を $\deg(v)$ が奇数なら $\delta_v = 1$, 偶数なら $\delta_v = 0$ で定める. このとき, plumbed 多様体 $M_3(G)$ と $b \in (H_1(M_3(G), \mathbb{Z}) + \delta)/\{\pm 1\} \cong (2\mathbb{Z}^N / 2W(\mathbb{Z}^N) + \delta)/\{\pm 1\}$ に対して homological block が以下の

式で定義される.

$$\widehat{Z}_{G,b}(q) = q^{-\sum_{v\in V}(w_v+3)/4}\mathrm{v.p.}\int_{|z_v=1|, v\in V}\prod_{v\in V}\frac{dz_v}{2\pi\sqrt{-1}z_v}(z_v - 1/z_v)^{2-\deg(v)}\Theta_{-W,b}(z)$$

ただし v.p. は Cauchy の主値で, W は plumbed グラフに対応する手術図式 $\mathcal{G}$ の絡み行列であり,

$$\Theta_{-W,b}(q;\{z_v\}_{v\in V}) := \sum_{\boldsymbol{l}={}^t(l_v)_{v\in V}\in 2W(\mathbb{Z}^{|V|})+b} q^{-{}^t\boldsymbol{l}W^{-1}\boldsymbol{l}/4}\prod_{v\in V} z_v^{l_v}$$

とする.

定義 1.4. 開円盤 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ 上で定義された関数 f を考える. 円盤の境界上の点 x_0 をとる. このとき極限 $\lim_{t\to 1} f(tx_0 + (1-t)x)$ を radial limit という.

1.2 量子モジュラー形式の先行研究

モジュラー形式とは高い対称性を持つ正則関数のことで, 数論の分野でよく研究されているが, 他にも Langlands 予想やムーンシャインなど様々な数学に姿を現す興味深い対象である. モジュラー形式には多様な変種が存在するが, 中でも量子モジュラー形式は量子トポロジーとの関連から最近盛んに研究されている. 以下に Zagier [Zag10] による量子モジュラー形式の定義を述べる.

定義 1.5 ([Zag10])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という:

任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f - f|_k\,\gamma$ が $\mathbb{R}$ の開集合状の解析関数に拡張できる.

ただし $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して slash operator を $(f|_k\,\gamma)(x) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma x)$ で定義する.

この定義は Bringmann-Kaszian-Milas [BKM19] によって一般化されている.

定義 1.6 ([BKM19])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. $\mathcal{Q}_l(\Gamma)$ を重さ l, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式全体の集合とし, $\mathcal{O}(R)$ を $\mathbb{R}$ の開集合 R 上の解析関数全体の集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を深さ 2, 重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という: 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対してある開集合 $R \subset \mathbb{R}$, $k_1, \ldots, k_r \in 1/2\mathbb{Z}$ が存在して

$$f - f|_k\,\gamma \in \mathcal{O}(R) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{Q}_{k_i}(\Gamma)\mathcal{O}(R)$$

が成り立つ.

深さ 2 の量子モジュラー形式と homological block に関して以下の定理が知られている.

定理 1.7 ([BMM20])**.** H グラフから定まるホモロジー球面の homological block は深さ 2, 重さ 1, 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式である.

2 主定理

我々は Seifert 多様体でない場合に homological block と WRT 不変量を研究する．特に H グラフで表される多様体を考える．

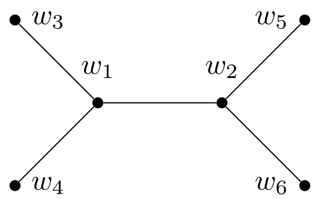


図 5: H グラフ Γ

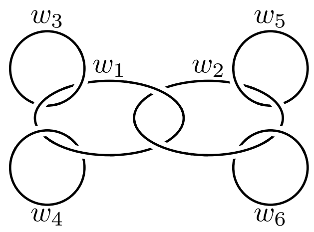


図 6: 手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$

定理 2.1. WRT_k を WRT 不変量, Γ を H グラフ, $M(\Gamma)$ を手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$ で表される 3 次元多様体, $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ を H グラフに対する homological block, ζ_k を 1 の原始 k 乗根とする．$w_i \in \mathbb{Z}_{<0}$, Γ の隣接行列 W は負定値で行列式は 1 とする．このとき以下の等式が成り立つ．

$$\mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma)) = -\frac{1}{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)} \lim_{\substack{q \to \zeta_k^{-1} \\ |q|<1}} \widehat{Z}_\Gamma\left(q\right). \tag{1}$$

Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] は $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ が深さ 2 の量子モジュラー形式になることを証明している．彼女らの結果と我々の結果を合わせると WRT 不変量が量子モジュラー形式であることがわかる．

定理 2.2. $f_\Gamma\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を以下の式で定める．

$$f_\Gamma\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{1}{k^2} \sum_{\gamma = {}^t(\alpha,\beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \cap [0,\, k)^2} \varepsilon(\gamma) \boldsymbol{e}\left(\frac{h}{k} Q(\gamma)\right) \alpha\beta$$

ただし $h/k \in \mathbb{Q}$ は既約分数であって, Q は W^{-1} の左上の 2×2 行列が定める 2 次形式とする．このとき f_Γ は深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であって, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$f_\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)}{\zeta_k^{-(18 + \sum_{i=1}^{6} w_i + \sum_{i=3}^{6} 1/w_i)/4}} \mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma))$$

が成り立つ．

3 証明の概略

まず記号を準備する．

- h/k は既約分数,

- $M, N, a, c \in \mathbb{Z}_{>0}, b \in \mathbb{Z}$ で $ac - MNb^2 = 1$ を満たす,
- $Q(x, y) := Max^2 + 2MNbxy + Ncy^2$,
- 写像 χ: $\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,
- 写像 ψ: $\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,
- 写像 C: $\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

証明する際に重要なのが以下の命題である.

命題 3.1 ([MM21])**.** χ は以下の条件を満たすとする.

- $\sum_{\alpha \in \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \chi(\alpha) = 0$
- $\chi(\alpha) \neq 0$ なる α の既約分数表示の分母は $2M$
- $M\alpha, M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}$ は $\chi(\alpha) \neq 0$ なる α の取り方に依らない.

ψ も同様の条件を満たすとする. このとき

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in (\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \times (\frac{1}{2N}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})} \chi(\alpha)\psi(\beta)C(\alpha)e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{h}{k}Q(\alpha,\beta)} = 0$$

が成り立つ.

直接計算と命題 3.1 を使うことで WRT 不変量を重み付き Gauss 和で表示できる. 一方で Euler-Maclaurin の和公式と命題 3.1 を使うことで homological block の radial limit を重み付き Gauss 和で表示できる. 両者の表示が一致することから定理 2.1 が証明できる. 定理 2.1 と Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] の主結果を合わせることで定理 2.2 が証明できる. 以上が主結果の証明の概略である.

参考文献

[AM20] J. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. September 2020. arXiv:1811.05376v3.

[BKM19] Kathrin Bringmann, Jonas Kaszian, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20, 41, 2019.

[BMM20] Kathrin Bringmann, Karl Mahlburg, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.

[FIMT20] Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Hitoshi Murakami, and Yuji Terashima. Witten–Reshetikhin–Turaev function for a knot in Seifert manifolds. 2020. arXiv:2007.15872.

[GPPV20] Sergei Gukov, Du Pei, Pavel Putrov, and Cumrun Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.

[Hik06] Kazuhiro Hikami. Quantum invariants, modular forms, and lattice points. II. *J. Math. Phys.*, 47(10):102301, 32, 2006.

[LZ99] Ruth Lawrence and Don Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. volume 3, pages 93–107. 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.

[MM21] Akihito Mori and Yuya Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev, homological blocks, and quantum modular forms. 2021. arXiv:2110.10958v2.

[RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.

[Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.

[Zag10] Don Zagier. Quantum modular forms. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 659–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

同変特異インスタントン・フレアー理論による
結び目不変量

井森隼人 (京都大学大学院理学研究科)*

Floer 理論は Morse 理論の無限次元版であり，低次元トポロジーの領域で強力な不変量を提供してきた．Floer 理論には構成方法により複数の理論が存在する．低次元多様体論において重要なものとして instanton Floer 理論 [10], Heegaard Floer 理論 [32], monopole Floer 理論 [22] が挙げられる．これらの各理論には結び目に対するバージョンが存在し，Heegaard Floer 理論においては Ozsváth-Szabó[31] および Rasumussen[36] による構成，monopole Floer 理論においては Kronheimer-Mrowka[23] による構成が挙げられる． instanton Floer 理論の文脈では knot surgery による Floer[11] および Braam-Donaldson[2] の構成，特異接続 (singular connection) を用いた Collin-Steer[4] および Kronheimer-Mrowka[24] の構成が挙げられる． 特異接続は結び目の補空間で定義される微分幾何学的対象である． 特異接続を用いて構成される結び目の instanton Floer ホモロジーは一般に特異 instanton Floer ホモロジーと呼ばれる． 特異 instanton Floer ホモロジーには複数の変種が存在する． Daemi-Scaduto[6] は同変特異 instanton Floer 理論と呼ばれるバージョンを導入し，４次元 clasp numer の問題に対する応用 [7] を与えた． 不変量の扱いやすさという観点では，Heegaard Floer 理論は instanton Floer 理論に勝る側面があるが，一方で instanton Floer 理論にも他の理論からアプローチできないタイプの問題に有効な場合があり, 応用面での強みと言える． 本記事では Daemi-Scaduto による同変特異 instanton Floer 理論をさらに発展させて得られる結び目不変量とそのトポロジーへの応用について解説する． 発展の方向性は二つある．一つ目は同変特異 instanton Floer 理論の一般化 [19] であり，有理数でパラメータ付けされた結び目不変量の族が得られる． 二つ目は理論の精密化であり，これは Aliakbar Daemi 氏，佐藤光樹氏，Christopher Scaduto 氏，谷口正樹氏との共同研究に基づく． 理論の精密化によって，既存の理論では得られなかった情報を検出できる不変量が構成された． 第 1 節では，講演では触れられなかった同変特異 instanton Floer 理論による不変量の構成の概要と基本的な性質について解説する． 第 2 節ではトポロジーへの応用について解説する．

1 特異 instanton Floer 理論と不変量

1.1 特異 instanton Floer ホモロジーの概要

Y を向きづけられたホモロジー 3 球面，K を Y 内の向きづけられた結び目とする．$P \to Y$ を $SU(2)$-束であって K 上で複素直線束への分解 $P|_K = L \oplus L^*$ をもつものとする． 特異 $SU(2)$ 接

*E-mail: imori.hayato.67m(at)st.kyoto-u.ac.jp

続とは，簡潔に述べれば $Y \setminus K$ 上で定義された $SU(2)$ 接続 A であって，以下のホロノミー条件を満たすものである．

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{Hol}_{\mu(r)}(A) \sim_{\text{共役}} \exp 2\pi i \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

ここで，$\mu(r)$ は結び目 K の半径 $r > 0$ のメリディアン，$\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Q}$ は固定されたパラメーターである．α をホロノミー・パラメーターと呼ぶ． $\mathcal{A}(Y, K, \alpha)$ をホロノミー・パラメーター α をもつ特異 $SU(2)$ 接続の空間とする．厳密には $\mathcal{A}(Y, K, \alpha)$ の定義にはソボレフ空間など解析的設定が必要になるが，ここでは触れない． $\mathcal{G}(Y, K) = \mathrm{Map}((Y, K), (SU(2), U(1)))$ をゲージ変換群と呼ぶ． $\pi_0(\mathcal{G}(Y, K))$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に同型である．この同型は射の組 $Y \to SU(2)$, $K \to U(1)$ の写像度を対応させせることで得られる． $\mathcal{G}_{(0,0)} \subset \mathcal{G}(Y, K)$ を $(0, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に対応する連結成分とする．Chern-Simons 汎関数 CS を以下で定義する．

定義 1.1. *(i)*

$$\mathrm{grad}CS_A = \frac{1}{4\pi^2} * F_A$$

(F_A は A の曲率と呼ばれる 2 次微分形式)

(ii) CS には適当な初期条件を与える．

特異接続の空間にはゲージ変換群が共役で作用するが，この作用を $\mathcal{G}_{(0,0)}$ に制限して商空間をとり，$\widetilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) = \mathcal{A}(Y, K, \alpha)/\mathcal{G}_{(0,0)}$ と書く． これは無限次元多様体の構造をもつ． Chern-Simons 汎関数は $\widetilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha)$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数 $CS : \widetilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) \to \mathbb{R}$ を定める． CS の臨界点集合は $\pi_1(Y \setminus K)$ の $SU(2)$ 表現であって，K のメリディアンのホモトピー類を

$$\exp 2\pi i \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

に共役な元に写すものに対応する． 横断正則性など技術的な問題をクリアすれば，無限次元多様体上の Chern-Simons 汎関数 $CS : \widetilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) \to \mathbb{R}$ に対して，有限次元多様体における Morse ホモロジーの類似物が構成される．

命題 1.2. $\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Q}$ を $\Delta_{K \subset Y}(e^{4\pi i \alpha}) \neq 0$ であるように固定する． CS の臨界点集合 $\mathrm{Crit}(CS)$ に $\mathbb{Z}$ 次数が定まる． $n(\beta_1, \beta_2)$ を次数の差が *1* となる臨界点 β_1, β_2 を結ぶ CS の *gradient flow* の符号付数え上げとする．

$$C_*^\alpha(Y, K) = \bigoplus_{\beta \in \mathrm{Crit}^*(CS)} \mathbb{Z}\beta$$

$$\langle d\beta_1, \beta_2 \rangle = n(\beta_1, \beta_2)$$

と定めると，$(C_*^\alpha(Y, K), d)$ は *chain* 複体になる． $(C_*^\alpha(Y, K), d)$ のホモロジー群を取ると，結び目不変量 $I_*^\alpha(Y, K)$ が得られる．

ここでは $\mathcal{B}(Y, K, \alpha) := \mathcal{A}(Y, K, \alpha)/\mathcal{G}(Y, K)$ の普遍被覆空間である $\widetilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha)$ 上での Morse 理論の類似として特異 instanton Floer ホモロジーを紹介した．以上の構成は $\mathcal{B}(Y, K, \alpha)$ 上の局所系付きホモロジー理論と解釈することもできる． 局所系を用いた解釈では chain 複体が有限生成になるが，係数は本質的に Novikov 環を用いる必要がある． Novikov 環を用いた構成は [8] で明示的に与えられた．[19] では，より一般の係数に構成を拡張している．

1.2 結び目不変量とその性質

定義 1.3. (C_*, d) を整域 R を係数とする次数付き有限生成 *chain* 複体とする． このとき，*chain* 複体 $(\tilde{C}_*, \tilde{d})$ であって

$$\tilde{C}_* = C_* \oplus C_{*-1} \oplus R,$$

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ v & -d & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

によって与えれるものを $\mathcal{S}$-複体と呼ぶ.

$\mathcal{S}$-複体は $C_* = C_*^\alpha(Y, K)$ に対して実現される． ホモロジー 3 球面と結び目の組をつなぐコボルディズム $(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$ であって, ある技術的仮定を満たすものは $\mathcal{S}$-複体に射

$$\widetilde{C}(W, S) : \widetilde{C}_*^\alpha(Y, K) \to \widetilde{C}_*^\alpha(Y', K')$$

を誘導する． このような技術的仮定を満たすペアのコボルディスム (W, S) を負定値コボルディズムと呼ぶ． [6, 7] ではホロノミー・パラメーターが $\alpha = 1/4$ の場合に $\mathcal{S}$-複体と負定値コボルディズムが導入された. [19] ではより一般の有理ホロノミー・パラメーターへの拡張を行っている． Floer chain 複体 $C_*^\alpha(Y, K)$ は $\mathbb{R}$ 値次数をもち，フィルター付き複体 $C_*^\alpha(Y, K)^{[s,r]} \subset C_*^\alpha(Y, K)$ が定義される． フィルター付き複体の構成はホモロジー 3 球面の場合に [29] で導入された． フィルター版の構成から結び目に対する r_s 不変量が定義される．(簡単のため，$\alpha = \frac{1}{4}$ の場合のみ定義を与える．)

定義 1.4. (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口) (Y, K) を向きづけられたホモロジー 3 球面と結び目とする． $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}$ を固定し, (Y, K) に対する r_s 不変量を以下で定義する.

$$r_s^\alpha(Y, K) := \inf\{r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} | \gamma \in C_*^\alpha(Y, K)^{[s,r]} \otimes \mathbb{Q}, \delta_1^{[s,r]}(\gamma) \neq 0, d^{[s,r]}\gamma = 0\}.$$

$\delta_1^{[s,r]}$, $d^{[s,r]}$ は定義 1.3 における δ_1, d をフィルター付き複体へ制限したものである． $Y = S^3$ のときは単に $r_s(K)$ と書くことにする． r_s 不変量はコンコーダンス不変量になるが，コンコーダンス群上の準同型にはならず，次の連結和公式を満たす.

命題 1.5.

$$r_0(K_1 \# K_2) \geq \min\{r_0(K_1), r_0(K_2)\}.$$

また r_s 不変量は ∞ に値を取るとき，自明であると解釈する． 以下の命題はコンコーダンス群で一次独立な結び目の族を得る際に有効である.

命題 1.6. $\{K_i\}$ を以下を満たす結び目の族とする．$-K^*$ で K の向きを逆にした鏡像を表す.

$$\infty > r_0(K_1) > r_0(K_2) > \cdots,$$

$$\infty = r_0(-K_1^*) = r_0(-K_2^*) = \cdots.$$

このとき，$\{K_i\}$ はコンコーダンス群 $\mathcal{C}$ で一次独立.

証明はホモロジー 3 球面の場合 [29] と同様である.

2 トポロジーへの応用

2.1 基本群と $SU(2)$ 表現

自明な結び目 U に対しては Papakyriakoupoulous[34] により，$\pi_1(S^3 \setminus U)$ は無限巡回群であることが示されている． Kronheimer-Mrowka[26] は Yang-Mills ゲージ理論を用いてこれを精密化し，非自明な結び目 K に対して， 補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ はアーベル群 $U(1)$ を経由しない $SU(2)$ 表現をもつことを示した. 次のように，結び目コンコーダンス $S \subset [0,1] \times S^3$ の補空間の基本群の表現に関する結果も知られている． Daemi-Scaduto[7] は，$\sigma(K) \neq 0$ となる結び目 K と任意の結び目コンコーダンス $S : K \to K$ に対し， $\pi_1([0,1] \times S^3 \setminus S)$ は $U(1)$ を経由しない $SU(2)$ 表現をもつことを示した. 特定のクラスの結び目に対しては，表現の拡張性に関する次のような結果も知られている． $T_{p,q}$ を (p,q)-torus knot とする．

定理 2.1. ([7]) 任意のコンコーダンス $T_{p,q} \to K$ に対し，$\pi_1(S^3 \setminus T_{p,q})$ の任意の *traceless* $SU(2)$ 表現はコンコーダンス補空間上に拡張する．

ここで traceless $SU(2)$ 表現とは K のメリディアンのホモトピー類が $SU(2)$ の trace=0 となる元に移される $SU(2)$ 表現のことである． これはホロノミー・パラメーターが $\alpha = \frac{1}{4}$ である特異平坦接続に対応する． この結果はスライス・リボン予想の変種に動機づけられている． コンコーダンス $S : K \to K'$ は射影 $[0,1] \times S^3 \to [0,1]$ が極大点をもたない Morse 関数になるとき，リボン・コンコーダンスであると言う． スライス・リボン予想の主張は次で与えられる．

予想 2.2. ([12]) 任意のコンコーダンス $S : U \to K$ に対し，リボン・コンコーダンス $R : U \to K$ が存在する．

一方，リボン・コンコーダンスが存在するとき，基本群の $SU(2)$ 表現に関する次の性質が成立する．

命題 2.3. ([14, 5]） リボン・コンコーダンス $R : K \to K'$ が存在するとき，$\pi_1(S^3 \setminus K)$ の任意の $SU(2)$ 表現はコンコーダンス補空間の基本群 $\pi_1([0,1] \times S^3 \setminus R)$ に拡張する．

従って，定理 2.1 は次の予想に対する evidence を与えている．

予想 2.4. ([7]) 任意のコンコーダンス $S : T_{p,q} \to K$ に対し，リボン・コンコーダンス $R : T_{p,q} \to K$ が存在する．

定理 2.1 の traceless 条件は技術的な理由から発生する． 実際には同変特異 instanton Floer 理論の構成を族に拡張することで traceless 条件を外すことができる． [19] における主結果は以下のとおりである．

定理 2.5. ([19]) 任意のコンコーダンス $T_{p,q} \to K$ に対し，$\pi_1(S^3 \setminus T_{p,q})$ の任意の $SU(2)$ 表現はコンコーダンス補空間上に拡張する．

定理 2.5 の証明において本質的な議論は torus knot に対する Floer chain 複体 $C_*^\alpha(T_{p,q})$ が偶数次数で自明になることである． 「torus knot 以外に同様の性質をもつ結び目がどれくらい存在する

か?」というのは興味深い問題である． [4] では一般に algebraic knot に対して同様の性質が成立することを予想している． より一般に iterated torus knot に対して成立する可能性も考えられる．

2.2 結び目コンコーダンス群とその構造

$\mathcal{C}$ を (smooth な) 結び目コンコーダンス群とする． コンコーダンス群 $\mathcal{C}$ の構造は古典的には代数的コンコーダンス群の観点から研究されてきた． Levine[27] により代数的コンコーダンス群は構造 $\mathcal{C}_{\mathrm{alg}} \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$ をもち，Seifert 形式を与える対応によって全射 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{alg}}$ が得られることが示された． 全射 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{alg}}$ の核を $\mathcal{C}_{AS} \subset \mathcal{C}$ と書く． 部分群 $\mathcal{C}_{AS}$ に含まれる結び目は代数的スライス結び目と呼ばれる． さらに, $\mathcal{C}_{AS}$ には位相的スライス結び目からなる部分群 $\mathcal{C}_{TS}$ が含まれる． $\mathcal{C}_{TS}$ が $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群をもつことは遠藤 [9] によってはじめて証明された． 手法は double branched covering 上の Yang-Mills ゲージ理論に基づく． Hom[16] は Heegaard Floer 理論を用いて，部分群 $\mathbb{Z}^\infty \subset \mathcal{C}_{TS}$ を検出している． Heegaard Floer 理論はより強い結果を得るためにも有効である． $\mathcal{C}_{TS}$ 内の $\mathbb{Z}^\infty$-summand の存在が [17, 33] によって示されている． より深い構造として，$\mathcal{C}_{TS}$ には自明な Alexander 多項をもつ結び目からなる部分群 $\mathcal{C}_\Delta$ が含まれる． $\mathcal{C}_\Delta$ にも $\mathbb{Z}^\infty$-summand が存在することが [20] により示されている． このように，コンコーダンス群の構造に関する研究の進展においては Heegaard Floer 理論に由来するコンコーダンス不変量の応用が主流的な手法となっている． しかし，これまでに知られている Floer 理論的手法から得られるコンコーダンス不変量の多くは交代結び目に対して情報量が結び目の符号数程度に退化することが知られている． 例えば, Heegaard Floer 理論における τ 不変量 [30]， ϵ 不変量 [16], ν^+ 不変量 [18], Υ 不変量 [33], Khovanov ホモロジーにおける s 不変量 [35], Seiberg-Witten 理論における δ 不変量 [28], およびその族版 [1] が挙げられる． Seiberg-Witten Floer K 理論による κ 不変量についても，少なくとも 2-bridge kot に対しては情報量が符号数に退化することが示されている [21]． 一方 r_s 不変量は 2-bridge knot に対して符号数より真に強力な情報をとらえることができる． これは既存の Floer 理論的不変量とは異なる特徴である． 具体的には，以下の定理が r_s 不変量を用いて示される．

定理 2.6. (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口) *2-bridge knot* の族

$$\{K_{m,n} := K(212mn - 68n + 53, -106m + 34)\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

は各 $m \geq 7$ に対し，代数的コンコーダンス群 $\mathcal{C}_{\mathrm{alg}}$ の中で *torsion* かつコンコーダンス群 $\mathcal{C}$ で一次独立．

$K_{m,n}$ は図 1 で与えられる． 条件 $m \geq 7$ は $K_{m,n}$ の Tristram-Levine signature が恒等的に 0 となる条件である． したがって $m \geq 7$ に対して $K_{m,n}$ は $\mathcal{C}_{alg} = \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$ の torsion 元を定める．定理 2.6 の系として次が得られる．

系 2.7. 各 $m \geq 7$ に対し, 整数列 $l_{m,n}$ が存在し，$\{l_{m,n}K_{m,n}\}_{n>0}$ は代数的スライスかつ $\mathcal{C}$ 内で一次独立な交代結び目の族となる．

定理 2.6 の証明の概略を述べる． [7] による計算から，Γ 不変量の評価 $\frac{1}{10} < \Gamma_{10_{28}}(0)$ を得る． これより $K_{m,1} = -10_{28}^*$ に対する r_s 不変量について $r_0(K_{m,1}) < \infty$ が得られる． twist を増やす操

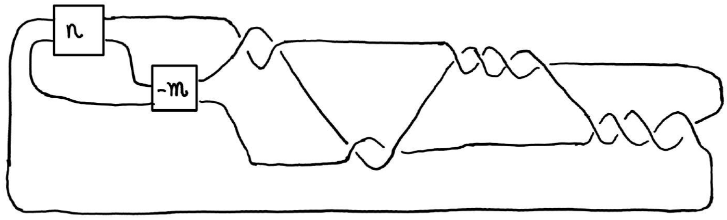


図 1: 2-bridge knot $K_{m,n}$

作により，ペアの負定値コボルディズム

$$(W_n, S_n) : (S^3, K_{m,n}) \to (S^3, K_{m,n+1})$$

で $\pi_1(W_n \setminus S_n) = 1$ かつ $g(S_n) = 0$ を満たすものが構成できる． これより不等式

$$\infty > r_0(K_{m,1}) > r_0(K_{m,2}) > \cdots$$

が得られる． 一方 $K_{m,n}$ の図 2 において, n-full twist の部分を解消する操作によって，null homologous な円板の境界となる結び目 K' と，負定値コボルディズム $K' \to -K^*_{m,n}$ が得られる． よって $r_0(-K^*_{m,n}) \geq r_0(K') = \infty$. 命題 1.6 を適用して主張を得る． このように，r_s 不変量は交代結び目からなる $\mathcal{C}_{AS}$ の $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を検出できる点において，既存の Floer 理論によるコンコーダンス不変量とは異なった特徴をもつ. 一方で $\mathcal{C}_{AS}$ 内の $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群そのものは，Casson-Gordon 不変量 [3] を用いて検出することもできる． 従って次の問いが生じる．

問 2.8. *2-bridge knot* の族 $\{K_{m,n} = K(212mn-68n+53, -106m+34)\}_{m\geq 7, n>0}$ に自明な *Casson-Gordon* 不変量をもつ一次独立な族は存在するか？

問 2.8 が正しければ，r_s 不変量は交代結び目の一次独立性に関して，Casson-Gordon 不変量より精密な情報を検出できることになる．

2.3 サテライト作用素に関する応用

$P \subset S^1 \times D^2$ を solid torus 内の結び目とする． 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対して，その管状近傍 $N(K)$ を solid torus と同一視して得られる P の像を $P(K)$ と表し，$K \subset S^3$ のパターン P に関するサテライト結び目 (satellite knot) と呼ぶ. パターン P に関してサテライト結び目を取る操作はコンコーダンス群上にサテライト作用素 (satellite operator) $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を誘導する． 一般にサテライト作用素は準同型でないことが知られている． サテライト作用素に関して Hedden-Caicedo[15] は次の予想を提示した．

予想 2.9. ([15]) 定値でない任意のサテライト作用素の像は無限 *rank* をもつ.

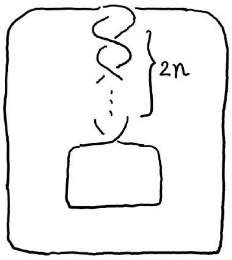


図 2: n-twisted knot K_n

ここで，サテライト作用素の像が無限 rank をもつ，とはサテライト作用素の像が生成する $\mathcal{C}$ の部分群が無限 rank をもつことを意味する．予想 2.9 はパターン P が winding number 0 をもつか否かによって状況が異なる．実際，パターン P の winding number$\neq 0$ の場合は，　予想 2.9 は比較的容易に証明を与えることができる．

命題 2.10. ([15]) P を *winding number*$\neq$ 0 のパターンとする．このとき，サテライト作用素 $P: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は無限 *rank* をもつ．

証明は signature function など古典的な手法の範囲内で与えられる．一方，winding number $\neq 0$ の状況では，double branched cover 上のゲージ理論を用いて，次の部分解が与えられた．

定理 2.11. ([15]).　P を *winding number* 0 のパターンとし，$\Sigma_2(P(U))$ を結び目 $P(U) \subset S^3$ に沿う *double branched cover* とする．　∂D^2 が $\Sigma_2(P(U))$ に $\mathbb{Q}$-*linking number* $\neq 0$ となるリフトをもつとき，$P: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は無限 *rank* をもつ．

一方，r_s 不変量を用いて予想 2.9 にアプローチできる．　$P_{(p,q)}$ を (p,q)-cabling knot をとる操作とし，　Wh_m を m-twisted Whitehead double をとる操作とする．

定理 2.12. (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口) K_n を図 *2* で与えられる結び目の族とする．任意の整数 $p, m > 0$ に対し，$\{P_{p,1} \circ Wh_m(K_n)\}_{n>0}$ はコンコーダンス群 $\mathcal{C}$ 内で線型独立．

定理 2.12 の応用として，次の系が得られる．

系 2.13. サテライト作用素 $P_{p,1} \circ Wh_m : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ の像は無限 *rank* をもつ．

系 2.13 に関して注意を述べておく．

注意 2.14.　*(i)* $P_{p,1} \circ Wh_m$ は *winding number=0* のサテライト作用素である．

(ii) $\Sigma_2(P_{p,1} \circ Wh_m(U)) = \Sigma_2(U) = S^3$ より，特に $\mathbb{Q}$-*linking number* は自明である．

(iii) $P_{p,1} \circ Wh_m$ の像として得られる結び目は位相的スライスになる．

(iv) コンコーダンス種数 $g_c(P_{p,1} \circ Wh_m(K))$ は p によって上から評価される．

(i) および (ii) により，系 2.13 が定理 2.11 と独立した予想 2.9 の部分解を与えていることが分かる．(iv) の性質により，今回検出した一次独立な族は Heegaard Floer 理論から検出するのは困難と考えられる． 定理 2.12 の証明の概略について述べる． Kronheimer-Mrowka[25] による，Rasmussen 型不変量 $s^{\#}$ を用いる． $\sigma(K)=0$ かつ $r_{-\infty}(-K^*)=\infty$ のとき，$s^{\#}(K)\leq 0$ であることが示される．一方, Gong[13] により quasi-positive knot に対して $s^{\#}(K)\geq 0$ が成立する． 特に $P_{(p,q)}Wh(K_n)$ は strongly quasi-positive であり， $s^{\#}(P_{(p,q)}Wh(K_n))>0$ が成立する． $\sigma(-P_{(p,1)}Wh(K_n))=0$ であるから， $r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_n)^*)<0$ が導かれる． 負定値コボルディズム

$$(W_n,S_n): -P_{(p,1)}Wh(K_n)^* \to -P_{(p,1)}Wh(K_{n+1})^*$$

で $\pi_1(W_n\setminus S_n)=1$ かつ $g(S_n)=0$ となるものが構成でき, 以下の不等式を得る．

$$r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_1^*))>r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_2^*))>\cdots.$$

また $r_0(P_{(p,1)}Wh_m(K_n))=\infty$ も得られる． 命題 1.6 を適用することで主張を得る．

参考文献

[1] David Baraglia and Pedram Hekmati. Equivariant Seiberg-Witten-Floer cohomology. *arXiv preprint arXiv:2108.06855*, 2021.

[2] Peter J Braam and Simon K Donaldson. Floer's work on instanton homology, knots and surgery. In *The Floer memorial volume*, pages 195–256. Springer, 1995.

[3] Andrew Casson and Cameron Gordon. On slice knots in dimension three. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part*, volume 2, pages 39–53, 1978.

[4] Olivier Collin and Brian Steer. Instanton Floer homology for knots via 3-orbifolds. *Journal of Differential Geometry*, 51(1):149–202, 1999.

[5] Aliakbar Daemi, Tye Lidman, David Shea Vela-Vick, and C-M Michael Wong. Ribbon homology cobordisms. *arXiv preprint arXiv:1904.09721*, 2019.

[6] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto. Equivariant aspects of singular instanton Floer homology. *arXiv preprint arXiv:1912.08982*, 2019.

[7] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto. Chern-Simons functional, singular instantons, and the four-dimensional clasp number. *arXiv preprint arXiv:2007.13160*, 2020.

[8] Mariano Echeverria. A Generalization of the Tristram-Levine Knot Signatures as a Singular Furuta-Ohta Invariant for Tori. *arXiv preprint arXiv:1908.11359*, 2019.

[9] Hisaaki Endo. Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group. *Topology and its Applications*, 63(3):257–262, 1995.

[10] Andreas Floer. An instanton-invariant for 3-manifolds. *Communications in mathematical physics*, 118(2):215–240, 1988.

[11] Andreas Floer. Instanton homology, surgery, and knots. *Geometry of low-dimensional manifolds*, 1:97–114, 1990.

[12] Ralph H Fox. Some problems in knot theory. *Topology of 3-manifolds and related topics*, 1962.

[13] Sherry Gong. On the Kronheimer–Mrowka concordance invariant. *Journal of Topology*, 14(1):1–28, 2021.

[14] C McA Gordon. Ribbon concordance of knots in the 3-sphere. *Mathematische Annalen*, 257(2):157–170, 1981.

[15] Matthew Hedden and Juanita Pinzón-Caicedo. Satellites of infinite rank in the smooth concordance group. *Inventiones mathematicae*, 225(1):131–157, 2021.

[16] Jennifer Hom. The knot Floer complex and the smooth concordance group. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 89(3):537–570, 2014.

[17] Jennifer Hom. An infinite-rank summand of topologically slice knots. *Geometry & Topology*, 19(2):1063–1110, 2015.

[18] Jennifer Hom and Zhongtao Wu. Four-ball genus bounds and a refinement of the Ozsváth–Szabó tau invariant. *Journal of Symplectic Geometry*, 14(1):305–323, 2016.

[19] Hayato Imori. Instanton knot invariants with rational holonomy parameters and an application for torus knot groups. *arXiv preprint arXiv:2108.13998*, 2021.

[20] Min Hoon Kim and Kyungbae Park. An infinite-rank summand of knots with trivial Alexander polynomial. *Journal of Symplectic Geometry*, 16(6):1749–1771, 2018.

[21] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and Floer K-theory. *arXiv preprint arXiv:2110.09258*, 2021.

[22] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. *Monopoles and three-manifolds*. Cambridge, 2007.

[23] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Knots, sutures, and excision. *Journal of Differential Geometry*, 84(2):301–364, 2010.

[24] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Knot homology groups from instantons. *Journal of Topology*, 4(4):835–918, 2011.

[25] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Gauge theory and Rasmussen's invariant. *Journal of Topology*, 6(3):659–674, 2013.

[26] Peter B Kronheimer and Tomaz S Mrowka. Dehn surgery, the fundamental group and SU(2). *Mathematical Research Letters*, 11(6):741–754, 2004.

[27] Jerome Levine. Knot cobordism groups in codimension two. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 44(1):229–244, 1969.

[28] Ciprian Manolescu and Brendan Owens. A concordance invariant from the Floer homology of double branched covers. *International Mathematics Research Notices*, 2007(9):rnm077, 2007.

[29] Yuta Nozaki, Kouki Sato, and Masaki Taniguchi. Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group. *arXiv preprint arXiv:1905.04001*, 2019.

[30] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Knot Floer homology and the four-ball genus. *Geometry & Topology*, 7(2):615–639, 2003.

[31] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. *Advances in Mathematics*, 186(1):58–116, 2004.

[32] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 1027–1158, 2004.

[33] Peter S Ozsváth, András I Stipsicz, and Zoltán Szabó. Concordance homomorphisms from knot Floer homology. *Advances in Mathematics*, 315:366–426, 2017.

[34] Christos D Papakyriakopoulos. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43(1):169, 1957.

[35] Jacob Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. *Inventiones mathematicae*, 182(2):419–447, 2010.

[36] Jacob A Rasmussen. *Floer homology and knot complements.* Harvard University, 2003.

Balanced spatial graph の Υ 不変量

久保田　肇

概要

Υ 不変量とは，Knot Floer Homology の理論から得られる結び目のコンコーダンス不変量である．Knot Floer Homology を組み合わせ的に求める Grid homology の理論を用いた，Υ 不変量の組み合わせ的な再構成が Földvári[1] によって考えられている．Grid Homology の balanced spatial graph への拡張を利用して，Υ 不変量の balanced spatial graph への拡張を与える．

1　イントロダクション

1.1　背景

結び目の不変量に，Ozsváth,Szabó[4] と Rasmussen[8] がそれぞれ独立に定義した Knot Floer Homology があり，これは 3 次元多様体とそれに含まれる結び目の組に関する不変量を構成する理論である．Knot Floer Homolog により例えば，結び目の種数やファイバー結び目かどうかを特定したり，アレクサンダー多項式が等しいコンウェイ結び目と木下-寺坂結び目を類別するなどの応用がある．Knot Floer Homology の理論から構成される不変量として，Ozsváth,Szabó[5],[6] によって導入された τ 不変量，Υ 不変量がある．

結び目の滑らかなコンコーダンス類 $\mathcal{C}$ は連結和に関してアーベル群をなす．いずれの不変量も $\mathcal{C}$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像を与え，スライス種数や解消数の下限を与える．特に τ 不変量は Milnor 予想 $g_4(T_{p,q}) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ を示すことでも知られている．一方 Υ 不変量は τ 不変量より真に強力な不変量である．この不変量によってトポロジカルなスライス結び目が生成する $\mathcal{C}$ の部分群は $\mathbb{Z}^\infty$ を直和因子に持つことが [6] により示されている．このようにこれら 2 つの不変量はともにコンコーダンス不変量であり，結び目のコンコーダンスの研究において重要である．

Knot Floer Homology の Ozsváth,Szabó[4] らによる元の定義では擬正則曲線を用いるもので，一般に定義から直接組み合わせ的に計算できない．一方，特に 3 次元多様体が 3 次元球面 S^3 であるとき，不変量の計算が平面の図を用いて組み合わせ的に計算可能であることを Manolescu ら [3] が示し，このことをまとめた理論として Grid Homology が生まれた．Υ 不変量は Knot Floer Homology の理論で現れる鎖複体から，t-modified 鎖複体と呼ばれる新しい鎖複体を構成して得られる不変量である．この手法を Grid Homology 上で再現する試みが Földvári[1] によって行われた．これによれば $t \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$ に対して不変量 Υ^{Grid} が定義でき，これが Knot Floer Homology における Υ 不変量と同様ないくつかの性質を持つことが確かめられている．Ozsváth,Szabó による Knot Floer 鎖複体から得られる t-modified 鎖複体のホモロジー群が結び目の不変量になるのに対し，Grid Homology における t-modified 鎖複体のホモロジー群は厳密には結び目の不変量とはならない．具体的には，grid number が 1 つ増える stabilization の操作をするとそのホモロジー群は，t-grading が $1-t$ だけずれたコピーを持つ 2 倍のサイズになる．この点で Grid Homology の t-modified 鎖複体およびホモロジー群は Knot Floer Homology のそれらと微妙に異なる．Grid Homology における Υ^{Grid}

不変量が本来の Υ 不変量と等価であるかは明らかになっていないが，そうであることが期待されている．

特異結び目を含む，向き付けられた結び目および絡み目の拡張にあたるものとして transverse spatial graph が存在する．(図 1 参照) これを対象に，Grid Homology を拡張して不変量を構成する試みが Harvey,O'Donnol[2] によって行われた．さらに transverse spatial graph が balanced という条件を満たす場合，それらに対し Vance[9] が τ^{Grid} を定義できることを明らかにした．これは Grid Homology を用いて与えられたもので，Knot Floer Homology で構成された τ 不変量の拡張となっている．これは Sarkar[?] による Grid Homology を用いた結び目の τ 不変量の再現を拡張したものとなっている．

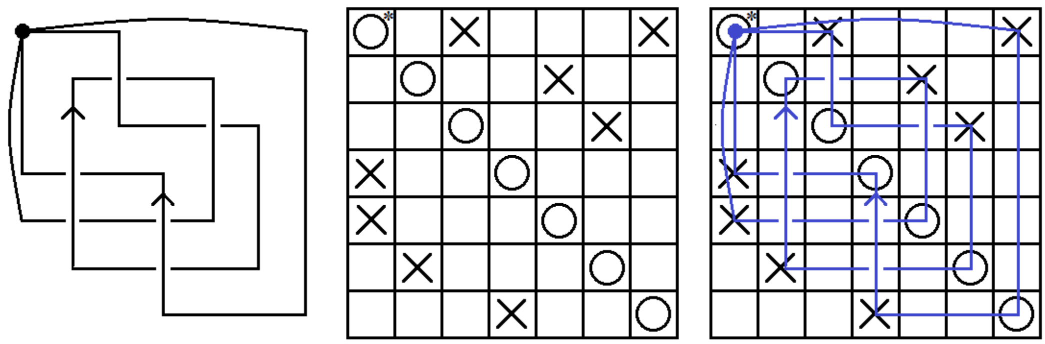


図 1　balanced spatial graph と graph grid diagram

この論文では上に述べた先行研究に基づいて，結び目の Υ 不変量について balanced spatial graph への拡張を，Grid Homology の理論を用いて与える．まず，balanced spatial graph $f\colon G \to S^3$ を表す graph grid diagram g から鎖複体 $CF^-(g)$ が [2] により組み合わせ的に定義されている．このホモロジー群は balanced spatial graph の不変量である．これを受けて筆者は $CF^-(g)$ から定まる t-modified 鎖複体 $tCF^-(g)$ を構成する．これは Grid Homology とは異なりホモロジー群が厳密には不変量とはならないが，ホモロジー群から Υ 不変量が定義できることを示した．

$tCF^-(g)$ は Maslov grading と Alexande grading から定まる t-grading による gradingd 鎖複体である．ここでの Alexander grading は本来の [2] による値を $H_1(S^3 - f(G))$ にとるものでなく，[9] で考えられた生成元を 1 に移す準同型 $H_1(S^3 - f(G)) \to \mathbb{Z}$ により $\mathbb{Z}$ へつぶしたものを用いる．このとき，結び目を扱う本来の Grid Homology とは異なり，transverse spatial graph では一般に Alexander grading が g の選び方によって定数だけずれる問題がある．そのため同じ f を表す g, g' に対し，$tCF^-(g)$ と $tCF^-(g')$ の間の対応が t-grading を保つとは限らず，$tCHF^-(g)$ がただちに t-gradingd 加群としての不変量とはならない．この問題を解決するために，[9] による Alexander grading を固定する手法を導入する．鎖複体 $CF^-(g)$ の Alexander grading をある意味で対称になるように取り直した鎖複体 $CF^{-H}(g)$ を導入し，$CF^{-H}(g)$ から得られる t-modified 鎖複体 $tCF^{-H}(g)$ を考える．するとそのホモロジー群 $tHF^{-H}(g)$ が t-graded 加群として不変量になることが確かめられ，問題の解決となった．

2　balanced patial graph の Grid Homology

2.1　graph grid diagram

graph G とは、1 次元 CW 複体で、各辺が向き付けられているものとする．

spatial graph とは，滑らかなあるいは区分的線形な埋め込み $f\colon G \to S^3$ のことで，S^3 内のイソトピーで移り変わるものは同じものとみなす.

定義 2.1. **transverse spatial graph** とは，spatial graph$f\colon G \to S^3$ で，各頂点 v において，v から出る辺と入る辺とを分離する小さなディスク D がとれるものをいう.

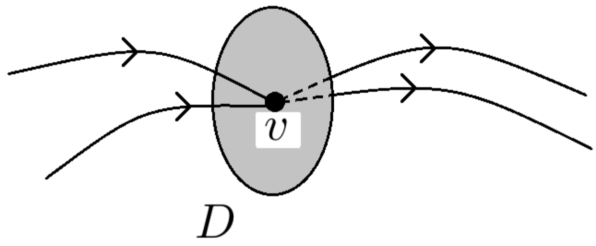


図 2　頂点 v とディスク D

定義 2.2. transverse spatial graph が **balanced** であるとは，全ての頂点において入る辺と出る辺の数が等しいときをいう.

以下，$f\colon G \to S^3$ は balanced spatial graph であると仮定する.

定義 2.3. **planar graph grid diagram** g とは $n \times n$ の平面のマス目で，n 個の O マークと n 個以上の X マークが，次を満たすようにマス目内に配置されたものをいう；

(i) 各行および列には O マークが 1 つずつ配置されている.
(ii) 同じマス目内に O マークと X マークの両方が配置されていない.
(iii) 各連結成分を構成する O マークには少なくとも 1 つ*がつけられた O^* マークが存在する.
(iv) 同じ行（または列）に複数の X マークが存在するとき，その行（列）に存在する O マークは O^* マークである.

n を g の **grid number** という.

X マークが配置されたマスの集合を $\mathbb{X}$，O マスが配置されたマスの集合を $\mathbb{O}$ と書く．また，n 個の O マークにラベル $\{O_i\}_{i=1}^n$ をつけ，X マークも同様に $\{X_i\}_{i=1}^n$ とする.

g に対し，同じ列にある X マークから O マークへ，同じ行にある O マークから X マークへ有向線分を結び，垂直方向の線分が常に水平方向の線分より手前で交わるとみなすことで，f の diagram を得る．このとき，g は f を表す graph grid diagram であるという.

今，f は balanced spatial graph を仮定しているので，どの O^* マークについてもそれを含む行と列にはそれぞれ同数の X マークが存在する.

定義 2.4. $i = 1, \ldots, n$ に対して，O_i の**重み** m_i を，g において O_i と同じ列 (または行) に存在する X マークの個数と定義する.

定理 2.5 (Proposition 3.3,[2])**.** 任意の transverse spatial graph $f\colon G \to S^3$ に対し，f を表す graph grid diagram g が存在する.

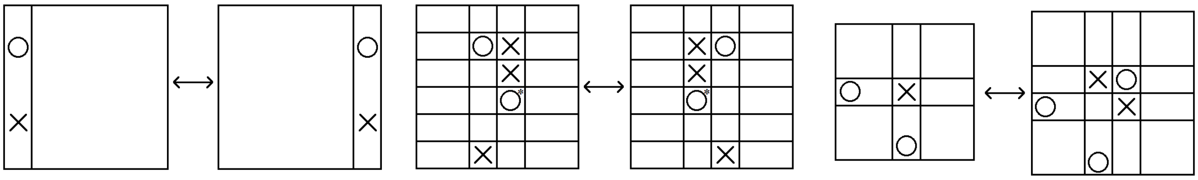


図 3　3 つの graph grid move

2.2　graph grid move

f を表す graph grid diagram は無数に存在する．異なる g, g' は，次で定義される操作で互いに移りあう．

定義 2.6 (Section 3.4,[2])**.** graph grid diagram g に対して，次の 3 つの操作を定義する（図**??**参照）；

1. **cyclic permutation:** g の列または行を巡回的に入れ替える操作．
2. **commutation':** toroidl diagram g の隣接する 2 列が次を満たすとき，その 2 列を入れ替える操作；トーラスの注目している 2 列内にある垂直方向に伸びる 2 つの線分 L_1, L_2 が，(1)$L_1 \cup L_2$ が 2 列全ての O マーク，X マークを含んでいる，(2)$L_1 \cup L_2$ を一つの β_i へ射影すると β_i が得られる，(3)$\partial(L_1) \cup \partial(L_2)$ の射影による像はちょうど 2 点からなる，すなわち L_1, L_2 それぞれの両端点の高さが等しい．ただし，ここでは O マーク，X マークはマスの中央，座標が整数の 1/2 倍にあたる点に存在すると思う．隣接する 2 行に関しても，列と行の役割を入れ替えて同様に定義する．
3. **(de-)stabilization':** ある X マークが存在するマスについて，そのマークおよびそれと同じ行，同じ列にある全てのマークを消す．次にその行および列を 2 つに分け，（あるいは新しい行，列を追加する）図のようにマークを配置し直して $(n+1) \times (n+1)$ graph grid diagram を得る．

この 3 つの操作をまとめて graph grid move という．

これら 3 つの操作は本来の結び目の Grid Homology での grid move[7] とほぼ同一である．commutation' は本来の grid move における commutation と switch を 1 つにまとめたものに相当し，stabilization' は本来の grid move における stabilization の特別な場合である．

定理 2.7 (Theorem 3.6,[2])**.** g, g' を，同じ transverse spatial graph を表す 2 つの graph grid diagram とするとき，これらは graph grid move の有限回の列で互いに移りあう．

定理 2.7 より, graph grid diagram g から定義される量が不変量であることを示すには, cyclic permutation, commutation,（de-)stabilization を 1 回施して不変であることをそれぞれ確かめればよい．

2.3　state

f を表す graph grid diagram g に対し，g の上端と下端，右端と左端を同一視して得られるトーラス状の図を考える．これを toroidal diagram という．toroidal diagram の各マスを分ける水平方向の直線を $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$，垂直方向の直線を $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ と書く．

定義 2.8. g の **state** とは，g の toridal diagram における n 個の $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の交点からなる集合で，各 α_i, β_j

上にちょうど 1 点だけ存在するものをいう．あるいは，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の間の全単射のことをいう．

g の grid state のからなる集合を $\mathbf{S}(g)$ と書く．

state が α_i と β_j を対応させているとき，その交点に点を打つことで表す．

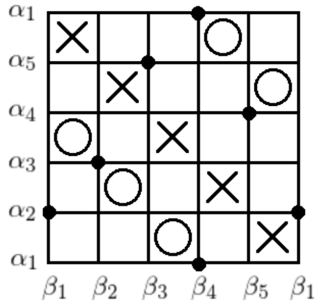


図 4　g と state の表記の一例

定義 2.9. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$ を，$n-2$ 点が等しい 2 つの state とする．$\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \setminus \mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ の 4 点を角にもつようなトーラスに埋め込まれたディスク r で，∂r が水平方向と垂直方向の直線全体の和集合上にあるようなものを考える．$\partial_\alpha r := \partial r \cap (\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha), \partial_\beta r := \partial r \cap (\beta_1 \cup \cdots \cup \beta)$ とする．r が $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ向かう**空な長方形**であるとは，

$$\partial(\partial_\alpha r) = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \partial(\partial_\beta r) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

かつ $\mathbf{x} \cap \mathrm{Int}(r) = \mathbf{y} \cap \mathrm{Int}(r) = \phi$ を満たすときをいう．

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$ に対して $\mathrm{Rect}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を，$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ向かう長方形からなる集合とする．ただし，$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の $n-2$ 点が等しくない場合は $\mathrm{Rect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi$ とする．

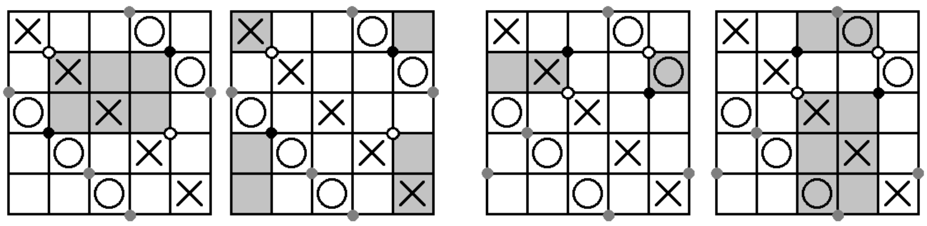


図 5　2 つの長方形が存在する例．黒と灰色の丸が $\mathbf{x}$，白と灰色が $\mathbf{y}$ を表す．

Grid Homology において，鎖複体の各元について境界準同型を考えることは，各 state に対し，空な長方形がいくつ存在するかを数えることに相当する．

2.4　$tCF^-(g)$ の定義

$t \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$ が $t = \frac{m}{n}$（ただし m と n は互いに素な整数かつ $n > 0$）と表されているとする．このとき $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．

空な長方形 $r \in \mathrm{Rect}^{\circ}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対し，$O_i(r)$ を，r が O_i を内部に含むとき 1，そうでないとき 0 と定義し，

$$|\mathbb{O} \cap r| := \sum_{i=1}^{n} O_i(r)$$

とし，$|\mathbb{X} \cap p|$ も同様に定義する．

定義 2.10. $t \in [0,2]$ とし，**t-modified graph grid complex** $tCF^{-}(g)$ を，$\mathbf{S}(g)$ が生成する自由 $\mathcal{R}_t$ 加群で，　自己準同型 ∂_t^- として，

$$\partial_t^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}(g)} \left(\sum_{r\in\mathrm{Rect}^{\circ}(\mathbf{x},\mathbf{y})} U^{t|\mathbb{X}\cap r|+2|\mathbb{O}\cap r|-t\left(\sum_{O_i\in\mathbb{O}\cap r} m_i\right)} \right) \mathbf{y}$$

を持つものをいう．

定義 2.11. grid numbaer n の toroidal grid diagram g に対し，g を水平方向と垂直方向の直線に沿って切ることで平面 $\mathbb{R}^2$ 内の $[0,n) \times [0,n)$ に自然に配置する．これを **planar realization** という．

定義 2.12. $\mathbb{R}^2$ の点について，$p_1 < q_1$ かつ $p_2 < q_2$ のとき，$(p_1,p_2) < (q_1,q_2)$ と順序を入れる．P,Q を $\mathbb{R}^2$ 上の有限個の点の集合とし，$\mathcal{I}(P,Q)$ を，点 $p \in P, q \in Q$ で $p < q$ を満たすペアの数とし，

$$\mathcal{J}(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{I}(P,Q) + (\mathcal{I}(Q,P)\right)$$

と定義する．

$\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)$ に対し，

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}-\mathbb{O}, \mathbf{x}-\mathbb{O}) + 1 \tag{1}$$

$$A(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbb{X} - \sum_{i=1}^{n} m_i O_i) \tag{2}$$

とし，**t-grade** gr_t を，

$$\mathrm{gr}_t(U^{\alpha}\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA(\mathbf{x}) - \alpha \tag{3}$$

とする．

spatial graph の graph grid homology についてまとめられた [2] おける A の定義では, 値を $H_1(S^3 - f(G))$ にとるものであるが，[9] およびここでは，$H_1(S^3 - f(G))$ の生成元を 1 に移す準同型を考えることにより $\mathbb{Z}$ につぶしたものを考える．

この定義において，M は toroidal diagram として well-defined であるが．A は well-defined でないことに注意する．また，本来の結び目の Grid Homology では Alexander grading の定義に補正項が加わり，well-defined となっている．

命題 2.13. $\partial_t^- \circ \partial_t^- = 0$ であり，∂_t^- は t-grading を 1 減らす．よって，$(tCF^t(g), \partial_t^-)$ は graded 鎖複体となる．

定義 2.14. $tCF_d^-(g) = \{U^\alpha \mathbf{x} \in tCF^-(g) | \mathrm{gr}_t(U^\alpha \mathbf{x}) = d\}$ とするとき，g の **t-modified graph grid homology** を

$$tHF_d^-(g) = \frac{\mathrm{Ker}(\partial_t^-) \cap tCF_d^-(g)}{\mathrm{Im}(\partial_t^-) \cap tCF_d^-(g)}$$
$$tHF^-(g) = \bigoplus_d tHF_d^-(g)$$

とする．

2.5 Alexander filtration の修正

前述した通り，Alexander grade は toroidal diagram として well-defined でなく，Alexander grading は f を表す graph grid diagram の取り方によってしまう．Alexander grading の絶対化を行うために，[9] で定義されたホモロジー群を導入する．

定義 2.15 (Definition 3.2,Proposition 3.7,[9])**.** $CF^-(g)$ を，$\mathbf{S}(g)$ が生成する $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 加群とする．$\partial^- \colon CF^-(g) \to CF^-(g)$ を，

$$\partial^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)} \left(\sum_{r \in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} V_1^{O_1(r)} \cdots V_n^{O_n(r)} \right) \mathbf{y}$$

とすると，$(CF^-(g), \partial^-)$ は鎖複体である．$\mathbf{S}(g)$ の元に対して式 1，式 2 で Maslov,Alexander grading を考る．ここでの Alexander grading は [2] で定義した，値を $H_1(S^3 \setminus f(G))$ にとる Alexander grading について，$H_1(S^3 \setminus f(G))$ の各生成元を 1 に送る準同型 $H_1(S^3 \setminus f(G)) \to \mathbb{Z}$ で移したものとなっている．次に，

$$M(V_i) = -2, A(V_i) = -m_i \ (i = 1, \dots, n)$$

として $CF^-(g)$ の元に 2 つの grade を対応させる．∂^- は Maslov grading を 1 つ減らし，Alexander grading を保つまたは減らすので $(CF^-(g), \partial^-)$ は $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 加群上の $\mathbb{Z}$-graded,$\mathbb{Z}$-filtererd 鎖複体である．この Alexander filtration を $\{\mathcal{F}_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$ と書く．

定義 2.16 (Definition 3.8,[9])**.** $f \colon G \to S^3$ を表す grid number n の g の O マークのうち，$O_1, \dots, O_k$ が f の辺の内部を表し，$O_{k+1}, \dots, O_n$ が f の頂点を表す O^* マークであるとする．$\mathcal{U}$ を $CF^-(g)$ の部分複体で，$V_{k+1}CF^-(g) \cup \cdots \cup V_n CF^-(g)$ を含む最小のものとする．このとき $\widehat{CF}(g) := CF^-(g)/\mathcal{U}$ とし，$\hat{\partial}$ を ∂^- が誘導する写像とすると，$(\widehat{CF}(g), \hat{\partial})$ は $\mathbb{F}$ ベクトル空間の $\mathbb{Z}$-graded,$\mathbb{Z}$-filtererd 鎖複体となる．$\widehat{CF}(g)$ における Alexander filtration を $\{\widehat{\mathcal{F}}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ と書く．

$\widehat{CF}(g)$ の associated graded object のホモロジー群を $\widehat{HFG}(g)$ を書く．

定義 2.17 (Definition 3.10,[9])**.** g に対し **symmetrized Alexander filtration** $\{\widehat{\mathcal{F}}_m^H\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を，$m_{\max}(g) = -m_{\min}(g)$ となるように各生成元の Alexander grading の値を平行移動して固定し直しすことで得られる Alexander filtration をいう．ただし，

$$m_{\max}(g) := \max \left\{ m | H_* \left(\widehat{\mathcal{F}}_m(g) / \widehat{\mathcal{F}}_{m-1}(g) \right) \neq 0 \right\}$$
$$m_{\min}(g) := \min \left\{ m | H_* \left(\widehat{\mathcal{F}}_m(g) / \widehat{\mathcal{F}}_{m-1}(g) \right) \neq 0 \right\}$$

である．また，$\mathbf{S}(g)$ の各元に対して $\{\widehat{\mathcal{F}}^H_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ が定める Alexander grading から決まる $CF^-(g)$ の修正した Alexander filtration を $\{\mathcal{F}^{-H}_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ と書く．

このように Alexander grade$\{\widehat{\mathcal{F}}^H_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ および $\{\mathcal{F}^{-H}_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を取り直した鎖複体をそれぞれ $\widehat{CF}^H(g), CF^{-H}(g)$，それらの associated graded object のホモロジー群をそれぞれ $\widehat{HF}^H(g), HF^{-H}(g)$ と書く．

定理 2.18 (Theorem 3.15,[9])**.** g, g' を同じ balanced spatial graph を表す graph grid diagram とすると，bigraded 加群として

$$\widehat{HF}^H(g) \cong \widehat{HF}^H(g')$$

$$HF^{-H}(g) \cong HF^{-H}(g')$$

証明の概要．g に対し graph grid move を 1 回施して g' を得たとすると，対応した次数 $(0,s)$ の homogeneous $\Phi\colon CF^-(g) \to CF^-(g')$ で，associated graded object のホモロジー群の間の同型 $H_*(\mathcal{F}^-_m(g)/\mathcal{F}^-_{m-1}(g)) \to H_*(\mathcal{F}^-_{m+s}(g')/\mathcal{F}^-_{m+s-1}(g'))$ を誘導するものが存在する．ただし $s = s(g,g')$ は g, g' による整数である．symmetrized Alexander filtration $\{\widehat{\mathcal{F}}^H_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を取り直すことで Φ を改めて $\Phi^H\colon CF^{-H}(g) \to CF^{-H}(g')$ と書くことにすると，これは $\mathbb{Z}$-graded,$\mathbb{Z}$-filtered 鎖写像であることが分かり，filtered 擬同型である．

さらに，Φ^H から自然に $\widehat{\Phi}^H\colon \widehat{CF}^H(g) \to \widehat{CF}^H(g')$ が定まり，これも filtered 擬同型である． □

2.6 形式的な t-modified 鎖複体の構成

ここでは，$\mathbb{F}[V]$ 加群上の $\mathbb{Z}$-graded,$\mathbb{Z}$-filtered 鎖複体 C から t-modified 鎖複体 C^t を形式的に構成する手法と，両者の関係について述べる．この節を通して，$t = \frac{m}{n} \in [0,2]\cap\mathbb{Q}$，$\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．

$\mathbb{F}[V]$ 加群上の Maslov graded, Alexander filtered 鎖複体 C の生成元 $\mathbf{x}$ をとる．V の積は Maslov grading を-2 ずらすため，Maslov grading が $M(\mathbf{x})-1$ である元は一般に $V^{\frac{M(\mathbf{y})-M(\mathbf{x})+1}{2}}\cdot\mathbf{y}$ の線形和として表される．ただし $\mathbf{y}$ は C の生成元で，$M(\mathbf{y}) \geqq M(\mathbf{x})-1$ を満たすものとする．このことから C の境界準同型 ∂ は

$$\partial(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in C:\text{ 生成元}} c_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\cdot V^{\frac{M(\mathbf{y})-M(\mathbf{x})+1}{2}}\cdot\mathbf{y} \quad (c_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\in\mathbb{F}) \tag{4}$$

と表すことができる．

定義 2.19 (Definition 4.1,[6])**.** $\mathbb{F}[V]$ 加群上の Maslov graded, Alexander filtered 鎖複体 (C,∂) に対し，$V=U^2$ とする．$\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ 加群上の **t-modified 鎖複体** $(C,\partial)^t = (C^t,\partial^t)$ とは，次のようにして得られるものをいう；

- $\mathcal{R}_t$ 加群として，$C^t \cong C\otimes_{\mathbb{F}[V]}\mathcal{R}_t$ である．
- C の生成元 $\mathbf{x}$ に対し t-grading を $\mathrm{gr}_t(U^\alpha\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA(\mathbf{x}) - \alpha$ と定め，C^t を t-graded 加群とみなす．
- C^t の境界準同型 ∂^t を，

$$\partial^t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in C^t:\text{ 生成元}} c_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\cdot U^{M(\mathbf{y})-M(\mathbf{x})+1}\cdot\mathbf{y}$$

とする．ただし $c_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ は式 (4) が定める値.

注意：この定義 2.19 において，Alexander grading が各生成元に対して定義されてさえいれば，C^t の全ての元に対し t-grading が定義可能であるから，Alexander filtrated 鎖複体でなくても $\mathcal{R}_t$ 加群 C^t は定義可能である．このことはのちに命題 2.20 で用いる．

g を graph grid diagram とする．$\mathbb{F}[V_1,\dots,V_n]$ 加群上の鎖複体 $(CF^-(g),\partial)$（定義 2.15 参照）に対し，$\mathbb{F}[V]$ 加群 $CF_V^-(g)$ を次のように定める；$CF_V^-(g)=\frac{CF^-(g)}{V_1=V_2=\cdots=V_n}$ とし，V の作用として V_i から導かれるものを考え，$\mathbb{F}[V]$ 加群とみなす．さらに ∂ が導く $\mathbb{F}[V]$ 加群の準同型を ∂_V と書くことにすると，$(CF_V^-(g),\partial_V)$ は $\mathbb{F}[V]$ 加群上の鎖複体である．ここで，各 V_i による $CF^-(g)$ への作用について，Maslov grading の変化は -2 で等しいが，Alexander grading の変化は $-m_i$ となり等しいとは限らない．よって $CF_V^-(g)$ は $M(V^\alpha\mathbf{x})=M(\mathbf{x})-2\alpha$ とすることで全ての元に対し Maslov grading を定義でき Maslov graded 鎖複体とみなせるが，Alexander grading は生成元以外の元に対して定義されるとは限らず，Alexander filtered 鎖複体と見なせるとは限らない．

命題 2.20. graded $\mathcal{R}_t$ 加群上の鎖複体として，

$$(CF_V^-(g),\partial_V)^t\cong(tCF^-(g),\partial_t^-)$$

である．

2.7 t-grading の修正

$tCF^-(g)$ に対し，2.5 節で定義した symmetrized Alexander filtration により $\mathbf{S}(g)$ の各元の Alexander grading の値を取り直してできる鎖複体を考えると，そのホモロジー群が graded 加群として不変量となる．このことを 2.6 節の内容を用いて示す．

定義 2.21. symmetrized Alexander filtration が定める $\mathbf{S}(g)$ の各元 $\mathbf{x}$ の Alexander grrading の値を $A^H(\mathbf{x})\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ と書く．改めて $\mathrm{gr}_t^{-H}(U^\alpha\mathbf{x})=M(\mathbf{x})-tA^H(\mathbf{x})-\alpha$ として修正した t-grading をとり，$tCF^-(g)$ を gr_t^{-H}-graded 鎖複体として見たものを $tCF^{-H}(g)$ と書く．

2.8 主要な結果

$t\in[0,2]\cap\mathbb{Q}, t=\frac{m}{n}$ とし，$\mathcal{R}_t=\mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．ただし $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$．$W_t$ を 2 次元 graded ベクトル空間 $W_t\cong\mathbb{F}_0\oplus\mathbb{F}_{-1+t}$ とする．ここで添え字の $0,-1+t$ は t-grading の値を表す．graded $\mathcal{R}_t$-加群 X に対し，$X[a]$ で grade の shift$X[a]_d=X_{d+a}$ を表すとき，

$$X\otimes W_t\cong X\oplus X[1-t]$$

である．

定理 2.22. balanced spatial graph $f\colon G\to S^3$ を表す 2 つの graph grid diagram g,g' の grid number をそれぞれ n,m $(n>m)$ とするとき，graded $\mathcal{R}_t$-加群として

$$tHF^{-H}(g)\cong tHF^{-H}(g')\otimes W_t^{\otimes(n-m)}$$

が成り立つ．

証明の概要．証明は次の 3 つからなる；

- g' と g が 1 回の cyclic permutation で移りあうとき，$tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g')$
- g' と g が 1 回の commutation' で移りあうとき，$tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g')$
- g' が g に 1 回の stabilization' をすると得られるとき，$tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g') \otimes W_t$

それぞれで symmetrized 前の t-modified 鎖複体 $tCF^-(g), tCF^-(g')$ の間で t-grading を $t\mathbb{Z}$ だけずらす擬同型写像を構成する．それらが symmetrized した $tHF^{-H}(g), tHF^{-H}(g')$ の間で t-grading を保つことを確かめる．そのためには命題 2.20 を用いて，構成した t-modified 鎖複体の間の擬同型写像に対応する $CF^-(g)$ の間の擬同型写像を調べることで $CF^-(g)$ 上での議論に落とし込むことで間接的に示した． □

定義 2.23. balanced spatial graph $f\colon G \to S^3$ を表す graph grid diagram g について，$t \in [0,1]$ に対し

$$\Upsilon_g(t) := \max\{\mathrm{gr}_t(x) | x \in tGH^{-H}(g), x \text{ は homogeneous, non} - \text{torsion}\}$$

とし，$t \in [1,2]$ に対し $\Upsilon_g(t) = \Upsilon_g(2-t)$ とする．

定理 2.24. $\Upsilon_g(t)$ は f を表す graph grid diagram g の取り方によらない，balanced spatial grapn の不変量である．これを $\Upsilon_f(t)$ と書く．

証明. 定理 2.22 より従う．特に，$t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ならば $[1-t]$ の grading shift の影響を受けない． □

参考文献

[1] Földvári, Viktória. The knot invariant Υ using grid homologies. J. Knot Theory Ramifications 30 (2021), no. 7, Paper No. 2150051, 26 pp.

[2] Harvey, Shelly. O'Donnol, Danielle. Heegaard Floer homology of spatial graphs. Algebr. Geom. Topol. 17 (2017), no. 3, 1445–1525.

[3] Manolescu, Ciprian. Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Thurston, Dylan. On combinatorial link Floer homology. Geom. Topol. 11 (2007), 2339–2412.

[4] Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Holomorphic disks and knot invariants. Adv. Math. 186 (2004), no. 1, 58–116.

[5] Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Knot Floer homology and the four-ball genus. Geom. Topol. 7 (2003), 615–639.

[6] Ozsváth, Peter. Stipsicz, András. Szabó, Zoltán. Concordance homomorphisms from knot Floer homology. Adv. Math. 315 (2017), 366–426.

[7] Ozsváth, Peter. Stipsicz, András. Szabó, Zoltán. Grid homology for knots and links, Mathematical Surveys and Monographs, 208. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. x+410 pp. ISBN: 978-1-4704-1737-6

[8] Rasmussen, Jacob Andrew. Floer homology and knot complements. Thesis (Ph.D.)–Harvard University. 2003. 126 pp.

[9] Vance, Katherine. Tau invariants for balanced spatial graphs. J. Knot Theory Ramifications 29 (2020), no. 9, 2050066, 29 pp.

組紐指数3の結び目の影に関する研究

中村将士（岐阜大学大学院教育学研究科）
（花木良氏（岐阜大学教育学部）との共同研究）

概 要

交点の上下の情報がない結び目のダイアグラムを結び目の影と呼ぶ. 本稿では, 組紐指数 3 の影の交点に上下をつけて得られる結び目の影の集合について考察する. 自明な結び目の出てくる確率などについて紹介する.

1　はじめに

1.1　定義

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある有向な結び目 K を考える．ダイアグラムのすべての交点で上下情報がないもの（**前交点〔precrossing〕**）を，**影〔shadow 〕**という．一部の交点で上下情報がないものを**準射影図〔pseudo diagram〕**という（[2]）．準射影図は，ダイアグラムと影を含む．準射影図 Q の前交点に上下情報を与えて得られるダイアグラムやそれが表す結び目は，Q **から得られる〔obtained from Q, resolution〕**という．図 1 では，Q_4 は Q_1 から得られる．また，Q_4 は Q_2 からも得られる．Q_3 も Q_1 と Q_2 から得られる．

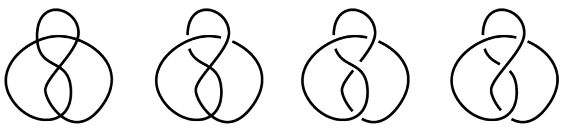


図 1: 準射影図，準射影図から得られる

1.2　研究動機

前交点の数が n の2-braidの影 B を閉包した影から得られる結び目を考えたい.このとき得られる結び目の射影図 D に対し, $N = |(D$ の正の交点の個数$) - (D$ の負の

N	得られる結び目	確率
1	0_1	${}_nC_{\frac{n-1}{2}}/2^{n-1}$
3	3_1	${}_nC_{\frac{n-3}{2}}/2^{n-1}$
5	5_1	${}_nC_{\frac{n-5}{2}}/2^{n-1}$

表 1: 得られる結び目

交点の個数)| とすると表 1 のような結果が得られる [3].
このように 2-braid の影は交点の上下の与え方によって, どのような確率でこれらの結び目が得られるかわかる. しかし,3-braid の影では, これほど容易に判断できない. そこで本稿では 3-braid の影から得られる結び目の種類やそれが得られる確率を考察する.

1.3 影の研究に関する先行研究

先行研究を紹介する.

定義 1.1. $PROJ(L)$ を絡み目 L の影の集合とする.
L_1はL_2より小さい〔minor〕$(L_1 \leqq L_2,\ L_2 \geqq L_1) \Leftrightarrow PROJ(L_1) \supset PROJ(L_2)$
このとき, L_2はL_1より大きいという [7].

$\mathcal{L}^\mu$をμ成分の絡み目の集合としたとき, $(\mathcal{L}^\mu, \leqq)$ は半順序 (対称律, 推移律) である. また, K を非自明な結び目としたとき, 次の 4 つ定理が成り立ち，図 2 のハッセ図を得た [7].

定理 1.2. K は 3_1より大きい

定理 1.3. K は 4_1より大きい
$\Leftrightarrow K$ は $(2,p)$ トーラス結び目以外の素な結び目を含む

定理 1.4. K は 5_1より大きい
$\Leftrightarrow K$ はプレッツェル結び目 (p_1, p_2, p_3) 以外の素な結び目を含む

定理 1.5. K は 5_2より大きい
$\Leftrightarrow K$ は $(2,p)$ トーラス結び目と 4_1以外の素な結び目を含む

また 6_2 に関しては次の定理が成り立つ [6].

定理 1.6. $PROJ(6_2)$ = 結び目の影全体の集合から図 3 の 6 種類の連結和を引いたもの

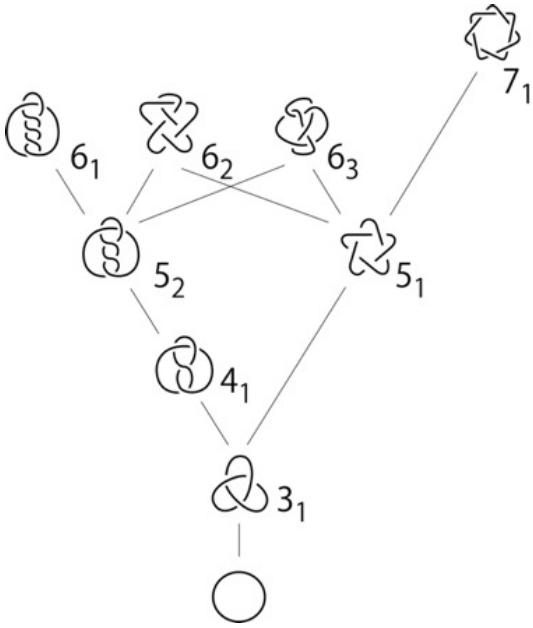


図 2: 結び目の半順序

準射影図に対して, ライデマイスター移動に加え, 図 4 を許したものを**準結び目**〔pseudoknot〕という [3].
そして,

$$\text{WeRe-set}(Q) = \{(K, p_k) | K : Q \text{ から得られる結び目}, p_k \text{は } K \text{ が得られる確率}\}$$

と定め, これを Q **の重み付き集合〔Weightet Resolution set〕**という.
9 交点以下の影と準射影図から得られる結び目の集合はすべて調べられており, 9 前交点以下の結び目の影では, 自明な結び目は 3_1 より多く出てくる. しかし, 図 5 の影は 3_1 の方が自明な結び目より多く得られることが知られている.

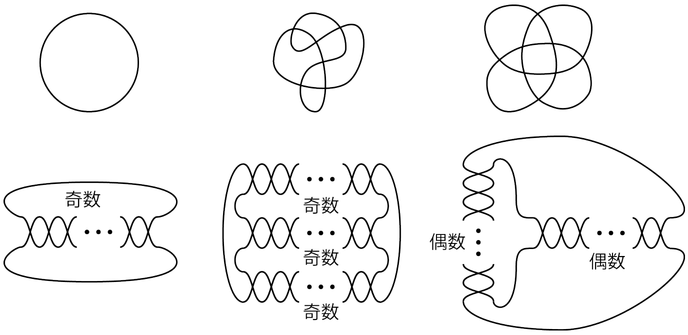


図 3: 6_2 を得られない影

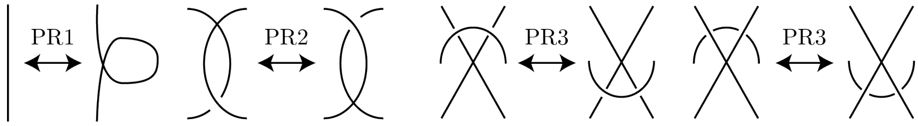


図 4: 準射影図のライデマイスター移動

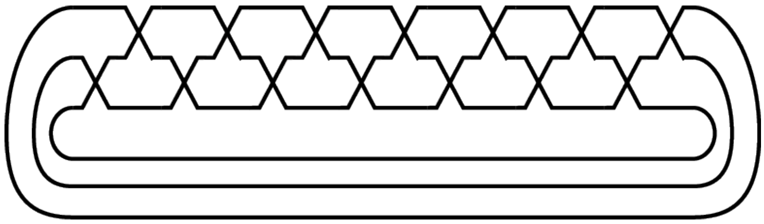


図 5: 3_1 の方が自明な結び目より多く得られる影

また, 図 6 の 9_{40} 影では 3_1 より 4_1 が得られる確率が高くなることが知られている [1].

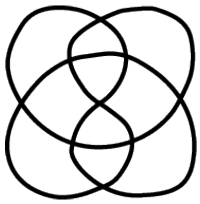


図 6: 9_{40} の影

n 個の前交点をもつ影から得られる自明な結び目の確率を $p(n)$ とすると, $n \to \infty$ のとき $p(n) \to 0$ であることが示されている [5]. n 個の前交点をもつ影から得られる影から得られる自明な結び目の個数は $2^{\sqrt[3]{n}}$ 以上であることが示されている [4].

2　研究成果

2.1　3-braid の影の表記

まずは 3-braid の影の表記を導入する.

定義 2.1. 図7のような3-braidの影 B を非負整数の組 $A_1B_1A_2B_2\cdots B_m$ で表す.各 A_i, B_i を成分といい, $2m$ を成分の個数という.

以降本稿では B は 3-braidの影を表す.

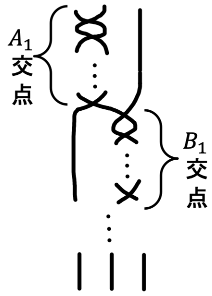


図 7: 3-braid の影

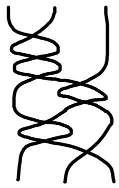


図 8: 3221 で表される影

B が**合成**とは, B を閉包したダイアグラムと 2 点で交わる円周で内側にも外側にも前交点を含むものが存在するときのことをいい, また合成でない場合を**素**という.成分に 0 を含まないとき, 合成であるための必要十分条件は成分の個数が 2 である.

2.2　得られる結び目の確率の比較

10 交点以下の 3−braid の影は合成のものも含めて以下の 43 通りある.

前交点数	組紐表記
2	11
4	31, 1111
6	51, 33, 3111, 2211
8	71,53,5111,4211,3311,3221,3131,221111,212111,11111111
10	91,73,7111,6211,55,5311,5221,5131,4411,4312,4231,421111,412111, 3331,3322,322111,321211,321112,312211,312121,31111111,222211, 221221,21211111, 21121111,1111111111

これらの影から出てくる結び目とその数を調べた. 自明な結び目が出てくる確率をまとめると以下のようになる. ∗は素に限定した場合を示す.

前交点数	最大値	最小値
4	75% (31,1111)	75% (31,1111)
6	56.25% (33,2211)	62.5% (51) 59.38% (3111*)
8	34.38% (11111111)	54.69% (71) 50.78% (5111*)
10	29.10% (31111111)	49.21% (91) 45.12% (7111*)

$p(K,S)$ を S から得られる結び目 K の確率で表す.

命題 2.2. 10 交点以下の任意の 3-braid の影 S に対しては次が成り立つ.

(1) $p(3_1,S) > p(4_1,S)$
(2) $p(O,S) \geqq p(3_1,S)$ (等号成立は $S=55$)

合成な 3-braid の影に対して, 次の命題が成り立つ.

命題 2.3.
(a) $m \geqq 5, n \geqq 5$ のとき, $p(O,mn) \leqq p(3_1,mn)$ (等号成立は $m=n=5$)
(b) $k \geqq 9, l=3$ のとき, $p(O,kl) \leqq p(3_1,kl)$ (等号成立は $k=9$)

$(a),(b)$ を当てはまらないような合成な 3-braid の影は 3_1 より自明な結び目が多く得られる.一方, 素な影についても 3_1 の方が多く得られる影は存在する.以下の命題が成り立つ.

命題 2.4.
(ア) $m \geqq 5, n \geqq 5$ のとき, $p(O,mn22) < p(3_1,mn22)$
(イ) $k \geqq 7, l=3$ のとき, $p(O,kl22) < p(3_1,kl22)$

2.3 得られた定理

$\mathcal{K}_B = \{B$ に上下を入れて閉包して得られるダイアグラムで表現される結び目 $\}$ と定める.B の成分に 0 を含まないとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.5. $4_1 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow$ B の成分の個数が 4 以上である.

定理 2.6. $5_1 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow$ B が 33 ではなく, 前交点が 6 以上である.

定理 2.7. $5_2 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が 4 以上かつ前交点が 6 以上である.

定理 2.8. $6_2 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が 4 以上かつ前交点が 6 以上である.

これら 4 つの定理が得られた. これらの定理を示すために包含を定義する.

定義 2.9. B が B'を包含している $(B \subset B')$ とは, 次の変形を使って, B から B'が得られるときをいう.
① B の成分を -2 する
② 111111 を取り除く
③ 0 を取り除き, 0 の前後の成分はそれらの和に置き換える
・$A_1 = 0$ のときは, B_1と B_nの和を新たに A_1とし, A_1と B_1と B_nを消去
・$B_n = 0$ のときは, A_1と A_nの和を新たに A_1とし, A_1と A_nと B_nを消去
④ $A_i \to B_i, B_i \to A_{i+1}, B_m \to A_1$と置き換える
⑤ $A_1 \to A_1, B_i \to B_{m-i+1}, A_i \to A_{m-i+2}$と置き換える

組紐の包含に関して, 次の命題が成り立つ.

命題 2.10. B が B'を包含しているとき, $\mathcal{K}_{B'} \subset \mathcal{K}_B$

(証明) B に①〜⑤の各変形をしたときに得られた B'に対し, $\forall K \in \mathcal{K}_{B'}$とする. ①, ②は次のように部分的に上下をつけることに等しい.③は組紐の影上では以下のような変形を表す.④, ⑤については閉包すると同一の影を表す.よっていずれの変形においても $K \in \mathcal{K}_B$である.□

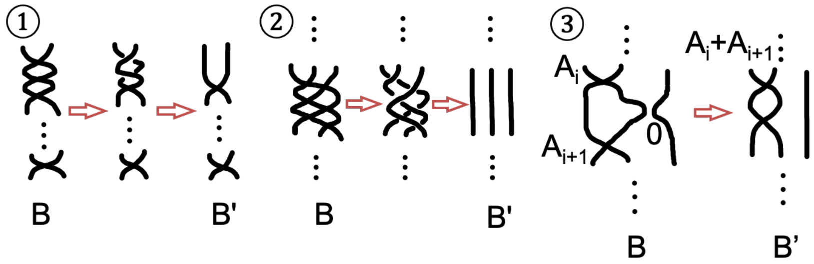


図 9: 前交点の一部に上下を付けて変形

定理 2.5〜2.8 を証明するために次の補題を示す.

補題 2.11. 任意の B に対して, $11 \subset B$ または $1111 \subset B$ が成り立つ.

(証明) B に 1 以外の成分が含まれているとき, ①または, ③を適用できる.そのため B に①, ③を繰り返し用いると成分が 1 のみの影 B'ができる.この B'に対して②を繰り返し用いると 11 または 1111 が得られる.□

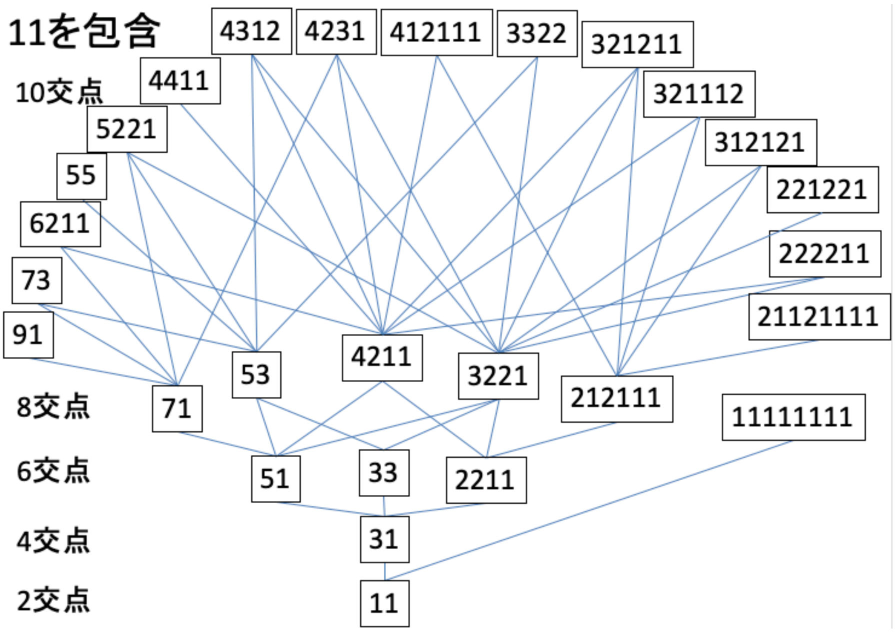


図 10: 11 を包含するもの

図 10 と 11 はそれぞれ 11, 1111 を包含するときの包含関係を図示したものである.

(定理 2.5 の証明)
(⇒)　B の成分の個数が 2 のときは, トーラス結び目の合成のみが得られるので, $4_1 \notin \mathcal{K}_B$である.
(⇐)
・11 を包含するとき
B の成分が 4 以上だから 2211 または 11111111 を包含する. $4_1 \in \mathcal{K}_{2211}, 4_1 \in \mathcal{K}_{11111111}$ である. よって $4_1 \in \mathcal{K}_B$.
・1111 を包含するとき
$4_1 \in \mathcal{K}_{1111}$であるから $4_1 \in \mathcal{K}_B$.□

定理 2.6, 2.7 と 2.8 の証明も, 包含を使い, 示すことができる.

参考文献

[1] A.Ducharme and E.Peters (2020) Combinatorial random knots : Involve 13, 633-654.

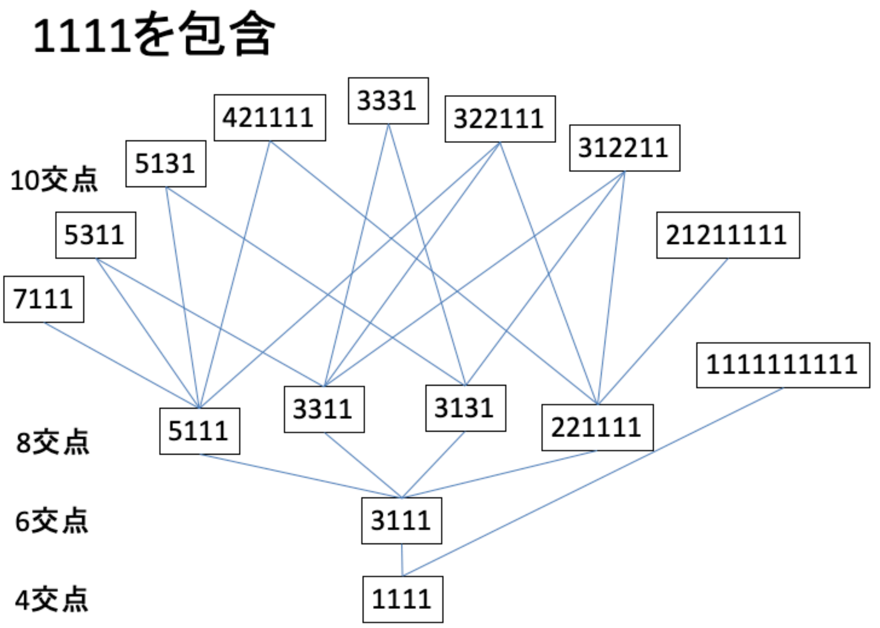


図 11: 1111 を包含するもの

[2] R.Hanaki (2010) Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs, Osaka Journal of Mathematics 47, 863-883.

[3] A.Henrich, R.Hoberg, L.Johnson, E.Minten and L.Radovic (2013) The theory of pseudoknots : Journal of Knot Theory and its Ramification 22, 1350032.

[4] C.Medina, J.R.Alfonsin and G.Salazar (2019) On the number of unknot diagrams : SIAM J. Discrete Math, 33, 306-326.

[5] N.Pippenger (1989) Knots in random walks : Discrete Applied Mathematics 25, 273-278.

[6] Y.Takimura (2018) Regular projections of the knot 6_2 : Journal of Knot Theory and its Ramification 27, 18500815.

[7] K.Taniyama (1989) A Partial Order of Knots : Tokyo J. Math. 12, 205-229.

Successively almost positive links

伊藤　哲也　(京都大学理学研究科)*

1. 導入：図式により定義される結び目のクラスとその性質

（本稿では、特に断らない限り、簡単のために結び目の場合に限って議論を書くことにする。全ての話は適切に設定・解釈したり、妥当な仮定（non-split など）をつけることで絡み目の場合に容易に拡張される。）

本稿では、筆者の導入した連続的概正結び目 [8] について、講演とは少し異なる立場および視点から、筆者の関連する結果等を含めてその背景の解説を与える。

1.1. 交代的な結び目と正的な結び目

結び目理論においては、結び目がある特別な図式で表示される場合、その図式の特別性から様々な特徴的な性質を持つことが頻繁に起こり、特定の図式や表示を経由して定義される結び目のクラスは数多い。これらの結び目の図式などで定義されるものは、大別すると交代的（Alternating）な性質か、正（Positive）の性質を持つもの（あるいはその両方の性質を持つもの）の二種類に分けられる。

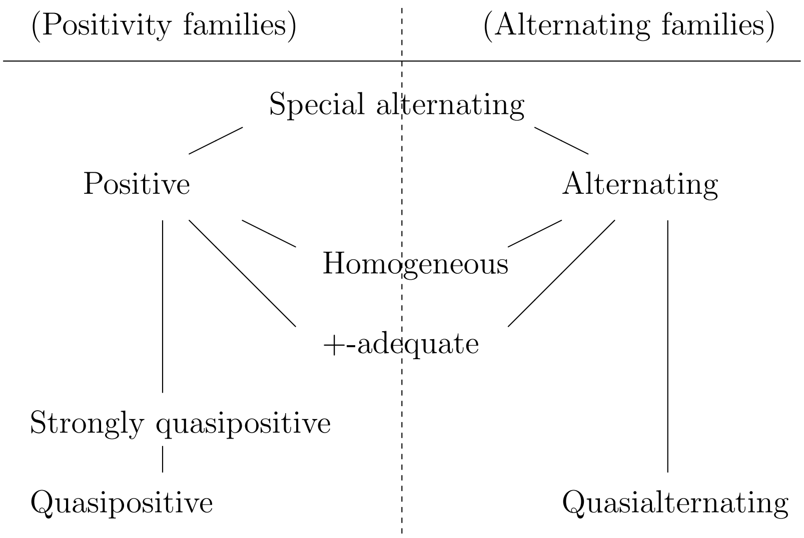


図 1: Diagrammatic class of links　（ごく一部）

この中で、(special) alternating/homogeneous knot たちは『alternating と positive 両方の側面を持つような図式』となるもののある意味で一番広いものと考えられる。弱い意味での positivity を持ち、かつ alternating(or, homogeneous) となるものは実際はすべて positive である（あろう）ということが証明あるいは予想されている;

- Strongly quasipositive かつ homogeneous な結び目は positive である。[1]

本研究は科研費 (課題番号:19K03490 の助成を受けたものである。
* 〒 606-8502　京都市左京区北白川追分町
e-mail: tetitoh@math.kyoto-u.ac.jp

- (予想) Quasipositiveかつalternatingな結び目はpositiveである
  - KがSeifert circleの数=Kのbraid indexとなるような交代図式を持つとき、予想は正しい(Orevkov [12])
  - より一般に、Murasugi-Przytyckiの予想「交代図式Dから定まるKのbraid indexの下からの評価は常に実際のbraid indexを与えている[11]（交代図式からbraid indexが求められる）」が正しいならばこの予想は正しい[7]。
- (予想) Quasipositiveかつhomogeneousな結び目はpositiveである
  - KがSeifert circleの数=Kのbraid indexとなるような交代図式を持つとき、予想は正しい。より一般に、Murasugi-Przytyckiによる結び目図式から得られるmaximum self-linking numberの評価式が等式となるような場合にはこの予想は正しい。[7]

また、これらの概念の一般化として結び目の図式（のクラス）$\mathcal{D}$について、k個の交差交換を行うと$\mathcal{D}$に属するような図式をk-almost $\mathcal{D}$と呼ぶ。特に$k=1$の時はalmost$\mathcal{D}$と呼ばれ、元の結び目のクラス$\mathcal{D}$と近しい性質が成り立つことが多く、盛んに研究されている。

1.2. 内在的特徴づけ

これらの図式により定義された結び目のクラスの図式を用いない内在的な特徴づけを与える(あるいは、与えられた結び目がこのような特別なクラスに属しているか判別するアルゴリズムを与える)ということは基本的な問題である。これは、結び目の図式から得られる様々な性質や不変量についてのどれがその結び目を特徴づけているのか?ということを考察することでもあり、結び目の不変量の性質を理解するうえでも重要になる。

- 交代結び目についてはHowie [5],Greene [3]により独立に(non-orientable) spanning surfaceを用いて特徴づけが与えられた。多少強引ではあるものの、筆者により概交代結び目の特徴づけも同様の方法で与えられた[6]。また、Kim [10]によりトーラス的交代結び目の特徴づけ及び、概交代結び目の筆者のものとは異なる特徴づけが与えられている。
- Strongly quasipositive については、Bennequin 不等式が等式となること:$SL(K)=2g(K)-1$となることが同値だろうと予想されている。
- Quasipositive についてはslice Bennequin 不等式が等式となること : $SL(K)=2g_4(K)-1$となることが同値だろうと予想されている。(これらの予想については[4]でいくつかの考察と特別な場合の証明等を与えた)

一方、最も基本的な正結び目については、様々な性質が知られてはいるが、それを特徴づける性質については予想すら建てられないのが現状である。実際に、後述するように、正結び目と概正結び目は非常に多くの性質を共有するため、正結び目のこれまで知られている様々な性質たちが逆に正結び目を特徴づける、といったことは到底期待できない。

そこで、今度は正結び目の特徴づけではなく、正結び目について成り立つ性質が一体どのくらいまで「図式が正」といった条件を緩めても成立するのかを考えてみることで、正結び目の性質がどれだけ図式の性質を強く反映しているかを考えてみる。このような問題意識から、概正結び目のさらなる（そして安直な）拡張である 2-概正結び目を考えてみると、これは正結び目の良い拡張とは言えないことがすぐに分かる（例えば、8 の字結び目は 2-概正であるが、正結び目の性質の多くが成り立たない）。

本稿で導入・紹介する、（good）連続的概正結び目は、正結び目の持つ性質のほとんどを共有する結び目（の図式）のクラスである。連続的概正結び目は [9] において、Dehn surgery により generalized torsion 元を構成する、という手法が適用できるような正結び目の一般化として現れた。その後、[9] で与えた正結び目の一般化について、実際に正結び目のほとんどの性質が一般化されることに気づき、「連続的概正結び目」としてその性質を調べまとめたのが [8] である。

2. 連続的概正結び目とその性質

Definition 1. 結び目の図 D の交点は k 個を除きすべて正であり、k 個の負の交点が 1 つの overarc にそって連続して現れるとき、D を**連続的 k-概正結び目図式**であると呼ぶ。さらに、各負の交点 c に対し、c でつながれている D の Seifert circle を s, s' とすると s と s' は c 以外の交点でつながっていない、という条件を満たすとき、D を**良い**連続的 k-概正結び目図式と呼ぶ。

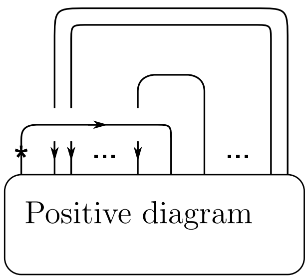


図 2: 連続的概正結び目図式

このように定義した連続的概正図式 D 及び良い連続的概正結び目については、正結び目についての手法、証明や結果を（適切な理解や設定の下で）比較的容易に拡張することができ、次のような性質を持つことがわかる。証明や詳細については [8] に簡潔にまとめているので、そちらを見てほしい。ここでは性質を列挙していくにとどめる。

- Conway 多項式 $\nabla_K(z)$ の係数はすべて非負
- Levine-Tristram signature $\sigma_\omega(K)$ は全て非正

さらに、良い連続的 k-概正結び目については

- D の標準的な Seifert 曲面 S_D（Seifert のアルゴリズムで得られる Seifert 曲面）は最小種数；$g(S_D) = g(K)$.
- K は strongly quasipositive

- $\max\deg_z \nabla_K(z) = 2g(K)$
- K の HOMFLY 多項式 $P_K(v,z)$ について $\min\deg_v P_K(v,z) = \max\deg_z P_K(v,z) = 2g(K)$.

これらの考察の仮定や帰結として、正結び目あるいは概正結び目についても新しい結果や拡張を得ることができる。

- 概正結び目について $\min\deg_v P_K(v,z) = 2g(K)$ ([14, Question 2] の肯定的解答)
- good ではない概正結び目（より一般に good とは異なる適当な条件を満たす連続的概正結び目）について

  $$(\text{HOMFLY 多項式の } v^{-2g(K)}z^a \text{ の係数}) = (\text{Kauffman 多項式の}^1 v^{-2g(K)}z^a \text{ の係数})$$

  (正結び目についての横田氏 [16] の結果の一般化:田神氏による概正結び目の Lagrangian fillability[15] の話と関連し、Legenrian 結び目の観点からみると簡潔に証明できる。)
- D を非自明な結び目 K の既約結び目図式とするとき、

  $$\sigma(K) \leq -\frac{g(S_D)}{6} + \frac{4}{3}c_-(D) - \frac{1}{2}$$

  が成り立つ。ここで $c_-(D)$ は D の負の交点の数である。（正結び目について [2] の結果の拡張・改良）
- Topological knot concordance class $\mathcal{K}$、$k \leq dg_4^{top}(\mathcal{K})$, $d < \frac{1}{9}$ について、$\mathcal{K}$ に属する連続的 k-概正結び目の個数は有限個（$k=0$、正結び目の [2] の拡張）。ここで

  $$g_4^{top}(\mathcal{K}) = \min\{g(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$$

  は topological concordance genus。

さて、ここで見たように、（良い）連続的概正結び目は概正結び目と多くの共通した性質を持つため、与えられた連続的概正結び目が概正結び目あるいは正結び目ではないことを示すのは簡単ではない。（実際に、与えられた概正結び目が正結び目ではないことを示すのもそれほど容易ではない。）論文の最初の版を arXiv に上げたのち、Stoimenow 氏により実際に良い連続的 2-概正結び目であるが、概正結び目ではないような結び目の例が与えられた（現在具体例についてはその詳細を確認し、論文に追加中である）。

その証明では、与えられた $g>0$ について $g(S_D) = g$ となるような既約な結び目図式は有限の結び目図式について $\bar{t}_N$-move (図 3) により得られる、ということを利用している : 正の交点を増やしていくような $\bar{t}_N$-move は Conway 多項式の係数 $a_2(K)$ といった有限型不変量を単調に増加させていくことが知られているので、与えられた結び目 K について、$g(K) = g(S_D)$, $a_2(K) = a_2(D)$ となるような（良い連続的）概正結び目図式の数は有限個である。従って、原理的には有限の可能性をすべてチェックすることで K が概正結び目かを判定できる、というわけである（もちろん、実際に計算するのは大変であり、種数が低くないと計算量が爆発的に増えてしまう）。

[1] 正確には Dubrovnik 多項式と呼ばれる Kauffman 多項式の別の正規化について

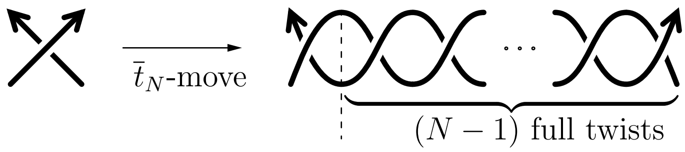


図 3: $\bar{t}_N$-move: 交点を $(2N-1)$ 個の連続した正（あるいは負）の交点に置き換える

3. 今後の問題

（良い）連続的概正結び目は正結び目の拡張として、面白い意味のあるクラスであることが分かったので、その性質をさらに調べていくことは今後の課題となるだろう（し、実際に手を動かすことも可能だろう）。いくつか明らかな問題を挙げて本稿を終える。

- 良い連続的概正結び目について示された性質はどのくらいまで一般の連続的概正結び目に成り立つだろうか？
- 正結び目の性質で、（良い）連続的 k 概正結び目には拡張できないような性質は何か？このような性質は、正結び目の特徴づけを考える際に有用になるだろう。
- （Stoimenow 氏のような全部の可能性を確認する、という方法ではなく）連続的 k 概正結び目と連続的 $(k-1)$ 概正結び目を判別するもっと良い方法はないか？
- 交点数が低い結び目（結び目の表）や特定の結び目のクラス（pretzel 結び目など）についてどれが連続的概正結び目か調べてリストアップせよ。

参考文献

[1] S. Baader, *Quasipositivity and homogeneity,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 139 (2005), no. 2, 287–290.

[2] S. Baader, P. Dehornoy, and L. Liechti, *Signature and concordance of positive knots.* Bull. Lond. Math. Soc. 50 (2018), no. 1, 166–173.

[3] J. Greene, *Alternating links and definite surfaces.* With an appendix by András Juhász and Marc Lackenby. Duke Math. J. 166 (2017), no. 11, 2133–2151.

[4] J. Hamer, T. Ito, and K. Kawamuro, *Positivities of knots and links and the defect of Bennequin inequality,* Experiment. Math. to appear.

[5] J. Howie, *A characterisation of alternating knot exteriors.* Geom. Topol. 21 (2017), no. 4, 2353–2371.

[6] T. Ito, *A characterization of almost alternating knots.* J. Knot Theory Ramifications 27 (2018), no. 1, 1850009, 13 pp.

[7] T. Ito, *On homogeneous quasipositive links,* arXiv:2007.03962

[8] T. Ito, *Successively almost positive links* arXiv:2111.14361.

[9] T. Ito, K. Motegi, and M. Teragaito, *Generalized torsion and Dehn filling,* Topol. Appl. 301 (2021) 107515.

[10] S. Kim, *A topological characterization of toroidally alternating knots.* Comm. Anal. Geom. 27 (2019), no. 8, 1825–1850.

[11] K. Murasugi and J. Przytycki, *An index of a graph with applications to knot theory,* Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 508, x+101 pp

[12] S. Yu. Orevkov, *On alternating quasipositive links,* Doklady Math. 102 (2020), no.2, 404–405.

[13] J. Przytycki and K. Taniyama, *Almost positive links have negative signature.* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 2, 187–289.

[14] A. Stoimenow, *On polynomials and surfaces of variously positive links,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 7 (2005), no. 4, 477–509.

[15] K. Tagami, *On the Lagrangian fillability of almost positive links.* J. Korean Math. Soc. 56 (2019), no. 3, 789–804.

[16] Y. Yokota, *Polynomial invariants of positive links,* Topology 31 (1992), no. 4, 805–811.

COMMENSURABILITY OF COCOMPACT COXETER GROUPS

HAN YOSHIDA

1. 序

Γ_1，$\Gamma_2 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ が $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ and $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ をみたすとき Γ_1，Γ_2 は commensurable という．ある $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ が存在して $g\Gamma_1 g^{-1}$ が Γ_2 と commensurable であるとき Γ_1 と Γ_2 は commensurable in the wide sense という．以下 “in the wide sense” は省略する．commensurability は同値関係となる．

すぐにわかることとして，$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ が commensurable ならば $\mathrm{vol}(M_1)/\mathrm{vol}(M_2) \in \mathbb{Q}$ となる．

また，$\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ に対して $k(\Gamma) = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\ \Gamma^{(2)})$ とする．ここで $\Gamma^{(2)}$ は Γ の部分群で $\{\gamma^2 | \gamma \in \Gamma\}$ で生成されるものである．これを Γ の invariant trace field (ITF) という．Γ_1, $\Gamma_2 \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ が commensurable ならば $k(\Gamma_1) = k(\Gamma_2)$ となることが知られている．ここでは定義しないが invariant quaternion algebra (IQA) というものも同じであることが知られている ([3])．

体積, ITF, IQA が同じ Γ_1，$\Gamma_2 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ で commensurable でない noncocompact な例については沢山知られている ([1], [5])．

$P \subset \mathbb{H}^3$ を面角が π/k $(k \in \mathbb{Z})$ の形である多面体とする．P の各面の鏡映変換で生成される群 $\Gamma(P)$ を P のコクセター群という．

C. Gyurek と R. Roeder が [2] で図のような多面体 AA5, AA5m について調べている．以下 $\mathbb{H}^3$ として hyperboloid model を用いる．これらの多面体の各面の法線ベクトルを行ベクトルで表した行列は以下のようになる．

$$N_{AA5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{20}\sqrt{90\sqrt{5}-130} & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{20}-\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{20}\sqrt{90\sqrt{5}-130} & 0 & 0 & -\frac{3}{4}-\frac{3}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57M50.

$$N_{AA5m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{30\sqrt{5}+55} & \frac{1}{10}\sqrt{10\sqrt{5}+50} & 0 & -1-\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{30\sqrt{5}+55} & \frac{1}{10}\sqrt{10\sqrt{5}+50} & 0 & -1-\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}.$$

この論文で以下の問題を挙げている．

Problem 1. 図のようなコンパクト多面体 *AA5, AA5m* のコクセター群を Γ_1, Γ_2 とすると Γ_1^+, Γ_2^+ の *ITF, IQA* は同じで $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_1) = \mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_2)$ となる．Γ_1 と Γ_2 は *commensurable* か？ここで $\Gamma_i^+ = \Gamma_i \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ $(i = 1,\ 2)$.

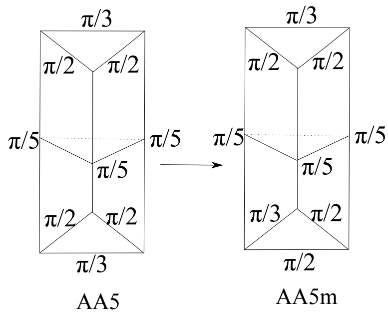


Figure 1. AA5, AA5m

この講演では以下のことを示す．

Main Theorem. Γ_1, Γ_2 は *commensurable* でない．

2. 準備

G. Margulis が次のことを示している ([4])．

Theorem 1 (Margulis). Γ が非数論的ならば Γ の *commensurator* $C(\Gamma) = \{\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) : |\gamma\Gamma\gamma^{-1} : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty, |\Gamma : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty\}$ は Γ と通約可能な群をすべて含み，離散的となる．

Γ が非数論的ならば $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ について $C(M) = \mathbb{H}^3/C(\Gamma)$ は M と通約可能な双曲 3 次元多様体，軌道体で体積が最小のもので，完全通約可能性類不変量となることを意味している．

Main Theorem の Γ_1, Γ_2 が非数論的であることはC. Gyurek と R. Roeder が [2] で証明している．Σ_C を Γ_1 の commensurator の singular set, Σ_2 を Γ_2 の singular set とする．すなわち

$$\Sigma_C = \{x \in \mathbb{H}^3 | \gamma(x) = x \text{ for some } \gamma \in C(\Gamma_1)/\{id\}\},$$

$$\Sigma_2 = \{x \in \mathbb{H}^3 | \gamma(x) = x \text{ for some } \gamma \in \Gamma_2/\{id\}\}$$

とする．Main Theorem を証明するために，次のセクションで $\Sigma_2 \not\subset \Sigma_C$ を示す．そのために以下で 2 つの lemma を証明する．

Lemma 1. $\alpha,\ \alpha' \in C(\Gamma_1)$ を超平面 $S,\ S'$ に関する鏡映変換 *(i = 1, 2)*，θ を S と S' のなす角とする．このとき $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4,\ 6,\ 10,\ 1 \le k \le n\}$.

(Lemma 1 の証明) $\alpha\alpha'$ は $2\theta-$rotation なので $\alpha\alpha' \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$ となる．Γ_1 の invariant trace field

$$k(\Gamma_1^+) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right)$$

であり ([2]), invariant trace field は通約可能性類不変量なので

$$k(C((\Gamma_1)^+)) = k(\Gamma_1^+) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right).$$

よって

$$\mathrm{tr}(\alpha\alpha')^2 = 2\cos 2\theta + 2 \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right).$$

これを満たすのは $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4,\ 6,\ 10,\ 1 \le k \le n\}$.

注意：P を図のような多面体とする．これは体積が $AA5$ の 1/4 となり，Γ_1 はのコクセター群 $\Gamma(P)$ と commensurable となる．Γ_1 の commensurator は $\Gamma(P)$ を含む.（ここでは証明しないが実際には Γ_1 の commensurator は $\Gamma(P)$ と一致する.）

Lemma 2. ℓ を 図のような P の *edge* を含む測地線，F_i を P の図のような面とする．S_k を ℓ を通り，F_2 と面角 $k\pi/10$ で交わる超平面 *(k = 0, $\cdots$, 9)*，γ_i を F_i に関する鏡映変換，$\mathbb{H}^3$ 内の超平面 $S \subset \Sigma_C$ が $S \cap \ell \neq \emptyset$ とする．このとき $S \in \{S_k : k = 0, \cdots, 9\} \cup \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$. ここで $\overline{F}_i$ $(i = 1, 5)$ は F_i を含む超平面.

Remark : S は ℓ を含んでいるか ℓ に直交している．$S,\ S' \in \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$ ならば $d(S, S') = n \cdot d(F_1, F_5) = n \cdot 0.20529\cdots$ for some $n \in \mathbb{N}$.

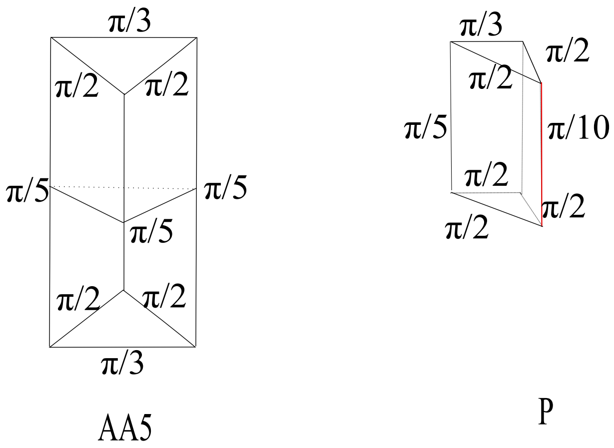


FIGURE 2. 多面体 P

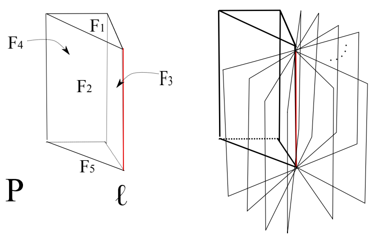


FIGURE 3. ℓ と F_i

（Lemma 2 の証明）P の法線ベクトルを行ベクトルとして並べた行列は以下のようになる．

$$N_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{5}+10}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6\sqrt{5}+11}}{\sqrt{6\sqrt{5}+10}} \end{pmatrix}.$$

S_k (resp. S) の法線ベクトルを n_k (resp. S), θ_k を S と S_k のなす角とすると

$$\langle n, n_k \rangle = -\cos\theta_k \cdots (1)$$

となる．

S_k と F_1, F_5 は垂直で F_2 となす角が $k\pi/10$ であることから，S_k の法線ベクトルは $n_k = (0, -\sin k\pi/10, \cos k\pi/10, 0)$ となる．S の法線ベクトルを $n = (x, y, z, w)$ とすると

$$\langle n, n_k \rangle = -y \sin k\pi/10 + z \cos k\pi/10 \cdots (2).$$

よって (1), (2) より

$$-\cos\theta_k = -y \sin k\pi/10 + z \cos k\pi/10 \cdots (3).$$

とくに $k=0,\ 5$ について考えると $-\cos\theta_0 = z,\ -\cos\theta_5 = -y$ が得られる．$S,\ S_k \subset \Sigma_C$ であるので Lemma 1 より，すべての k に対して $\theta_k \in \Theta$ となる．

Case 1. $(\theta_0, \theta_5) = (m\pi/10, \pi/2 + m\pi/10)$ $(m = 0, \cdots, 9)$ のとき． $z = -\cos m\pi/10,\ y = \cos(\pi/2 + m\pi/10) = -\sin m\pi/10$ なので $\langle n, n_{10-m}\rangle = -\sin m\pi/10 \cdot (-\sin(\pi - m\pi/10)) - \cos m\pi/10 \cdot \cos(\pi - m\pi/10) = 1$ となり $S = S_{10-m}$.

Case 2. $(\theta_0, \theta_5) = (m\pi/10, \pi/2 - m\pi/10)$ $(m = 0, \cdots, 9)$ のとき. $z = -\cos m\pi/10, y = \cos(\pi/2 - m\pi/10) = \sin m\pi/10$ なので $\langle n, n_m\rangle = \sin m\pi/10 \cdot (-\sin m\pi/10) - \cos m\pi/10 \cdot \cos m\pi/10 = -1$ となり $S = S_m$.

Case 3. $(\theta_0, \theta_5) = (\pi/2, \pi/2)$ のとき．$y = z = 0$ なので S の法線ベクトルは $n = (x, , 0, 0, \pm\sqrt{1+x^2})$. S は $F_2,\ F_3$ に直交する．

$(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ または $\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ for some $n \in \mathbb{Z}$. この $(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$ または $\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$ を再び S とかく．

F_1 と F_4 のなす角が $\pi/3$，F_5 と F_4 のなす角が $\pi/2$ なので F_4 と S の面角を ϕ とすると $S \cap F_4 \neq \emptyset$ となるには $\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$. $S,\ F_4 \subset \Sigma_C$ なので Lemma 1 より $\phi \in \Theta$． $\phi = \pi/2, 2\pi/5, \pi/3$ となる．

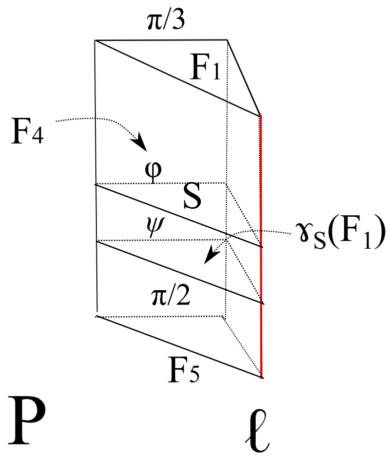


Figure 4. S と $\gamma_S(F_1)$

$\phi = 2\pi/5$ とする．

$$\langle n, n_4\rangle = -\cos 2\pi/5 \cdots (4).$$

また S が P に含まれていて，F_1, F_5, S は ℓ に直交するので $d(F_1, S) + d(S, F_5) = d(F_1, F_5)$ となる．よって

$$\mathrm{arccosh}|\langle n_1, n\rangle| + \mathrm{arccosh}|\langle n, n_5\rangle| = \mathrm{arccosh}|\langle n_1, n_5\rangle|. \cdots (5)$$

(4)(5) より

$$n = (0.077\cdots, 0, 0, 1.003\cdots).$$

γ_S を S に関する鏡映変換とすると $d(S,F_1)=0.077\cdots$，$d(S,F_5)=0.127\cdots$ なので $\gamma_S(F_1)$ は ℓ に直交し，P に交わる．F_4 と $\gamma_S(F_1)$ のなす角を ψ とすると $4\pi/5<\psi<\pi/2$．$\gamma_S(F_1)$，$F_4\subset\Sigma_C$ であるが $\psi\notin\Theta$ なので Lemma 1 より矛盾．

$\phi=\pi/2,\pi/3$ なので $S=\overline{F_1}$ または $\overline{F_5}$．

Case 4. $(\theta_0,\theta_5)\neq(\pi/2,\pi/2)$，$(m\pi/10,\pi/2\pm m\pi/10)$ $(m=0,\cdots,9)$ のとき．$\theta_0=\pi/10$，$\theta_5=\pi/10$ とする．(3) より $z=-\cos\pi/10$，$y=-\cos\pi/10$．このとき (3) より $-\cos\theta_1=\sin\pi/10\cos\pi/10-\cos^2\pi/10=-0.610\cdots$ で $\{\cos\theta|\theta\in\Theta\}=\{\pm0.951\cdots,\pm0.809\cdots,\pm0.587\cdots,\pm0.309\cdots,0,\pm0.5,\pm0.866\cdots,\pm0.707\cdots\}$ なので $\theta_1\notin\Theta$. 他の場合も同様に計算すると $\theta_1\notin\Theta$ であることが言える．

よって，$S\in\{S_k:k=0,\cdots,9\}\cup\{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5}|n\in\mathbb{Z}\}$.

3. Main Theorem の証明

$\Gamma_2\not\subset C(\Gamma_1)=C(P)$ を示す．$\Gamma_2\subset C(P)$ とすると $\Sigma_2\subset\Sigma_C$ である．Lemma 2 の ℓ について考える．ある $\gamma\in\Gamma_2$ が存在して ℓ と $\gamma(AA5m)$ の 2 つの面と transversal に交わる．Lemma 2 よりこの二つの面は平行になる．ℓ は F_1' と F_5' に直交する．

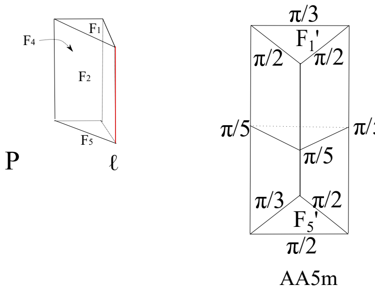


Figure 5. $AA5m$ の F_1' と F_5'

$$\overline{F_1'},\ \overline{F_5'}\in\{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5}|n\in\mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}
d(F_1,F_5) &= \ln\left(\frac{1}{20}\left(3\sqrt{5}+\sqrt{\left(-3\sqrt{5}-15\right)^2-400}+15\right)\right)/2\\
&= 0.205\cdots\\
d(F_1',F_5') &= \ln\left(\frac{1}{10}\left(\sqrt{5}+\sqrt{\left(-\sqrt{5}-10\right)^2-100}+10\right)\right)\\
&= 0.656\cdots
\end{aligned}$$

なので $d(F_1',F_5')\neq n\cdot d(F_1,F_5)$ for $n\in\mathbb{N}$.

よって $\overline{F_1'}$，$\overline{F_5'}$ は Σ_C に含まれない．$\Sigma_2\not\subset\Sigma_C$ なので $\Gamma_2\not\subset C(\Gamma_1)$ となり Γ_2 と Γ_1 は commensurable でない．

4. Appendix

主定理と同様にして以下のことも証明できる.

Theorem 2 (Y)**.** $BB5$ と $BB5m$ は通約可能でない

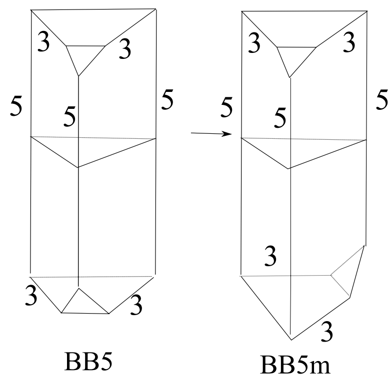


Figure 6. BB5 と BB5m

References

[1] E. Chesebro, J. Deblois, Algebraic invariants, mutation, and commensurability of link complements, 2012 Mathematics Pacific Journal of Mathematics
[2] C. Gyurek, R. Roeder, Problem on Mutant Pairs of Hyperbolic Polyhedra, https://arxiv.org/pdf/1906.08723.pdf
[3] C. Maclachlan, A. Reid, The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds. Graduate Texts in Mathematics 219, Springer (2003).
[4] G. Margulis, Discrete Subgroups of Semi-simple Lie Groups, Ergeb. der Math. 17, Springer-Verlag (1989).
[5] H. Yoshida, Commensurability of link complements Osaka J. Math. 54(4): 635-645 (2017).

National Institute of Technology, Gunma college 580 Toribamachi, Maebashi, Gunma, JAPAN 371-8530
E-mail address: han@gunma-ct.ac.jp

On keen bridge splitting of links

(joint work with Ayako Ido and Yeonhee Jang)
Tsuyoshi Kobayashi (Nara Women's Univ.)

本報告の主結果を含む論文

Ayako Ido, Yeonhee Jang and Tsuyoshi Kobayashi, On keen bridge splittings of links, in preparation.

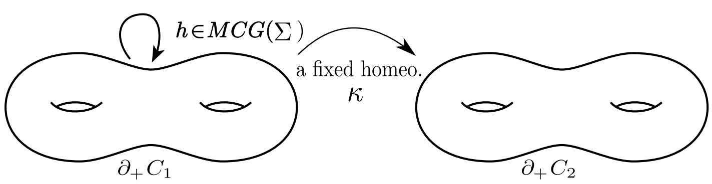
は現在作成中である．研究集会では, この論文の背景になる概念などについて歴史的なことも含めて紹介した後に, この論文の主結果の証明の骨格になる部分の紹介をする予定であったが, 講演内で十分に説明することができなかった．本報告はこの内容について述べることにする．この報告を通してこの証明の魅力を感じていただければ幸いである．

1 (Strongly) keen Heegaard splitting

1.1 Heegaard splitting

M を compact, orientable 3-manifold とし $C_1 \cup_\Sigma C_2$ を M の *Heegaard splitting* とする．即ち, C_1, C_2 は M に埋め込まれた genus g compression-body, で $C_1 \cup C_2 = M$, かつ $C_1 \cap C_2 = \partial_+ C_1 = \partial_+ C_2 = \Sigma$ という条件を満たすものとする．またこの M 内の surface Σ のことを M の *Heegaard surface* という．

ところここで, 一旦, Heegaard surface Σ と同じ記号で単独の genus g (≥ 2) closed, orientable surface とする．ここで $\mathrm{MCG}(\Sigma)$ を Σ の mapping class group, 即ち Σ の全ての自己同相写像のイソトピー類の集合に写像の合成で演算を入れて得られる群, とする．この段階で改めて Σ を $\partial_+ C_1$ と同一視する方法を一つ固定し, 更に $\partial_+ C_1$ と $\partial_+ C_2$ を同一視するための同相写像 $\kappa : \partial_+ C_1 \to \partial_+ C_2$ を固定する．すると $\mathrm{MCG}(\Sigma)(= \mathrm{MCG}(\partial_+ C_1))$ の元 $[h]$ に対して C_1 と C_2 を $\kappa \circ h : \partial_+ C_1 \to \partial_+ C_2$ によって貼り合わせることで compact 3-manfold が得られるが, これを M_h と書くことにする．M_h の C_1 と C_2 による分解は Heegaard splitting になっているが, これを $C_1 \cup_h C_2$ と書くことにする．



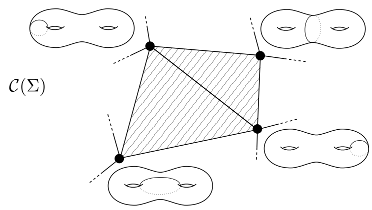
1.2 Curve complex

Σ を genus g (≥ 2) closed orientable surface とする．ここでは Harvey [Harv] によって導入された *curve complex* $\mathcal{C}(\Sigma)$ について紹介する．(以下では Σ 上の simple closed curve ℓ とそのイソトピー類 $[\ell]$ は区別しないことにする．)

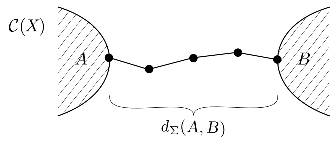
$\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ は Σ 上の全ての simple closed curves のイソトピー類に対応しているとする．相異なる頂点 $s_0, s_1, \ldots, s_n$ が Σ 上の互いに交わらない simple closed curves で実現できる

とき, これらの頂点は n-simplex を張るとする．このような simplicies から構成される単体複体が curve complex $\mathcal{C}(\Sigma)$ である．$\mathcal{C}(\Sigma)$ は連結であることは初等的に証明できる [Lic]．$\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ path を $[a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_n = b]$ で表すことにする．$\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ には単体的距離を導入することにより距離空間になる．以下この距離を d_Σ と書くことにする．即ち,

$d_\Sigma(a, b) :=$ the smallest number of 1-simplexes in a path connecting a and b in $\mathcal{C}(\Sigma)$.



$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ が a_0 と a_n を結ぶ最短の path であるとき $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ は *geodesic* であるという．また $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の二つの部分集合 A, B に対して, A, B の距離 $\min\{d_\Sigma(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を $d_\Sigma(A, B)$ で表すことにする．



[Harv] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In I. Kra and B. Maskit, ed., Riemann Surfaces and Related Topics: Proc. of the 1978 Stony Brook Conf., vol. 97, Ann. of Math. Stud. Princeton

[Lic] Lickorish, W.B.R., A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 769-778.

1.3 Distance of Heegaard splitting

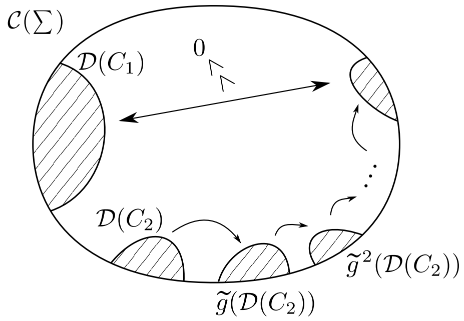
M を compact, orientable 3-manifold, $C_1 \cup_\Sigma C_2$ を M の Heegaard splitting とする．この Heegaard splitting の Heegaard surface Σ の curve complex $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の部分集合 $\mathcal{D}(C_i)$ を次のように定める．

$$\mathcal{D}(C_i) = \{a \in \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) | a \text{ は } C_i \text{内の disk の boundary になっている }\}.$$

$\mathcal{D}(C_i)$ を C_i の *disk complex* と呼ぶ．このとき $\mathcal{C}(\Sigma)$ における $\mathcal{D}(C_1)$ と $\mathcal{D}(C_2)$ の距離 $d_\Sigma(\mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(C_2))$ を Heegaard splitting $C_1 \cup_\Sigma C_2$ の *distance* と言い $d(C_1 \cup_\Sigma C_2)$ と書くことにする．Heegaard splitting の distance は Hempel [He] によって導入され, その後多くの数学者によってその研究が進展している．Hemple は [He] の中で次の結果を示している．

Theorem A([He, Proof of Theorem 2.7]) Σ を上記の通りとする．このときある (pseudo-Anosov と呼ばれるクラスに属する) $g \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$ で次の条件を満たすものが存在する．

$$\lim_{n \to \infty} (d(C_1 \cup_{g^n} C_2)) = \infty.$$



Theorem A から直ちに $\mathcal{C}(\Sigma)$ の直径は無限大になることがわかる.

[He] J.Hempel, 3-manifolds as viewed from the curve complex, Topology 40 (2001) 631-657.

1.4 (Strongly) keen Heegaard splitting

この節では [I-J-K:2018] で導入された (strongly) keen Heegaard splitting について紹介する.

$C_1 \cup_\Sigma C_2$ を compact, orientable 3-manifold M の Heegaard splitting とする. $d(C_1 \cup_\Sigma C_2)$ を実現する $\mathcal{D}(C_1)$, $\mathcal{D}(C_2)$ の元の組が一意であるとき, 即ち次の条件をみたす時 Heegaard splitting $C_1 \cup_\Sigma C_2$ は *keen* であるという.

いま $d_\Sigma(a,b) = d_\Sigma(a',b') = d_\Sigma(\mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(C_2))$ (但し $a, a' \in \mathcal{D}(C_1), b, b' \in \mathcal{D}(C_2)$) が成り立つならば $a = a'$, $b = b'$ となる.

また Heegaard splitting $C_1 \cup_\Sigma C_2$ が keen でありかつ $d(C_1 \cup_\Sigma C_2)$ を実現する $\mathcal{D}(C_1)$ と $\mathcal{D}(C_2)$ の 2 点を結ぶ geodesic が一意であるとき, $C_1 \cup_\Sigma C_2$ は *strongly keen* であるという. これに関して [I-J-K:2018] では次の結果が示されている.

Theorem 1.([I-J-K:2018, Theorem 1.1])
$g \geq 3$, $n \geq 2$ となる任意の integer の pair (g, n) に対して strongly keen な genus g Heegaard splitting で distance が n となるようなものが存在する.

尚, keen であるが strongly keen ではない Heegaard splitting が存在する ([I-J-K:2018, Remark 4.15]). また 井口-古宇田 ([I-K, Proposition 2.1]) では (strongly/weakly) keen Heegaard surface の Goeritz group は制限された形をしていることが示されている.

[I-J-K:2018] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen Heegaard splittings. Singularities in generic geometry, Adv. Stud. Pure Math., 78(2018), 293-311.

[I-K] D.Iguchi and Y.Koda, Twisted book decompositions and the Goeritz groups, Topology Appl., 272 (2020), 107064.

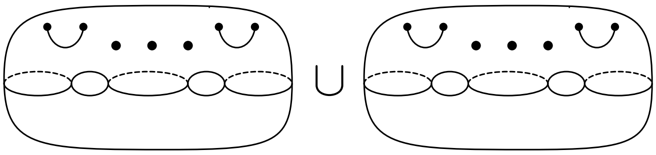
2 (Strongly) keen bridge splitting

この節では closed 3-manifolds M 内の link L の bridge splitting ((g, b)-splitting) とその distance および, (strongly) keen bridge splitting について紹介する.

2.1 Bridge splitting

$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ (又は (L, F)) が (M, L) (又は L) の (g, b)-*splitting* であるとは次の条件をみたすこととする.

- $V_1 \cup_F V_2$ は genus g Heegaard splitting of M,
- L は F と transverse に交わる (このとき $P = L \cap F$ とする),
- $t_i = L \cap V_i$ は simultaneous に ∂V_i に parallel な b 本の arcs $(i = 1, 2)$.

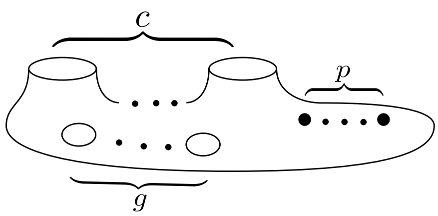


$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$

(g, b)- splitting

2.2 Curve complex of punctures surface

一般に genus g, orientable surface S with c boundary components, and p punctures を考える.



いま "$g = 0$, $c + p \leq 4$ " 又は "$g = 1$, $c + p \leq 1$ " が成り立つとき S は *sporadic* であるという. また S 内の simple closed curve α について "α は高々一点の puncture を含む S 内の disk を bound する" 又は "α は ∂S のある component に parallel " であるとき α は *inessential* であるという. また α が inessential でないとき α は *essential* であると言う. ここでは S が non-sporadic なときの S の curve complex について紹介する. 尚, S が sporadic である時も S の curve complex は定義できるがこれについては本報告では略することにする. 以下では S 上の simple closed curve とそのイソトピー類は区別しないことにする.

$\mathcal{C}(S)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ は S 上の全ての essential simple closed curves のイソトピー類に対応しているとする. 相異なる頂点 $s_0, s_1, \ldots, s_n$ が S 上の互いに交わらない simple closed curves で実現できるとき, これらの頂点は n-simplex を張るとする. このような simplicies から構成される単体複体が curve complex $\mathcal{C}(S)$ である. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ path を $[a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b]$ と表すことにする. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ には単体的距離を導入することにより距離空間になる. 以下この距離を d_S と書くことにする. $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ が a_0 と a_n を結ぶ最短の path であるとき $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ は *geodesic* であるという. また $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の二つの部分集合 A, B に対して, A, B の距離 $\min\{d_S(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を $d_S(A, B)$ で表すことにする.

2.3 Distance of bridge splitting

$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ を L の (g, b)-splitting とする．この bridge splitting の punctured surface $F \setminus P$ の curve complex $\mathcal{C}(F \setminus P)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(F \setminus P)$ の部分集合 $\mathcal{D}(V_i \setminus t_i)$ $(i = 1, 2)$ を次のように定める．

$$\mathcal{D}(V_i \setminus t_i) = \{a \in \mathcal{C}^{(0)}(F \setminus P) \mid a \text{ は } V_i \setminus t_i \text{ 内の disk の boundary になっている }\}.$$

$\mathcal{D}(V_i \setminus t_i)$ を (V_i, t_i) の *disk complex* と呼ぶ．このとき $\mathcal{C}(F \setminus P)$ における $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1)$ と $\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の距離 $d_{F \setminus P}(\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1), \mathcal{D}(V_2 \setminus t_2))$ を bridge splitting $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ の *distance* と言い $d((V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2))$ (又は $d(L, F)$) とかくことにする．以下に bridge splitting の distance に関する研究をアトランダムに紹介する．

(Existence of high distance bridge splitting)

- T.Saito, Genus one 1-bridge knots as viewed from the curve complex, Osaka J. Math. 41(2004), 427-454
- Campsi-Rathbun, High distance knots in closed 3-manifolds, JKTR, 21(2002)
- Blair-Tomova-Yoshizawa, High distance bridge surfaces, AGT 13(2013), 2925-2946.
- Ichihara-Saito, Knots with arbitrarily high distance bridge splittings, Bull.Korean Math Soc., 50(2013), 1989-2000

(Upper bound of distance of bridge splitting)

- Bachman-Schleimer, Distance and bridge position, Pacific J.Math. 219(2005), 221-235
  ($^{\exists}S$: ess. surface in the exterior of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(S) + 2$)
- M.Tomova, Multiple bridge surfaces restrict knot distance, AGT 7(2007), 957-1006
  (F, F': distinct bridge surfaces of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(F' \setminus L) + 2$)
- Y.Jang, Distance of bridge surfaces for links with essential meridional spheres, Pacific J.Math. 267(2014), 121-130
  ($^{\exists}S$: ess. $n(\geq 4)$ punctured sphere in the exterior of $L \Rightarrow d(L, F) \leq n - 2(= -\chi(S))$)
- A.Ido, An estimate of Hempel distance for bridge spheres, Bull.Korean Math Soc., 52(2015), 735-740
  (S, S': distinct bridge spheres of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(S' \setminus L)$)

2.4 (Strongly) keen bridge splitting

この節では [I-J-K: in prep.] の結果について紹介する．$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ を L の (g, b)-splitting とする．$d(L, F)$ を実現する $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1)$, $\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の元の組が一意であるとき, $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ は *keen* であるという．また bridge splitting $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ が keen であり $d(L, F)$ を実現する $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1)$, $\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の二点を結ぶ geodesic が一意であるとき $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ は *strongly keen* であるという．尚, keen であるが strongly keen でない bridge splitting が存在する ([I-J-K: in prep., Remark 4.1])．これらに関して以下の結果が得られた．

Theorem 1.([I-J-K: in prep., Theorem 1.1]) $g \geq 0$, $b \geq 1$, $n \geq 1$ をみたす任意の integers (g, b, n) に対して次が成り立つ．

(g, b, n) が "$(g, b) = (0, 1)$" 又は "$(g, b, n) = (0, 3, 1)$" をみたさないならば distance n を持つ strongly keen (g, b)-splitting が存在する．

$(g, b) = (0, 1)$ (S^3 内の trivial knot の $(0, 1)$-splitting) については $\mathcal{C}(F \setminus P)$ は空集合になる. また $(g, b, n) = (0, 3, 1)$ の場合は次が成り立つ.

Theorem 2.([I-J-K: in prep., Theorem 1.2]) 任意の distance 1 の $(0, 3)$-splitting は keen ではない.

Remark. Theorem 2 に関して次の事実が成り立つ.

Link L が distance 1 の $(0, 3)$-splitting をもつ (従ってこの場合 ambient な manifold は S^3 である) 必要十分条件は, L が non-trivial 2-bridge link の connected sum でありかつ non-separable であることである.

Remark. 我々は [I-J-K: 2015] の中で次の結果を与えている.

> $g \geq 0$, $b \geq 1$, $n \geq 2$ をみたす任意の integers (g, b, n) に対して次が成り立つ.
>
> "$(g, b) = (0, 1)$" 又は "$(g, b) = (0, 2)$" をみたさないならば distance n を持つ (g, b)-splitting が存在する.

実は最近この証明の中に誤りのあることが発見された. しかしながら Theorem 1 は上記の結果の別証明になっていることを注意しておく.

[I-J-K: 2015] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, Bridge splittings of distance exactly n, Top. and App. 196(2015), 1395-1411.

[I-J-K: in prep.] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen bridge splitting of links, in preparation

3 Ingredient and recipe of the proof

この節では [I-J-K: in prep.] の Theorem 1.1 の証明のコアとなるアイディアについて紹介する. なお, ここで "コアとなる" と言っているのは $g + b$, n が大きいときは, 以下で紹介する議論で証明できる, という意味である. $g + b$ が小さいときや $n = 1$ のときは ad.hoc な議論が必要となる.

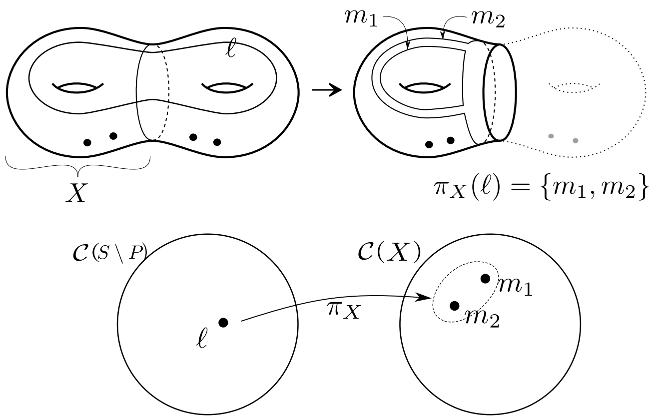
[I-J-K: in prep.] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen bridge splitting of links, in preparation

3.1 Ingredient: Subsurface projection

S を genus g, orientable surface S with c boundary components, and p punctures とし X を S の essential な (即ち ∂X の各 component は S で essential であるような) subsurface で non-sporadic なものとする. このとき $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ から $\mathcal{C}^{(0)}(X)$ の power set $2^{\mathcal{C}^{(0)}(X)}$ への写像 $\pi_X : \mathcal{C}^{(0)}(S) \to 2^{\mathcal{C}^{(0)}(X)}$ を次のように定義する.

> $\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ とする. いま ℓ と ∂X の交点の数は ℓ の S における isotopy 類の中で最小であるとする. このとき
>
> α_i $(i = 1, \ldots, n)$ を $\ell \cap X$ の component とする. いま $\partial X \cup \alpha_i$ の X における regular neighborhood の boundary component のうち "∂X に含まれないもので X で essential であるもの" の union を $\pi_0(\alpha_i)$ とかくことにする. このとき:

$$\pi_X(\ell) := \cup_{i=1}^{n} \pi_0(\alpha_i).$$



π_X に関して以下のような結果が知られている．

Lemma 1 ([Masur-Minsky:2000, Lemma 2.2]) π_X は 2-Lipschitz である．従って，次が成り立つ．

$\mathcal{C}(S)$ 内の path $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ に対して $a_i \cap X \neq \emptyset$ $(i = 0, 1, \dots, m)$, とする．このとき，$\pi_X(a_0) \cup \pi_X(a_1) \cup \cdots \cup \pi_X(a_m)$ の $\mathcal{C}(X)$ における直径は $2m$ 以下である．

Lemma 2 ([Masur-Minsky:1999, Prop. 4.6]) S は non-sporadic とする．このとき次の条件を満たす定数 $c > 0$ が存在する：

$\forall$ pseudo-Anosov $h \in \mathrm{MCG}(\mathcal{C}(S))$, $\forall \gamma \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$,

$$d_S(h^n(\gamma), \gamma) \geq c|n|.$$

[Masur-Minsky:1999] H.Masur, and Y.Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, Invent. Math., 138(1999), 103-149.

[Masur-Minsky:2000] H.Masur, and Y.Minsky, Geometry of the complex of curves. II. Hyperbolicity, Hierarchical structure, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), 902-974.

3.2 Recipe: Unique geodesic

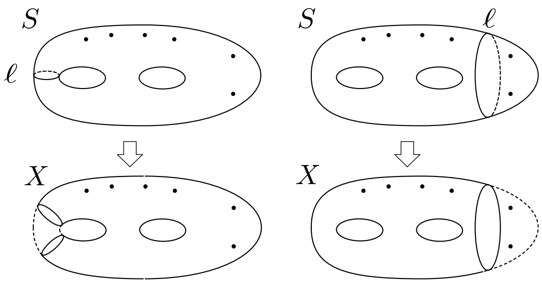
ここでは端点を結ぶ geodesic が unique になるような geodesic を構成するための手法を紹介する．いま ℓ を S 内の essential simple closed curve で次の条件を満たすようなものとする．

(A) ℓ は S で non-separating, 又は

(B) ℓ は S で disk with two punctures を bound する．

この時，“ℓ に associate した subsurface”X を次のように定義する．

条件 (A) をみたす時は，$X :=$ (S を ℓ で cut して得られる surface).
条件 (B) をみたす時は，$X :=$ (S から ℓ が bound する disk with two punctures を取り除いて得られる surface).



Remark (Forcing simple closed curve)

上記の設定のもと, 次の事実が成り立つのは直ちにわかることを注意しておく (Lemma 1 の 赤字で書かれた条件と見比べていただきたい).

$$m \ (\in \mathcal{C}^{(0)}(S)) \text{ が } X \text{ と交わらないならば, } m = \ell \text{ である.}$$

このとき次の proposition が成り立つ.

Proposition. (Extending geodesic with uniqueness)

$[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, \ell_n]$ を $\mathcal{C}(S)$ で以下の条件 (1), (2), (3) を満たす path とする.

(1) ℓ_0 と ℓ_{n-1} を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}]$ に限る,

(2) ℓ_{n-1} は上記の条件 (A) 又は (B) を満たす,

(3) $\mathrm{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) > 2n$, ただし X は ℓ_{n-1} に associate した subsurface とする.

このとき, ℓ_0 と ℓ_n を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}, \ell_n]$ に限る.

Remark

今 $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}]$ は Proposition の条件 (2) をみたすとする. この時 Lemma 2 を利用することにより, 条件 (3) をみたすような ℓ_n を構成することができる.

Outline of the proof of Proposition

$[m_0 = \ell_0, m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n = \ell_n]$ を ℓ_0 と ℓ_n をつなぐ path とする. まず次の Claim が成り立つことを示す.

Claim. $\quad {}^{\exists}i \quad \text{s.t.} \quad m_i = \ell_{n-1}$

Proof. このような m_i が存在しなかったとする. このとき条件 (2) より全ての m_j は X と交わることがわかる. この事実と, Lemma 1 より, 次の不等式が成り立つことがわかる.

$$\mathrm{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) \leq 2n.$$

しかし, これは条件 (3) に矛盾する. (証明終)

以上の準備のもと, 次のように Proposition の証明を complete することができる.

$[m_0 = \ell_0, m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n = \ell_n]$ を ℓ_0 と ℓ_n をつなぐ geodesic とする. Claim より $m_i = \ell_{n-1}$ となるような i が存在するが Proposition の条件 (1) より $i = n-1$ で $[m_0 = \ell_0, m_1, \ldots, m_{n-1}] = [\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}]$ となることがわかり, このことと $m_n = \ell_n$ より直ちに Proposition の結論が成り立つことがわかる. (証明終)

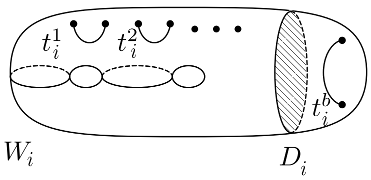
端点を結ぶ geodesic が unique になるような geodesic の構成：
$[\ell_0, \ell_1]$ から出発して Proposition とその直後の Remark を繰り返し適用することにより, 任意の n (≥ 1) に対して geodesic $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ で ℓ_0 と ℓ_n を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ に限るようなものが存在することがわかる.

3.3 Construction of strongly keen bridge splitting

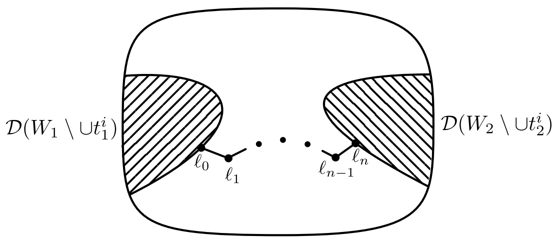
Σ : genus-g, closed, orientable surface
P: the set consisting of $2b$ points in Σ
とし $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ を前節で構成した $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ の geodesic とする. このとき

$(W_i, \cup_j t_i^j)$: genus-g handlebody with b trivial arcs $(i = 1, 2)$

とし D_i を次の図のように W_i に埋め込まれた disk とする.

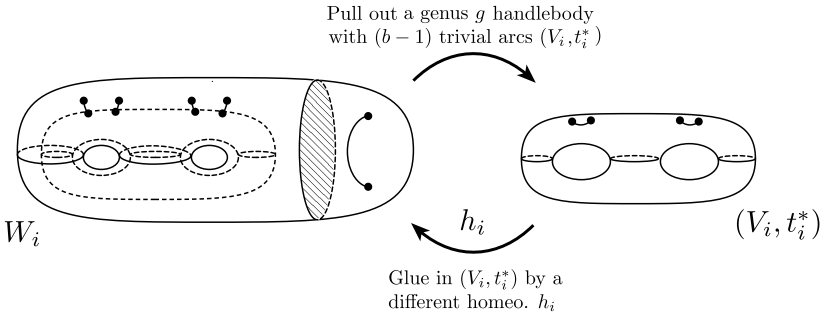


次に $\partial W_1 \setminus (\cup t_1^j)$ と $\Sigma \setminus P$ を ∂D_1 が ℓ_0 が対応するように同一視する. また $\partial W_1 \setminus (\cup t_1^j)$ と $\partial W_2 \setminus (\cup t_2^j)$ の同一視 κ で ℓ_n が ∂D_2 に対応するようなものを固定する. この帰結としてある閉三次元多様体 M 内の link L が得られる. 特に $(W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j)$ は L の (g, b)-splitting になっている. このとき, この分解に現れる disk complexes は $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ の中で一般には次のように見えるだろう.



この図では $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ は $d((W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j))$ を実現していないことに注意する. そこで $(W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j)$ を次のように deform してやる.

$(W_i, \cup_j t_i^j)$ の内部から次の図のような genus $(g-1)$ handlebody with $(b-1)$ trivial arcs (V_i, t_i^*) を抜き出して, 別の homeomorphism h_i を使って埋め直してやることを考える.

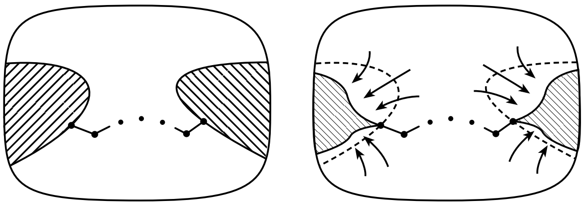


ところで 市原-斎藤 [Ichihara-Saito:2013] は 1.3 節で紹介した Theorem A の証明において Hempel が行った議論と同様の事実が bridge splitting に対して成り立つことを示している. この結果を使うと h_i は次の不等式を満たすようにとれることがわかる.

$$d_{\partial V_1 \setminus t_1^*}(\ell_1, h_1(\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1^*))) > 2$$

$$d_{\partial V_2 \setminus t_2^*}(\kappa(\ell_{n-1}), h_2(\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2^*))) > 2$$

この条件を使うと $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ 内の disk complexes は次のように変形されることがわかる.



これは対応する (g, b) splitting は strongly keen であることを意味している.

[Ichihara-Saito:2013] Ichihara-Saito, Knots with arbitrarily high distance bridge splittings, Bull.Korean Math Soc., 50(2013), 1989-2000.

三次元多様体における Weber 問題

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻
吉崎彪雅 (Hyuga YOSHIZAKI)

概要

Weber 問題とは，素数 p に対して，有理数体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数を求める，数論における未解決問題である．一方で，代数体と三次元多様体には，興味深い類似が指摘されている．講演者は，代数体のイデアル類群と三次元多様体の整係数 1 次ホモロジー群の類似性をもとに，三次元多様体における Weber 問題を考察した．そして，数論側と同様の結果 (類数の収束性) を得たので，具体例と共に紹介する．

本講演は，植木潤氏 (東京電機大学) との共同研究に基づくものである．

1 類似研究

数論的位相幾何学とは，代数体と三次元多様体の類似性に焦点を当て，一方の理論の他方での類似を考察することによる相互発展を目指す分野である．特に，代数体の素イデアルと三次元多様体に埋め込まれた結び目の類似は，古くから指摘されている ([Mo])．この類似を軸として，両分野の諸概念の類似が考案され，「類似対応の辞書作り」が進んでいる．今回は，数論における類数問題のトポロジー側での類似を研究した結果を紹介するため，このセクションではイデアル類群と 1 次ホモロジー群の類似について言及しておく．代数体 F に対し，J_F を分数イデアル全体，P_F を単項生成イデアル全体とするとき，F のイデアル類群 Cl_F は，

$$\mathrm{Cl}_F := J_F/P_F$$

で定義される．そして，これは有限群であることが知られており，その位数を F の類数という．代数体の類数決定問題は，Gauss を発端とする歴史ある課題であるにもかかわらず，未だに類数 1 の代数体がどのくらい存在するか (有限か無限かも) 分かっていない．一方で，三次元多様体 M に対し，その 1-サイクルを $Z_1(M)$ ，1-バウンダリーを $B_1(M)$ とするとき，M の 1 次ホモロジー群は，

$$H_1(M) := Z_1(M)/B_1(M)$$

で定義されるのであった．代数体の整数環は Dedekind 環であるため，J_F は素イデアルで生成される自由アーベル群である．また，$Z_1(M)$ は，M 内の結び目で生成される自由アーベル群である．素イデアルと結び目の類似に基づき，イデアル類群とホモロジー群の類似が見て取れる．本研究では，類数問題の中でも，次に紹介する Weber の類数問題の類似を考察した．

2 Weber 問題

p を素数として，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を $\mathbb{B}_p$ とする．$\mathbb{Z}_p$ 拡大とは，無限次 Galois 拡大で，その Galois 群が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ の加法群と同型なものである．正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_p$ の p^n 次の中間体がただ一つあり，それを $\mathbb{B}_{p,n}$ とする．Weber 問題とは，全ての素数 p と，正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_{p,n}$ の類数 $h_{p,n}$ を求める問題である．また，様々な結果により，次のように予想されている．

予想 2.1. 全ての素数 p と正の整数 n に対して，$h_{p,n} = 1$ だろう．

特に $p = 2$ の場合，Weber [We] 以来様々な研究者によって進展してきたが，現状 Miller [Mi] による，$h_{2,6} = 1$ までしか分かっていない．一方で，$\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数には，岩澤理論における興味深い性質がある．中でも今回注目するのは，類数を数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ とみなしたとき，数列の p 進的振る舞いに関する特徴である．

定理 2.2. 全ての素数 p に対し，類数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において単数に収束する．

後に紹介する類似結果の証明と比べられるように，証明の概略を記す．

証明の概略. 相対ノルム $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathbb{B}_{p,n} \to \mathbb{B}_{p,n-1}$ からイデアル類群間の写像 $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}}$ が定まり，これは全射になることが知られている．よって，完全系列

$$0 \to \ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}} \to 0$$

があり，$\# \ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} = h_{p,n}/h_{p,n-1}$ となる．$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{B}_{p,n}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が作用するため，$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ の軌道分解の位数を考えることによって，

$$\frac{h_{p,n}}{h_{p,n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{1}$$

が得られる．これは，数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ が p 進 Cauchy 列であることを表し，$\mathbb{Z}_p$ の完備性から，収束する．実際には，(1) 式の証明は，各素数 l パートごとに考え，$l \neq p$ の場合は軌道分解を，$l = p$ の場合は次の岩澤の有名な結果から従う：

定理 2.3 (岩澤 [I])**.** 全ての素数 p と正の整数 n に対し，$p \nmid h_{p,n}$.

□

Weber 問題（予想）は未解決であり，$h_{p,n}$ が決定されている (p, n) は有限個しかない．よってその収束先は見当もつかない．しかし，次のセクションで紹介する，類数のトポロジーにおける類似では，数論側より分かることが多く，全ての素数と正の整数に対する類数や，さらに収束先が決定できる場合がある．

3 Weber 問題の類似と結果

まず，トポロジー側における $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似を紹介する．代数体の拡大の類似は，三次元多様体の被覆空間である．K を三次元球面 S^3 に埋め込まれた結び目とするとき，K で分岐する S^3 の p^n 重巡回被覆空間 M_{K,p^n} が存在する（分岐被覆の定義は，たとえば [Rol]）．結び目 K で分岐するとは，その被覆写像の分岐集合が K となることである．p^n 重巡回被覆とは，被覆変換群 $\mathrm{Deck}(M_{K,p^n}/S^3)$ が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に同型となることである．Livingston [Li, Corollary 3.2] によって， M_{K,p^n} は有理ホモロジー球面であることが示されており，よってその 1 次ホモロジー群は有限群である．その位数を $h_{K,p^n} = \#H_1(M_{K,p^n})$ とする．次の問いが，トポロジーにおける Weber 問題である．

■問題． 結び目 K と素数 p，正の整数 n に対して，h_{K,p^n} を決定せよ．また，全ての素数 p と正の整数 n に対して $h_{K,p^n} = 1$ となる結び目 K は存在するか，そして存在した場合はどのように特徴づけできるだろうか．

実は，Livingston [Li] によって，後者の問いは解決され，Alexander 多項式を用いた特徴づけが与えられている．

定理 3.1 (Livingston [Li, Theorem 1.2])**.** 全ての素数 p と正の整数 n に対して $h_{K,p^n} = 1$ となる K の必要十分条件は，Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ の全ての非自明な既約因子 $f(t)$ に対し，相異なる３つの素数で割られる整数 m があり，$f(t) = \Phi_m(t)$ となることである．ここで，$\Phi_m(t)$ は m 番目の円分多項式である．

そして，Kim [Ki] によって，上記の条件を満たす Alexander 多項式をもつ結び目の存在が証明されている．Livingston と Kim による結果は，Weber 問題の類似を意識したものではなく，結び目の concordance group の研究から得られたものである．たとえば，[Li, Theorem 1.1] によると，定理 3.1 の条件を満たすための十分条件として，結び目 K と Seifert 行列が一致するような non-concordant な結び目は有限個しかない，というものがある．

さて，Livingston によって，トポロジーにおける Weber 問題の後者，すなわち「類数１の Weber 問題」は解決されているが，前者についてはまだ考えるべきことがある．今回は，定理 2.2 のトポロジー側の類似として，講演者と植木による以下の結果を紹介する．

定理 3.2. 全ての結び目 K に対し，数列 $\{h_{K,p^n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において単数に収束する．

数論側と同様に，$H_1(M_{K,p^n})$ の n に関する相対的な写像の ker に対し，被覆変換群による作用を考えることで証明できる．

4 証明

いくつか準備をする．S^3 における K の補空間を X_K とする．X_K の $\mathbb{Z}$-被覆を $X_{K,\infty}$ とし，被覆変換群の位相的生成元を t とすると，次の同型がある（たとえば，[Mo, Proposition 11.1]）：

$$H_1(M_{K,p^n}) \cong X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n} - 1)H_1(X_{K,\infty}). \tag{2}$$

また，岩澤の結果 (定理 2.3) の類似として，次の植木の結果がある．

定理 4.1 (植木 [U])．全ての結び目 K，素数 p，正の整数 n に対して，$p \nmid h_{K,p^n}$．

次に定理 3.2 の証明を紹介する．

定理 *3.2* の証明．自然な全射

$$\phi_n : X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty}) \tag{3}$$

によって，完全系列

$$0 \to \ker\phi_n \to X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to 0 \tag{4}$$

がある．よって

$$\#\ker\phi_n = \frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \tag{5}$$

となる．定理 2.2 と同様,

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{6}$$

が証明できれば十分である．素数 l に対し，$\ker\phi_n$ の l-Sylow 部分群を $(\ker\phi_n)_l$ とする．$l = p$ のときは，定理 4.1 より $\#\ker(\phi_n)_p = 1$ である．以降 $l \neq p$ とする．$\alpha \in (\ker\phi_n)_l$ に対し，$O(\alpha) := \{t^i\alpha : i \in \mathbb{Z}\}$ とする．このとき，$\alpha \neq 0$ に対して $\#O(\alpha) = p^n$ であることが言えれば十分である．実際，$O(0) = \{0\}$ であるから，$\#(\ker\phi_n)_l \equiv 1 \pmod{p^n}$ となる．

$(\ker\phi_n)_l$ には $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と同型な群が作用するため，各元の軌道の位数は p べきである．$\#O(\alpha) = p^m$ $(0 \leq m \leq n-1)$ となる任意の元 $\alpha \in (\ker\phi_n)_l$ に対して，$t^{p^{n-1}}\alpha = \alpha$ であるから,

$$(1 + t^{p^{n-1}} + t^{2p^{n-1}} + \cdots + t^{(p-1)p^{n-1}})\alpha = p\alpha \tag{7}$$

である．一方で，$\alpha \in \ker\phi_n$ であったから,

$$\alpha \in (t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty}). \tag{8}$$

よって,

$$\begin{aligned} p\alpha &\in (1 + t^{p^{n-1}} + t^{2p^{n-1}} + \cdots + t^{(p-1)p^{n-1}})(t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty}) \\ &= (t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty}) \end{aligned} \tag{9}$$

となり，$\alpha \in (\ker\phi_n)_p$ である．ここで，$(\ker\phi_n)_p \cap (\ker\phi_n)_l = \{0\}$ より，$\alpha = 0$ となる．対偶を考えると，$\alpha \neq 0$ に対しては $\#O(\alpha) = p^n$ となる． □

5 例

ここでは，Livingston によって与えられた Alexander 多項式に関する条件を満たさないいくつかの結び目に対して，h_{K,p^n} を全て決定し，また定理 3.2 でその存在が保証される極限の例を紹介する．

結び目 K の Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ とする．Fox により，h_{K,p^n} は $\Delta_K(t)$ を用いて計算できることが知られている．

定理 5.1 (Fox [Fo])**.** 全ての結び目 K，素数 p，正の整数 m に対して，

$$h_{K,\,m} = |\mathrm{Res}(t^m - 1, \Delta_K(t))| \tag{10}$$

が成立．ここで，$\mathrm{Res}(t^m - 1, \Delta_K(t))$ は，$t^{p^n} - 1$ と $\Delta_K(t)$ の終結式である．

■注意． Fox は，素べきに限らない全ての正の整数 r に対して，K で分岐する S^3 の r 重巡回被覆空間に対して定理 5.1 を示しているが，ここでは素べきの場合に限定して記載している．

K としてトーラス結び目を考える．互いに素な正の整数 a, b に対して，(a,b)-型トーラス結び目を $K_{(a,b)}$ とする．$K_{(a,b)}$ の Alexander 多項式は

$$\begin{aligned}\Delta_{K_{(a,b)}}(t) &= \frac{(1-t)(1-t^{ab})}{(1-t^a)(1-t^b)}\\ &= \prod_{\substack{N|ab\\ N\nmid a,\,b}} \Phi_N(t)\end{aligned} \tag{11}$$

である．ここで，$\Phi_N(t)$ は N 番目の円分多項式である．$K_{(a,b)}$ に対し Fox の定理を適用すると，

$$\begin{aligned}h_{K_{(a,b)},p^n} &= |\mathrm{Res}(t^{p^n} - 1, \Delta_{K_{(a,b)}}(t))|\\ &= \prod_{i=0}^{n} \prod_{\substack{N|ab\\ N\nmid a,\,b}} |\mathrm{Res}(\Phi_{p^i}(t), \Phi_N(t))|\end{aligned} \tag{12}$$

となり，円分多項式の終結式に帰着される．円分多項式の終結式については，Apostol [A] が次の公式を与えている．

定理 5.2 (Apostol [A, Theorem 4])**.** 互いに素な整数 $r > s > 1$ に対して，

$$\mathrm{Res}(\Phi_r, \Phi_s) = \begin{cases} p^{\phi(s)} & r/s \text{ が素数 } p \text{ べき} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

となる．ここで，$\phi(s)$ は s と互いに素な s 以下の正の整数の個数を表す．

これを適用して計算すると，$p \nmid b$ となる素数に対して，

$$h_{K_{(a,\,b)},\,p^n} = b^{p^{\min\{\mathrm{ord}_p(a),\,n\}}-1} \tag{13}$$

となる．ここで，正の整数 m に対して，$\mathrm{ord}_p(m) := \max\{i \in \mathbb{Z} : p^i \mid m\}$ とする．また，$p \mid b$ の場合は，$K_{(a,b)} = K_{(b,a)}$ より，a と b を入れ替えればよい．

K として 8 の字結び目を考える．以下，$p = 2, 3$ に対する h_{K,p^n} の計算結果である．

$n\backslash p$	2	3
1	5	16
2	45	5776
3	2205	192900153616
4	4870845	34 桁

急速に増大しているが，$h_{K,p^n} \pmod{p^n}$ を計算すると，

$$h_{K,2^n} \equiv \begin{cases} -3 \pmod{2^1} \\ -3 \pmod{2^2} \\ -3 \pmod{2^3} \\ -3 \pmod{2^4} \end{cases} \tag{14}$$

$$h_{K,3^n} \equiv \begin{cases} -2 \pmod{3^1} \\ -2 \pmod{3^2} \\ -2 \pmod{3^3} \\ -2 \pmod{3^4} \end{cases} \tag{15}$$

が確認でき，それぞれ $-3, -2$ に，p 進的に収束しているように見て取れる．実際，$\Delta_K(t)$ の根に関する p 進解析的な議論により証明できるが，やや込み入っているので，ここでは結果のみ紹介する．

定理 5.3. 8 の字結び目 K に対し，

$$\lim_{n\to\infty} h_{K,p^n} = \begin{cases} -3 & p=2 \\ -2 & p=3 \\ -4 & p=5 \\ \sqrt{2}-2 & p=7. \end{cases}$$

参考文献

[A] T. M. Apostol, Resultants of cyclotomic polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 457-462

[Co] H. Cohn, A numerical study of Weber's real class number calculation I, Numer. Mathe. 2 (1960) 347-362.

[Fo] R. H. Fox, Free differential calculus III. Subgroups, Ann. of Math. 64 (1956) 407-419.

[I] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1956) 257-258

[Ki] T. Kim, Filtration of the classical knot concordance group and Casson-Gordon invariants, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004) 293–306.

[Li] C. Livingston, Seifert forms and concordance, Geom. Topol. 6 (2002) 403-408.

[Mi] J. C. Miller, Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem, Acta Arith. 164 (2014) no.4 381-398.

[Mo] M. Morishita, Knots and Primes: an introduction to arithmetic topology, Springer Universitext 2012

[Rol] D. Rolfsen. Knots and Links (Mathematics Lecture Series, 7), Publish or Perish Berkeley CA 1976.

[U] J. Ueki, On The Homology of Branched Coverings of 3-Manifolds, Nagoya Math. J. 213 (2014) 21-39.

[We] H. Weber, Theorie der Abel'schen Zahlkörper, Acta Math. 8 (1886) 193-263.

Goussarov-Polyak-Viro 予想 ($n = 3$) について

高村 正志 (青山学院大学社会情報学部)*1
伊藤 昇 (茨城工業高等専門学校)*2
小鳥居 祐香 (広島大学)*3

本稿は「結び目の数理 IV」の報告集の一部として書かれたものです．オーガナイザーである早稲田大学の谷山公規先生, 安原晃先生, 村尾智先生, 丹下稜斗先生, 木村直記先生，開催スタッフの皆様に深く感謝致します.

1. Introduction

有限型不変量をガウス図式で組織的に表す方法を記述した Goussarov-Polyak-Viro の論文 ([1]) で次の主張が予想 (Conjecture 3.C) されている.

Conjecture 1 ([1], Conjecture 3.C) Every finite-type invariant of classical knots can be extended to a finite-type invariant of long virtual knots.

この論文では，$n = 2$ については base point に関する議論により，正しいことが確かめられている．しかしながら，n が 3 以上については，どのように解決するかの方策について明示がなされていない．予想の意味について Viro 氏に直接口頭で確認したところ次の問題を提示された.

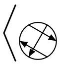
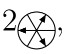
Problem 1 ([6]) (1) Clarify a relationship between Gauss diagram formulas as long virtual knot invariants and Gauss diagram formula as classical knot invariants (e.g., Polyak-Viro formula for the degree 3).
(2) How to merge Gauss diagram formulas as long virtual knot invariants into Gauss diagram formula as classical knot invariants (e.g., Polyak-Viro formula for the degree 3)?
(3) How to transform Gauss diagram formulas as classical knot invariants into Gauss diagram formulas as long virtual knot invariants?

予想の $n = 3$ に現れる，上記の問題を肯定的に解いたので報告する.

Theorem 1 y_i^* $(1 \leq i \leq 168)$ を Notation 1 のアロー図式とする．v_i $(1 \leq i \leq 23)$ を Proposition 2 の Gauss diagram formula とし，$\tilde{v}_i$ $(1 \leq i \leq 9)$ を Proposition 1 の Gauss diagram formula とする．$\mathbf{v}$ を v_i の係数からなる 23×168 行列とし，$\mathbf{w}$ を $\tilde{v}_i$ の係数からなる 9×168 行列とする．このとき，9×23 行列 A が一意的に存在し，$A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ となる.

さらに，Propsition 1 の系として，次数 3 の Polyak-Viro formula[4] に関して次を得た.

本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 20K03604，若手研究 (B) 16K17586, 若手研究 20K14322 から補助を受けております．また，Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University の支援にも感謝します.
*1 e-mail: takamura@si.aoyama.ac.jp
*2 e-mail: nito@gm.ibaraki-ct.ac.jp
*3 e-mail: kotorii@hiroshima-u.ac.jp

Corollary 1 Long virtual knot の Gauss diagram formula $v_{3,7}$ を $v_{3,7} := \langle f_{3,7}, \cdot \rangle$ により定める．ここで $f_{3,7} :=$  $+$  $+$  $+$  $+$  $+$  $+ 2$  $+ 2$  とする．このとき，$v_{3,7}(\cdot) = \Big\langle$  $+ 2$ $, \ \cdot \Big\rangle$ が成り立つ．

2. 不変量の構成法

K を knot とし，D_K を K の knot diagram とする．D_K の交点でない場所に基点を選び，向きを指定する．基点から指定した向きに沿って進み，最初の交点に 1 を割り当てる．次の交点が新しい交点の場合は 2 を割り当てる．この様にして各交点に文字（数字）を割り当てる．また，交点を通過するときに，跨いでいるときには $\bar{i}$ とマーキングをし，アローの向きは，i から $\bar{i}$ へ向かうとする．アローの符号は対応する交点の符号を付ける．この様にして，符号付き基点付きアロー図式を得る．（同様に virtual knot, long virtual knot についても定義される．）

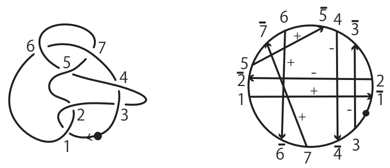


図 1: Knot diagram と 符号付き基点付きアロー図式

$\check{G}_\infty$ を符号付き基点付きアロー図式全体の集合とする [1]．x^*, y^* を符号付き基点付きアロー図式とする．x^* の符号 $\mathrm{sign}(x^*)$ を

$$\mathrm{sign}(x^*) := \prod_{\alpha\colon \text{arrow in } x^*} \mathrm{sign}(\alpha)$$

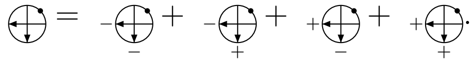
により定める．x^* に対し，整数値関数 $\tilde{x}^*\colon \check{G}_\infty \to \mathbb{Z}$ を

$$\tilde{x}^*(y^*) = \begin{cases} \mathrm{sign}(x^*) & \text{if } y^* = x^*, \\ 0 & \text{if } y^* \neq x^* \end{cases}$$

により定める．$\mathrm{Sub}(y^*)$ を y^* からいくつかのアローを除いてできるアロー図式の集合とする．x^* に対し,（同じ記号を用いて）整数値関数 $x^*\colon \check{G}_\infty \to \mathbb{Z}$ を

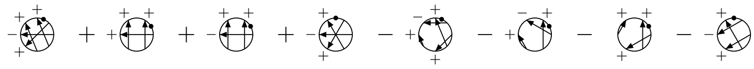
$$x^*(y^*) := \sum_{z^* \in \mathrm{Sub}(y^*)} \tilde{x}^*(z^*)$$

により定める．$x^*(y^*)$ を $\langle x^*, y^* \rangle$ と書く場合もある．線形に拡張して，Gauss diagram formula と呼ぶ．符号無し基点付きアロー図式は，符号付き基点付きアロー図式の和として見る：



Gauss diagram formula が Reidemeister move で不変となるための十分条件を書くために，relator を用意する ([2] Definition 8 を参照)．例として

[1] 気持ちが悪ければ十分高い次数の有限生成加群を考えても差し障りない．



などがある．

Theorem 2 $b,\ d\ (2 \le b \le d)$ を整数とする．$\check{G}_{\le d}$, $\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}[\check{G}_{\le l}]$, $\check{n}_d = |\check{G}_{\le d}|$, $\check{G}_{b,d}$ $= \{x_i^*\}_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d}$, $\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*$, $\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*$, $\check{O}_{b,d}(\check{R}_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5}(b,d))$ の定義は [2] を参照していただきたい．

32 通りの選択肢から $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5) \in \{0,1\}^5$ を任意に一つ選ぶ．このとき，任意の $r^* \in \check{O}_{b,d}(\check{R}_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5}(b,d))$ に対して，$\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ ならば，対応する各 Reidemeister move に対して $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*$ は整数値不変量である．

Classical knot のみについて，アロー図式のペア間に自然に成り立つ関係式がある ([2], Definition 17)．最大次数が 4 の Type (S$\check{\mathrm{III}}$) relator の一部をこの関係式に取り替えた relator を考える．次数が 3 以下の Gauss diagram formula に対し，Theorem 2 と同様の結果を得る．

3. コンピュータによる計算

ガウスワードの同値類全体の集合，向き付きガウスワードの同値類全体の集合を求めるコンピュータ・プログラムの実装は [3] で完成している．今回，このプログラムに基点と符号の情報を追加する改良を行った．次数 2 の符号付き基点付きアロー図式と次数 3 の基点付きアロー図式のリストは次になる．

Notation 1 (y_i^* $(1 \le i \le 168)$ の定義) $y_1^* =$, $y_2^* =$, $y_3^* =$, $y_4^* =$, $y_5^* =$,

$y_6^* =$, $y_7^* =$, $y_8^* =$, $y_9^* =$, $y_{10}^* =$, $y_{11}^* =$, $y_{12}^* =$, $y_{13}^* =$,

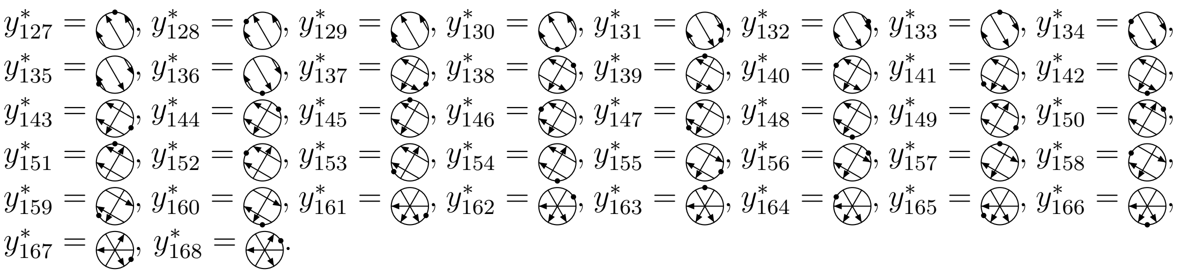
$y_{14}^* =$, $y_{15}^* =$, $y_{16}^* =$, $y_{17}^* =$, $y_{18}^* =$, $y_{19}^* =$, $y_{20}^* =$,

$y_{21}^* =$, $y_{22}^* =$, $y_{23}^* =$, $y_{24}^* =$, $y_{25}^* =$, $y_{26}^* =$,
$y_{27}^* =$, $y_{28}^* =$, $y_{29}^* =$, $y_{30}^* =$, $y_{31}^* =$, $y_{32}^* =$,
$y_{33}^* =$, $y_{34}^* =$, $y_{35}^* =$, $y_{36}^* =$, $y_{37}^* =$, $y_{38}^* =$, $y_{39}^* =$,

$y_{40}^* =$, $y_{41}^* =$, $y_{42}^* =$, $y_{43}^* =$, $y_{44}^* =$, $y_{45}^* =$, $y_{46}^* =$,

$y_{47}^* =$, $y_{48}^* =$, $y_{49}^* =$, $y_{50}^* =$, $y_{51}^* =$, $y_{52}^* =$, $y_{53}^* =$, $y_{54}^* =$,

$y_{55}^* =$, $y_{56}^* =$, $y_{57}^* =$, $y_{58}^* =$, $y_{59}^* =$, $y_{60}^* =$, $y_{61}^* =$, $y_{62}^* =$,
$y_{63}^* =$, $y_{64}^* =$, $y_{65}^* =$, $y_{66}^* =$, $y_{67}^* =$, $y_{68}^* =$, $y_{69}^* =$, $y_{70}^* =$,
$y_{71}^* =$, $y_{72}^* =$, $y_{73}^* =$, $y_{74}^* =$, $y_{75}^* =$, $y_{76}^* =$, $y_{77}^* =$, $y_{78}^* =$,
$y_{79}^* =$, $y_{80}^* =$, $y_{81}^* =$, $y_{82}^* =$, $y_{83}^* =$, $y_{84}^* =$, $y_{85}^* =$, $y_{86}^* =$,
$y_{87}^* =$, $y_{88}^* =$, $y_{89}^* =$, $y_{90}^* =$, $y_{91}^* =$, $y_{92}^* =$, $y_{93}^* =$, $y_{94}^* =$,
$y_{95}^* =$, $y_{96}^* =$, $y_{97}^* =$, $y_{98}^* =$, $y_{99}^* =$, $y_{100}^* =$, $y_{101}^* =$, $y_{102}^* =$,
$y_{103}^* =$, $y_{104}^* =$, $y_{105}^* =$, $y_{106}^* =$, $y_{107}^* =$, $y_{108}^* =$, $y_{109}^* =$, $y_{110}^* =$,
$y_{111}^* =$, $y_{112}^* =$, $y_{113}^* =$, $y_{114}^* =$, $y_{115}^* =$, $y_{116}^* =$, $y_{117}^* =$, $y_{118}^* =$,
$y_{119}^* =$, $y_{120}^* =$, $y_{121}^* =$, $y_{122}^* =$, $y_{123}^* =$, $y_{124}^* =$, $y_{125}^* =$, $y_{126}^* =$,



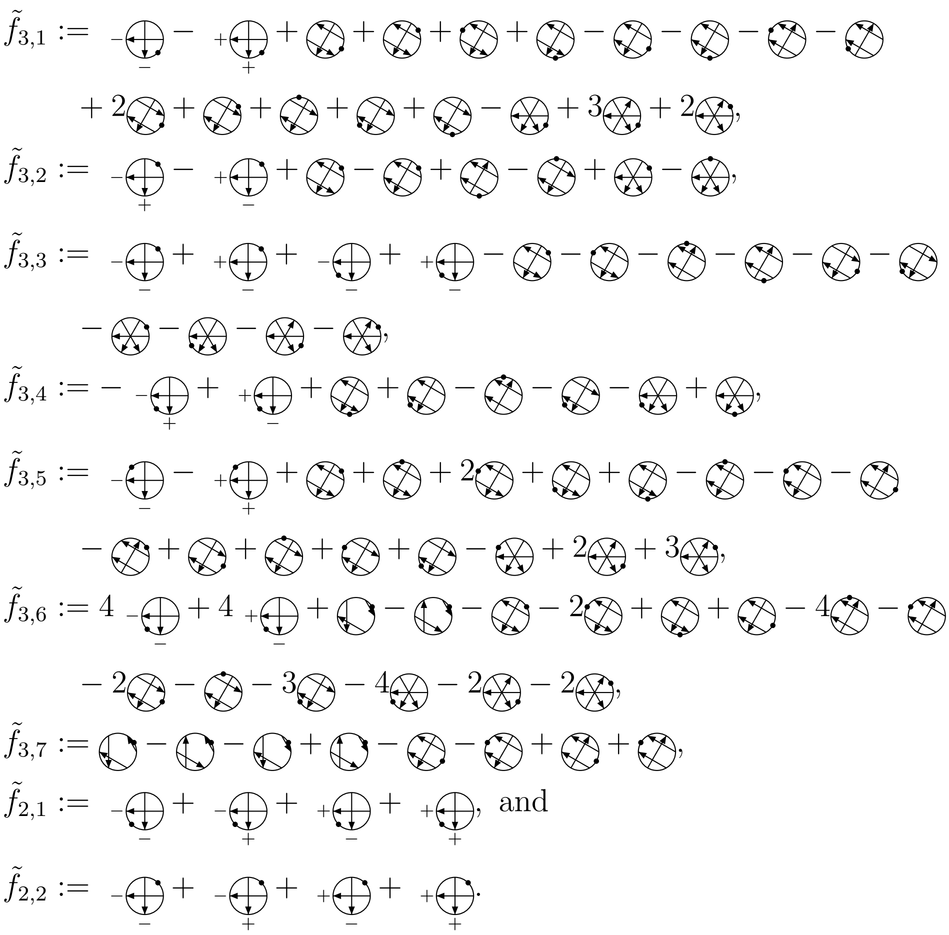
Notation 2 Type ($\check{\mathrm{I}}$) relator を122個, Type ($\check{\mathrm{W}}\mathrm{II}$) relator を96個, Type ($\check{\mathrm{S}}\mathrm{III}$) relator を246個定める．具体的な表示は[5]をご参照いただきたい．

Notation 1 と Notation 2 に対して，Theorem 2 を適用すると，long virtual knot の不変量が得られる．

Proposition 1 9個の Gauss diagram formula

$$\tilde{v}_{3,i}(\cdot) = \langle \tilde{f}_{3,i}, \cdot \rangle (1 \leq i \leq 7), \quad \tilde{v}_{2,i}(\cdot) = \langle \tilde{f}_{2,i}, \cdot \rangle (i = 1, 2)$$

は独立な次数3以下の long virtual knot の Goussarov-Polyak-Viro 有限型不変量となる．ここで，$\tilde{f}_{3,i}$ $(1 \leq i \leq 7)$ と $\tilde{f}_{2,i}$ $(i = 1, 2)$ は次で定義される：



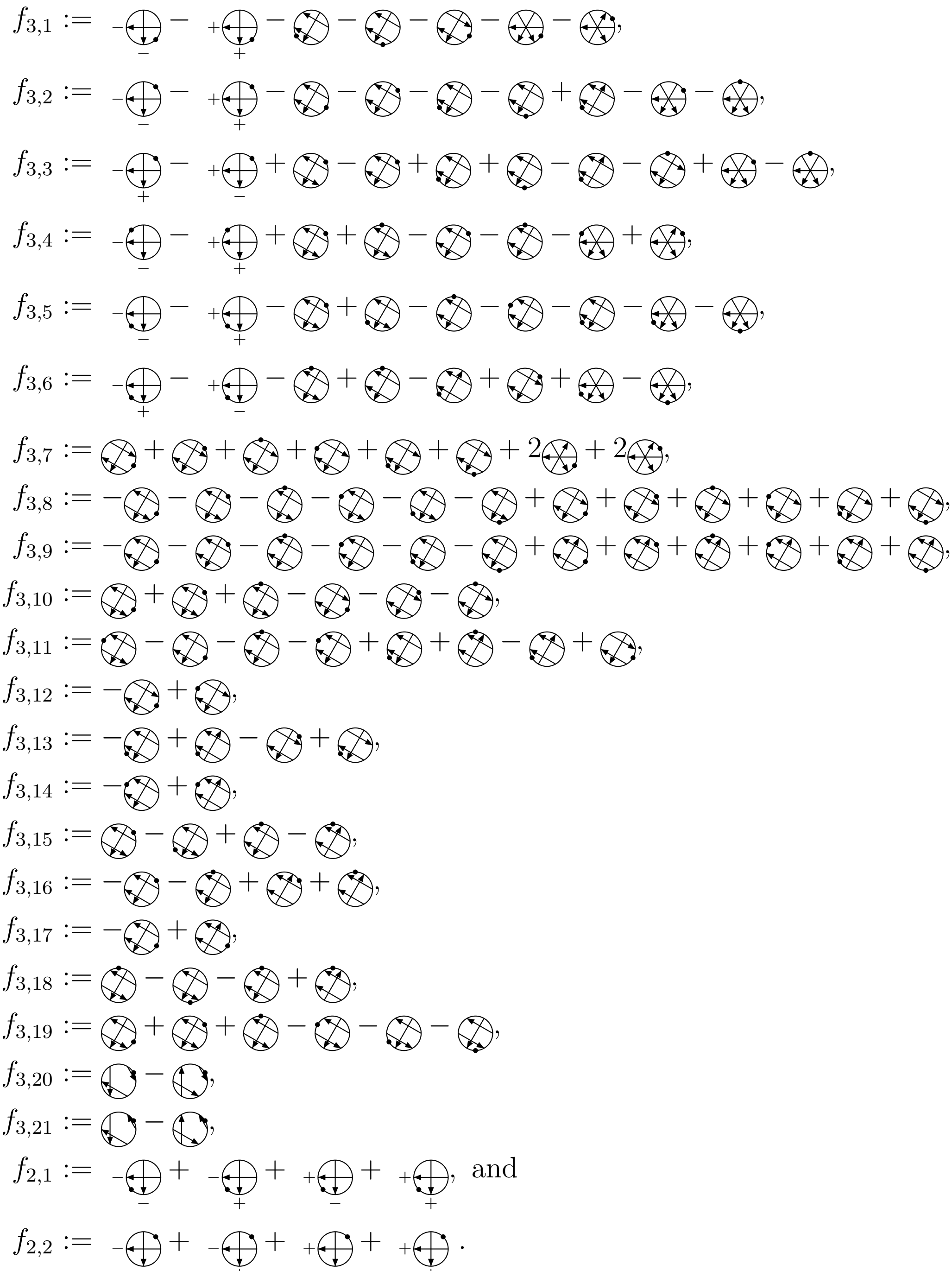
Notation 3 Type ($\check{\mathrm{S}}\mathrm{III}$) relator の一部を取り替えた186個定める．具体的な表示は[5]をご参照いただきたい．

Notation 1 と Notation 2 の Type ($\check{\mathrm{I}}$) relator, Type ($\check{\mathrm{W}}\mathrm{II}$) relator と Notation 3 の Type ($\check{\mathrm{S}}\mathrm{III}$) relator に対して，計算を行うと classical knot の不変量が得られる．

Proposition 2 21 個の Gauss diagram formulas

$$v_{3,i}(\cdot) = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle (1 \leq i \leq 21),\ v_{2,i}(\cdot) = \langle f_{2,i}, \cdot \rangle (i = 1, 2)$$

は classical knot 不変量となる．ここで $f_{3,i}$ $(1 \leq i \leq 21)$ と $f_{2,i} (i = 1, 2)$ は次で定義される：



参考文献

[1] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, Finite-type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39** (2000), 1045–1068.

[2] N. Ito, Y. Kotorii, and M. Takamura, Goussarov-Polyak-Viro Conjecture for degree three case, arXiv:1905.01418v3.

[3] N. Ito, and M. Takamura, Arrow diagrams on spherical curves and computations, J. Knot Theory Ramifications 30(07) 2150045-1-2150045-47.

[4] M. Polyak and O. Viro, Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, *Internat. Math. Res. Notices* **1994,** 445ff., approx. 8pp. (electronic).

[5] M. Takamura, *Order of Relators*, http://www.foliations.jp/takamura/knot/index.html

[6] O. Viro, private communication.

曲面絡み目の plat 表示を用いた結び目群の計算

安田 順平 (大阪大学大学院理学研究科)

概要

絡み目の plat 表示はブレイドを用いた絡み目の表示の方法であり，これはブレイド状曲面を用いることによって曲面絡み目へ拡張できる．本講演では plat 表示による曲面絡み目の結び目群を計算する方法として，曲面絡み目の結び目群をブレイド状曲面の結び目群の表示から得る方法を紹介する．また結び目カンドルについても議論する．

1 導入

結び目理論においてブレイドを用いた絡み目の表示は次の 2 つが知られている．1 つはブレイドの閉包 (図 1) であり，もう 1 つはブレイドの plat 閉包 (図 2) である．

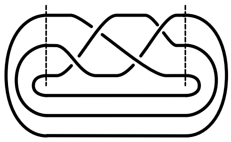


図 1 ブレイドの閉包

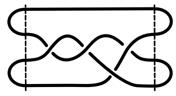


図 2 ブレイドの plat 閉包

曲面絡み目とは 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれた閉曲面である．向き付け可能な全ての曲面絡み目は 2 次元ブレイドと呼ばれるコンパクト曲面の閉包によって表示できることが知られている ([6])．これは (1 次元) 絡み目におけるブレイドの閉包の類似である．

昨年の講演において，適切なブレイド状曲面の **plat 閉包**と曲面絡み目の **plat 表示**を導入し，全ての曲面絡み目が plat 表示を持つことを紹介した．これは (1 次元) 絡み目におけるブレイドの plat 表示の類似である．

結び目群とは曲面絡み目 F の補空間の基本群であり，結び目対称カンドルとは結び目群を拡張して得られる曲面絡み目の不変量である．本稿の目的はこれらの不変量を曲面絡み目の plat 表示を用いて計算することであり，主定理は次の通りである．

定理 5.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，plat 閉包 $\widetilde{S}$ の結び目群 $G(\widetilde{S})$ は次の群表示を持つ：

$$G(\widetilde{S}) = \left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_n,\ x_{2i-1} = x_{2i}^{-1}\ (i = 1, \ldots, m) \right\rangle.$$

ここで関係子 $r_1, \ldots, r_n$ はブレイド状曲面の補空間の基本群 $\pi_1(D^4 \setminus S)$ のある群表示から得られる関係子である．

定理 5.3. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，plat 閉包 $\widetilde{S}$ の結び目対称カンドル $X(\widetilde{S})$ は次の対称カンドル表示を持つ：

$$X(\widetilde{S}) = \langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_n,\ x_{2i-1} = \rho(x_{2i})\ (i = 1, \ldots, m) \rangle_{\mathrm{sq}}.$$

ここで $r_1, \ldots, r_n$ は定理 5.2 と同様にして得られる関係子である．

本稿では PL カテゴリーまたは滑らかなカテゴリーで議論を行う．これにより曲面絡み目は局所平坦な PL 写像又は C^∞ 級写像によって $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれている．

2 ブレイドと絡み目の plat 表示

本稿において n, m は正整数，$I = [0,1]$ は閉区間，$D = I^2$ は 2 次元円板又は正方形とし，自然な埋め込みによって $I \subset \mathbb{R}$，$D \subset \mathbb{R}^2$ とする．2 次元円板 D の n 点集合 $Q_n = \{q_1, \ldots, q_n\}$ を $q_k = (1/2, k/n+1) \in D$ によって定める．写像 $\mathrm{p} : D \times I \to I$ を第 2 成分の射影とする．

円筒 $D \times I$ 内の 1 次元多様体 β が次数 n の**幾何ブレイド** (**geometric braid**) であるとは次を満たすことをいう：

(1) 制限写像 $\mathrm{p}|_\beta : \beta \to I$ は n 次の被覆写像である．

(2) 境界 $\partial\beta$ は $Q_n \times \{0,1\}$ と一致する．

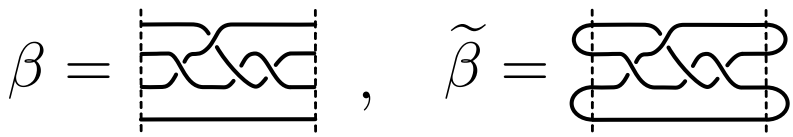


図 3　次数 4 のブレイドによる八の字結び目の plat 表示

円筒 $D \times I$ 内の **wicket** とは，$D \times I$ 内の半円周 (semicircle) であり，半円周の境界は $\mathrm{Int}D \times \{0\}$ で垂直に交わっているものである ([2])．$D \times I$ 内の ***m*-wicket system** とは，互いに交わらない m 本の wicket の和集合である．構成より m-wicket system w の境界は $D \times \{0\}$ 内の $2m$ 点集合となる．また w の端点集合は，各 wicket の端点に対応する m 組の分割が与えられる．そこで $|\partial w|$ によって w の境界成分である D 上の $2m$ 点を表し，∂w によって分割も込めた境界成分を表すことにする．すると wicket の定義より，2 つの m-wicket system w, w' の境界 $\partial w, \partial w'$ が等しいとき，w と w' は等しいことが分かる：

$$\partial w = \partial w' \implies w = w'.$$

特に $\partial w_m = \{\{q_1, q_2\}, \ldots, \{q_{2m-1}, q_{2m}\}\}$ となる m-wicket system w_m を**標準的な** (**standard**) m-wicket system と呼ぶ.

$D \times I$ は $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 内にあるとする．次数 $2m$ のブレイド β に対して，2 つの標準的 m-wicket system を図 3 の右図のように β へ貼り合わせることによって $\mathbb{R}^3$ 内の絡み目 $\widetilde{\beta}$ を定める．この絡み目を β の **plat 閉包**という．

絡み目 L があるブレイドの plat 閉包と一致するとき，L は **plat form** であるという．全同位変形によって全ての絡み目はある plat form な絡み目と同値であることが分かる．L と同値な plat form を絡み目 L の **plat 表示**と呼ぶ．

以下の $m+1$ 個のブレイドによって生成されるブレイド群 B_{2m} の部分群 K_{2m} を **Hilden の部分群**という ([3], cf. [1])：

$$K_{2m} \;=\; \left\langle \sigma_1,\, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2,\, \sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}^{-1}\sigma_{2i}^{-1}\ (i=1,2,\ldots,m-1) \right\rangle.$$

円筒 $D\times I$ 内の m-wicket system 全体のなす配置空間を $\mathcal{W}_m$ とする．$\mathcal{W}_m$ は弧状連結であることが知られている．

命題 2.1 (Brendle-Hatcher [2])**.** 配置空間 $\mathcal{W}_m$ の基本群は Hilden 部分群と同型である：

$$\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m) \;\simeq\; K_{2m}.$$

この $\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から K_{2m} への群同型写像は次のようにして与えられる ([2])．写像 $f:(I,\partial I)\to(\mathcal{W}_m, w_m)$ を $\mathcal{W}_m$ 内の閉曲線とする．この f に対して次数 $2m$ の幾何ブレイド β_f を次のように定める：

$$\beta_f \;=\; \{|\partial f(t)|\times\{t\}\subset D\times I \mid t\in I\}.$$

各々の同値類を取ることにより $[f]\in\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から $[\beta_f]\in B_{2m}$ への写像が得られ，この写像が well-defined かつ命題 2.1 の同型を与えることが分かる．

定義 2.2. 幾何ブレイド β が**適切** (**adequate**) であるとは，ある閉曲線 $f:(I,\partial I)\to(\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta=\beta_f$ を満たすことをいう．

Hilden 部分群は適切な幾何ブレイド (の同値類) によって生成されることに注意する．また連続写像 $\rho:(\mathcal{W}_m, w_m)\to(\mathrm{Conf}_{2m}(D), Q_{2m})$ を $\rho(w)=|\partial w|$ として定めるとき，上の対応は $[f]\in\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ に $[\rho\circ f]\in\pi_1(\mathrm{Conf}_{2m}(D), Q_{2m})=B_{2m}$ を対応させていることに他ならない．

3　曲面絡み目とブレイド状曲面

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれた閉曲面を**曲面結び目** (**surface-knot**) といい，いくつかの互いに交わらない曲面結び目の和集合を**曲面絡み目** (**surface-link**) という．特に 2 次元球面 S^2 と同相な曲面結び目を 2 **次元結び目** (**2-knot**) という．2 つの曲面絡み目 F と F' が $\mathbb{R}^4$ の全同位 (ambient isotopy) で移りあうとき，F と F' は**同値である**といい，$F\simeq F'$ と記す．

D_1 と D_2 を正方形 I^2，写像 $\mathrm{pr}_i: D_1\times D_2\to D_i$ $(i=1,2)$ を第 i 成分への射影とする．また D_2 の基点 y_0 を ∂D_2 上に取り固定する．

次数 n の (**点付き**) **ブレイド状曲面** ((**pointed**) **braided surface**) とは次の 3 つを満たす $D_1\times D_2$ に埋め込まれた向き付けられた曲面 S である ([14]):

(1) 制限写像 $\pi_S=\mathrm{pr}_2|_S: S\to D_2$ は次数 n の単純分岐被覆写像である．
(2) 境界 ∂S は $D_1\times\partial D_2$ 内の閉ブレイドである．
(3) 基点 y_0 の π_S による逆像 $\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(y_0))$ は Q_n と一致する．

ここで n 次の分岐被覆写像が**単純**であるとは，各分岐値の逆像が $n-1$ 点からなるときを言う．

2 **次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) とはブレイド状曲面 S であって境界 ∂S が自明な閉ブレイドとなるものである．即ち，各 $y \in \partial D_2$ について $\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(y)) = Q_n$ が成り立つ．分岐被覆写像 π_S の次数をブレイド状曲面 S の**次数**といい，$\deg S$ と記す．

2 つのブレイド状曲面が**同値**であるとは，$D_1 \times D_2$ のファイバーを保つ同位 (isotopy) $\{h_t\}_{t\in I}$ によって移り合うことを言う．ここで連続写像 h_t がファイバーを保つとは，$D_1 \times D_2$ を D_2 上の自明な D^2 束と見なしたときに h_t が $D_1 \times D_2$ のファイバー構造を保つことを意味している．ブレイド状曲面が**自明**であるとは，2 次元ブレイド $Q_n \times D_2$ に同値であることをいう．

補題 3.1 ([8], Lemma 16.9)**.** ブレイド状曲面 S が自明である必要十分条件は分岐被覆写像 π_S が分岐点を持たないことである．

主定理を述べるために，ブレイド状曲面のチャート表示を導入する．

2 次元円板 D_2 上の有限有向グラフ Γ が次数 n の**チャート** (**chart**) であるとは次を満たすことをいう ([5, 8])：

(1) Γ の各頂点の次数は $1, 4, 6$ のいづれかである．
(2) 共通部分 $\partial D_2 \cap \Gamma$ は 1 価頂点のみであり Γ は基点 y_0 を含まない．
(3) 各辺には $1, 2, \cdots, n-1$ のいづれかを値に持つラベルが付与されている．
(4) 各 4 価頂点の近傍において，辺のラベルと向きは図 5 のようになっている．ここで i と j は辺に付与されたラベルであって $|i-j| > 1$ を満たす．
(5) 各 6 価頂点の近傍において，辺のラベルと向きは図 6 のようになっている．ここで i と j は辺に付与されたラベルであって $|i-j| = 1$ を満たす．

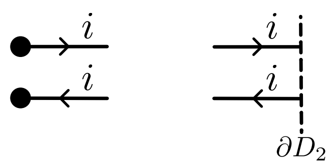


図 4　チャートの黒頂点と境界点

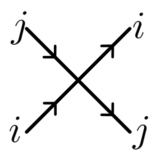


図 5　チャートの交点

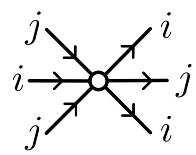


図 6　チャートの白頂点

ここで有向グラフ Γ は多重辺やループを含むことに注意する．チャートにおいて，4 価頂点を**交点** (**crossing**)，6 価頂点を**白頂点** (**white vertex**), D_2 の内部にある 1 価頂点を**黒頂点** (**black vertex**), そして ∂D_2 上の 1 価頂点を**端点** (**boundary vertex**) と呼ぶ．チャートの各 1 価頂点 v に対して，v の**ラベル**を隣接する辺のラベルの値として定める．図 4 の左上のように隣接する辺の向きが黒頂点を始点とするとき，その黒頂点の符号は**正** (**positive**) であるといい，終点となる向きのときその黒頂点の符号は**負** (**negative**) であるという．

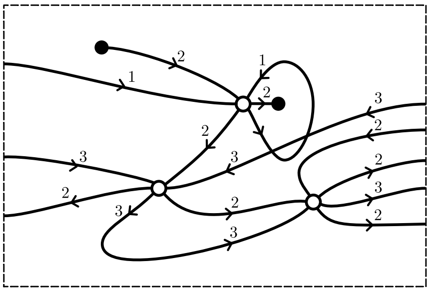


図 7　D_2 上のチャートの例

次にチャートからブレイド状曲面を構成する方法を与える．$I_1 = I_2 = [0,1]$, $D_2 = I_1 \times I_2$ とする．最初に，D_2 の同位変形によって Γ の端点は $I \times \{0,1\}$ 上へ移動する．そして射影 $p : I_1 \times I_2 \to I_2$ の制限写像 $p|_\Gamma : \Gamma \to I_2$ に対して，Γ の頂点を除いて $p|_\Gamma$ の臨界点が非退化であるように同位変形を行う．このとき Γ の端点を除いた頂点及び臨界点は $I_1 \times \{t_i\}$ 上にあるとしてよい $(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r < 1)$．$t \in I_2 \setminus \{t_1, \cdots, t_r\}$ のとき，$I_1 \times \{t\}$ は Γ の有限個の辺と横断的に交わっている．そこで各辺の交わりを (I_1 について) 上から順に読んでいき，辺の向きとラベル i に対してブレイドの生成元 $\sigma_i^{\pm 1}$ を対応させることにより，$\Gamma \cap I_1 \times \{t\}$ から次数 n のブレイド β_t を構成することができる (図 8)．また $t = t_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ のときは，図 9 のようなブレイドの変形を対応させる．黒頂点に対応して現れるブレイド内の交点は，構成しているブレイド状曲面の分岐点である．

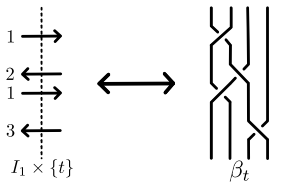


図 8　$\Gamma \cap I_1 \times \{t\}$ とブレイド β_t の対応付け

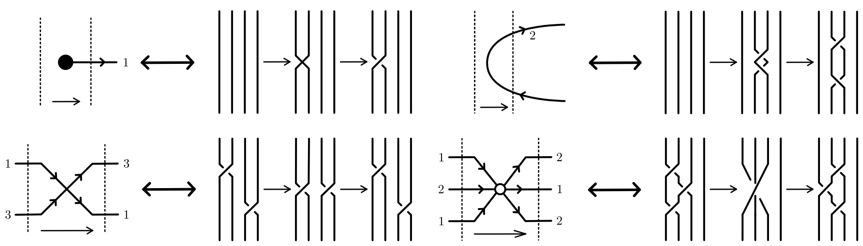


図 9　チャートの頂点とブレイドの関係子の対応付け

以上によりチャート Γ からブレイドのモーションピクチャー $\{\beta_t\}_{t \in I_2}$ が構成され，このモーションピクチャーが与えるコンパクト曲面はブレイド状曲面となる．逆にブレイド状曲面が与えられたとき，ブレイド状曲面のモーションピクチャーから今の構成を辿ることにより，チャートを構成す

ることができる．よってブレイド状曲面はチャートを用いて表示することが可能となる．これをブレイド状曲面の**チャート表示**という．

次に，チャートの同値変形を導入する．2 つの次数 n のチャート Γ, Γ' に対して，$\Gamma \setminus E = \Gamma' \setminus E$ かつ次の (C1) から (C4) のいづれかを満たすような D_2 上の円板 E が存在するとき，Γ と Γ' は**チャート変形** (**C-move**) で移りあうという ([5, 12])：

(C1) $\Gamma \cap E$ と $\Gamma' \cap E$ は black vertex を含まない．
(C2) E 内の Γ と Γ' は図 10 のようになっている*1．ここで $|i - j| > 1$ を満たす．
(C3) E 内の Γ と Γ' は図 11 のようになっている．ここで $|i - j| = 1$ を満たす．
(C4) E は D_2 の (y_0 を避けた) 境界を連結に含んでおり，E 内の Γ と Γ' は図 12 のようになっている．

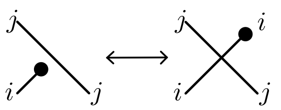


図 10　チャートの C2 変形

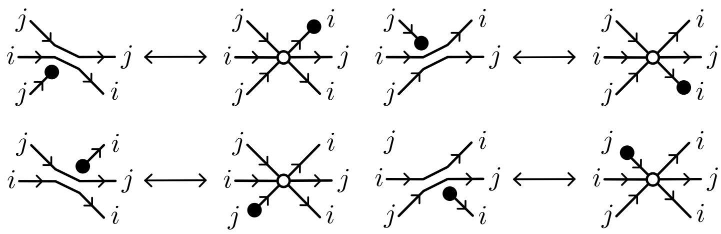


図 11　チャートの C3 変形

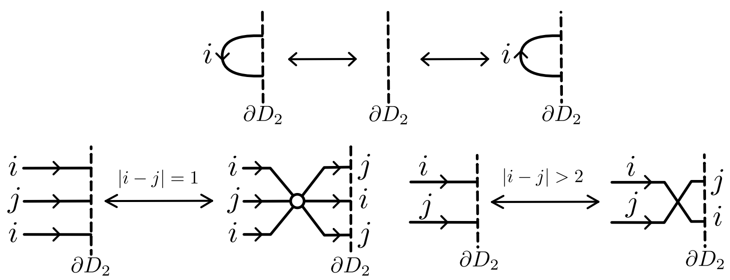


図 12　チャートの C4 変形

命題 3.2 ([9], cf. [12])**.** 2 つのブレイド状曲面が同値である必要十分条件は，対応するチャート表示が (有限回の) チャート変形 C1 ~ C4 と y_0 を固定した D_2 の同位変形によって移りあうことである．

命題 3.3 ([5])**.** 2 つの 2 次元ブレイドが同値である必要十分条件は，対応するチャート表示が (有限回の) チャート変形 C1 ~ C3 と D_2 の同位変形によって移りあうことである．

*1 辺の向きに依らず定義しているため，辺の向きを省略している．

4　曲面絡み目の plat 表示

この章では曲面絡み目の plat 表示を導入する．D_1, D_2 は共に I^2 であるため，$I \subset \mathbb{R}$ によって $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ そして $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする．境界 ∂D_2 の $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Int}\, D_2$ 内における正則近傍を N とする．また N はアニュラス $I \times S^1$ と同相であるため，$\partial N = \{0\} \times S^1$ を満たすような自然な同一視 $N = I \times S^1$ を行う．

定義 4.1. 配置空間 $\mathcal{W}_m$ 内のループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_m)$ に対して，$D_1 \times N$ 内の曲面 A_f を

$$A_f \;=\; \bigcup_{t \in I} f(t) \times \{p(t)\} \;\subset\; D \times I \times S^1 \;=\; D_1 \times N,$$

によって定める．ここで $p : I \to S^1 = I/\partial I$ は商写像である．このようにして得られる曲面 A_f を **wicket 型**の曲面と呼ぶ.

m-wicket system は境界成分とその分割から一意的に復元できていた．よって wicket 型の曲面 A_f も境界 $\partial A_f = \bigcup_{t \in S^1} \partial |f(t)| \times \{t\}$ から一意的に定まる．また上の同一視によって $\partial D_2 = \{0\} \times S^1$ であったことに注意する.

次数 n のブレイド状曲面 S に対して次数 n のブレイド β_S を以下で定める：

$$\beta_S \;=\; \bigcup_{t \in I} \mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(t)) \times \{t\}.$$

定義 4.2. 幾何ブレイド β_S が適切なブレイドであるとき，S は**適切** (**adequate**) であるという.

適切なブレイド状曲面は，次数が偶数であることに注意する．命題 2.1 の証明より適切なブレイドは wicket system のループと対応していた．そこで次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，適切なブレイド β_S に対応する m-wicket system のループを f_S と記す.

すると $f = f_S$ のとき，S と A_f の境界は一致する．この A_f を A_S と記す．それ故に，次に定める適切なブレイド状曲面の plat 閉包は well-defined に定まる.

定義 4.3. 適切なブレイド状曲面 S の **plat 閉包** (**plat closure**) $\widetilde{S}$ を $\mathbb{R}^4$ 内の S と A_S の和集合として定める：

$$\widetilde{S} \;=\; S \;\cup\; A_S.$$

定義 4.4. 曲面絡み目 F がある適切なブレイド状曲面の plat 閉包であるとき，F を **plat form** という．さらに S が 2 次元ブレイドのとき，F を **genuine plat form** という.

定理 4.5. 全ての曲面絡み目は plat 表示を持つ.

定理 4.6. 全ての向き付け可能な曲面絡み目は genuine plat 表示を持つ.

5 plat 表示による曲面絡み目の結び目群の表示

曲面絡み目の plat 表示を用いて曲面絡み目の結び目群の表示を計算する．そのために，ブレイド状曲面の結び目群の表示について復習する．詳細に関しては [8] を参照されたい．

曲面絡み目 F の結び目群を $G(F) = \pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ と記す．次数 n のブレイド状曲面 S に対して S の結び目群 $G(S)$ を $\pi_1(D_1 \times D_2 \setminus S)$ によって定める．

ブレイド群 B_n は (D_1, Q_n) の写像類群 $\mathcal{M}(D_1, Q_n)$ と同型であるから，ブレイドは空間対 (D_1, Q_n) の同相写像 (のホモトピー類) と見做すことが出来るため，ブレイド β は基本群 $\pi_1(D_1, Q_n) = F_n$ の同型写像を誘導する．この同型写像を **Artin の自己同型写像**といい，$\mathrm{Artin}(\beta) : F_n \to F_n$ と記す．ここで $\pi_1(D_1, Q_n) = F_n$ は n 次の自由群である．

次数 n のブレイド状曲面のチャート表示 Γ を取り，Γ の黒頂点全体からなる D_2 内の有限集合を $\Sigma = \{y_1, \ldots, y_l\}$ とする．各黒頂点 y_i について y_i のラベルを k_i，符号を ε_i と記す．

始点を y_i，終点を D_2 の基点 y_0 とする単純曲線 $a_i : I \to D_2$ $(i = 1, \ldots, n)$ が次を満たすとき，その組 $(a_1, \ldots, a_l)$ を Σ を始点集合とする D_2 上の **Hurwitz arc system** という：

(1) a_i の像 $\mathrm{Im}\, a_i$ は，$\mathrm{Im}\, a_i \cap \partial D_2 = \{a_i(1)\}$ かつ $\mathrm{Im}\, a_i \cap \mathrm{Im}\, a_j = \{y_0\}$ $(i \neq j)$ を満たす．
(2) y_0 の近傍において $a_1, \ldots, a_n$ の像は $a_1, \ldots, a_n$ の順に並んでいる．

そして y_0 を始点に a_i に沿って時計回りに一周して得られる $D_2 \setminus \Sigma$ 上の単純閉曲線を γ_i とする．このとき各 $t \in I$ に対して $\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(t)))$ は D_1 上の n 点集合であり，$\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(0))) = \mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(1))) = Q_n$ であるので，これによって γ_i は次数 n のブレイドを与える．特に γ_i は a_i に沿って時計回りに一周して得られる単純閉曲線より，得られるブレイドは $\sigma_{k_i}^{\varepsilon_i}$ の共役類 $\beta_i^{-1}\sigma_{k_i}^{\varepsilon_i}\beta_i$ である $(\beta_i \in B_n)$．以上によりブレイドの組 $(\beta_1^{-1}\sigma_{k_1}^{\varepsilon_1}\beta_1, \ldots, \beta_l^{-1}\sigma_{k_l}^{\varepsilon_l}\beta_l)$ が得られる．このブレイドの組をブレイド状曲面の**ブレイドシステム (braid system)** という．

x_i を $D_1 \setminus Q_n$ 上の $q_i \in Q_n$ を中心とするメリディアンループとして取り，$(D_1 \times D_2) \setminus S = D_1 \setminus Q_n$ によって $x_i \in G(S)$ と見做す $(i = 1, \ldots, n)$．すると次が知られている．

命題 5.1 ([8])**.** 次数 n のブレイド状曲面 S のブレイドシステムを $(\beta_1^{-1}\sigma_{k_1}\beta_1, \ldots, \beta_l^{-1}\sigma_{k_l}\beta_l)$ とする．このとき結び目群 $G(S)$ は次の群表示を持つ：

$$G(S) \;=\; \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, \mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1}) \ (i = 1, \ldots, l) \rangle .$$

関係子 $\mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1})$ を単に r_i と記す．すると次の定理が得られる．

定理 5.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，結び目群 $G(\widetilde{S})$ は次のような群表示をもつ：

$$G(\widetilde{S}) \;=\; \left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_l,\, x_{2i-1} = x_{2i}^{-1} \ (i = 1, \ldots, m) \right\rangle .$$

定理 5.2 は，$G(S)$ と $G(A_S) = \pi_1((\mathbb{R}^4 \setminus D_1 \times D_2) \setminus A_S)$ に関する Van Kampen の定理，または曲面絡み目の図式を用いて証明することが可能である．特に，曲面絡み目 $\widetilde{S}$ の図式上にメリディアン

ループの生成元を記述することによって定理 5.2 の証明は与えられるが，これは次に導入する結び目対称カンドルに対しても全く同様な議論が可能である ([7]).

5.1 カンドルと結び目対称カンドル

曲面絡み目の plat 表示を用いて，結び目対称カンドルの表示を計算する．

集合 X と二項演算 $*: X\times X \to X$ の組 $(X,*)$ が**カンドル (quandle)** であるとは，次の 3 つを満たすことをいう ([13, 4])：

(Q1) 任意の元 $x\in X$ に対して $x*x=x$ が成り立つ．

(Q2) 任意の元 $x,y\in X$ に対して $(x*y)\bar{*}y=(x\bar{*}y)*y=y$ が成り立つ二項演算 $\bar{*}: X\times X\to X$ が存在する．

(Q3) 任意の元 $x,y,z\in X$ に対して 右分配律 $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$ が成り立つ．

カンドル $(X,*)$ の演算が明らかな場合には，単に X と記すことにする．

またカンドル X の対合写像 $\rho: X\to X$ に対して，組 (X,ρ) が**対称カンドル (symmetric quandle)** であるとは次を満たすことをいう ([10])：

(SQ1) 任意の元 $x,y\in X$ に対して $\rho(x*y)=\rho(x)*y$ が成り立つ．

(SQ2) 任意の元 $x,y\in X$ に対して $x*\rho(y)=x\bar{*}y$ が成り立つ．

対称カンドルの例として次に挙げる結び目対称カンドルがある．曲面絡み目 F とその正則近傍 $N(F)$ に対して，F の外部空間の基点 $q\in\mathbb{R}^4\setminus N(F)$ を 1 つ取り固定する．そして集合 $X(F,q)$ を

$$X(F,q)\ =\ \{(D,\alpha)\,|\,D\colon F\text{ のメリディアン円板},\alpha\colon\partial D\text{ から }q\text{ への単純曲線 }\}/\text{homotopy}$$

として定める．また $X(F,q)$ の二項演算 $*$ を

$$[(D_1,\alpha_1)]*[(D_2,\alpha_2)]=[(D_1,\alpha_1\cdot\alpha_2^{-1}\cdot\partial D_2\alpha_2)]$$

によって定めると，$X(F,q)=(X(F,q),*)$ はカンドルの公理を満たす．$X(F,q)$ を曲面絡み目 F の **full knot quandle** という．full knot quandle $X(F,q)$ は基点 q の取り方に依らないため，簡単のために $X(F)$ と記すことにする．

さらに $X(F)$ の対合写像 $\rho: X(F)\to X(F)$ を $\rho([(D,\alpha)]):=[(-D,\alpha)]$ によって定義すれば，組 $(X(F),\rho)$ は対称カンドルの公理を満たす．この対称カンドル $(X(F),\rho)$ を曲面絡み目 F の**結び目対称カンドル (knot symmetric quandle)** と呼ぶ ([10])．これは曲面絡み目の結び目群を (対称) カンドルへ拡張した曲面絡み目の不変量である．

ここで n 次の**自由対称カンドル (free symmetric quandle)** $\mathrm{FSQ}(n)$ を，D_1 内における Q_n の結び目対称カンドルとして定義する ([11])．すると自由群の場合と同様の議論によって，次数 n のブレイド β からカンドル自己同型写像 $\mathrm{Artin}(\beta): \mathrm{FSQ}(n)\to\mathrm{FSQ}(n)$ が定まる．自由対称カンドルの詳細や対称カンドル表示に関しては [11] を参照されたい．

このとき次の定理が得られる．

定理 5.3. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，結び目対称カンドル $(X(\widetilde{S}), \rho)$ は次のような対称カンドル表示をもつ：

$$X(\widetilde{S}) = \langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_k,\ x_{2i-1} = \rho(x_{2i})\ (i = 1, \ldots, m) \rangle_{\mathrm{sq}}\,.$$

ここで関係子 r_i は $\mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \mathrm{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1})$ である.

参考文献

[1] Joan S. Birman. On the stable equivalence of plat representations of knots and links. *Canadian J. Math.*, 28(2):264–290, 1976.

[2] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.

[3] Hugh M. Hilden. Generations for two subgroups of the braid group. *Pacific J. Math.*, 59(2), 1975.

[4] D. Joyce. A classifying invariants of knots. *J. Pure. Appl. Alg.*, 23:37–65, 1982.

[5] Seiichi Kamada. Surfaces in $\mathbf{R}^4$ of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.

[6] Seiichi Kamada. Alexander's and Markov's theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.

[7] Seiichi Kamada. Wirtinger presentations for higher dimensional manifold knots obtained from diagrams. *Fundamenta Mathematicae - FUND MATH*, 168:105–112, 01 2001.

[8] Seiichi Kamada. *Braid and knot theory in dimension four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[9] Seiichi Kamada. Graphic descriptions of monodromy representations. *Topology and its Applications*, 154(7):1430–1446, 2007. Special Issue: The Third Joint Meeting Japan-Mexico in Topology and its Applications.

[10] Seiichi Kamada. Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants. *Intelligence of Low Dimensional Topology 2006*, pages 101–108, 01 2007.

[11] Seiichi Kamada. Quandles and symmetric quandles for higher dimensional knots. 103:145–158, 2014.

[12] Seiichi Kamada and Takao Matumoto. Chart descriptions of regular braided surfaces. *Topology and its Applications*, 230:218–232, 2017.

[13] S. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, 119(161):78–88, 1982.

[14] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

カスプ付きディバイドから定まる絡み目と直線配置の Kirby 図式

菅原 朔見　(北海道大学大学院理学院数学専攻)

概要

体 $\mathbb{K}$ 上のアフィン空間 $\mathbb{K}^\ell$ 内の超平面の有限集合 $\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_n\}$ を超平面配置という．超平面配置のトポロジーの観点からは複素超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^\ell\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H$ のトポロジーを調べることが大きな問題意識である．本稿では特に $\ell=2$(すなわち直線配置) の場合について扱う．このとき補集合 $M(\mathcal{A})$ は実 4 次元多様体となるが，実直線配置の複素化補集合に対してハンドル分解を表す Kirby 図式をカスプ付きディバイドから定まる絡み目を用いて記述することができたので，それについて紹介する．本稿の内容は吉永正彦氏 (北海道大学) との共同研究に基づく．

1　超平面配置のトポロジー

本章では，本研究で舞台となる超平面配置について紹介し，極小セル分割という特徴的な位相的側面について述べる．

定義 1.1. $\mathbb{K}$ を体とする．アフィン空間 $\mathbb{K}^\ell$ 上のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_n\}$ を超平面配置という．また超平面の補集合を $M(\mathcal{A})=\mathbb{K}^\ell\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H$ と定める．

例 1.2. 係数体 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ とする．このとき補集合 $M(\mathcal{A})=\mathbb{R}^\ell\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H$ はいくつかの連結な開集合に分かれる．各連結成分を部屋と呼ぶ．部屋全体の集合を $\mathrm{ch}(\mathcal{A})$ と表し，有界な部屋全体の集合を $\mathrm{bch}(\mathcal{A})$ と表す．

例 1.3. 定義体 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする．このとき補集合 $M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^\ell\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H$ は連結であり，アフィン代数多様体となる．

超平面配置のトポロジーからの観点では，複素超平面配置 ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合) の補集合のトポロジーを調べるのが重要な問題である．これについて，補集合 $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割と呼ばれる特徴的な性質を持つ．

定理 1.4. 複素超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割をもつ，すなわち任意の $k\geq 0$ に対して Betti 数 $b_k(X)=(k$-セルの個数) をみたす CW 複体 X とホモトピー同値である．

注意 1.5. 一般に (k-セルの個数) $\geq b_k$ である．また，一般の複素超曲面の補集合は極小セル分割を持たない．例えば $\mathbb{C}^2\setminus\{y^2-x^3=0\}$ は基本群が 3 次ブレイド群 B_3 であるため，$b_1=1$ であるが 1-セルが 1 枚のみからなるようなセル分割を持たない．

定理 1.4 の証明の概略を述べる．鍵になるのは次の二つの定理である．

定理 1.6. (Lefschetz 超平面切断定理 [Ha83][HL73]) F を $\mathcal{A}$ と generic に交わる超平面とする．このとき $M(\mathcal{A})$ は $M(\mathcal{A})\cap F$ に有限個の ℓ-セルを接着して得られる CW 複体とホモトピー同値である．

この定理から，次元についての帰納法を用いることにより $M(\mathcal{A})\cap F$ が $M(\mathcal{A})$ の $\ell-1$ スケルトンとホモトピー同値であることがわかる．さらに，ℓ 次元のセルの個数 c_ℓ について $c_\ell=\dim H_\ell(M(\mathcal{A}),M(\mathcal{A})\cap F)$ であることがわかる．さらに，$M(\mathcal{A})\cap F$ と $M(\mathcal{A})$ のホモロジーの関係については，Orlik-Solomon による組み合わせ論的な記述により以下が成り立つことが知られている．

定理 1.7. [OS92] $i: M(\mathcal{A})\cap F\to M(\mathcal{A})$ 包含写像の誘導するホモロジーの間の写像について以下の同型が成り立つ：

$$i_*: H_{\ell-1}(M(\mathcal{A})\cap F)\cong H_{\ell-1}(M(\mathcal{A})).$$

定理 1.4 の証明は次元による帰納法により行う．対 $(M(\mathcal{A}),M(\mathcal{A})\cap F)$ に対するホモロジー長完全列から，

$$H_\ell(M(\mathcal{A})\cap F)\to H_\ell(M(\mathcal{A}))\to H_\ell(M(\mathcal{A}),M(\mathcal{A})\cap F)\to H_{\ell-1}(M(\mathcal{A})\cap F)\xrightarrow{i_*} H_{\ell-1}(M(\mathcal{A}))$$

という完全列を得る．定理 1.6 の系から $M(\mathcal{A})\cap F$ は $(\ell-1)$ 次元の CW 複体とホモトピー同値なので，$H_\ell(M(\mathcal{A})\cap F)=0$ となること，また i_* が同型写像となることから，同型

$$H_\ell(M(\mathcal{A}))\cong H_\ell(M(\mathcal{A}),M(\mathcal{A})\cap F)$$

を得る．これから ℓ 次 Betti 数 b_ℓ に対し，$b_\ell=c_\ell$ を得る．ゆえに任意の $k\geq 0$ に対して $b_k=c_k$ であることが従う．(証明の概略終わり)

$\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_n\}$ を実超平面配置とする．実超平面配置からは複素化 $\mathcal{A}_\mathbb{C}=\{H_1\otimes\mathbb{C},\cdots,H_n\otimes\mathbb{C}\}$ を得ることができる．複素化補集合を $M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^\ell\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H_\mathbb{C}$ と表す ($H_\mathbb{C}=H\otimes\mathbb{C}$)．実超平面配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の極小セル分割は実構造を用いて記述することができる．

定義 1.8. F を $\mathcal{A}$ と generic に交わる超平面とする．このとき F と交わらない部屋の集合を

$$\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}):=\{C\in\mathrm{ch}(\mathcal{A})\mid C\cap F=\emptyset\}$$

と定義する．

命題 1.9. 実超平面配置の複素化補集合の ℓ 次 Betti 数について以下が成り立つ:

$$b_\ell(M(\mathcal{A}))=\#\,\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}).$$

特に $\ell=2$ の場合は，極小セル分割を持つことと合わせて次がわかる．

系 1.10. 実直線配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ は 1 スケルトンが S^1 の n 個の 1 点和で，2-セルが $\#\,\mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ 枚それに接着しているようなセル分割を持つ．

実超平面配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の具体的な極小セル分割について [Y07] による方法は次のようなものである．$M(\mathcal{A})$ 上に (境界付近で適切にコンパクト化することにより，)Morse 関数 $\varphi: M(\mathcal{A})\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して，これは以下を満たす．

- $\varphi^{-1}(0)=M(\mathcal{A})\cap(F\otimes\mathbb{C})$.
- 各 $C\in\mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対して，ちょうど一つ臨界点 $p_C\in C$ が存在し，Morse index が ℓ である．
- 部屋 C が臨界点 p_C における安定多様体になる．
- これ以外には臨界点が存在しない．

この Morse 関数 φ の勾配流を詳しく見ることにより，接着写像が記述できる．

2　カスプ付きディバイド

本章では，ディバイドの一般化であるカスプ付きディバイドについて紹介する．カスプ付きディバイドから得られる絡み目は，主結果の Kirby 図式を記述するために用いる．

定義 2.1. **カスプ付きディバイド** P とは，有限個の閉区間と S^1 から D^2 への連続写像の像で，有限個のカスプを除けば proper で generic なはめ込みの像になっているもののことをいう．

定義 2.2. カスプ付きディバイドから得られる S^3 内の絡み目を

$$L(P) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}P, |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 = 1\} \subset S^3$$

と定義し，これも**ディバイド絡み目**と呼ぶことにする．

注意 2.3. カスプがひとつもないものをディバイドという．ディバイドは A'Campo により代数曲線の孤立特異点の近傍を記述するツールとして導入されたものである [AC99][AC98]．(カスプのない) ディバイドは，得られる絡み目が fibered であるという性質をもつ．これは，ディバイドが零点集合となるような D^2 上の Morse 関数を構成し，それを複素化することによりわかる [AC98]．

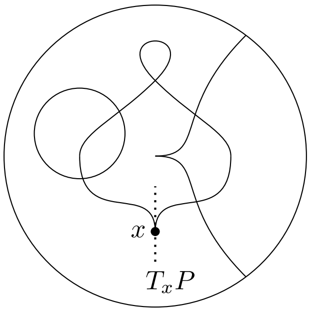


図 1　カスプ付きディバイド，カスプでも接線が定まる．

注意 2.4. カスプの点では関数の微分をすることはできないが，接線を引くことは可能であり，$L(P)$ は well-defined に定まる．カスプの点は，$L(P)$ 上の半捻りに対応し，カスプの向きによって右捻りか左捻りかが変わる (図 2)．

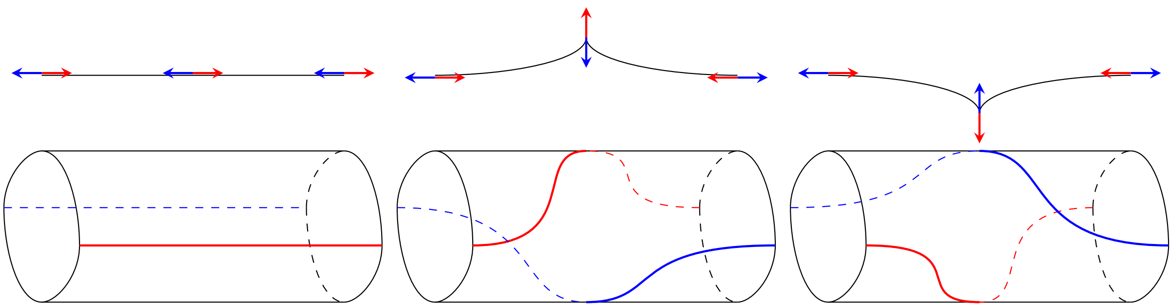


図 2　カスプでの半捻り

注意 2.5. 以下の操作は $L(P)$ のイソトピー型を変えないディバイドの変形である (図 3).

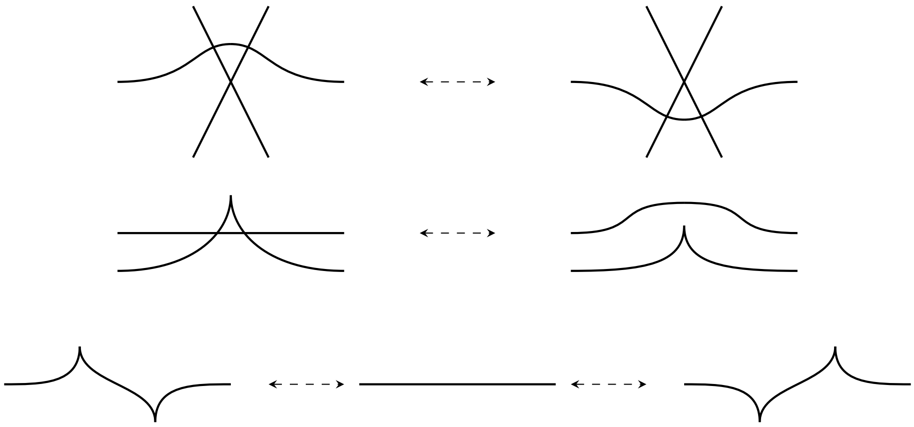
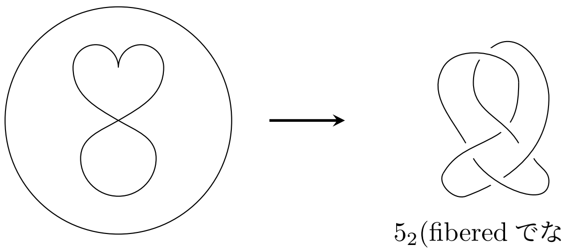


図 3　イソトピーを変えない変形

注意 2.6. カスプ付きディバイド上ではディバイド上に構成した Morse 関数を構成することができず，一般に $L(P)$ は fibered ではない．実際，以下のカスプ付きディバイドからは fibered ではない絡み目が得られる．



5_2(fibered でない)

図 4　fibered でない $L(P)$ の例

また主結果でカスプ付きディバイドを構成する際の舞台となる D^2 や S^3 のモデルを準備する．D^2 に対応するものとして，長方形

$$\mathrm{Rect}(R,1) = [-R,R] \times [-1,1] \approx D^2$$

と定める．ただし $R > 0$ を十分大きい実定数である．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R,1)$ に対し，長方形の境界との (最大値ノルム $||\cdot||_\infty$ についての) 距離を $\delta(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1 + R, R - x_1, x_2 + 1, 1 - x_2\}$ とする．$\mathrm{Rect}(R,1)$ 上で接ベクトルを対応させることにより，3-次元球面のモデルを

$$S^3(R,1) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R,1),\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ ||\boldsymbol{y}|| = \delta(\boldsymbol{x})\} \approx S^3$$

とする．これは 4 次元球体

$$D^4(R,1) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R,1),\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ ||\boldsymbol{y}|| \leq \delta(\boldsymbol{x})\} \approx D^4$$

の境界である．(本稿では単にノルム $||\cdot||$ と書けば最大値ノルム $||\cdot||_\infty$ のことを表す．)

3 補集合 $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解

以降，$\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の実直線配置とし，$M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^2\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H_{\mathbb{C}}$ を複素化補集合とする．本章では，講演では詳細に触れなかった $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解について述べる．

各直線 $H\in\mathcal{A}$ はアフィン直線であるから，一次式

$$\alpha_H(x_1,x_2)=ax_1+bx_2+c=0$$

により定義される ($a,b,c\in\mathbb{R}$ で $(a,b)\neq(0,0)$)．$\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{R}^2$ 上の接バンドルの全空間 $T\mathbb{R}^2$ との同一視を $\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}\cdot\boldsymbol{y}\mapsto(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2)$ で与える．複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ はこの同一視によって，次のようにみれる．

命題 3.1.

$$M(\mathcal{A})=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,\ H\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}\text{ならば }\boldsymbol{y}\notin T_{\boldsymbol{x}}H\}.$$

である．ただし，$\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}=\{H\in\mathcal{A}\mid\boldsymbol{x}\in H\}$ である．

Proof. $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ を $z_i=x_i+\sqrt{-1}\cdot y_i$ と実部と虚部に分けると，

$$\begin{aligned}(z_1,z_2)\in H_{\mathbb{C}}&\Leftrightarrow az_1+bz_2+c=0\\&\Leftrightarrow a(x_1+\sqrt{-1}\cdot y_1)+b(x_2+\sqrt{-1}\cdot y_2)+c=0\\&\Leftrightarrow ax_1+bx_2+c+\sqrt{-1}\cdot(ay_1+by_2)=0\\&\Leftrightarrow ax_1+bx_2+c=0\quad\text{かつ}\quad ay_1+by_2=0\end{aligned}$$

となる．これは接ベクトルとの対応によると，

$$(z_1,z_2)\in H_{\mathbb{C}}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in H\text{ かつ }\boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}H(\subset T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2)$$

と言い換えることができる．あとは $M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^2\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H_{\mathbb{C}}$ であることから従う． □

雑に言えば，$M(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ と横断的に交わる接ベクトル全体の集まりである．

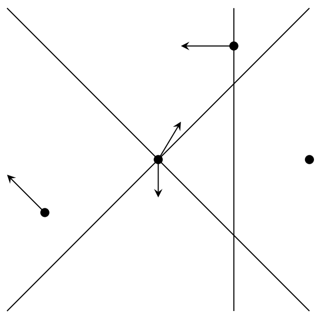


図 5 接ベクトル対応を用いた $M(\mathcal{A})$ の点の様子

また，適切な座標変換のもと，$\mathcal{A}$ に以下の条件を仮定する．これは適切に座標変換を施すことで一般性を失わずに仮定することができる．

(i) ある実数 $R_0>1$ が存在して，$\mathcal{A}$ の任意の交点 (x_1,x_2) の x_2 座標は $1<x_2<R_0$ を満たす．

(ii) $F=\{x_2=0\}$ は $\mathcal{A}$ と generic に交わる．

(iii) $H_i\in\mathcal{A}$ と F の交点 $(a_i,0)$ について，$a_1<a_2<\cdots<a_n$.

(iv) H_i の定義式 α_i に対し，$H_i^- = \{\alpha_i < 0\}$ が F の負の方を含む．(したがって $H_i^+ = \{\alpha_i > 0\}$ は F の正の方を含む．)

(v) H_i と F のなす偏角 θ_i について $\pi/4 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n \leq 3\pi/4$ をみたす．

(vi) $R > 0 (R \gg R_0)$ を，任意の i に対して H_i と $\{x_2 = R_0\}$ の交点の x_1 座標が $\{-R + R_0 < R - R_0\}$ に含まれるようにとる．

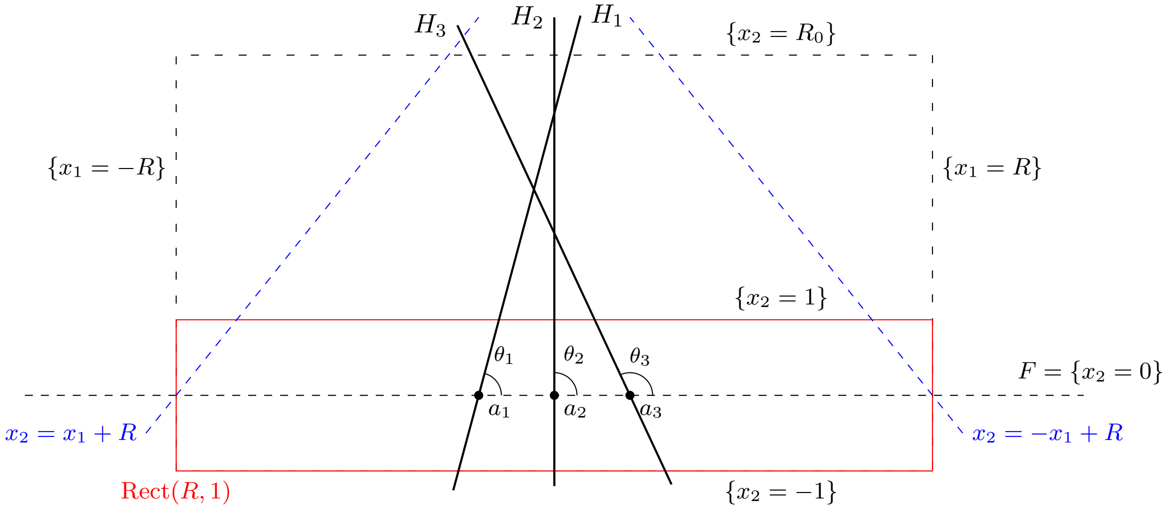


図 6　仮定を満たすような $\mathcal{A}$ の図

$H_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}^2$ における管状近傍を $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}$ とおき，M_1 を

$$M_1 = \left(\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \widetilde{H}_{\mathbb{C}}\right) \cap \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in [-R, R] \times [-1, R_0], ||\boldsymbol{y}||_\infty \leq R\}$$

と定義する．M_1 は境界つきコンパクト 4 次元多様体であり，M_1 の内部は $M(\mathcal{A})$ に微分同相である ([Dur83])．

続いて，M_1 から $\mathcal{A}$ の各部屋の近傍を抜き去る．$C \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ に対し，$\widetilde{C}$ を $\mathbb{C}^2$ における C の管状近傍とし，M_2 を次で定義する：

$$M_2 = \left(M_1 \setminus \bigcup_{C \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})} \widetilde{C}\right) \cup \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R, 1), ||\boldsymbol{y}||_\infty \leq R\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \widetilde{H}_{\mathbb{C}}.$$

M_2 と M_1 は微分同相ではないことに注意する．M_2 と M_1 の関係について以下が成り立つ．

補題 3.2. 多様体 M_1 は M_2 に 2-ハンドルを $\# \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる．このとき接着する 2-ハンドルは $C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ なる部屋の管状近傍 $\widetilde{C}$ そのものである．

Proof. まず M_2 の定義から，各部屋 $C \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ に対して $\widetilde{C} \approx D^4$ を M_2 に接着して M_1 は得られるので，この接着のされ方を見れば良い．

部屋 C が $C \cap F \neq \emptyset$ をみたす場合は，接着する領域は D^3 と同相になる (図 7)．従って $\widetilde{C}$ の M_1 への接着は D^4 との境界連結和になり，接着して得られる多様体は微分同相である．一方，$C \cap F = \emptyset$ すなわち

$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ の場合は，接着する領域が $\partial D^2 \times D^2$ となる．従って $\widetilde{C}$ の M_1 への接着は 2-ハンドルの接着となる． □

以後 $C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルを $h^2(C)$ と表す．

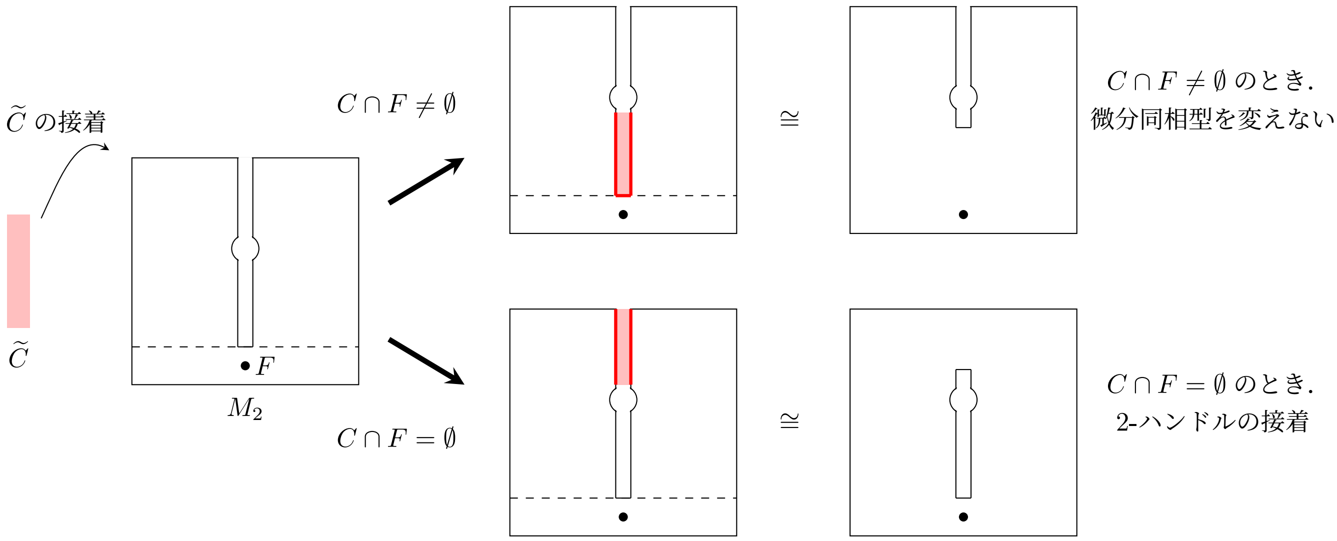


図 7　接着の様子 (次元を落としているため 2 次元の 1-ハンドルに見えるが実際は 4 次元 2-ハンドルの接着．)

次に $\rho : [1, R_0] \xrightarrow{\simeq} [0, 1]$ を $\rho(h) = \frac{h-1}{R_0-1}$ なる一次関数と定め，M_3 を

$$M_3 = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 \geq 1 \text{ ならば} \\ x_2 \leq x_1 + R, x_2 \leq -x_1 + R, \\ \text{かつ } \rho(x_2) \leq ||\boldsymbol{y}||_\infty \leq 1 \end{array} \right\}$$

と定義する．M_3 は M_2 の境界付近を縮めて得られるため，M_2 と微分同相である．また M_3 においては $h^2(C)$ の接着領域は次のように書ける：

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \widetilde{H}, \ \boldsymbol{y} = \rho(x_2)\} \approx S^1 \times D^2.$$

従って $h^2(C)$ の接着円は，$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in C$ を一つ任意に取り，

$$\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} = \rho(x_2)\} \approx S^1$$

と書くことができる．続いて M_4 を

$$M_4 := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R, 1), \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2, ||\boldsymbol{y}||_\infty \leq \delta(\boldsymbol{x})\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \widetilde{H}_{\mathbb{C}}.$$

と定義する．

定義より，$M_4 \subset M_3$ であるが，M_3 から M_4 へは以下のような変位レトラクト σ を構成することができる．

$$\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \begin{cases} \left(\left(x_1 - \frac{y_1}{y_2}(x_2 - 1 + ||\boldsymbol{y}||_\infty), 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty\right), \boldsymbol{y}\right) & (\ x_2 \geq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty \text{ かつ } |y_1| \leq |y_2|\ ) \\ \left(\left(x_1 - \frac{y_2}{y_1}(x_2 - 1 + ||\boldsymbol{y}||_\infty), 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty\right), \boldsymbol{y}\right) & (\ x_2 \geq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty \text{ かつ } |y_1| \geq |y_2|\ ) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & (\ x_2 \leq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty) \end{cases}$$

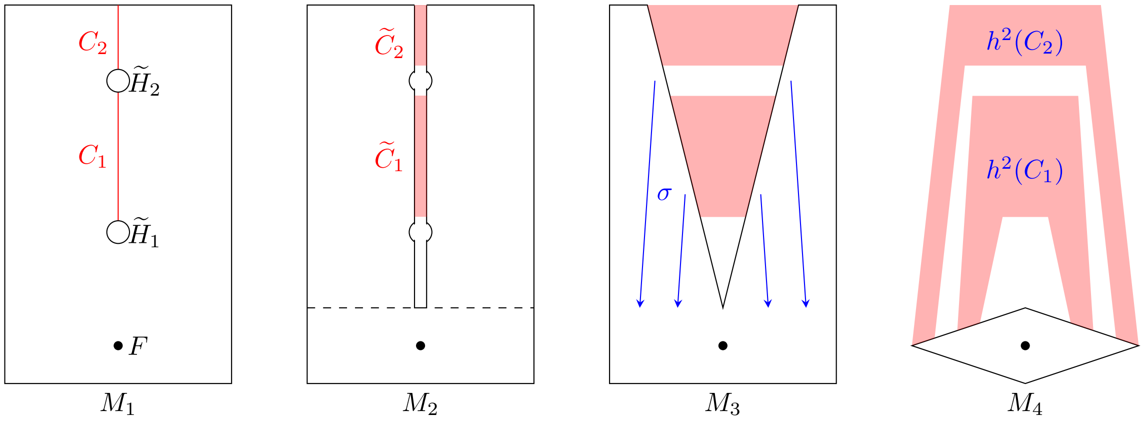


図 8　M_1 から M_4 までの様子

写像 σ が変位レトラクトであることは，$\sigma_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := (1-t)\cdot(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + t\cdot\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とすると $0 \leq t \leq 1$ に対して $\sigma_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in M_3$ であり，$\sigma_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$\sigma_0 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ であることから従う．また，$M_3 \setminus M_4$ の点が σ により写される部分 $\{x_2 = 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty\}$ の各点の逆像は M_3 にふくまれる閉区間と同相であることから，M_3 と M_4 が微分同相であることが従う．

補題 3.3. M_4 は直線の本数 n と同じだけ 1-ハンドルを持つ 1-ハンドル体と微分同相であり，M_1 はこれに 2-ハンドルを $\#\mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる 4 次元多様体に微分同相である．

Proof. 定義より，M_4 は

$$D^4(R,1) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R,1), \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2, ||\boldsymbol{y}||_\infty \leq \delta(\boldsymbol{x})\} (\approx D^4)$$

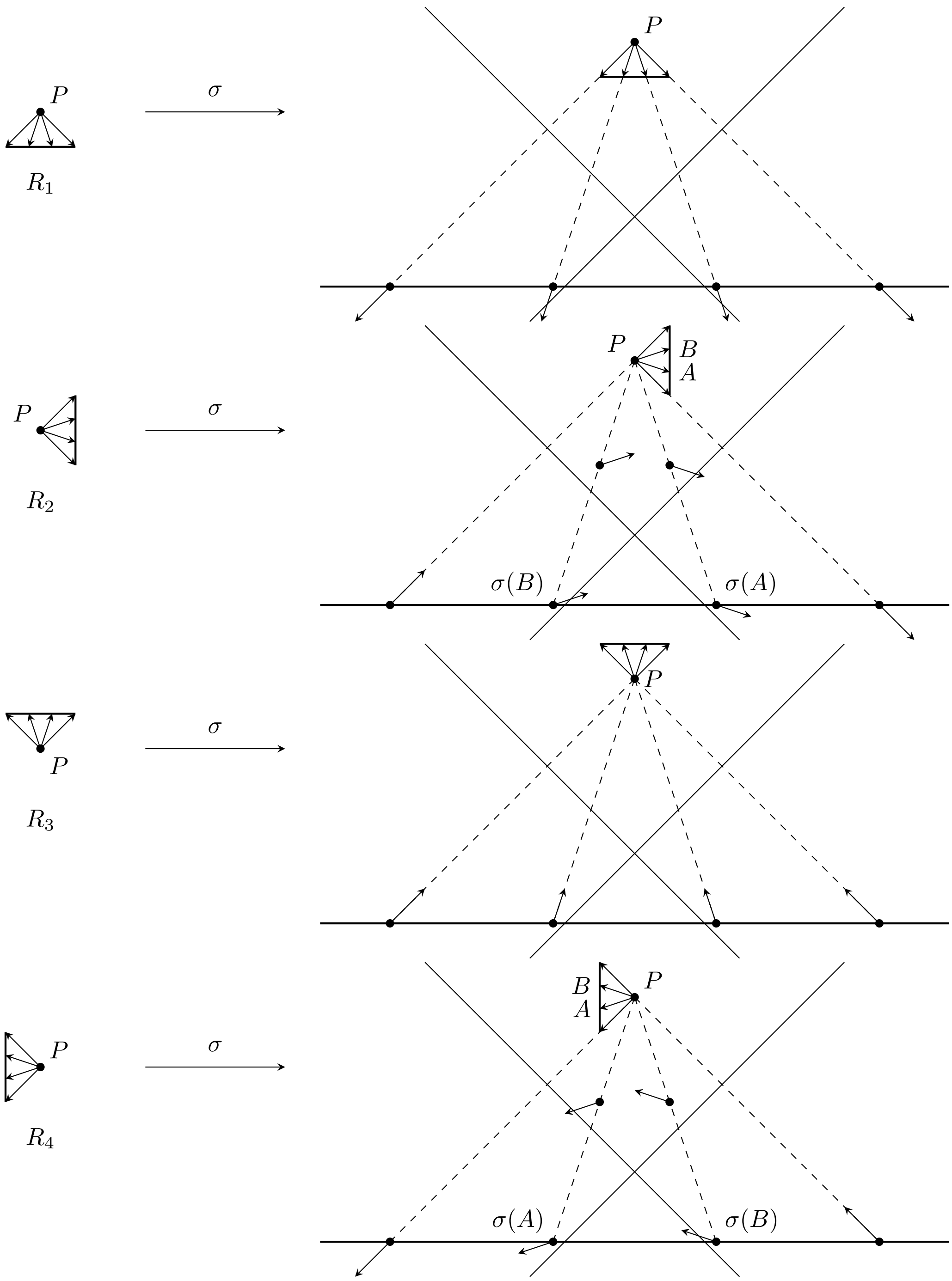
から $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}$ を除いて得られるコンパクト 4 次元多様体である．$\mathcal{A}$ に属する直線の交点の座標についての仮定 (i) から，$D^4(R,1)$ 上ではどの直線も交わることない．また，$\widetilde{H}_{\mathbb{C}}$ は (複素) 直線 $H_{\mathbb{C}}$ の管状近傍であるから，D^4 上に制限すると D^4 に proper に埋め込まれた D^2 の管状近傍 $D^2 \times D^2$ とみなせる．従って $D^4(R,1)$ から $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}$ を取り除くことは D^4 に 1-ハンドルを接着することと同じである．従って M_4 は D^4 に 1-ハンドルが n 個接着した 1-ハンドル体と微分同相である．また，$M_2 \cong M_3 \cong M_4$(微分同相) であり，M_1 は M_2 に 2-ハンドルを $\#\mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる 4 次元多様体に微分同相であったから，補題が従う． □

M_4 が 1-ハンドル体であることから，ハンドル分解を表す Kirby 図式は S^3 上の n 個の点付き円として表すことができる．1-ハンドルが proper に埋め込まれた D^2 の管状近傍を引き抜いて得られる場合は，点付き円は引き去る D^2 の境界である (S^3 上の)S^1 に対応する．これが今回の場合，$\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のディバイドから得られる絡み目とみなすことができることをみる．$H \in \mathcal{A}$ に対し，$\overline{H} := H \cap \mathrm{Rect}(R,1)$ とする．

補題 3.4. $\overline{H}$ を $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のディバイドとみなす．このとき 1-ハンドル体 M_4 の点付き円は $\overline{H}$ から得られる $S^3(R,1)$ 上のディバイド絡み目とみなせる．

Proof. まず $\overline{H}$ は $\mathrm{Rect}(R,1)$ 内に proper に埋め込まれた閉区間であるから，ディバイドの成分とみなせる．接ベクトルの対応によると，$H_{\mathbb{C}}$ は

$$H_{\mathbb{C}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in T\mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in H,\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}H\}$$



P
σ
R_1
P
B
A
σ
R_2
$\sigma(B)$
$\sigma(A)$
σ
R_3
B
A
P
σ
R_4
$\sigma(A)$
$\sigma(B)$

図 9　σ の様子

と表せていた (補題 3.1). これと $\partial D^4(R,1)=S^3(R,1)$ の交叉が 1-ハンドルの点付き円となるが，それは

$$H_{\mathbb{C}}\cap S^3(R,1)=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in D^4(R,1)\mid \boldsymbol{x}\in H\cap \mathrm{Rect}(R,1),\ \boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}H,\ ||\boldsymbol{y}||_\infty=\delta(\boldsymbol{x})\}$$

となる．定義からこれは $\overline{H}$ から得られるディバイド絡み目である．

□

$\overline{H}$ から得られるディバイド絡み目が 1-ハンドルの点付き円とわかるように，対応するディバイドの成分にも点をつけておく．

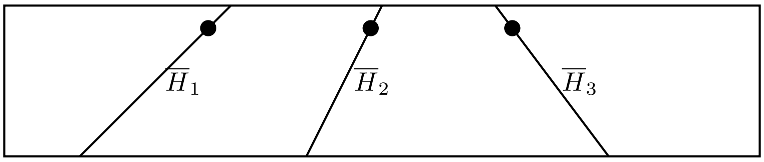


図 10　1-ハンドル体を表すディバイド

M_1 のハンドル分解を得るためには，残りは 2-ハンドルの接着写像がわかれば良い．各 2-ハンドルは $C\in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ の管状近傍 $\widetilde{C}$ であったから，$\widetilde{C}$ が M_3 に接着している部分が σ により M_4 にどのように貼り付いてるかをみる．$h^2(C)$ の接着円が M_3 上では，$p\in C$ を一つ固定することで，

$$\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}=\rho(x_2)\}$$

で書けていたことを思い出すと，M_4 上での 2-ハンドルの接着円は

$$\{\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}=\rho(x_2)\}$$

と表せる．これは，$S^3(R,1)$ 内の絡み目となり，$\boldsymbol{p}$ を十分近い $\boldsymbol{p}'\in C$ へ少し動かしても $\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{y})$ と $\sigma(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{y})$ は絡まないことがわかるため ([SY21] の prop. 2.3 を参照)，フレーミング係数は 0 となる．

以上により M_1 の (従って $M(\mathcal{A})$ の) ハンドル分解を得ることができた．

4　カスプ付きディバイドを用いた Kirby 図式

本章では，主結果であるカスプ付きディバイドを用いた $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式の記述について紹介する．まずは (厳密ではないが) 主結果を述べておく．

定理 4.1. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は "$\mathcal{A}$ の実構造の組み合わせ構造を用いて得られる" $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きディバイドから得られる絡み目として記述できる．

Kirby 図式を記述するために，1-ハンドルに対応する点付き円，2-ハンドルに対応する絡み目を準備する必要がある．まず 1-ハンドルについては，前節でも述べたように，$\overline{H}$ が対応するカスプ付きディバイドの成分である．2-ハンドルについては，$C\in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ との対応があったので，$C\in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に応じて $\mathrm{Rect}(R,1)$ 内のカスプ付きの曲線を定めれば良い．

定義 4.2. $C\in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$，$H_i\in\mathcal{A}$ に対して，符号 $\delta_i(C)$ を以下で定める．

$$\delta_i(C)=\begin{cases}+1, & \text{if } \alpha_i(C)>0,\\ -1, & \text{if } \alpha_i(C)<0.\end{cases}$$

$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きの曲線 $\gamma(C)$ を以下のようにして定める．

(i) $\overline{H_1}$ の左側では，$\delta_1(C) = +1$ ならば左向きカスプを書き，$\delta_1(C) = -1$ ならば滑らかな曲線を図 7 のように書く．

(ii) $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (+1,-1), (-1,1)$，$\delta_i = \delta_{i+1}$ のときはそれぞれ図 8 のように $\overline{H_i}$ と $\overline{H_{i+1}}$ の間に曲線を書く．

(iii) $\overline{H_n}$ の右側では，$\delta_1(C) = -1$ ならば右向きカスプを書き，$\delta_1(C) = +1$ ならば滑らかな曲線を図 9 のように書く．

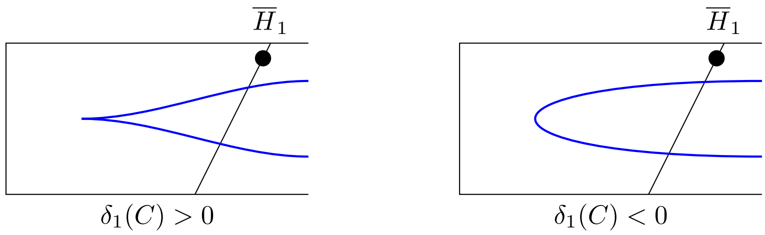


図 11　$\overline{H_1}$ の左側

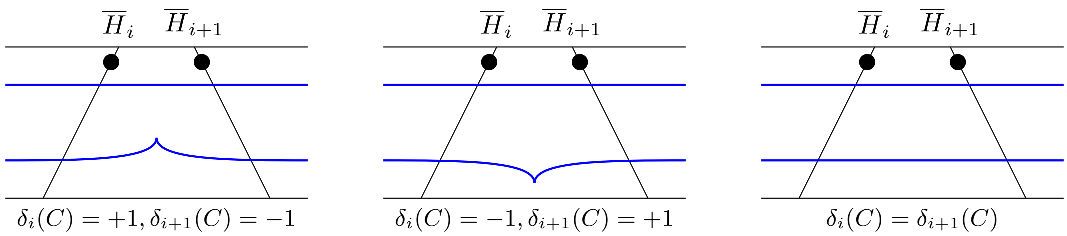


図 12　$\overline{H_n}$ と $\overline{H_{n+1}}$ の間

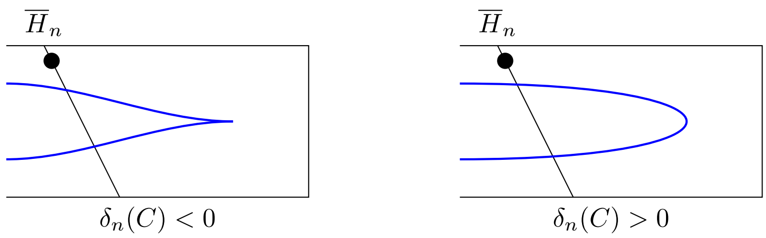


図 13　$\overline{H_n}$ の右側

また $\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C_1, \cdots, C_b\}$ が複数個の元からなる場合については，各 C_s 上から一点 $P_s = (k_s, h_s)$ を $1 < h_1 < \cdots < h_b < R_0$ となるようにとる．このとき，h_s の値が大きい順に，$\mathrm{Rect}(R,1)$ では，$\gamma(C_s)$ を x_2 の座標が小さい順に構成する．

注意 4.3. 順番は一意に定まらないこともある．その場合カスプ付きディバイドとしては異なったものが得られるが，ディバイド絡み目については注意 3.5 の変形により移り合うことができ，同じ絡み目が得られることがわかる．

主定理の正確な主張を述べる．

定理 4.4. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きディバイド $\{\overline{H_1},\cdots,\overline{H_n},\gamma(C_1),\cdots,\gamma(C_b)\}$ から得られる絡み目として記述できる．ここに $\overline{H_i}$ から得られる結び目は 1-ハンドルの接着を表す点付き円を，$\gamma(C_s)$ から得られる結び目は 2-ハンドルの接着円を表す．また 2-ハンドルのフレーミング係数は全て 0 である．

証明については述べないが，$C_s \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルの接着円と $\gamma(C_s)$ がイソトピックになることを示せば十分である．詳細は [SY21] の 5.2 節を参照.

例 4.5. $\mathcal{A}=\{H_1,H_2,H_3,H_4\}$ を generic に交わる直線配置とすると $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を表すカスプ付きディバイドは図 14 のようになる．

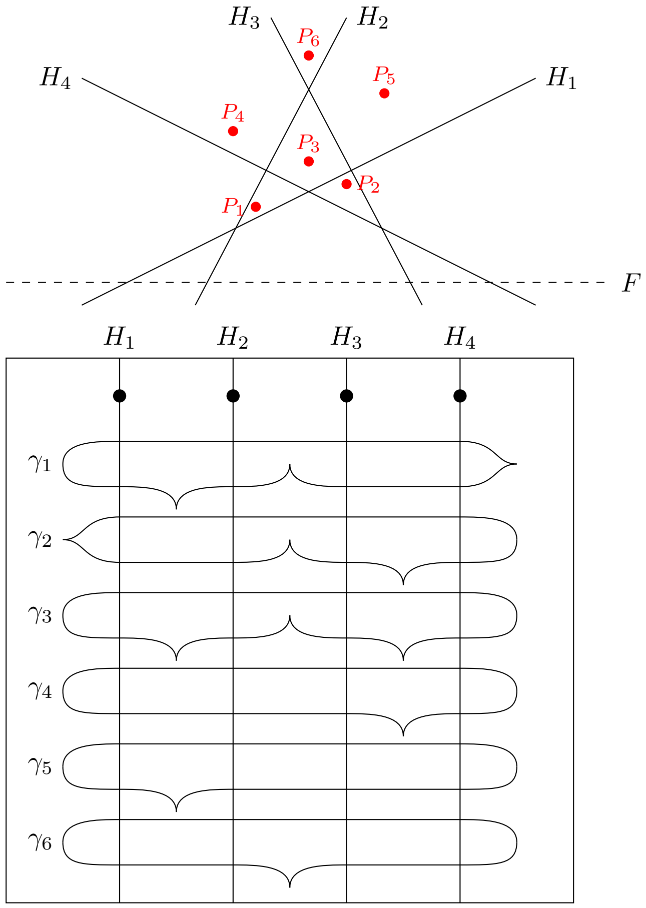


図 14

参考文献

[AC99] N. A'Campo, Real deformations and complex topology of plane curve singularities, Ann. Fac. Sci. Toulouse 8 (1999) 5-23.

[AC98] N. A'Campo, Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 88 (1998), 151-169 .

[CP00] O. Couture, B. Perron, Representative braids for links associated to plane immersed curves. *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 1, 1-30.

[DP03] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, 473–507.

[Dur83] A. H. Durfee, Neighborhoods of algebraic sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276** (1983), no. 2, 517-530.

[F93] M. Falk, Homotopy types of line arrangements. *Invent. Math.* **111** (1993), no. 1, 139–150.

[GS99] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Mathematics, 20. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1999. xvi+558 pp.

[Ha83] H. A. Hamm, Lefschetz theorems for singular varieties. *Proc. Symp. Pure Math.* **40** (1983), 547–557.

[HL73] H. A. Hamm, D. T. Lê, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), 317–355.

[OS92] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes,*Grundlehren Math. Wiss.* **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[OT92] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[R02] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 9, 2737–2743.

[SS07] M. Salvetti, S. Settepanella, Combinatorial Morse theory and minimality of hyperplane arrangements. *Geom. Topol.* **11** (2007), 1733–1766.

[SY21] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, arXiv:2103.15262, to apper in Topology and its applications.

[Y07] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. *Kodai Math. J.* **30** (2007) no. 2, 157–194.

[Z75] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **154** 1975.

Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$-trisections with different configurations of vanishing cycles

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
浅野喜敬 (Nobutaka ASANO)

概要

トライセクションは 4 次元多様体から平面へのある安定写像として Gay-Kirby により導入された．Baykur-Saeki は特異値が自己交差を持たないクラスとして，単純なトライセクションを導入した．講演者は，単純な $(2, 0)$-トライセクションの右左同値類に着目し，平面上のレファレンスパスの取り換えによる単純なトライセクション図式の変化の様子について調べ，右左同値であるが，曲面の同相写像と上三角ハンドルスライドの有限個の列で移り合わない単純なトライセクション図式を持つ単純な $(2, 0)$-トライセクションが存在することを示した．講演では，得られた結果について紹介する．

1　折り目特異点・カスプ特異点

以下，X を 4 次元多様体，$f : X \to \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし，$\mathrm{Crit(f)} = \{p \in X \mid p$ は f の臨界点$\}$ とする．トライセクション写像の定義を述べるために必要な特異点・及びその特異値集合の近傍における正則ファイバーの変化について紹介する．

定義 1. $p \in \mathrm{Crit(f)}$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp.$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき，$p$ は不定値 (resp. 定値) 折り目特異点であるという．

定義 2. $p \in \mathrm{Crit(f)}$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき，p はカスプ特異点であるという．

図 1 左図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通過した後のファイバーの変化の様子を示したものである．図 1 左図の縦方向の座標が定義 1 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 1 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため，正則値 p, q を結ぶ点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．ファイバーの曲面では手術が行われ，図 1 左図のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 1 左図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び，正則値を結び特異値と交わる値域上の点線をレファレンスパスと呼ぶ．定値折り目特異点

の場合も同様にして，レファレンスパスの引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．このとき図 1 左図の横方向の座標は $-x^2-y^2-z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって不定値折り目特異値をを通過すると正則ファイバーは空集合に変化し，図 1 右図のような変化が生じる．

カスプ特異点の近傍の像は図 1 右図である．緑の点がカスプ特異値であり，カスプ特異値では 2 本の不定値折り目特異値集合が接する．またカスプの内側の正則値 p のファイバーの近傍は境界成分が 1 つの種数 1 の曲面となる図 1 右図のように 2 本の不定値折り目特異値集合各々に対しレファレンスパスを与える．このとき不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b がレファレンスパスの始点上のファイバーに存在する．a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる．p のファイバーをレファレンスパスに沿って動かすと，不定値折り目特異値上を通過する際に 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ，ファイバーが D^2 へと変化する．

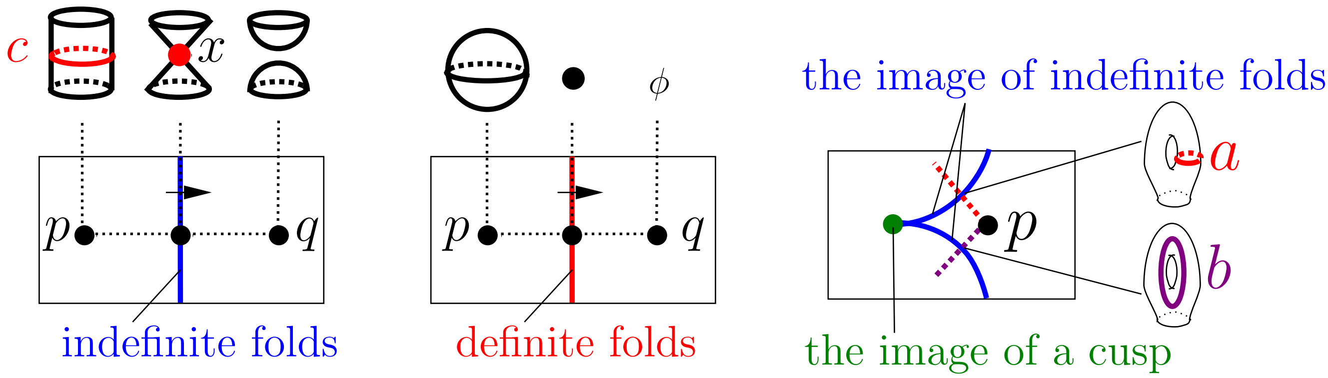


図 1: (左図)：不定値折り目特異値　(中図)：定値折り目特異値　(右図)：カスプ特異値

単純なトライセクション写像とは，特異値集合に 2 重点を持たないトライセクション写像であり，Baykur-佐伯により初めて導入されたものである．Baykur-佐伯は閉 4 次元多様体の持つ単純な特異 Lefschetz 束を変形することで，単純なトライセクション写像を得るアルゴリズムを具体的に与えている [2].

2　トライセクション写像

Gay-Kirby は，閉 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ への安定写像 (トライセクション写像) を構成することで，任意の閉 4 次元多様体がトライセクションを許容することを証明した．この節では，トライセクション写像の定義について述べる．

定義 3. 安定写像 $f: X \to \mathbf{R}^2$ の特異値集合が図 2 で与えられるとき，f を (g, k)-トライセクション写像という．

図 2 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．3 つの白い箱の内部には，各々 g 本の不定値折り目特異値のはめ込みが存在し，白い箱の不定値折り目特異値の単店同士を繋いでいる．ただし，これらの多重点はすべ

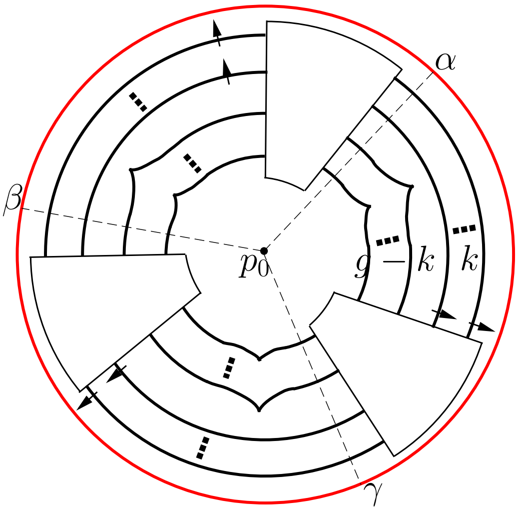


図 2: (g,k)-トライセクション写像の特異値集合.

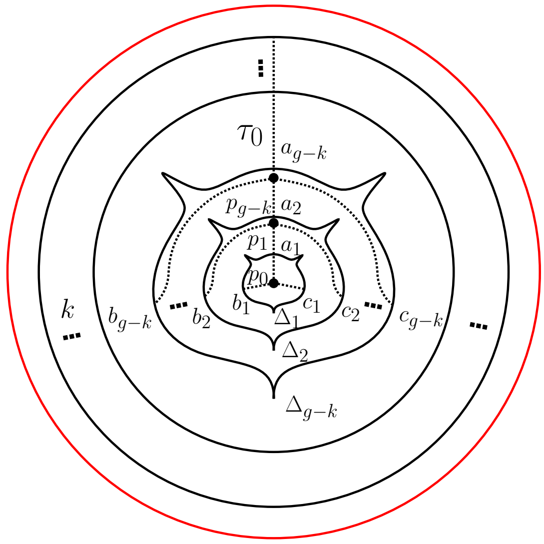


図 3: 単純な (g,k)-トライセクション写像の特異値集合.

て 2 重点であり，折り目特異値は p_0 を中心とした円周に直行する接ベクトルを持たない．白い箱の間では，外側には不定値折り目特異値が k 本あり，内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g-k$ 本ある．また，各白い箱の間に存在する特異値は互いに交わらない．さらに，$f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．

トライセクション写像をより単純化したものとして，Baykur-Saeki は特異値が図 3 で与えられる単純なトライセクション写像を導入し，任意の閉 4 次元多様体が単純な trisection 写像をもつことを証明した [2].

定義 4. 安定写像 $f : X \to \mathbf{R}^2$ の特異値集合が図 3 で与えられるとき，f を単純な (g,k)-トライセクション写像という．

3　右左同値・安定写像

この章では可微分写像の同値関係である右左同値と，安定写像について紹介する．安定写像は次節で紹介するトライセクション写像を含む写像のクラスであり，比較的扱い易く意味のある特異点を持つ写像である．

定義 5. 可微分写像 $f, g : M \to N$ に対して以下の図式が可換であるとき，f と g は右左同値であるといい，$f \simeq g$ と表す：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

微分同相写像を定義域と値域の多様体全体における座標変換のようなものと思うと，2 つのこの同値関係の下で，安定写像を定義する．

定義 6. $f: M \to N$ の近傍内の任意の可微分写像 g に対し $f \simeq g$ であるとき，f を安定写像であるという．但し，写像空間 $C^\infty(M,N)$ にはホイットニー C^∞ 位相を入れている．

例えば，多様体上の Morse 関数で特異値がすべて異なるものは安定写像である．この意味で，安定写像は Morse 関数の一般化である．

4 主結果

可微分写像の右左同値類を特異点から与えられる図式より決定することは基本的な問題である．本稿では，次の問題を考える：単純なトライセクションの同値類全体の集合と単純なトライセクション図式全体の集合の間に一対一の対応は存在するか？一般に，単純なトライセクション写像が与えられると，そこから得られる単純なトライセクション図式は一意的ではない．そこで，単純なトライセクション図式全体の集合を自然な同値関係で同一視することを考える．

定義 7. $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}), (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ を単純な $(2,0)$-トライセクション図式とする．

- 図式の曲線のラベルを保つ Σ から Σ' への同相写像,
- 上三角ハンドルスライド,
- レファレンスパスの取り換え

の有限列で $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$ が $(\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ に移るとき，これらの単純なトライセクション図式は同値であるといい，$(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}) \sim (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ と表す．

講演者は単純な $(2,0)$-トライセクションの右左同値類に着目し，その図式全体の集合をレファレンスパスの取り換えで生じる図式の変化，上三角ハンドルスライド，曲面の同相写像により同一視したものについて考察した．互いに右左同値だが，曲面の（ラベルを保つ）同相写像と上三角ハンドルスライドでそれらの単純な $(2,0)$-トライセクション図式が移り合わない例を構成した．構成にはレファレンスパスの取り換え操作である Δ_2-ムーブを用いる．

定理 8. $f: X \to \mathbf{R}^2$ をモノドロミーが非自明である単純な $(2,0)$-トライセクションとする．b'_2 と c'_2 及び a'_2 と $\mu_1^{-1}(c'_2)$ が平行でないならば， 少なくとも 2 つの単純な $(2,0)$-トライセクション f' と f'' が存在し，以下を満たす：

- f, f', f'' は互いに右左同値だが，f, f', f'' の単純なトライセクション図式は相異なる．即ち，同相写像と上三角ハンドルスライドでは移り合わない．

5 謝辞

現地での講演の機会を与えて下さいました世話人の皆様に感謝申し上げます．また，現地にて質問・議論をして頂いた参加者の皆様にも大変感謝しております．ありがとうございました．

参考文献

[1] N. Asano Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$-trisections with different configurations of vanishing cycles, preprint, available at arXiv:2109.13533.
[2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified indefinite fibrations on 4-manifolds, *Trans. AMS*, https://doi.org/10.1090/tran/8325.
[3] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

シャドウ補空間の基本群の表示

石川 昌治　（慶應義塾大学経済学部）*
古宇田 悠哉（広島大学大学院先進理工系科学研究科）†
直江 央寛　（中央大学理工学部）‡

本稿では，早稲田大学で開催された研究集会「結び目の数理 IV」における講演内容に基づき，論文 [6] に書かれているはめ込み曲線表示をもつシャドウの部分多面体の補空間の基本群の表示の研究について紹介する．

1. 序

3- および 4-ハンドルを持たない 4 次元多様体 W を境界から縮約 (collapse) していくことで，2 次元の多面体を作ることを考える．4 次元多様体の三角形分割を十分細かく細分し，適当な縮約を選ぶと，2 次元多面体は図 1 の局所モデルしか持たないと仮定できる．この多面体のことを境界付き 4 次元多様体 W の**シャドウ** (shadow) という．4 次元多様体 W のシャドウ X の各面に対して，X の W 内での埋め込みの情報として半整数 $\mathbb{Z}/2$ が定まる．この半整数のこと，あるいは，それをすべての面について集めたものを**グリーム** (gleam) という．4 次元多様体 W はこのグリーム付きのシャドウから一意的に復元される（Turaev's reconstruction）．つまり，グリーム付きのシャドウは境界付き 4 次元多様体の表示を与える．この 4 次元多様体の境界が $\#_n(S^2 \times S^1)$ と微分同相ならば，それを閉 4 次元多様体の表示と見做すこともできるが，本稿では境界付き 4 次元多様体のみを扱う．

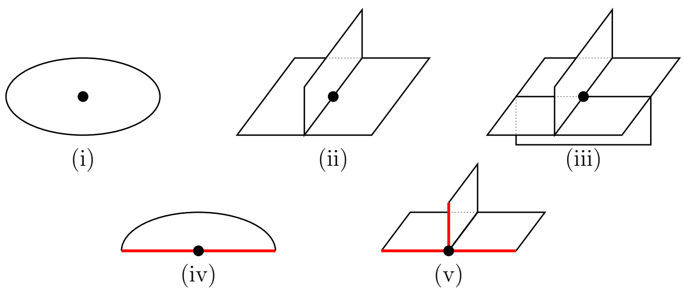


図 1. 単純多面体の局所モデル

シャドウ X の部分多面体 Y は 4 次元多様体 W に埋め込まれた多面体ということになるので，その補空間 $W \setminus Y$ を考えることができる．具体的な研究対象としては，例え

E-mails: (*) ishikawa@keio.jp　(†) ykoda@hiroshima-u.ac.jp　(‡) naoe@math.chuo-u.ac.jp

本研究は科研費（課題番号:JP17H06128, JP19K03499, JP20K03588, JP20K03614, JP20K14316, JP21H00978, JPJSBP120219602）の助成を受けたものである．

ば，複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ 内の平面曲線の補空間が挙げられる．$\mathbb{C}^2$ 内の半径の十分大きい 4 次元球体 B^4 を一つ選び，平面曲線 $C=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid f(z,w)=0\}$ を B^4 内で固定したまま B^4 の境界から縮約を行うことで，$B^4\cap C$ を部分多面体とするシャドウを構成する．ここで $f(z,w)$ は 2 変数多項式である．平面曲線の補空間の基本群の研究は古くからあり，一般次元の代数多様体の補空間の基本群の研究とも関連して，多くのことが知られている．例えば，Zariski が発見した同じ特異点をもつが位相型が異なる 2 つの平面曲線（いわゆる Zariski pair）では，位相型が異なることを証明する道具として，補空間の基本群が使われている [12].

本稿は早稲田大学での研究集会「結び目の数理 IV」において発表した内容の報告であるが，そこでは円板上にアニュラスを貼り付けて得られる可縮なシャドウに対して，その部分多面体の 4 次元多様体内での補空間の基本群の計算方法について紹介した．このシャドウは collapsible であることから，扱っている 4 次元多様体は 4 次元球体のみということになる．シャドウの形が限定的であるため，恐らくは，上述の Zariski pair はこの枠組みには入っていない．それでも，平面曲線特異点の特異ファイバーやミルナーファイバー，複素化された実直線配置をこのクラスのシャドウにより実現できるので，それなりに広いクラスに対して適用可能な議論となっている．それらの補空間の基本群を Wirtinger 表示と同じ感覚で計算できるというのが，早稲田大学での講演の主旨である．また，グリームをうまく選ぶと絡み目補空間の基本群の Wirtinger 表示が得られることも確認できる．その意味では，今回の結果は絡み目補空間の基本群も含む話となっている．本稿の定理 4.1 が主結果であるが，基本群の表示を正確に説明するためには多少の準備が必要で，本稿ではかなり省略して説明している．詳細については論文 [6] を参照されたい．

2. 平面曲線特異点

$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ を原点に孤立特異点をもつ多項式写像とし，$f(0,0)=0$ と仮定しておく．図 2 の左図が $f(z,w)=z^2-w^2$，右図が $f(z,w)=z^3-w^2$ で与えられる多項式写像の原点における特異点を描いた図である．左図の特異点のことを（複素 2 変数写像の）**モース特異点**という．これらの図は実 2 次元の平面 $\mathbb{R}^2$ 上の図であるが，多項式写像は $\mathbb{C}^2$ からの写像であり，虚軸方向の情報が描かれていないことに注意して欲しい．特異点を中心とする円は $\mathbb{R}^2$ 上の円板 (disk) を表しているが，同時に，$\mathbb{C}^2$ 上では 4 次元球体 B^4_ε を表している．この B^4_ε を**ミルナー球体** (Milnor ball)，その境界である 3 次元球面 S^3_ε を**ミルナー球面** (Milnor sphere) という．ここで $\varepsilon>0$ は球体の半径を表し，十分小さいと仮定している．特異曲線 $f^{-1}(0)=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid f(z,w)=0\}$ と S^3_ε の交わり $S^3_\varepsilon\cap f^{-1}(0)$ は，その横断性から 1 次元多様体となる．つまり，3 次元球面 S^3_ε 内の絡み目となる．これを**特異点のリンク**という．図 2 の左図の特異点のリンクはホップリンクであり，右図の特異点のリンクは三葉結び目 (trefoil) である．組 $(B^4_\varepsilon, B^4_\varepsilon\cap f^{-1}(0))$ は組 $(S^3_\varepsilon, S^3_\varepsilon\cap f^{-1}(0))$ の錐 (cone) と同相であることが知られている [8]．つまり，特異点の位相的な形を知りたけれ

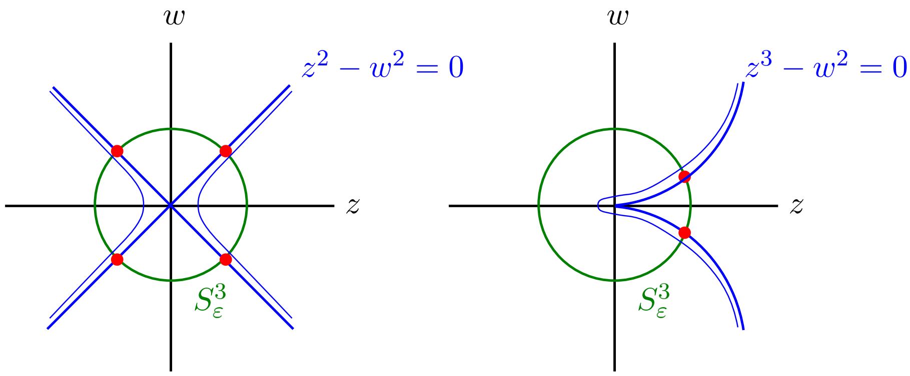


図 2. 平面曲線特異点の例

ば，特異点のリンクを調べればよいことになる．この意味で，特異点のリンクは重要な研究対象となる．

特異点を定める多項式写像を微小変形することで，特異点をより簡単な特異点に分解することを考える．図 3 では $f_t(z,w) = z^3 + tz^2 - w^2$ という形の，多項式写像の変数 $t \in \mathbb{R}$ による変形を考えている．$t = 0$ のときが左図で，これは図 2 の右図で紹介した特異点

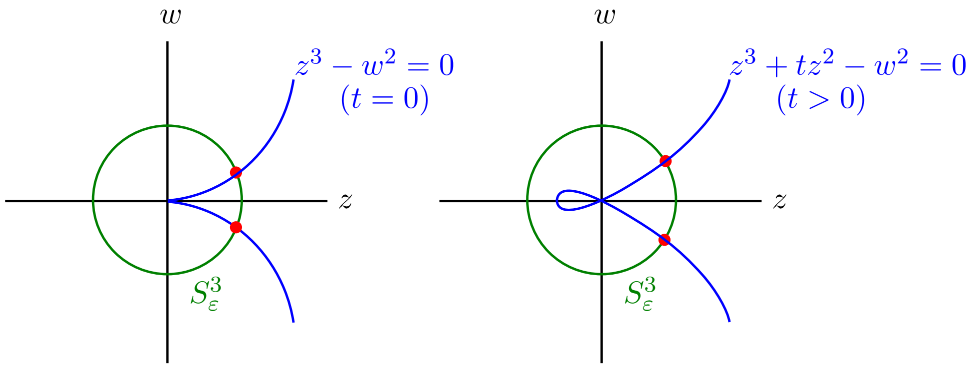


図 3. 実モース化の例

である．t を正に少し動かすと，右図のような曲線が得られる．ここで $t > 0$ は曲線の変化がミルナー球体に収まるように，十分小さく選んでおく必要がある．$t = 0$ のときに原点にあった特異点は，$t > 0$ において，原点の 2 重点と，その左側の曲線が囲っている円板領域の中心にある特異点の 2 つの特異点に分裂する．これらの特異点はモース特異点であり，この変形をモース化という．三葉結び目のザイフェルト曲面の 1 次元ホモロジー群の階数は 2 であるが，モース化を行ったとき，そこに現れる特異点の数は常にこの階数と一致する．図 3 の例の場合は，それらの特異点を，2 重点あるいは曲線が囲む領域として認識することができる．このような変形のことを平面曲線特異点の**実モース化** (real morsification) という．実モース化に関しては次の事実が知られている．

定理 2.1 (A'Campo [1, 2], Gusein-Zade [3, 4, 5])**.** 任意の平面曲線孤立特異点に対し，実モース化が存在する．

実モース化の曲線からモース特異点の消滅サイクル (vanishing cycle) たちの交差を読み取ることができ，そこから特異点近傍にあるファイバー束（ミルナー束）のモノドロミー行列を書き出し，アレクサンダー多項式を計算したりできる．特異点のそれぞれの性質の視覚的な説明を可能にする面白い結果である．

3. 円板上にはめ込まれた曲線により表示されるシャドウ

W を境界をもつコンパクトで滑らかな 4 次元多様体で，0-ハンドル，1-ハンドル，2-ハンドルのみで構成できるものとする．L をその境界 ∂W 内の絡み目とする．多面体が図 1 の局所モデルしか持たないとき，これを**単純多面体** (simple polyhedron) という．X を W に局所平坦に埋め込まれた単純多面体で，$\partial X = L \subset \partial W$ を満たすものとする．縮約により W から X が得られるとき，X を組 (W, L) の**シャドウ** (shadow) という．

本稿では 4 次元球体のシャドウを扱うが，さらにその中でも非常に特別な形をしたものだけを考える．

定義 3.1. 単純多面体 X について，X 内の円板 D で，$X \setminus D$ が境界 ∂D と交わらない半開アニュラス $S^1 \times (0, 1]$ の有限個の非交和 (disjoint union) となるものが存在するとき，X は**はめ込み曲線表示** (immersed curve presentation) をもつという．

別の言い方をすると，はめ込み曲線表示をもつ単純多面体 X は，円板上に描かれた一般的 (generic) にはめ込まれた曲線たちに沿ってアニュラスたちを貼り付けて得られる可縮な多面体である（図 4 を参照）．曲線は一般的にはめ込まれているため横断的に交わる 2 重点しか持たず，よって X は単純多面体となる．

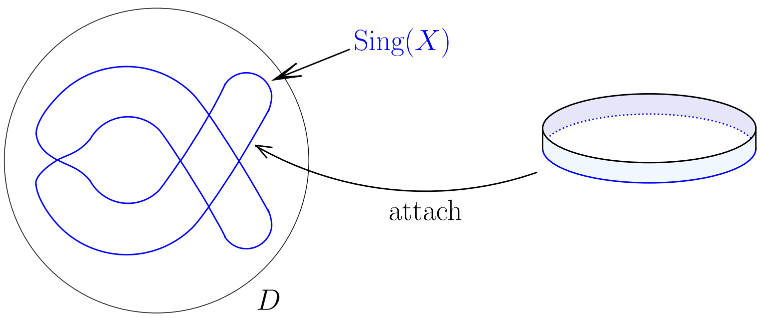


図 4. はめ込み曲線表示をもつ単純多面体

論文 [7] において，ディバイドに対して二重化 (doubling) を行い，その領域に図 5 のようにグリームを配置すると，ディバイドのファイバー曲面のミルナー球体への埋め込みの様子が明確に記述できることを示している．図の a, b, c はそれぞれ $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 0$

である．色の塗られた部分と $X \setminus D$ の半開アニュラスたちの和集合がファイバー曲面となる．$b = -1$ はその位置にあるモース特異点に対応するフレーミングが -1 の 2-ハンドルの -1 に対応している．このラベル b のついた領域に色を塗ることは，そのモース特異点の消滅サイクルを一点に潰すことに対応し，左図の表す特異ファイバーの表示と見做すことができる．

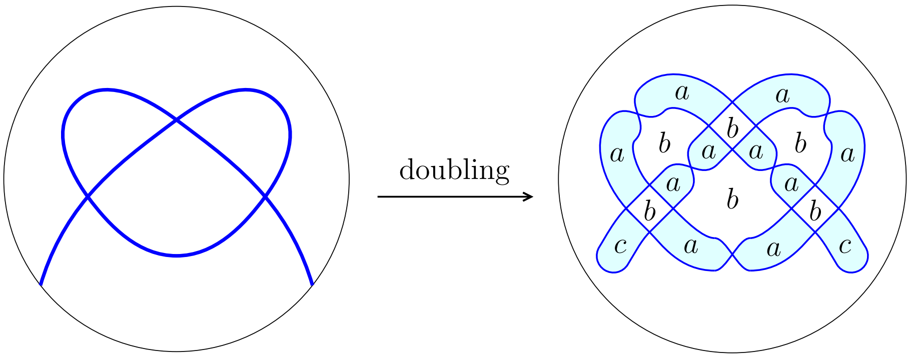


図 5. ディバイドのファイバー曲面のはめ込み曲線による表示

4. 基本群の表示

X をはめ込み曲線表示をもつ多面体とし，C_X をそのはめ込まれた曲線とする．C_X の各交点に上下の情報を任意に入れる．この絡み目図式を D_X とする．C_X の曲線に囲まれた各領域 R に対し，その淵に沿って一周したときの各コーナーにおける図 6 の左図に書かれている局所寄与 (local contribution) の総和を $c(R)$ とする．右図の絡み目図式の場合，図に書き込まれた整数が $c(R)$ となる．左図は Turaev の本 [11] の 408 ページにも描かれている由緒正しいルールである．

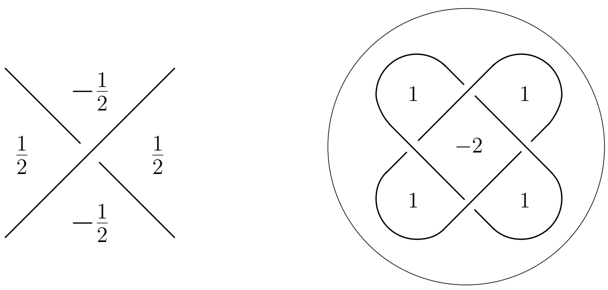


図 6. 領域の局所寄与の総和 $c(R)$

論文 [6] にあるいくつかの定理のうち，シャドウの部分多面体が ∂D と隣接する領域を含まない場合を扱ったものが次の定理である．本稿でターゲットとしている部分多面体は

すべてこの条件を満たしている．基本群の計算も多少（というか，かなり）簡略化されるので，リーズナブルな条件である．

定理 4.1 (石川-古宇田-直江 [6]). X をはめ込み曲線表示をもつコンパクト 4 次元多様体のシャドウとし，$\mathfrak{gl}$ をそのグリームとする．C_X を X のはめ込み曲線表示の曲線とし，D_X を C_X の各交点に上下の情報を任意に入れて得られる絡み目図式とする．Y を X の部分多面体とし，$X \setminus D$ の半開アニュラスたちをすべて含み，∂D と隣接する領域は含まないと仮定する．A を C_X の **reduced system of cutting trees**（後述）とする．このとき，Y の B^4 内での補空間の基本群は

$$\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \mid s_1, \ldots, s_{n'}, t_1, \ldots, t_{n''} \rangle$$

と表示される．ここで，$x_1, \ldots, x_n$ は $D_X \setminus A$ の各弧のメリディアン，$y_1, \ldots, y_m$ は $Y \setminus A$ の領域のメリディアンである．また，関係式は

(i) $s_i = y_{r_i} x_i y_{l_i}^{-1}$
(ii) $t_j = x_{b_j}^{-1} \gamma_j x_{f_j} \gamma_j^{-1}$
(iii) $\gamma_j = y_{j_k}^{\mathfrak{gl}(R_{j_k})-c(R_{j_k})} \cdots y_{j_2}^{\mathfrak{gl}(R_{j_2})-c(R_{j_2})} y_{j_1}^{\mathfrak{gl}(R_{j_1})-c(R_{j_1})}$

で与えられる．

Reduced system of cutting trees の定義については論文 [6] を参照されたい．簡単に言うと，基本群の元を読む際に，まず C_X 上のどこかに点を打って基点とし，次に基点からメリディアンの位置までのパスを決める必要がある．そこで，C_X と横断的に交わる弧をいくつか描いて，パスはその弧は通過しないというルールを作っておく．D 内でのこれらの弧の補集合を単連結にしたいので，各弧の端点の一方は ∂D 上にあるとしておく．弧の代わりに木 (tree) を描いて対応することもでき，それをいろいろな場所に描くので，system of cutting trees と呼んでいる．図 7 の実線 A と 3 つの点線の集まりが system of cutting trees である．定理の「∂D と隣接する領域は含まない」という仮定の下では，図 7 の点線のような，C_X とは一度しか交わらない弧は無視してよいことが分かるので，それらを除いたものが reduced system of cutting trees である．また，関係式 (iii) の $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}$ についても論文 [6] を参照されたい．

関係式 (iii) について，$\mathfrak{gl}(R) = c(R)$ が Y のすべての領域 R で成り立っていると $\gamma_j = 1$ となることが分かる．これを (ii) に代入すると $x_{f_j} = x_{b_j}$ が得られる．つまり，A により分割された D_X の弧のメリディアンは，実は基本群の同じ元になることが分かる．さらに次の結果が得られる．

定理 4.2 (石川-古宇田-直江 [6]). $\mathfrak{gl}(R) = c(R)$ が Y のすべての領域 R で成り立つ場合は，定理 4.1 の基本群の表示を整理すると，絡み目図式 D_X の基本群の Wirtinger 表示が得られる．

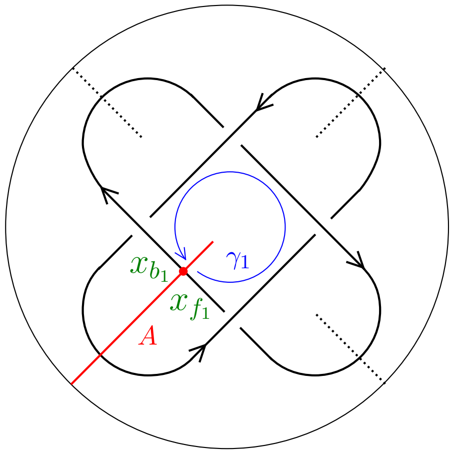


図 7. Reduced system of cutting trees

5. 具体例

5.1. モース特異点の特異ファイバー. $f(z,w)=z^2-w^2$ で与えられる多項式写像の原点における特異点を考える．図 8 の左図のように，$f(z,w)=0$ で与えられる平面曲線は原点で交わる 2 枚の複素平面である．それを二重化してはめ込み曲線表示を作り，中央の図のようにグリームを定める．ここで，Y を図の塗られた部分と $X\setminus D$ である半開アニュラスたちの和集合とする．これは特異ファイバーに対応する．このとき，$B^4\setminus Y$ の基本群は，定理 4.1 を用いると右図のようにして計算される．ここでは，まず右上と右下にある D_X の弧のメリディアンをそれぞれ x,y とし，それらに対して定理 4.1 の関係式 (i) を適用していくことで，図のメリディアンたちを埋めていく．次に，中央の四角形領域 R について，$\mathfrak{gl}(R)=-1$, $c(R)=2$ より関係式 (iii) は $\gamma_1=(xy^{-1})^{-1-(-2)}=xy^{-1}$ となる．よって，関係式 (ii) より

$$xyx^{-1}=(xy^{-1})(yx^{-1}yxy^{-1})(xy^{-1})^{-1}=xy^{-1}yx^{-1}yxy^{-1}yx^{-1}=y,$$

つまり，$xy=yx$ が得られる．よって，生成元は x,y であり，それらは可換なので，$\pi_1(B^4\setminus Y)\cong\mathbb{Z}\langle x\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle y\rangle$ が従う．これはモース特異点の特異ファイバーのミルナー球体内での補空間の基本群であり，同時に，特異点のリンクであるホップリンクの補空間の基本群でもある．

5.2. モース特異点のミルナーファイバー. 先程の節と同じはめ込み曲線表示を考える．ただし今回は Y を図 9 の塗られた部分と $X\setminus D$ である半開アニュラスたちの和集合とする．このとき，基本群の計算は先程と全く同じになるが，中央の四角形領域は Y に含まれていないため，そのメリディアンは $B^4\setminus Y$ では自明となる．よって $xy^{-1}=1$ という関係式が加わる．前節の基本群の計算結果に $x=y$ を加えると，$\pi_1(B^4\setminus Y)\cong\mathbb{Z}$ となる．これはモース特異点のファイバー曲面（いわゆる，ミルナーファイバー）の B^4_ε 内での補空間

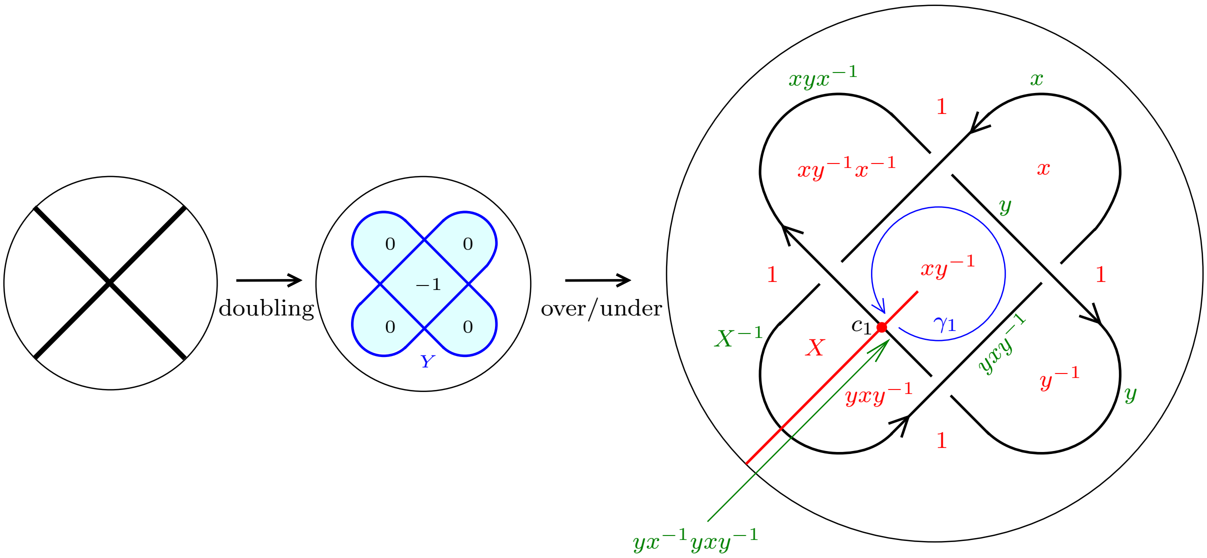


図 8. モース特異点の特異ファイバーのはめ込み曲線表示とその補空間の基本群の計算

の基本群であり，この基本群はファイバー曲面のメリディアンにより生成される．Milnor の本 [8] で示されているように，このミルナーファイバーはベクトル場を作ることで，特異点のリンクを固定したまま $\partial B_\varepsilon^4 = S_\varepsilon^3$ 内に押し付けることができる．この S_ε^3 内の曲面はホップリンクのファイバー曲面であり，つまりアニュラスである．実際，図 9 のはめ込み曲線表示に半開アニュラス 2 つを貼って Y を作ると，4 次元球体にアニュラスが埋め込まれている様子が確認できる．

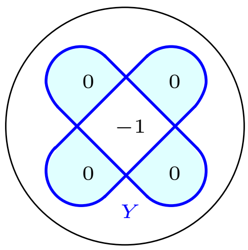


図 9. モース特異点のミルナーファイバーのはめ込み曲線表示

5.3. **$f(z,w) = z^3 - w^2$ の特異点の特異ファイバー．** $f(z,w) = z^3 - w^2$ で与えられる多項式写像の原点における特異点を考える．特異ファイバーの補空間の基本群の計算方法は先程と同様で，図 10 のようになる．さらに $xy^{-1}x^{-1}y$ と書かれている二面体領域から $\gamma_1 = (xy^{-1}x^{-1}y)^{-1-(-1)} = 1$ という式が得られ，定理 4.1 の関係式 (ii) から $xyx^{-1} = y^{-1}xy$

が得られる．結果，基本群は $\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ となる．これは三葉結び目補空間の基本群である．

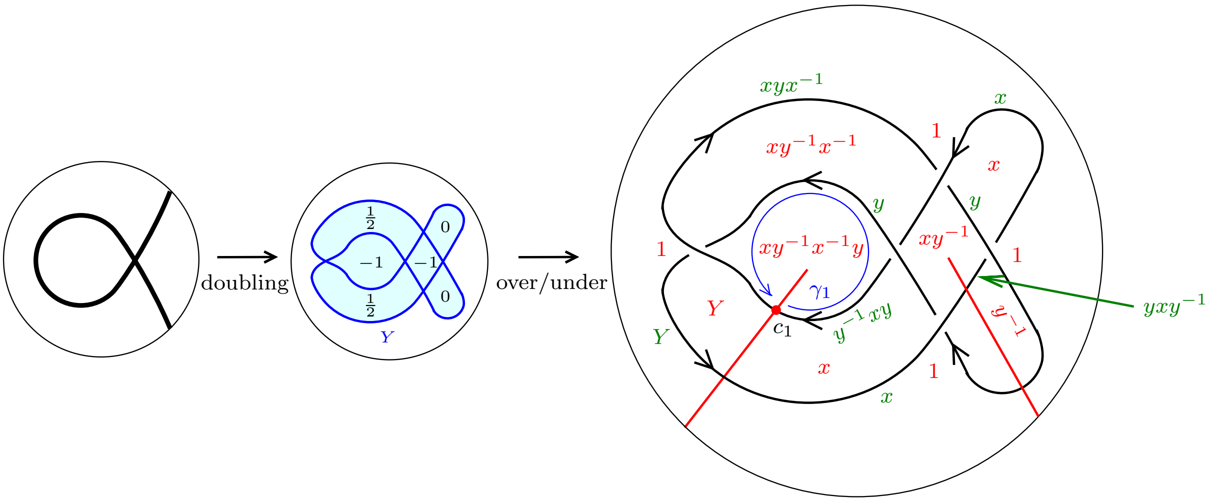


図 10．$f(z, w) = z^3 - w^2$ の特異点の特異ファイバーのはめ込み曲線表示とその補空間の基本群の計算

5.4. **複素化された実直線配置．** 最後に，複素化された実直線配置の $\mathbb{C}^2$ 内での補空間の基本群の計算を紹介する．複素化された実直線配置については，本研究集会で北海道大学の菅原朔見氏が講演しているので，その報告集の記事を参照されたい．

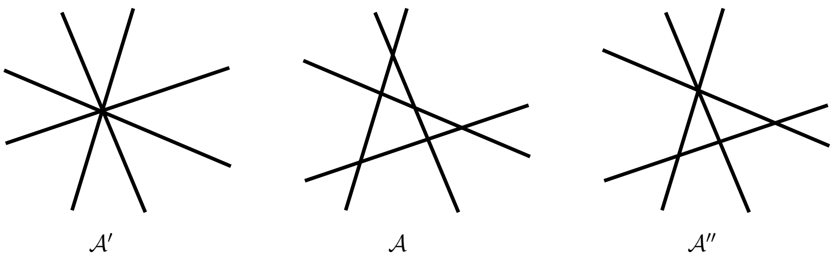


図 11．実直線配置 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}''$

図 11 にある 3 つの実直線配置を左からそれぞれ $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}''$ とし，それらを複素化して得られる $\mathbb{C}^2$ 内の直線配置をそれぞれ $\mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{A}''_{\mathbb{C}}$ とする．

図 12 のように，中央にある実直線配置 $\mathcal{A}$ に対して二重化を行う．グリームは図 5 のルールに従って設定する．Y として，∂D と隣接しないすべての領域を選ぶ．$Y \cap D$ のすべての領域を一点に潰すことを考えると，$B^4 \setminus Y$ は $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$ （$\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ ではない！）とホモトピー同値であることが分かる．定理 4.1 により基本群を計算すると

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}) \cong \langle x, y, \mathcal{Z}, \mathcal{W} \mid x\mathcal{Z}y\mathcal{W} = \mathcal{Z}y\mathcal{W}x = y\mathcal{W}x\mathcal{Z} = \mathcal{W}x\mathcal{Z}y \rangle$$

となる．x, y, z, w は $\mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$ の 4 枚の複素平面のメリディアンであり，$\mathcal{Z}, \mathcal{W}$ はそれぞれ z, w と共役な元である．求めた基本群は $\mathbb{C}^2$ 内の原点で交わる 4 枚の複素平面の補空間の基本群，つまり，平面曲線 $f(z, w) = z^4 - w^4 = 0$ の補空間の基本群であるから，特に，$(4, 4)$-トーラスリンク補空間の基本群とも同型である．

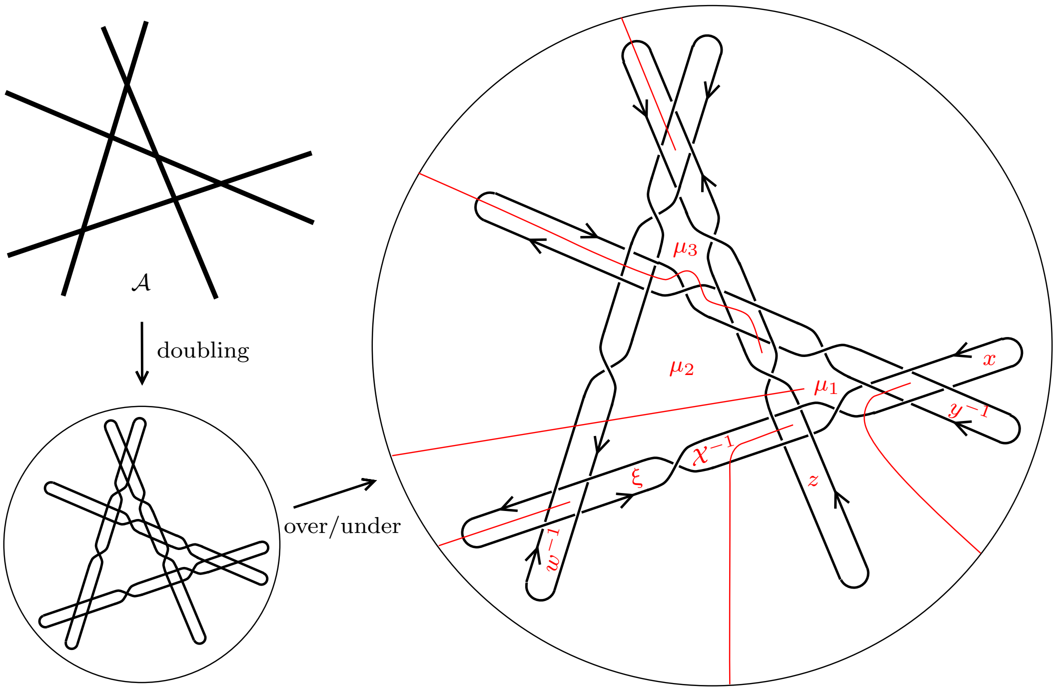


図 12．複素化された実直線配置のはめ込み曲線表示

次に $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ の基本群を計算する．$\mathcal{A}$ には直線に囲まれた領域が 3 つあるが，その 3 つの領域に対応するシャドウの領域（図 12 の μ_1, μ_2, μ_3 が書かれた領域）は Y に含めないことにする．つまり，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ という関係式を加える．この部分多面体 Y は $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ に対応し，定理 4.1 を使って基本群を計算すると，

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}\langle x\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle y\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle z\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle w\rangle$$

が得られる．$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ は一般的な位置にある 4 枚の複素平面であり，複素平面同士の交点はモース特異点であることから，それらのメリディアンが可換であることが分かる．よって，すべてのメリディアンが可換となるため，基本群は $\mathbb{Z}^4$ となる．

最後に $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}''_{\mathbb{C}}$ の基本群を計算する．この場合は μ_1 に対応する領域は Y に含める必要があるので，$\mu_2 = \mu_3 = 1$ という関係式を加えればよい．計算すると，基本群は

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}''_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}\langle x\rangle \oplus \langle y, z, w \mid wzy = ywz = zyw\rangle$$

となる．

複素化された実直線配置の補空間の基本群については，Randell の 1985 年の論文 [9, 10] で簡潔な表示が示されている．今回の計算結果はその簡潔な表示をシャドウを使ってかなり遠回りに計算したもので，効率の良いものとは決して言えない．一方，ここで紹介した 3 つの直線配置の補空間の基本群の計算例から分かるように，領域のメリディアンのワードを関係式に組み込むことで直線配置の補空間の計算同士を関連付けることができる．定理 4.1 を直線配置（あるいはディバイド）に特化した形に書き換え，より使い易い状態にして考察を進めると，新しいものが見えてくるのではないかと期待している．

参考文献

[1] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.

[2] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes II*, Actes du Congrès International des Mathematiciens, Vancouver, 1974, 395–404.

[3] S.M. Gusein-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 10–13.

[4] S.M. Gusein-Zade, *Dynkin diagrams of singularities of functions of two variables*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 295–300.

[5] S.M. Gusein-Zade, *The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*, Russian Math. Surveys **32** (1977), 23–69.

[6] M. Ishikawa, Y. Koda, H. Naoe, *Presentation of the fundamental groups of complements of shadows*, preprint, arXiv:2110.02431 [math.GT]

[7] M. Ishikawa, H. Naoe, Milnor fibration, A'Campo's divide and Turaev's shadow, Singularities — Kagoshima 2017, Proceedings of the 5th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, World Scientific Publishing, 2020, pp. 71–93.

[8] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo 1968.

[9] R. Randell, *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes*, Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108.

[10] R. Randell, Correction: "The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes", [Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108]. Invent. Math. **80** (1985), no. 3, 467–468.

[11] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[12] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), no. 2, 305–328.